ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2018. Том 25, № 4. С. 5–14

УДК 519.17 DOI: 10.17377/daio.2018.25.620

О ДВУСВЯЗНЫХ ТРАНСМИССИОННО ИРРЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ *)

А. А. Добрынин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: dobr@math.nsc.ru

Аннотация. Трансмиссия вершины v графа есть сумма расстояний от v до всех остальных вершин графа. В трансмиссионно иррегулярном графе трансмиссии всех вершин попарно различны. Известно, что почти все графы не являются трансмиссионно иррегулярными. В [4] построено бесконечное семейство трансмиссионно иррегулярных деревьев и сформулирована следующая проблема: существует ли бесконечное семейство двусвязных графов с таким свойством? В данной работе строится бесконечное семейство двусвязных трансмиссионно иррегулярных графов. Табл. 2, ил. 2, библиогр. 21.

Ключевые слова: граф, трансмиссия вершины, трансмиссионно иррегулярный граф, индекс Винера.

Введение

Рассматриваются обыкновенные графы, т. е. связные неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Число вершин графа называется его *порядком*. Под *расстоянием* $d(u, v)$ между вершинами u и v графа G понимается число рёбер в кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины в G. *Трансмиссия* $\mathrm{tr}(v)$ вершины v определяется как сумма расстояний от v до всех других вершин графа. Полусумма трансмиссий всех вершин графа известна как индекс Винера, который интенсивно изучается в теории графов и находит многочисленные приложения (см., например, книги [7, 13–15, 21] и обзоры [8–12, 16, 17, 19]). Трансмиссии вершин использовались для построения информационно-топологических индексов графов [6, 7]. Для теории размещения предприятий представляют

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 16–01–00499, 17–51–560008).

интерес вершины с экстремальными значениями трансмиссий [5, 18, 20]. Число отличных друг от друга трансмиссий определяет *сложность Винера* (Wiener complexity) графа [1–3]. Граф, в котором все трансмиссии вершин попарно различны, называется *трансмиссионно иррегулярным.* Такой граф обладает максимальной сложностью Винера. Известно, что почти все графы не являются трансмиссионно иррегулярными [4]. Это следует из того, что почти все графы имеют диаметр 2, а граф диаметра 2 не является трансмиссионно иррегулярным из-за пары вершин одинаковой степени. Трансмиссионно иррегулярные деревья и уницикличеcкие графы и их индекс Винера изучались в [4], где, в частности, были построены бесконечные семейства трансмиссионно иррегулярных деревьев и сформулирована следующая проблема: существует ли бесконечное семейство двусвязных трансмиссионно иррегулярных графов? В настоящей работе конструктивно строится бесконечное семейство таких графов.

1. Конструкция графов

Двусвязные трансмиссионно иррегулярные графы малого порядка могут быть найдены компьютерным поиском. На 9, 10 и 11 вершинах существуют 3, 25 и 817 графов этого класса соответственно.

Рассмотрим граф G_k на рис. 1. Он образован из $(4k+3)$-призмы, в одну из граней которой добавлены диагонали и подграф на пяти белых вершинах. Число вершин в графе G_k равно $8k+11$, $k \geqslant 0$. Трансмиссии всех вершин начального графа G_0 попарно различны: $\mathrm{tr}(v_i) \in \{14, 18, 20\}$, $\mathrm{tr}(u_i) \in \{13, 17, 19\}$ и $\mathrm{tr}(w_i) \in \{15, 16, 21, 22, 23\}$, $1 \leqslant i \leqslant 5$.

Утверждение 1. *Граф G_k является трансмиссионно иррегулярным для всех $k \geqslant 0$.*

Доказательство. Трансмиссии всех вершин графа G_k будут квадратичными полиномами по k. Найдём их в явном виде и покажем, что значения двух любых полиномов будут различны при $k \geqslant 0$. Пусть $W = \{w_1, w_2, \dots, w_5\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{4k+3}\}$ и $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{4k+3}\}$. Обозначим через p_n трансмиссию концевой вершины в простой n-вершинной цепи, $p_n = n(n-1)/2$. Сумму расстояний от концевой вершины до k последних вершин цепи можно представить как $p_n - p_{n-k}$. Трансмиссии вершин простого нечётного и чётного циклов порядка n равны $2p_{(n+1)/2}$ и $2p_{n/2+1} - n/2$ соответственно. Трансмиссию вершины v графа G_k вычислим как сумму трёх величин: $\mathrm{tr}(v) = d(v, W) + d(v, V) + d(v, U)$, где $d(v, X) = \sum\limits_{u \in X} d(v, u)$ для подмножества вершин X.

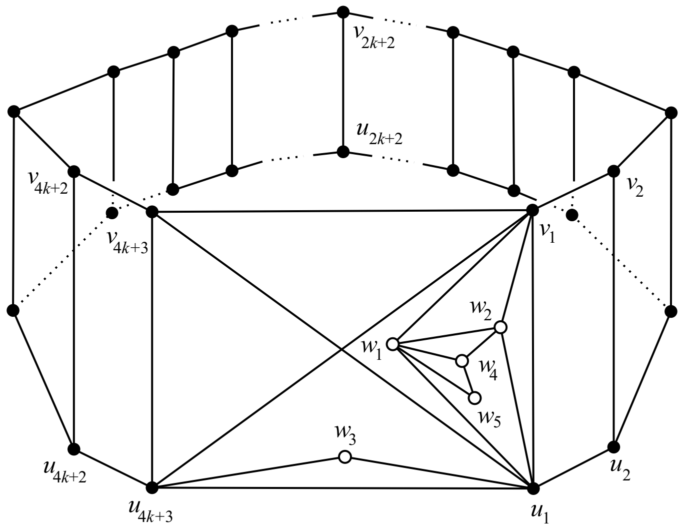

Рис. 1. Трансмиссионно иррегулярный граф G_k

1. Трансмиссии вершин из множества W.

Для вершин из множества W информация о расстояниях в графе G_k представлена в табл. 1. Для каждой вершины $w_i \in W$, $1 \leqslant i \leqslant 5$, таблица содержит следующие данные:

— сумму расстояний от w_i до всех вершин из W (столбец 2);
— расстояние от w_i до вершины v_1 (столбец 3);
— расстояние от w_i до вершины v_{4k+3} (столбец 4);
— подмножество $V_1 \subset V$, до вершин которого кратчайшие цепи из w_i проходят через v_1 (столбец 5);
— подмножество $V_2 \subset V$, до вершин которого кратчайшие цепи из w_i проходят через v_{4k+3} (в случае равенства расстояний вершина помещается в V_1) (столбец 6);
— расстояние от w_i до вершины u_1 (столбец 7);
— расстояние от w_i до вершины u_{4k+3} (столбец 8);
— подмножество $U_1 \subset U$, до вершин которого кратчайшие цепи из w_i проходят через u_1 (столбец 9);
— подмножество $U_2 \subset U$, до вершин которого кратчайшие цепи из w_i проходят через u_{4k+3} (столбец 10).

Первой вершиной из множества V (U) в любой кратчайшей цепи из $w \in W$ до вершин V (U) будет одна из двух вершин: v_1 или v_{4k+3} (u_1 или u_{4k+3}). Далее эти цепи проходят внутри цикла порядка $4k + 3$, по-

Таблица 1

Характеристики вершин из множества W

w	Σ	v_1	v_{4k+3}	V_1	V_2	u_1	u_{4k+3}	U_1	U_2
w_1	5	1	2	$v_1 ... v_{2k+2}$	$v_{4k+3} ... v_{2k+3}$	1	2	$u_1 ... u_{2k+2}$	$u_{4k+3} ... u_{2k+3}$
w_2	6	1	2	$v_1 ... v_{2k+2}$	$v_{4k+3} ... v_{2k+3}$	1	2	$u_1 ... u_{2k+2}$	$u_{4k+3} ... u_{2k+3}$
w_3	10	2	2	$v_1 ... v_{2k+2}$	$v_{4k+3} ... v_{2k+3}$	1	1	$u_1 ... u_{2k+2}$	$u_{4k+3} ... u_{2k+3}$
w_4	6	2	3	$v_1 ... v_{2k+2}$	$v_{4k+3} ... v_{2k+3}$	2	3	$u_1 ... u_{2k+2}$	$u_{4k+3} ... u_{2k+3}$
w_5	7	2	3	$v_1 ... v_{2k+2}$	$v_{4k+3} ... v_{2k+3}$	2	3	$u_1 ... u_{2k+2}$	$u_{4k+3} ... u_{2k+3}$

рождённого вершинами из V (U). Тогда трансмиссия вершины w может быть вычислена как $d(w, V_1) + d(w, V_2) + d(w, U_1) + d(w, U_2) + d(w, W)$.

С помощью табл. 1 получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(w_1) &= p_{2k+3} + (p_{2k+3} - p_2) + p_{2k+3} + (p_{2k+3} - p_2) + 5 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 8k^2 + 20k + 15, \\
\mathrm{tr}(w_2) &= p_{2k+3} + (p_{2k+3} - p_2) + p_{2k+3} + (p_{2k+3} - p_2) + 6 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 8k^2 + 20k + 16, \\
\mathrm{tr}(w_3) &= (p_{2k+4} - p_2) + (p_{2k+3} - p_2) + p_{2k+3} + p_{2k+2} + 10 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 8k^2 + 28k + 21, \\
\mathrm{tr}(w_4) &= (p_{2k+4} - p_2) + (p_{2k+4} - p_3) + (p_{2k+4} - p_2) + (p_{2k+4} - p_3) + 6 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 8k^2 + 28k + 22, \\
\mathrm{tr}(w_5) &= (p_{2k+4} - p_2) + (p_{2k+4} - p_3) + (p_{2k+4} - p_2) + (p_{2k+4} - p_3) + 7 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 8k^2 + 28k + 23.
\end{aligned}$$

Очевидно, что не существует целого $k \geqslant 0$, при котором совпадают трансмиссии двух любых вершин из W.

2. Трансмиссии вершин из множества V.

2.1. Расстояния от v_i до вершин из V.

Кратчайшие цепи из v_i проходят только по циклу порядка $4k + 3$, порождённому вершинами V, поэтому $d(v_i, V) = 2p_{2k+2} = 4k^2 + 6k + 2$ для всех $i = 1, 2, \ldots, 4k + 3$.

2.2. Расстояния от v_i до вершин из U.

Кратчайшие цепи из v_i, $i = 1, 2, \ldots, 2k + 2$, до вершин из U показаны сплошными рёбрами на рис. 2. Так как кратчайшие цепи между вершинами из $V \cup U$ не проходят через вершины множества W, из графа G_k на рис. 2 для наглядности удалены W и часть вертикальных

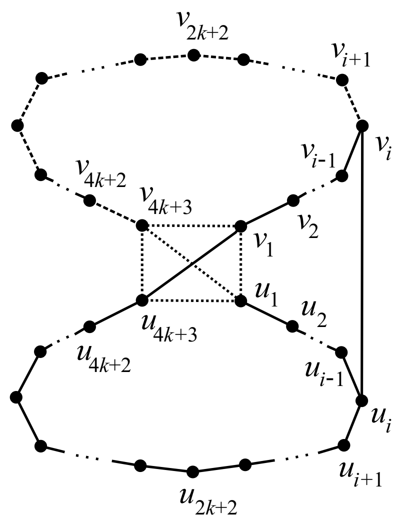

Рис. 2. Кратчайшие цепи из вершины v_i до вершин множества U

рёбер. Вершины множества U порождают цикл порядка $4k + 3$. Расстояния от v_i до вершин $u_i, u_{i-1}, \ldots, u_1$ этого цикла можно найти, перейдя по ребру из v_i в вершину u_i, что в сумме даст p_{i+1}. Расстояния до оставшихся вершин из U найдём из цикла порядка $4k + 4$ с вершинами $v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1, u_{4k+3}, u_{4k+2}, \ldots, u_{i+1}, u_i, v_i$. Сумма расстояний от v_i до этих вершин равна $2p_{2k+3} - (2k + 2) - p_i$. В последнем выражении p_i есть сумма расстояний от v_i до вершин $v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1$. Тогда $d(v_i, U) = p_{i+1} + 2p_{2k+3} - (2k+2) - p_i - 1 = 2k^2 + 3k + i$ (вычитание 1 делается из-за дважды подсчитанного ребра (v_i, u_i)).

Расположение кратчайших цепей из v_i для $i = 4k+3, 4k+2, \ldots, 2k+3$ полностью симметрично расположению цепей на рис. 2. Следовательно, для этих вершин $d(v_i, U) = 2k^2 + 7k - i + 4$.

2.3. Расстояния от v_i до вершин из W.

Из пп. 2.1–2.2 следует, что трансмиссии вершин v_i и v_{4k+4-i}, $i = 1, 2, \ldots, 2k+1$, симметрично расположенных в цикле $v_1, v_2, \ldots, v_{4k+3}$, будут различаться только суммой расстояний до вершин множества W. Это отличие равно разности сумм чисел в третьем и четвёртом столбцах табл. 1, $d(v_{4k+4-i}, W) - d(v_i, W) = 4$ для всех пар вершин с симметричными индексами.

Для вычисления суммы расстояний от v_i до вершин из W используем табл. 1. Так как кратчайшие цепи из v_i, $i = 1, 2, \ldots, 2k + 2$, до $w \in W$ проходят через вершину v_1, то

$$d(v_i, W) = \sum_{w \in W} [d(v_i, v_1) + d(v_1, w)] = 5(i-1) + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 5i + 3.$$

Для $i = 2k+3, 2k+4, \ldots, 4k+3$ кратчайшие цепи из вершины v_i до $w \in W$ проходят через вершину v_{4k+3}. В этом случае

$$\begin{aligned} d(v_i, W) = \sum_{w \in W} & [d(v_i, v_{4k+3}) + d(v_{4k+3}, w)] \\ & = 5(4k+3-i) + 2 + 2 + 2 + 3 + 3 = 20k - 5i + 27. \end{aligned}$$

Суммируя необходимые выражения для сумм расстояний от вершины v_i из пп. 2.1–2.3, получим трансмиссию для v_i:

$$\mathrm{tr}(v_i) = \begin{cases} 8k^2 + 14k + 6i + 8, & i = 1, 2, \ldots, 2k+2, \\ 8k^2 + 38k - 6i + 36, & i = 2k+3, 2k+4, \ldots, 4k+3. \end{cases}$$

Проверим полученные выражения для $\mathrm{tr}(v_i)$ на совпадение. Равенство $\mathrm{tr}(v_i) = \mathrm{tr}(v_j)$ эквивалентно неверному выражению $3(i+j-4k) = 14$. Совпадение $\mathrm{tr}(v_i)$ с трансмиссиями вершин из множества W влечёт либо недопустимое значение индекса i, либо неверное арифметическое выражение. Например, из равенства $\mathrm{tr}(v_i) = \mathrm{tr}(w_4)$, $i \leqslant 2k+2$, следует $i = (7k+7)/3 > 2k+2$, а равенство $\mathrm{tr}(v_i) = \mathrm{tr}(w_2)$, $i \geqslant 2k+3$, влечёт выполнение $3(i-3k) = 10$.

3. Трансмиссии вершин из множества U.

Структура графа G_k такова, что если из него удалить вершину w_3, то, очевидно, найдётся автоморфизм, переводящий вершину v_i в вершину u_i, $i = 1, 2, \ldots, 4k+3$. Так как вершина w_3 степени 2 входит в треугольник, то через неё не проходят кратчайшие цепи между остальными вершинами G_k. Тогда разница между трансмиссиями вершин v_i и u_i в G_k равна разнице расстояний от этих вершин до вершины w_3. Поскольку $d(v_i, w_3) - d(u_i, w_3) = 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, 4k+3$, то $\mathrm{tr}(u_i) = \mathrm{tr}(v_i) - 1$. Следовательно,

$$\mathrm{tr}(u_i) = \begin{cases} 8k^2 + 14k + 6i + 7, & i = 1, 2, \ldots, 2k+2, \\ 8k^2 + 38k - 6i + 35, & i = 2k+3, 2k+4, \ldots, 4k+3. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что совпадения трансмиссий вершин u_i между собой или с трансмиссиями других вершин графа влекут противоречия, аналогичные встретившимся при анализе совпадений $\mathrm{tr}(v_i)$. Утверждение 1 доказано.

Т а б л и ц а 2

Трансмиссии вершин графа G_k, $k = 1, 2$

G_1		G_2	
v	$\mathrm{tr}(v)$	v	$\mathrm{tr}(v)$
v_1, v_2, v_3, v_4	36, 42, 48, 54	$v_1, v_2, \ldots, v_6$	74, 80, 86, 92, 98, 104
v_5, v_6, v_7	52, 46, 40	$v_7, v_8, \ldots, v_{11}$	102, 96, 90, 84, 78
u_1, u_2, u_3, u_4	35, 41, 47, 53	$u_1, u_2, \ldots, u_6$	73, 79, 85, 91, 97, 103
u_5, u_6, u_7	51, 45, 39	$u_7, u_8, \ldots, u_{11}$	101, 95, 89, 83, 77
w_1, w_2, w_3, w_4, w_5	43, 44, 49, 58, 59	$w_1, w_2, \ldots, w_5$	87, 88, 93, 110, 111

В табл. 2 для иллюстрации доказательства утверждения 1 приводятся вычисленные с помощью компьютера трансмиссии вершин графов G_1 и G_2 из построенного бесконечного семейства.

Граф называется *интервально* (*трансмиссионно*) *иррегулярным*, если трансмиссии его вершин образуют интервал. Такие двусвязные графы малого порядка существуют на 9 вершинах (1 граф, интервал [12..20]) и на 11 вершинах (207 графов, интервалы [13..23], [15..25] и [17..27]). Представляет интерес построить бесконечное семейство интервально иррегулярных графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Abiad A., Brimkov B., Erey B., Leshock L., Martinez-Rivera X., Song S. O. S.-Y., Williford J.** On the Wiener index, distance cospectrality and transmission-regular graphs // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 230. P. 1–10.
2. **Alizadeh Y., Andova V., Klavžar S., Škrekovski R.** Wiener dimension: fundamental properties and (5,0)-nanotubical fullerenes // MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 2014. Vol. 72. P. 279–294.
3. **Alizadeh Y., Klavžar S.** Complexity of topological indices: the case of connective eccentric index // MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 2016. Vol. 76. P. 659–667.
4. **Alizadeh Y., Klavžar S.** On graphs whose Wiener complexity equals their order and on Wiener index of asymmetric graphs // Appl. Math. Comput. 2018. Vol. 328. P. 113–118.
5. **Balakrishnan K., Brešar B., Changat M., Klavžar S., Kovše M., Subhamathi A. R.** Computing median and antimedian sets in median graphs // Algorithmica. 2010. Vol. 57. P. 207–216.
6. **Bonchev D.** Shannon's information and complexity // Complexity in chemistry: introduction and fundamentals (D. Bonchev, D. H. Rouvray, eds.). London: Taylor & Francis, 2003. P. 155–187. (Math. Chem. Ser.; Vol. 7).

7. **Dehmer M., Emmert-Streib F.,** eds. Quantitative graph theory: mathematical foundations and applications. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2014. (Discrete Math. Its Appl.).
8. **Dobrynin A. A., Entringer R., Gutman I.** Wiener index of trees: theory and applications // Acta Appl. Math. 2001. Vol. 66, No. 3. P. 211–249.
9. **Dobrynin A. A., Gutman I., Klavžar S., Žigert P.** Wiener index of hexagonal systems // Acta Appl. Math. 2002. Vol. 72, No. 3. P. 247–294.
10. **Dobrynin A. A., Mel'nikov L. S.** Wiener index of line graphs // Distance in molecular graphs — theory (I. Gutman, B. Furtula, eds.). Kragujevac, Serbia: Univ. Kragujevac, 2012. P. 85–121. (Math. Chem. Monogr.; Vol. 12).
11. **Entringer R. C.** Distance in graphs: trees // J. Comb. Math. Comb. Comput. 1997. Vol. 24. P. 65–84.
12. **Entringer R. C., Jackson D. E., Snyder D. A.** Distance in graphs // Czech. Math. J. 1976. Vol. 26. P. 283–296.
13. **Gutman I., Furtula B.,** eds. Distance in molecular graphs — theory. Kragujevac, Serbia: Univ. Kragujevac, 2012. (Math. Chem. Monogr.; Vol. 12).
14. **Gutman I., Furtula B.,** eds. Distance in molecular graphs — applications. Kragujevac, Serbia: Univ. Kragujevac, 2012. (Math. Chem. Monogr.; Vol. 13).
15. **Gutman I., Polansky O. E.** Mathematical concepts in organic chemistry. Berlin: Springer-Verl., 1986.
16. **Knor M., Škrekovski R.** Wiener index of line graphs // Quantitative graph theory: mathematical foundations and applications (M. Dehmer, F. Emmert-Streib, eds.). Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC, 2014. P. 279–301. (Discrete Math. Its Appl.).
17. **Knor M., Škrekovski R., Tepeh A.** Mathematical aspects of Wiener index // Ars Math. Contemp. 2016. Vol. 11, No. 2. P. 327–352.
18. **Krnc M., Škrekovski R.** Centralization of transmission in networks // Discrete Math. 2015. Vol. 338. P. 2412–2420.
19. **Plesnik J.** On the sum of all distances in a graph or digraph // J. Graph Theory. 1984. Vol. 8. P. 1–21.
20. **Smart C., Slater P. J.** Center, median, and centroid subgraphs // Networks. 1999. Vol. 34. P. 303–311.
21. **Trinajstić N.** Chemical graph theory. Boca Raton, FL: CRC Press, 1983.

Добрынин Андрей Алексеевич

Статья поступила
3 мая 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2018. Volume 25, No. 4. P. 5–14

UDC 519.17 DOI: 10.17377/daio.2018.25.620

ON 2-CONNECTED TRANSMISSION IRREGULAR GRAPHS

A. A. Dobrynin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: dobr@math.nsc.ru

Abstract. The transmission of a vertex v in a graph is the sum of the distances from v to all other vertices of the graph. In a transmission irregular graph, the transmissions of all vertices are pairwise distinct. It is known that almost all graphs are not transmission irregular. Some infinite family of transmission irregular trees was constructed by Alizadeh and Klavžar [Appl. Math. Comput., **328**, 113–118, 2018] and the following problem was formulated: Is there an infinite family of 2-connected graphs with the property? In this article, we construct an infinite family of 2-connected transmission irregular graphs. Tab. 2, illustr. 2, bibliogr. 21.

Keywords: graph, vertex transmission, transmission irregular graph, Wiener index.

REFERENCES

1. **A. Abiad, B. Brimkov, B. Erey, L. Leshock, X. Martinez-Rivera, S. O. S.-Y. Song,** and **J. Williford,** On the Wiener index, distance cospectrality and transmission-regular graphs, *Discrete Appl. Math.,* **230**, 1–10, 2017.
2. **Y. Alizadeh, V. Andova, S. Klavžar,** and **R. Škrekovski,** Wiener dimension: Fundamental properties and $(5,0)$-nanotubical fullerenes, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.,* **72**, 279–294, 2014.
3. **Y. Alizadeh** and **S. Klavžar,** Complexity of topological indices: the case of connective eccentric index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.,* **76**, 659–667, 2016.
4. **Y. Alizadeh** and **S. Klavžar,** On graphs whose Wiener complexity equals their order and on Wiener index of asymmetric graphs, *Appl. Math. Comput.,* **328**, 113–118, 2018.
5. **K. Balakrishnan, B. Brešar, M. Changat, S. Klavžar, M. Kovše,** and **A. R. Subhamathi,** Computing median and antimedian sets in median graphs, *Algorithmica,* **57**, 207–216, 2010.

6. **D. Bonchev,** Shannon's information and complexity, in *Complexity in Chemistry: Introduction and Fundamentals,* pp. 155–187, Taylor & Francis, London, 2003 (Math. Chem. Ser., Vol. 7).
7. **M. Dehmer** and **F. Emmert-Streib** (eds.), *Quantitative Graph Theory: Mathematical Foundations and Applications*, CRC Press, Boca Raton, 2014 (Discrete Math. Its Appl.).
8. **A. A. Dobrynin, R. Entringer,** and **I. Gutman,** Wiener index of trees: Theory and applications, *Acta Appl. Math.,* **66**, No. 3, 211–249, 2001.
9. **A. A. Dobrynin, I. Gutman, S. Klavžar,** and **P. Žigert,** Wiener index of hexagonal systems, *Acta Appl. Math.,* **72**, No. 3, 247–294, 2002.
10. **A. A. Dobrynin** and **L. S. Mel'nikov,** Wiener index of line graphs, in *Distance in Molecular Graphs — Theory,* pp. 85–121, Univ. Kragujevac, Kragujevac, 2012 (Math. Chem. Monogr., Vol. 12).
11. **R. C. Entringer,** Distance in graphs: Trees, *J. Combin. Math. Combin. Comput.,* **24**, 65–84, 1997.
12. **R. C. Entringer, D. E. Jackson,** and **D. A. Snyder,** Distance in graphs, *Czechoslov. Math. J.,* **26**, 283–296, 1976.
13. **I. Gutman** and **B. Furtula** (eds.), *Distance in Molecular Graphs — Theory,* Univ. Kragujevac, Kragujevac, 2012 (Math. Chem. Monogr., Vol. 12).
14. **I. Gutman** and **B. Furtula** (eds.), *Distance in Molecular Graphs — Applications,* Univ. Kragujevac, Kragujevac, 2012 (Math. Chem. Monogr., Vol. 13).
15. **I. Gutman** and **O. E. Polansky,** *Mathematical Concepts in Organic Chemistry,* Springer-Verl., Heidelberg, 1986.
16. **M. Knor** and **R. Škrekovski,** Wiener index of line graphs, in *Quantitative Graph Theory: Mathematical Foundations and Applications*, pp. 279–301, CRC Press, Boca Raton, 2014 (Discrete Math. Its Appl.).
17. **M. Knor, R. Škrekovski,** and **A. Tepeh,** Mathematical aspects of Wiener index, *Ars Math. Contemp.,* **11**, No. 2, 327–352, 2016.
18. **M. Krnc** and **R. Škrekovski,** Centralization of transmission in networks, *Discrete Math.,* **338**, 2412–2420, 2015.
19. **J. Plesnik,** On the sum of all distances in a graph or digraph, *J. Graph Theory,* **8**, 1–21, 1984.
20. **C. Smart** and **P. J. Slater,** Center, median, and centroid subgraphs, *Networks,* **34**, 303–311, 1999.
21. **N. Trinajstić,** *Chemical Graph Theory,* CRC Press, Boca Raton, 1983.

Andrey A. Dobrynin

Received
3 May 2018