ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2018. Том 25, № 4. С. 131–148

УДК 519.16 DOI: 10.17377/daio.2018.25.618

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ЗАДАЧИ О ПОДМНОЖЕСТВЕ ВЕКТОРОВ С СУММОЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ *)

В. В. Шенмайер

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: shenmaier@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача выбора подмножества векторов с суммой максимальной длины. Дан ответ на вопрос о существовании полиномиальных приближённых алгоритмов, позволяющих решать эту задачу с константной точностью при нефиксированной размерности пространства. Установлено, что в случае евклидовых пространств рассматриваемая задача разрешима за полиномиальное время с точностью $\sqrt{\alpha}$, где $\alpha = 2/\pi$, и при условии $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не существует полиномиальных алгоритмов с лучшей точностью. Показано, что в случае пространств с нормой ℓ_p задача APX-полна, если $p \in [1, 2]$, и не аппроксимируема с константной точностью, если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ и $p \in (2, \infty)$. Табл. 1, библиогр. 21.

Ключевые слова: суммарный вектор, поиск подмножества векторов, приближённый алгоритм, порог неприближаемости.

Введение

Предметом настоящего исследования является задача о суммировании векторов, которая формулируется следующим образом.

Задача LVS (Longest Vector Sum). *Пусть X — конечное множество векторов в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$. Найти подмножество $S \subseteq X$, на котором достигается максимум функции*

$$f(S) = \Big\| \sum_{x \in S} x \Big\|.$$

Эта задача имеет приложения в таких областях, как распознавание образов, фильтрация сигналов, политический анализ (см. содержательные примеры, приведённые в [5]).

*) Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16–11–10041).

Известные результаты. В случае евклидовой нормы рассматриваемая задача NP-трудна в сильном смысле [3]. Более того, если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, то для любой стандартной нормы ℓ_p, $p \in [1, \infty)$, и всякого $\varepsilon > 0$ задача LVS не может быть решена за полиномиальное время с точностью $(16/17)^{1/p} + \varepsilon$ [6, 19].

В случае полиэдральной нормы решение задачи LVS может быть найдено за время $O(Fdn)$, где F — число фасет политопа единичного шара нормы [2]. Отсюда следует полиномиальная разрешимость задачи LVS в случае нормы ℓ_∞.

Для произвольной нормы задача LVS является частным случаем задачи Shaped Partition [13], в которой требуется найти разбиение входного множества векторов в $\mathbb{R}^d$ на q подмножеств $S_1, \ldots, S_q$ с максимальным значением величины $c\big(\sum\limits_{x \in S_1} x, \ldots, \sum\limits_{x \in S_q} x\big)$, где c — любая заданная с помощью оракула выпуклая функция от q векторных переменных. Как показано в [13, 17], при фиксированных d и q эта задача разрешима за полиномиальное время, откуда следует полиномиальная разрешимость задачи LVS в случае любого нормированного пространства фиксированной размерности.

Наилучший известный алгоритм решения задачи LVS имеет трудоёмкость $O(dn^{d-1} \log n)$ [19]. Алгоритм основан на идее перебора регионов в разбиении пространства гиперплоскостями, ортогональными входным векторам. Подобная идея используется алгоритмами из [2, 5] для случая евклидовой нормы.

Среди приближённых алгоритмов отметим детерминированный алгоритм из [1] и рандомизированный алгоритм из [11], позволяющие находить $(1-\varepsilon)$-приближённое решение задачи LVS с евклидовой нормой за время $O\big(d^2\big(1 + \sqrt{\frac{d-1}{2\varepsilon}}\big)^{d-1} n\big)$ и $O(d^{3/2}(2\varepsilon - \varepsilon^2)^{-(d-1)/2}\, n)$ соответственно. В [6, 20] предложен рандомизированный $(1-\varepsilon)$-приближённый алгоритм для случая произвольной нормы с трудоёмкостью порядка $O\big(d^{O(1)}\big(1 + \frac{2}{\varepsilon}\big)^d n\big)$.

Результаты статьи. Отметим, что трудоёмкость всех известных алгоритмов для задачи LVS экспоненциально зависит от размерности пространства. В связи с этим наиболее интересным вопросом, относящимся к сложности этой задачи, представляется вопрос её аппроксимируемости за полиномиальное время. В статье получен ответ на этот вопрос для каждой из норм ℓ_p, $p \in [1, \infty)$. Показано, что в случае евклидовой нормы существует полиномиальный алгоритм приближённого решения задачи LVS с точностью $\sqrt{2/\pi} \approx 0.798$ и при условии $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не существует по-

линомиальных алгоритмов с лучшей константной точностью. Установлено, что в случае нормы ℓ_p задача APX-полна, если $p \in [1, 2]$, и не аппроксимируема с константной точностью, если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ и $p \in (2, \infty)$. Полученные оценки точности аппроксимации и пороги неприближаемости для задачи LVS в случае различных норм представлены в табл. 1.

Таблица 1

Оценки точности аппроксимации и пороги неприближаемости для задачи LVS

Норма $\|.\|$	Точность аппроксимации	Порог неприближаемости
ℓ_2	$\sqrt{2/\pi} \approx 0.798$	$\sqrt{2/\pi} + \varepsilon$
ℓ_1	$2\ln(1+\sqrt{2})/\pi \approx 0.561$	$2/\pi + \varepsilon \approx 0.637 + \varepsilon$
ℓ_p, $p \in (1, 2)$	$2\sqrt{3}/\pi - 2/3 \approx 0.436$	$(16/17)^{1/p} + \varepsilon$ [6, 19] $\sqrt{2/\pi} + \varepsilon$, если $\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{RP}$
ℓ_p, $p \in (2, \infty)$	$\max\{\sqrt{2/\pi}\, d^{1/p-1/2},\, d^{-1/p}\}$	$2^{-\log^{1-\varepsilon} n}$, если $\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{DTIME}(2^{\log^{O(1)} n})$

Результаты, связанные с существованием и оценками точности алгоритмов приближённого решения задачи LVS с нормой ℓ_p, $p \in [1, 2]$, получены путём сведения этой задачи к задаче вычисления матричной нормы специального вида, определённой в разд. 1, а также к двум её частным случаям: задаче Гротендика и малой задаче Гротендика. Усиленные пороги неприближаемости в случае $p \in \{1, 2\}$ и утверждения о неаппроксимируемости в случае $p \in (2, \infty)$ установлены путём обратного сведения указанных задач к задаче LVS. Порог неприближаемости $\sqrt{2/\pi} + \varepsilon$ для случая $p \in (1, 2)$ установлен с использованием теоремы Дворецкого для норм ℓ_p. Оценка точности аппроксимации в случае $p \in (2, \infty)$ следует из соотношений эквивалентности норм ℓ_p в d-мерном пространстве.

1. Матричные нормы и задачи Гротендика

Обозначим через $\|.\|_p$ значения векторной нормы ℓ_p, $p \in [1, \infty]$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x(i)|^p\right)^{1/p}, \quad \text{если } p < \infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} |x(i)|,$$

где m — размерность вектора x, а $x(i)$ — i-я координата. Рассмотрим задачу вычисления матричной нормы, индуцированной заданной векторной нормой и нормой ℓ_∞.

Задача MNC (Matrix Norm Computation). *Пусть A — вещественная $(d \times n)$-матрица и $\|.\|$ — норма в пространстве $\mathbb{R}^d$. Найти максимум $\mu(A)$ отношения $\frac{\|Ax\|}{\|x\|_\infty}$ по всем ненулевым векторам $x \in \mathbb{R}^n$.*

Для произвольной векторной нормы ϕ через MNC(ϕ) обозначим частный случай задачи MNC, в котором заданной нормой $\|.\|$ является норма ϕ. В случае нормы ℓ_p индуцированную матричную норму $\mu(.)$ обозначим через $\|.\|_{\infty \mapsto p}$. Ниже будет показано, что задача MNC(ℓ_p) является обобщением хорошо изученной (см. [7, 8, 12]) задачи Гротендика[1)] и малой задачи Гротендика.

Задача Гротендика. *Пусть A — вещественная $(d \times n)$-матрица. Найти максимум* Gr(A) *билинейной формы $y^\top Ax$ по всем векторам $y \in \{1, -1\}^d$, $x \in \{1, -1\}^n$.*

Определение 1. Вещественная симметричная $(n \times n)$-матрица A называется *положительно полуопределённой*, если $x^\top Ax \geqslant 0$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$.

Малая задача Гротендика. *Пусть A — вещественная симметричная положительно полуопределённая $(n \times n)$-матрица. Найти максимум* LGr(A) *квадратичной формы $x^\top Ax$ по всем векторам $x \in \{1, -1\}^n$.*

Докажем утверждения, описывающие простые связи между задачей MNC, задачей Гротендика и малой задачей Гротендика.

Лемма 1. *Для всякого $\alpha \in (0, 1]$ полиномиальный α-приближённый алгоритм для задачи Гротендика существует тогда и только тогда, когда такой алгоритм существует для задачи* MNC(ℓ_1).

Для доказательства леммы 1 нам потребуется

Лемма 2. *Для всякой выпуклой функции $c \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ со свойством $\|x\|_\infty \leqslant 1$ существует и может быть найден за время $O(n)$ такой вектор $y \in \{1, -1\}^n$, что $c(y) \geqslant c(x)$.*

Доказательство. Обозначим через x^i_+ и x^i_- векторы, получаемые из x заменой координаты $x(i)$ на 1 и -1 соответственно, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Поскольку вектор x лежит на отрезке $[x^i_+, x^i_-]$, с учётом выпуклости функции c получаем, что либо $c(x^i_+) \geqslant c(x)$, либо $c(x^i_-) \geqslant c(x)$. Таким образом, после замены вектора x лучшим из векторов x^i_+, x^i_- значение функции c не уменьшится. Последовательно выполнив такие замены для всех $i = 1, \ldots, n$, получим искомый вектор y. Лемма 2 доказана.

[1)] Александр Гротендик — французский математик, автор первой работы, посвящённой указанной задаче [12].

Доказательство леммы 1. Из аксиомы однородности нормы следует, что $\|A\|_{\infty\mapsto 1} = \max\{\|Ax\|_1 \mid \|x\|_\infty = 1\}$. Отсюда с учётом выпуклости нормы и леммы 2 имеем $\|A\|_{\infty\mapsto 1} = \max\{\|Ax\|_1 \mid x \in \{1,-1\}^n\}$.

Для произвольного вектора $v \in \mathbb{R}^d$ через sign_v обозначим вектор из $\{1,-1\}^d$, определяемый по правилу

$$\mathrm{sign}_v(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } v(i) \geqslant 0, \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\|Ax\|_1 = \mathrm{sign}_{Ax}^\top Ax = \max\{y^\top Ax \mid y \in \{1,-1\}^d\}$, откуда следует, что $\|A\|_{\infty\mapsto 1} = Gr(A)$.

Пусть вектор $x \in \mathbb{R}^n$ является α-приближённым решением задачи MNC(ℓ_1) на матрице A, т. е. после нормировки этого вектора выполнены соотношения $\|x\|_\infty = 1$ и $\|Ax\|_1 \geqslant \alpha\|A\|_{\infty\mapsto 1}$. Согласно лемме 2 за линейное время может быть найден вектор $z \in \{1,-1\}^n$ такой, что $\|Az\|_1 \geqslant \|Ax\|_1$. Тогда

$$\mathrm{sign}_{Az}^\top Az = \|Az\|_1 \geqslant \|Ax\|_1 \geqslant \alpha\|A\|_{\infty\mapsto 1} = \alpha \mathrm{Gr}(A).$$

Следовательно, пара векторов (sign_{Az}, z) является α-приближённым решением задачи Гротендика.

Пусть теперь векторы $y \in \{1,-1\}^d$, $x \in \{1,-1\}^n$ образуют α-приближённое решение задачи Гротендика на матрице A, т. е. справедливо неравенство $y^\top Ax \geqslant \alpha Gr(A)$. Тогда согласно вышесказанному имеем

$$\|Ax\|_1 = \mathrm{sign}_{Ax}^\top Ax \geqslant y^\top Ax \geqslant \alpha \mathrm{Gr}(A) = \alpha\|A\|_{\infty\mapsto 1}.$$

Отсюда следует, что вектор x является α-приближённым решением задачи MNC(ℓ_1). Лемма 1 доказана.

Лемма 3. *Для всякого $\alpha \in (0,1]$ полиномиальный α-приближённый алгоритм для малой задачи Гротендика существует тогда и только тогда, когда такой алгоритм существует для задачи Гротендика на симметричных положительно полуопределённых матрицах.*

Доказательство. Пусть A — симметричная положительно полуопределённая $(n \times n)$-матрица. Тогда A представима в виде $A = B^\top B$ для некоторой $(n \times n)$-матрицы B. Поскольку скалярное произведение векторов не превосходит произведения их евклидовых норм, для любых $y, x \in \{1,-1\}^n$ имеем $\|By\|_2\|Bx\|_2 \geqslant y^\top B^\top Bx$. Следовательно,

$$\max\{y^\top Ay, x^\top Ax\} = \max\left\{\|By\|_2^2, \|Bx\|_2^2\right\} \geqslant \|By\|_2\|Bx\|_2 \geqslant y^\top Ax,$$

откуда получаем $\max\limits_{x} x^\top Ax = \max\limits_{y,x} y^\top Ax$. Тем самым справедливо равенство $\mathrm{LGr}(A) = \mathrm{Gr}(A)$.

Пусть векторы $y, x \in \{1, -1\}^n$ образуют α-приближённое решение задачи Гротендика на матрице A, т. е. $y^\top Ax \geqslant \alpha\mathrm{Gr}(A)$. Тогда согласно доказанному выше имеет место цепочка неравенств

$$\max\{y^\top Ay, x^\top Ax\} \geqslant y^\top Ax \geqslant \alpha\mathrm{Gr}(A) = \alpha\mathrm{LGr}(A).$$

Отсюда следует, что один из векторов y, x является α-приближённым решением малой задачи Гротендика.

Пусть теперь вектор $x \in \{1, -1\}^n$ является α-приближённым решением малой задачи Гротендика на матрице A. Тогда в силу равенства $\mathrm{LGr}(A) = \mathrm{Gr}(A)$ имеем $x^\top Ax \geqslant \alpha\mathrm{Gr}(A)$. Следовательно, пара векторов (x, x) составляет α-приближённое решение задачи Гротендика. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для всякого $\alpha \in (0, 1]$ полиномиальный α-приближённый алгоритм для малой задачи Гротендика существует тогда и только тогда, когда существует $\sqrt{\alpha}$-приближённый алгоритм для задачи* $\mathrm{MNC}(\ell_2)$.

Доказательство. Пусть A — произвольная $(d \times n)$-матрица. В силу свойств однородности и выпуклости нормы имеем

$$\|A\|_{\infty\mapsto 2} = \max\{\|Ax\|_2 \mid \|x\|_\infty = 1\} = \max\{\|Ax\|_2 \mid x \in \{1, -1\}^n\}.$$

С другой стороны, $A^\top A$ — симметричная положительно полуопределённая матрица. С учётом того, что $\|Ax\|_2^2 = x^\top A^\top Ax$, отсюда получаем равенство $\|A\|_{\infty\mapsto 2}^2 = \mathrm{LGr}(A^\top A)$.

Пусть вектор $x \in \{1, -1\}^n$ — α-приближённое решение малой задачи Гротендика на матрице $A^\top A$. Тогда

$$\|Ax\|_2^2 = x^\top A^\top Ax \geqslant \alpha\mathrm{LGr}(A^\top A) = \alpha\|A\|_{\infty\mapsto 2}^2.$$

Следовательно, вектор x является $\sqrt{\alpha}$-приближённым решением задачи $\mathrm{MNC}(\ell_2)$ на матрице A.

Пусть теперь A — симметричная положительно полуопределённая $(n \times n)$-матрица. С помощью разложения Холецкого, реализуемого за время $O(n^3)$ (см. [10, разд. 2.3]), определим матрицу B, для которой выполнено равенство $A = B^\top B$. Далее найдём $\sqrt{\alpha}$-приближённое решение задачи $\mathrm{MNC}(\ell_2)$ на матрице B, т. е. вектор x, который после нормировки удовлетворяет свойствам $\|x\|_\infty = 1$ и $\|Bx\|_2 \geqslant \sqrt{\alpha}\|B\|_{\infty\mapsto 2}$. Согласно лемме 2 за линейное время может быть найден вектор $z \in \{1, -1\}^n$

со свойством $\|Bz\|_2 \geqslant \|Bx\|_2$. Тогда

$$z^\top Az = \|Bz\|_2^2 \geqslant \|Bx\|_2^2 \geqslant \alpha\|B\|_{\infty\mapsto 2}^2 = \alpha \mathrm{LGr}(B^\top B) = \alpha \mathrm{LGr}(A).$$

Следовательно, вектор z является α-приближённым решением малой задачи Гротендика на матрице A. Лемма 4 доказана.

Приведём некоторые известные факты, характеризующие сложность и аппроксимируемость задачи MNC и обеих задач Гротендика.

Факт 1 [9]**.** *Если* $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *задача* $\mathrm{MNC}(\ell_2)$ *не может быть решена за полиномиальное время с точностью* $\sqrt{2/\pi} + \varepsilon$.

Факт 2 [8]**.** *Для любого* $p \in (2, \infty)$ *задача* $\mathrm{MNC}(\ell_p)$ *не может быть решена за полиномиальное время с какой-либо константной точностью, если* $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, *и при любом* $\varepsilon > 0$ *не может быть решена за полиномиальное время с точностью* $2^{-\log^{1-\varepsilon} n}$, *если* $\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{DTIME}(2^{\log^{O(1)} n})$, *где* $\mathrm{DTIME}(t)$ *— класс задач, разрешимых на детерминированной машине Тьюринга за время* $O(t)$.

Факт 3 [15]**.** *Существует полиномиальный алгоритм приближённого решения малой задачи Гротендика с точностью* $2/\pi$.

Факт 4 [21, утверждение 1.5]**.** *Существует полиномиальный алгоритм приближённого решения задачи* $\mathrm{MNC}(\ell_p)$, $p \in [1, 2]$, *с точностью* $2\sqrt{3}/\pi - 2/3$.

Факт 5 [7]**.** *Существует полиномиальный алгоритм приближённого решения задачи Гротендика с точностью* $2\ln(1+\sqrt{2})/\pi$.

Приближённые алгоритмы, о которых говорится в фактах 3–5, основаны на технике полуопределённого программирования. Их трудоёмкость определяется временем решения соответствующих задач Semidefinite Programming (SDP). Факт 4 получен с использованием алгоритмических результатов из [16].

2. Эквивалентность задач LVS и MNC

Покажем, что для любой заданной нормы задача LVS сводится с сохранением точности приближённых алгоритмов к соответствующей задаче MNC, и наоборот.

Нам потребуется следующая эквивалентная (как будет показано ниже) постановка задачи LVS, в которой допускается наличие повторяющихся векторов во входе задачи.

Задача LVS$'$. *Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — векторы в нормированном пространстве $(\mathbb{R}^d, \|.\|)$. Найти подмножество индексов $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$, на котором достигается максимум функции*

$$f'(S) = \Big\| \sum_{i \in S} v_i \Big\|.$$

Для произвольной векторной нормы ϕ через LVS(ϕ) и LVS$'(\phi)$ обозначим частные случаи задач LVS и LVS$'$, в которых заданной нормой $\|.\|$ является норма ϕ.

Теорема 1. *Для всякого $\alpha \in (0, 1]$ и любой векторной нормы ϕ следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *существует полиномиальный алгоритм приближённого решения задачи* LVS(ϕ) *с точностью α;*

(2) *такой алгоритм существует для задачи* LVS$'(\phi)$;

(3) *такой алгоритм существует для задачи* MNC(ϕ).

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — векторы в пространстве $\mathbb{R}^d$, вход задачи LVS$'$. Без нарушения общности будем считать, что все эти векторы ненулевые. Построим множество векторов X (вход задачи LVS) следующим образом. Разобьём множество $\{1, \ldots, n\}$ на подмножества $S_1, \ldots, S_t$ такие, что любые входные векторы v_i и v_j сонаправлены тогда и только тогда, когда индексы i, j принадлежат одному и тому же подмножеству S_k. Тогда векторы $x_k = \sum\limits_{i \in S_k} v_i$, $k = 1, \ldots, t$, различны. Положим $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$.

Для произвольного подмножества индексов $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и всякого номера $k \in \{1, \ldots, t\}$ определим векторы

$$a = \sum_{i \in S} v_i, \quad b = \sum_{i \in S \setminus S_k} v_i, \quad c = \sum_{i \in S \cup S_k} v_i.$$

Нетрудно видеть, что вектор a лежит на отрезке $[b, c]$. Отсюда в силу выпуклости нормы получаем, что

$$\text{либо } f'(S \setminus S_k) \geqslant f'(S), \quad \text{либо } f'(S \cup S_k) \geqslant f'(S).$$

Следовательно, существует оптимальное решение S^* задачи LVS$'$, содержащее в себе каждое подмножество S_k, пересекающееся с S^*. Тем самым имеет место равенство $f'(S^*) = f(U^*)$, где U^* — оптимальное решение задачи LVS на множестве X.

Пусть множество $U = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}\}$ является α-приближённым решением задачи LVS на множестве X. Определим множество индексов $S_U = S_{j_1} \cup \cdots \cup S_{j_k}$. Тогда $f'(S_U) = f(U) \geqslant \alpha f(U^*) = \alpha f'(S^*)$, следовательно, S_U является α-приближённым решением задачи LVS$'$ на наборе векторов $v_1, \ldots, v_n$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Пусть A — вещественная $(d \times n)$-матрица, вход задачи MNC. Без нарушения общности будем считать, что матрица A ненулевая. Построим векторы $v_1, \ldots, v_m$ (вход задачи LVS$'$) следующим образом. Положим $m = 2n$ и для каждого $i = 1, \ldots, n$ определим $v_i = A_i$ и $v_{n+i} = -A_i$, где A_i — i-й столбец матрицы A.

Пусть множество $S \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ является α-приближённым решением задачи LVS$'$ на наборе векторов $v_1, \ldots, v_m$. Легко заметить, что $f'(S) = \|Ax_S\|$, где x_S — n-мерный вектор, определяемый по правилу

$$x_S(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in S \text{ и } i + n \notin S, \\ -1, & \text{если } i \notin S \text{ и } i + n \in S, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу выпуклости нормы максимум величины $\|Ax\|$ при $\|x\|_\infty = 1$ достигается в некоторой точке $y \in \{1, -1\}^n$. Тогда $\mu(A) = \|Ay\| = f'(S_y)$, где $S_y = \{i \mid y(i) = 1\} \cup \{i + n \mid y(i) = -1\}$. В итоге имеем

$$\|Ax_S\| = f'(S) \geqslant \alpha f'(S_y) = \alpha\mu(A).$$

Отсюда, поскольку матрица A ненулевая и $\alpha > 0$, вектор x_S также не может быть нулевым, тем самым справедливо равенство $\|x_S\|_\infty = 1$. Из полученных соотношений следует, что x_S является α-приближённым решением задачи MNC на матрице A.

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество векторов в пространстве $\mathbb{R}^d$, вход задачи LVS. Определим матрицу A (вход задачи MNC) в виде матрицы, состоящей из d строк и $n + 1$ столбцов, первые n из которых являются векторами из X, а $(n+1)$-й — вектором $\zeta = \sum\limits_{x \in X} x$.

Пусть вектор $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ является α-приближённым решением задачи MNC на матрице A, т. е. после нормировки этого вектора выполнены соотношения $\|y\|_\infty = 1$ и $\|Ay\| \geqslant \alpha\mu(A)$. Согласно лемме 2 за линейное время может быть найден вектор $z \in \{1, -1\}^{n+1}$ такой, что $\|Az\| \geqslant \|Ay\|$. Определим множество $S_z = \{x_i \mid z(i) = z(n+1),\ i = 1, \ldots, n\}$. Тогда по построению матрицы A имеем

$$\|Az\| = \Big\| \sum_{x \in S_z} x + \zeta - \sum_{x \notin S_z} x \Big\| = \Big\| 2 \sum_{x \in S_z} x \Big\| = 2f(S_z).$$

Обозначим через S^* оптимальное решение задачи LVS, а через z^* — $(n+1)$-мерный вектор такой, что

$$z^*(i) = \begin{cases} 1, & \text{если } i \leqslant n \text{ и } x_i \in S^*, \\ 1, & \text{если } i = n+1, \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\|Az^*\| = \Big\| \sum_{x \in S^*} x + \zeta - \sum_{x \notin S^*} x \Big\| = \Big\| 2 \sum_{x \in S^*} x \Big\| = 2f(S^*).$$

В результате имеем

$$f(S_z) = \frac{1}{2}\|Az\| \geqslant \frac{1}{2}\|Ay\| \geqslant \frac{\alpha}{2}\mu(A) \geqslant \frac{\alpha}{2}\|Az^*\| = \alpha f(S^*).$$

Следовательно, множество S_z является α-приближённым решением задачи LVS на множестве X. Теорема 1 доказана.

3. Аппроксимируемость задачи LVS

Теорема 1, а также факты и леммы из разд. 1 позволяют ответить на вопрос о полиномиальной аппроксимируемости задачи LVS для каждой из норм ℓ_p, $p \in [1, \infty)$. Ответ на этот вопрос может быть сформулирован в виде следующих двух теорем.

Теорема 2. (1) *При условии* $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ *для любых* $p \in [1,2]$ *и* $\varepsilon > 0$ *задача* $\mathrm{LVS}(\ell_p)$ *не может быть решена за полиномиальное время с точностью* $\alpha_p + \varepsilon$, *где*

$$\alpha_p = \begin{cases} \sqrt{2/\pi}, & \text{если } p = 2, \\ 2/\pi, & \text{если } p = 1, \\ (16/17)^{1/p}, & \text{если } p \in (1,2). \end{cases}$$

(2) *Для любого* $p \in (2, \infty)$ *задача* $\mathrm{LVS}(\ell_p)$ *не может быть решена за полиномиальное время с какой-либо константной точностью, если* $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, *и при любом* $\varepsilon > 0$ *не может быть решена за полиномиальное время с точностью* $2^{-\log^{1-\varepsilon} n}$, *если* $\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{DTIME}(2^{\log^{O(1)} n})$.

Доказательство. (1) Порог неприближаемости для случая $p = 2$ следует из факта 1 и теоремы 1. Утверждение, сформулированное для случая $p \in (1,2)$, доказано в [6,19]. Установим справедливость утверждения теоремы для случая $p = 1$.

Предположим, что существует полиномиальный алгоритм приближённого решения задачи LVS(ℓ_1) с точностью $2/\pi + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Тогда согласно теореме 1 и лемме 1 такой алгоритм существует для задачи Гротендика и, следовательно, в соответствии с леммой 3 — для малой задачи Гротендика. Отсюда и из леммы 4 вытекает существование полиномиального $\sqrt{2/\pi + \varepsilon}$-приближённого алгоритма для задачи MNC(ℓ_2), что согласно факту 1 возможно только при условии P = NP.

Утверждение (2) следует из факта 2 и теоремы 1. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для любого* $p \in [1, \infty)$ *задача* LVS(ℓ_p) *может быть решена за полиномиальное время с точностью*

$$\beta_p = \begin{cases} \sqrt{2/\pi}, & \textit{если } p = 2, \\ 2\ln(1+\sqrt{2})/\pi, & \textit{если } p = 1, \\ 2\sqrt{3}/\pi - 2/3, & \textit{если } p \in (1,2), \\ \max\{\sqrt{2/\pi}\, d^{\,1/p-1/2},\ d^{\,-1/p}\}, & \textit{если } p \in (2,\infty). \end{cases}$$

Доказательство. Существование приближённого алгоритма с указанной точностью в случае $p = 2$ следует из факта 3, леммы 4 и теоремы 1. В случае $p = 1$ доказываемое утверждение является следствием факта 5, леммы 1 и теоремы 1. Из факта 4 и теоремы 1 получаем оценку аппроксимации для случая $p \in (1, 2)$.

Пусть теперь $p \in (2, \infty)$. Общеизвестно, что если $1 \leqslant q \leqslant r \leqslant \infty$, то для любого вектора $x \in \mathbb{R}^d$ выполнены неравенства

$$\|x\|_r \leqslant \|x\|_q \leqslant d^{\,1/q-1/r}\|x\|_r.$$

Отсюда легко следует, что $\sqrt{2/\pi}$-приближённое решение задачи LVS(ℓ_2) и точное решение задачи LVS(ℓ_∞), вычислимые за полиномиальное время, являются приближёнными решениями задачи LVS(ℓ_p) с точностью $\sqrt{2/\pi}\, d^{\,1/p-1/2}$ и $d^{\,-1/p}$ соответственно. Следовательно, лучшее из них имеет заявленную точность β_p. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Приближённые алгоритмы с указанной в теореме 3 точностью для задачи LVS(ℓ_p) получаются модификацией приближённых алгоритмов для задачи MNC и задач Гротендика по описанным выше схемам сведения к ним задачи LVS. Трудоёмкость полученных алгоритмов определяется временно́й сложностью решения задачи SDP.

Замечание 2. Трудоёмкость приближённых алгоритмов для задачи LVS(ℓ_p) может быть существенно сокращена, если вместо точных алгоритмов решения задачи SDP использовать известные $(1-\varepsilon)$-приближён-

ные алгоритмы для этой задачи (см. [10, гл. 5]). В этом случае точность решения задачи LVS уменьшится на величину ε.

4. Сложность задачи LVS(ℓ_p) в случае $p \in (1, 2)$

Если $p \in (1, 2)$, то порог неприближаемости $(16/17)^{1/p} + \varepsilon$ для задачи LVS(ℓ_p) может быть усилен с использованием рандомизированного сведения к ней задачи LVS(ℓ_2). В основе данного сведения лежит тот факт, что почти любое d-мерное подпространство в пространстве достаточно большой полиномиальной размерности с нормой ℓ_p является почти евклидовым (теорема Дворецкого для норм ℓ_p).

Определение 2. Нормированное пространство $(V, \|.\|)$ называется δ-*евклидовым*, где $V \subseteq \mathbb{R}^d$ и $\delta \geqslant 1$, если существует константа C такая, что $\|x\|_2 \leqslant C\|x\| \leqslant \delta\|x\|_2$ для всех $x \in V$.

Факт 6 [18, теорема 3.2]**.** *Для любых $p \in [1, 2)$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ равномерно распределённое случайное d-мерное подпространство*[2)] *нормированного пространства $(\mathbb{R}^D, \ell_p)$, где $D = \lceil \varepsilon^{-2} d \rceil$, является $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$-евклидовым с вероятностью, не меньшей чем $1 - 2^{-\Omega(d)}$.*

Лемма 5. *Для любых $p \in (1, 2)$, $\alpha \in (0, 1]$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ существование полиномиального α-приближённого алгоритма для задачи* LVS(ℓ_p) *влечёт существование полиномиального рандомизированного (α/δ)-приближённого алгоритма для задачи* LVS(ℓ_2), *где $\delta = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}_p$ — полиномиальный α-приближённый алгоритм для задачи LVS(ℓ_p) и X — конечное множество векторов в $\mathbb{R}^d$, вход задачи LVS(ℓ_2). Выберем равномерно распределённое случайное d-мерное подпространство V в пространстве $\mathbb{R}^D$, где $D = \lceil \varepsilon^{-2} d \rceil$. Для этого можно воспользоваться эффективными процедурами, описанными в [14, разд. 14.3] или [18, разд. 3.1]. Тогда в соответствии с фактом 6 нормированное пространство (V, ℓ_p) является δ-евклидовым с вероятностью $q \geqslant 1 - 2^{-\Omega(d)}$.

Определим взаимно однозначное соответствие $\nu\colon \mathbb{R}^d \to V$ по правилу

$$\nu(x) = \sum_{i=1}^{d} x(i) \mathrm{e}_i,$$

где $\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_d$ — ортонормированный базис евклидова пространства (V, ℓ_2), и с помощью алгоритма $\mathcal{A}_p$ найдём α-приближённое решение S задачи

[2)] Т. е. случайное подпространство с вероятностной мерой, инвариантной относительно вращений (мерой Хаара).

LVS(ℓ_p) на множестве $\nu(X) = \{\nu(x) \mid x \in X\}$. Тогда если пространство (V, ℓ_p) δ-евклидово, то S является (α/δ)-приближённым решением задачи LVS(ℓ_2) на множестве $\nu(X)$. С учётом линейности и изометричности отображения ν относительно евклидовой нормы отсюда следует, что множество $\nu^{-1}(S)$ с вероятностью q является (α/δ)-приближённым решением задачи LVS(ℓ_2) на множестве X.

Остаётся заметить, что поскольку размерность D полиномиально зависит от d и $1/\varepsilon$, все перечисленные операции, включая построение множества $\nu(X)$, работу алгоритма $\mathcal{A}_p$ и вычисление множества $\nu^{-1}(S)$, занимают полиномиальное время. Лемма 5 доказана.

Теорема 4. *Если* NP $\not\subseteq$ RP, *где* RP — *класс задач, разрешимых за полиномиальное время на рандомизированной машине Тьюринга, то для любых* $p \in (1,2)$ *и* $\varepsilon > 0$ *задача* LVS(ℓ_p) *не может быть решена за полиномиальное время с точностью* $\sqrt{2/\pi} + \varepsilon$.

Доказательство. Пусть для некоторых $p \in (1,2)$ и $\varepsilon > 0$ существует полиномиальный приближённый алгоритм для задачи LVS(ℓ_p) с указанной точностью. Тогда согласно лемме 5 для некоторого $\alpha > \sqrt{2/\pi}$ существует полиномиальный рандомизированный α-приближённый алгоритм для задачи LVS(ℓ_2). Отсюда с учётом полиномиального сведения, описанного в доказательстве теоремы 1, следует существование полиномиального рандомизированного α-приближённого алгоритма для задачи MNC(ℓ_2). Используя данный алгоритм, легко построить полиномиальный рандомизированный алгоритм для верификационной версии задачи MNC(ℓ_2) «с разрывом α» (α-gap problem), которая формулируется следующим образом.

Задача α-Gap-MNC(ℓ_2). *Пусть* A — *вещественная* $(d \times n)$-*матрица и* m — *неотрицательное число, удовлетворяющие одному из неравенств:* $\|A\|_{\infty\mapsto 2} \geqslant m$ *либо* $\|A\|_{\infty\mapsto 2} < \alpha m$. *Определить, выполнено ли первое из этих неравенств.*

С другой стороны, из доказательства факта 1 о пороге неприближаемости для задачи MNC(ℓ_2) (см. доказательства теорем 3.1 и 1.3 в [9]) следует NP-трудность задачи τ-Gap-MNC(ℓ_2) для любого $\tau > \sqrt{2/\pi}$. Отсюда вытекает существование полиномиальных рандомизированных алгоритмов для решения любых задач из класса NP, что противоречит условию NP $\not\subseteq$ RP. Теорема 4 доказана.

Заключение

В статье показано, что задача поиска подмножества векторов с суммой максимальной длины в пространстве $(\mathbb{R}^d, \ell_p)$ полиномиально аппроксимируема с константной точностью, если $p \in [1, 2]$, и не аппроксимируема, если $p \in (2, \infty)$. Получены новые, усиленные пороги неприближаемости для этой задачи в случае каждой из норм ℓ_p (теоремы 2 и 4).

Очевидно, что все установленные результаты о сложности задачи LVS распространяются на задачу Longest k-Vector Sum (Lk-VS), которая заключается в максимизации длины суммарного вектора по всем подмножествам заданной мощности [4, 20]. Однако открытым остаётся вопрос её полиномиальной аппроксимируемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В.** Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, № 1. С. 32–42.
2. **Бабурин А. Е., Пяткин А. В.** О полиномиальных алгоритмах решения одной задачи суммирования векторов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 3–10.
3. **Пяткин А. В.** О сложности задачи выбора подмножества векторов максимальной суммарной длины // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 68–73.
4. **Шенмайер В. В.** Решение некоторых задач поиска подмножества векторов с использованием диаграмм Вороного // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 4. С. 102–115.
5. **Шенмайер В. В.** Точный алгоритм для нахождения подмножества векторов с суммой максимальной длины // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Т. 24, № 4. С. 111–129.
6. **Шенмайер В. В.** Сложность и аппроксимация задачи о длиннейшем суммарном векторе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 6. С. 883–889.
7. **Alon N., Naor A.** Approximating the cut-norm via Grothendieck's inequality // SIAM J. Comput. 2006. Vol. 35, No. 4. P. 787–803.
8. **Bhaskara A., Vijayaraghavan A.** Approximating matrix p-norms // Proc. 22nd Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (SODA 2011) (San Francisco, CA, Jan. 23–25, 2011). Philadelphia, PA: SIAM, 2011. P. 497–511.
9. **Briët J., Regev O., Saket R.** Tight hardness of the non-commutative Grothendieck problem // Theory Comput. 2017. Vol. 13, No. 15. P. 1–24.
10. **Gärtner B., Matoušek J.** Approximation algorithms and semidefinite programming. Heidelberg: Springer, 2012.

11. **Gimadi E. Kh., Rykov I. A.** Efficient randomized algorithms for a vector subset problem // Proc. 9th Int. Conf. Discrete Optimization and Operations Research (DOOR 2016) (Vladivostok, Sep. 19–23, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 159–170. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).
12. **Grothendieck A.** Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques // Bol. Soc. Mát. São Paulo. 1953. Vol. 8. P. 1–79.
13. **Hwang F. K., Onn S., Rothblum U. G.** A polynomial time algorithm for shaped partition problems // SIAM J. Optim. 1999. Vol. 10, No. 1. P. 70–81.
14. **Matoušek J.** Lectures on discrete geometry. New York: Springer, 2002.
15. **Nesterov Yu.** Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization // Optim. Methods Softw. 1998. Vol. 9, No. 1–3. P. 141–160.
16. **Nesterov Yu.** Global quadratic optimization via conic relaxation // Handbook of semidefinite programming. Boston: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 363–387.
17. **Onn S., Schulman L. J.** The vector partition problem for convex objective functions // Math. Oper. Res. 2001. Vol. 26, No. 3. P. 583–590.
18. **Regev O., Rosen R.** Lattice problems and norm embeddings // Proc. 38th Annu. ACM Symp. Theory Comput. (STOC 2006) (Seattle, WA, May 21–23, 2006). New York: ACM, 2006. P. 447–456.
19. **Shenmaier V. V.** Complexity and algorithms for finding a subset of vectors with the longest sum // Proc. 23rd Computing and Combinatorics Conf. (COCOON 2017) (Hong Kong, Aug. 3–5, 2017). Cham: Springer, 2017. P. 469–480. (Lect. Notes Comput. Sci; Vol. 10392).
20. **Shenmaier V. V.** Complexity and approximation of the longest vector sum problem // Proc. 15th Workshop Approximation and Online Algorithms (WAOA 2017) (Vienna, Austria, Sep. 7–8, 2017). Cham: Springer, 2018. P. 41–51. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 10787).
21. **Steinberg D.** Computation of matrix norms with applications to robust optimization. Res. Thes. Haifa: Technion — Isr. Inst. Technology, 2005.

Шенмайер Владимир Владимирович

Статья поступила
11 апреля 2018 г.

Исправленный вариант —
13 июля 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2018. Volume 25, No. 4. P. 131–148

UDC 519.16 DOI: 10.17377/daio.2018.25.618

APPROXIMABILITY OF THE PROBLEM OF FINDING A VECTOR SUBSET WITH THE LONGEST SUM

V. V. Shenmaier

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: shenmaier@mail.ru

Abstract. We answer the question of existence of polynomial-time constant-factor approximation algorithms for the space of nonfixed dimension. We prove that, in Euclidean space the problem is solvable in polynomial time with accuracy $\sqrt{\alpha}$, where $\alpha = 2/\pi$, and if P $\neq$ NP then there are no polynomial algorithms with better accuracy. It is shown that, in the case of the ℓ_p spaces, the problem is APX-complete if $p \in [1, 2]$ and not approximable with constant accuracy if P $\neq$ NP and $p \in (2, \infty)$. Tab. 1, bibliogr. 21.

Keywords: sum vector, search for a vector subset, approximation algorithm, inapproximability bound.

REFERENCES

1. **A. E. Baburin, E. Kh. Gimadi, N. I. Glebov,** and **A. V. Pyatkin,** The problem of finding a subset of vectors with the maximum total weight, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **14**, No. 1, 32–42, 2007 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **2**, No. 1, 32–38, 2008.
2. **A. E. Baburin** and **A. V. Pyatkin**, Polynomial algorithms for solving the vector sum problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **13**, No. 2, 3–10, 2006 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **1**, No. 3, 268–272, 2007.
3. **A. V. Pyatkin**, On complexity of a choice problem of the vector subset with the maximum sum length, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **16**, No. 6, 68–73, 2009 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **4**, No. 4, 549–552, 2010.
4. **V. V. Shenmaier**, Solving some vector subset problems by Voronoi diagrams, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **23**, No. 4, 102–115, 2016 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **10**, No. 4, 560–566, 2016.

5. **V. V. Shenmaier**, An exact algorithm for finding a vector subset with the longest sum, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **24**, No. 4, 111–129, 2017 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **11**, No. 4, 584–593, 2017.
6. **V. V. Shenmaier**, Complexity and approximation of finding the longest vector sum, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **58**, No. 6, 883–889, 2018 [Russian]. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **58**, No. 6, 850–857, 2018.
7. **N. Alon** and **A. Naor,** Approximating the cut-norm via Grothendieck's inequality, *SIAM J. Comput.,* **35**, No. 4, 787–803, 2006.
8. **A. Bhaskara** and **A. Vijayaraghavan,** Approximating matrix p-norms, in *Proc. 22nd Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, San Francisco, USA, Jan. 23–25, 2011,* pp. 497–511, SIAM, Philadelphia, PA, 2011.
9. **J. Briët, O. Regev,** and **R. Saket,** Tight hardness of the non-commutative Grothendieck problem, *Theory Comput.,* **13**, No. 15, 1–24, 2017.
10. **B. Gärtner** and **J. Matoušek,** *Approximation Algorithms and Semidefinite Programming,* Springer, Heidelberg, 2012.
11. **E. Kh. Gimadi** and **I. A. Rykov,** Efficient randomized algorithms for a vector subset problem, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016), pp. 159–170, Springer, Cham, 2016 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
12. **A. Grothendieck,** Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mát. São Paulo,* **8**, 1–79, 1953 [French].
13. **F. K. Hwang, S. Onn,** and **U. G. Rothblum,** A polynomial time algorithm for shaped partition problems, *SIAM J. Optim.,* **10**, No. 1, 70–81, 1999.
14. **J. Matoušek,** *Lectures on Discrete Geometry,* Springer, New York, 2002.
15. **Yu. Nesterov,** Semidefinite relaxation and nonconvex quadratic optimization, *Optim. Methods Softw.,* **9**, No. 1–3, 141–160, 1998.
16. **Yu. Nesterov,** Global quadratic optimization via conic relaxation, in *Handbook of Semidefinite Programming,* pp. 363–387, Kluwer Acad. Publ., Boston, 2000.
17. **S. Onn** and **L. J. Schulman,** The vector partition problem for convex objective functions, *Math. Oper. Res.,* **26**, No. 3, 583–590, 2001.
18. **O. Regev** and **R. Rosen,** Lattice problems and norm embeddings, in *Proc. 38th Annu. ACM Symp. Theory Comput., Seattle, USA, May 21–23, 2006,* pp. 447–456, ACM, New York, 2006.
19. **V. V. Shenmaier,** Complexity and algorithms for finding a subset of vectors with the longest sum, in *Computing and Combinatorics* (Proc. 23rd Int. Conf. COCOON 2017, Hong Kong, China, Aug. 3–5, 2017), pp. 469–480, Springer, Cham, 2017 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 10392).

20. V. V. Shenmaier, Complexity and approximation of the longest vector sum problem, in *Approximation and Online Algorithms* (Revis. Sel. Pap. 15th Workshop WAOA 2017, Vienna, Austria, Sept. 7–8, 2017), pp. 41–51, Springer, Cham, 2018 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 10787).

21. D. Steinberg, Computation of matrix norms with applications to robust optimization, *Res. Thesis,* Technion — Isr. Inst. Technol., Haifa, 2005.

Vladimir V. Shenmaier

Received
11 April 2018
Revised
13 July 2018