

ПОЛИЭДРАЛЬНАЯ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТЬ  
НА СИМПЛЕКСЕ: ОТЫСКАНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК  
УБЫВАЮЩИХ РЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ<sup>\*)</sup>

В. И. Шмырёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский гос. университет,  
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

*E-mail:* shvi@math.nsc.ru

**Аннотация.** Исследуется проблема отыскания неподвижной точки для специального класса кусочно-постоянных отображений симплекса в себя, возникающих в связи с отысканием равновесных цен в классической модели обмена и различных её вариациях. Основой рассмотрений является схема полиэдральной комплементарности, являющаяся естественным обобщением линейной комплементарности. В данной работе изучаются отображения, возникающие из рассмотрений моделей с фиксированными бюджетами. Отображения этого класса обладают особым свойством монотонности (логарифмическая монотонность), что позволяет доказать их потенциальность. Показано, что задача отыскания неподвижных точек таких отображений может быть сведена к оптимизационным задачам, для которых удаётся предложить конечные алгоритмы субоптимизации. Приводится описание двух алгоритмов. Ил. 3, библиогр. 20.

**Ключевые слова:** полиэдральный комплекс, комплементарность, монотонность, потенциальность отображения, неподвижная точка, субоптимизация, алгоритм.

### Введение

Работа посвящена исследованию вопроса о неподвижных точках специального класса точечно-множественных кусочно-постоянных отображений, порождаемых проблемой полиэдральной комплементарности [7]

---

<sup>\*)</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00108), целевой программы Президиума РАН (проект № 227) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (проект № 7Б)

© В. И. Шмырёв, 2019

на симплексе. Вопрос имеет значительную предысторию, восходящую к работе автора [4], в которой данный вопрос рассматривался в  $\mathbb{R}^n$  в предположении монотонности отображений. Изначально вопрос возник при рассмотрении проблемы экономического равновесия в линейных моделях обмена. Для простейшей из них (модель Фишера) Айзенберг и Гейл [16] получили сведение проблемы к оптимизационной задаче, что вызвало интерес к численному отысканию равновесия. Автором настоящей работы был предложен принципиально иной подход [5], в большей мере отражающий природу экономического равновесия. Этот подход не имеет аналогов и приводит к новым вариантам оптимизационных задач. На его основе были получены конечные алгоритмы отыскания равновесных цен не только для классического варианта линейной модели обмена [6], но и для новых более общих моделей такого рода [9].

Модель Фишера по-прежнему привлекает внимание исследователей. Оптимизационная задача [16] была использована многими авторами для разработки алгоритмов отыскания равновесных цен. Обзор по этой теме можно найти в [15], где рассмотрен полиномиальный алгоритм решения проблемы. В [13, 14] на основе предложенного варианта двойственности исследована связь оптимизационной задачи [16] с задачей, полученной посредством полиэдральной комплементарности [5]. Более сложный вариант оптимизационной задачи и оригинальный алгоритм симплексного типа предложены в [11]. Преимущество подхода полиэдральной комплементарности состоит в естественной экономической и геометрической интерпретации его логической схемы, а также особой простоте реализации полученных на его основе алгоритмов [5, 8], использующих лишь аппарат классической транспортной задачи. В этом смысле результат является экстремальным. Едва ли он может быть улучшен.

Предложенный подход полиэдральной комплементарности позволяет легко учитывать и дополнительные финансовые ограничения на закупки отдельных товаров. Разработанные конечные алгоритмы, в свою очередь, позволяют предложить итеративные методы, в частности, для моделей с кусочно-линейными сепарабельными функциями предпочтения участников [18]. Такого рода кусочно-линейная модель обмена (spending constraint model) рассмотрена в [17, 20]. Сведение к оптимизационной задаче, полученное в рамках подхода полиэдральной комплементарности [5], было использовано в [12] для разработки быстро сходящихся итеративных алгоритмов для модели Фишера как в классическом варианте, так и в варианте spending constraint.

Целью данной работы является исследование математической первоосновы подхода полиэдральной комплементарности. Рассматривается класс логарифмически монотонных убывающих кусочно-постоянных

многозначных отображений симплекса цен в себя. Автором в [10] доказана потенциальность таких отображений. В данной работе показано, как, используя данный результат, можно свести задачу о неподвижной точке к двум оптимизационным задачам. Эти задачи связаны отношением двойственности аналогично двойственным задачам линейного программирования. Для их решения приводится два конечных алгоритма, основанных на идеях субоптимизации, подобно алгоритмам квадратичного программирования.

В работе дано полное изложение (с доказательствами и обсуждением) результатов, которые тезисно были представлены на конференции OPTIMA-2017 [19].

### 1. Задача полиэдральной комплементарности

Приведём необходимые описания исследуемых объектов и отображений, введённых автором в [10]. Будем пользоваться понятиями комбинаторной топологии [1, 2].

Под *многогранником* далее понимается множество в  $\mathbb{R}^n$ , задаваемое некоторой системой линейных уравнений и неравенств. *Полиэдральный комплекс*  $\omega$  — это совокупность многогранников такая, что любая грань многогранника из  $\omega$  также принадлежит  $\omega$ . Элементы комплекса называют *клетками*. Бинарное отношение « $\Omega_1$  является гранью  $\Omega_2$ » задаёт в  $\omega$  отношение частичного порядка:  $\Omega_1 \prec \Omega_2$ .

Пусть два полиэдральных комплекса  $\omega$  и  $\xi$  имеют одинаковое число клеток  $r$  и  $R \subset \omega \times \xi$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между клетками комплексов:  $R = \{(\Omega_i, \Xi_i)\}_{i=1}^r$ , где  $\Omega_i \in \omega$ ,  $\Xi_i \in \xi$ .

Комплексы  $\omega$  и  $\xi$  находятся в *двойственности по соответствию*  $R$ , если отношения порядка в этих комплексах взаимно противоположны:

$$\Omega_j \prec \Omega_i \iff \Xi_j \succ \Xi_i. \quad (1)$$

*Задача полиэдральной комплементарности:* в предположении (1) найти точку из пересечения клеток некоторой пары  $(\Omega_j, \Xi_j)$ .

Отметим, что невырожденные задачи линейной комплементарности являются частным случаем задач полиэдральной комплементарности, в которых полиэдральные комплексы  $\omega$  и  $\xi$  формируются из граней двух симплексных конусов. Таким образом речь идёт о естественном обобщении линейной комплементарности.

Рис. 1 иллюстрирует задачу полиэдральной комплементарности в  $\mathbb{R}^2$ . Комплексы  $\omega$  и  $\xi$  содержат по 7 клеток. Решением задачи является точка  $x^*$ , в которой пересекаются отвечающие друг другу клетки  $\Omega_6$  и  $\Xi_6$ .

Задача полиэдральной комплементарности в приведённой формулировке впервые рассматривалась автором в [7].

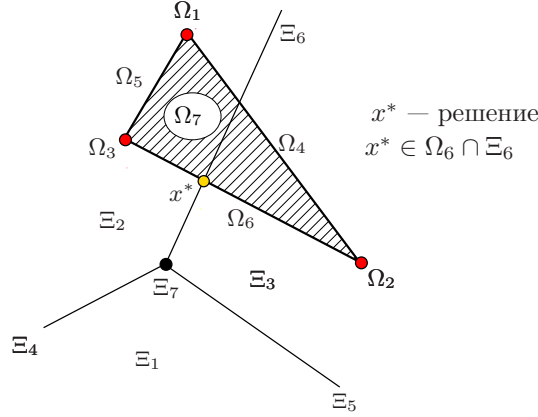


Рис. 1. Полиэдральная комплементарность

## 2. Класс задач полиэдральной комплементарности на симплексе

Пусть  $\sigma$  —  $(n - 1)$ -мерный симплекс в  $\mathbb{R}^n$ :

$$\sigma = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n p_j = 1 \right\}.$$

В данной работе исследуется специальный класс задач полиэдральной комплементарности на симплексе  $\sigma$ , обладающих особым свойством логарифмической монотонности. Рассмотрению задач этого класса предположим описание более общего класса.

Клетки полиэдральных комплексов  $\omega$  и  $\xi$  в общей задаче полиэдральной комплементарности на симплексе задаются особым образом. Полномерные клетки  $\Omega_i \in \omega$  задаются условием  $p \in \sigma$  и системами линейных неравенств вида

$$\sum_{j \in S} h_j p_j + \sum_{k \notin S} h_k p_k \geq \gamma, \quad (2)$$

где  $S \neq \emptyset$ ,  $S \subset J = \{1, \dots, n\}$ , а коэффициенты  $h_j, h_k$  подчинены условию  $h_j > 0$ ,  $j \in S$ , и  $h_k \leq 0$ ,  $k \notin S$ .

Естественно предполагать, что уравнение, отвечающее произвольному неравенству (2), задаёт аффинный носитель некоторой  $(n - 2)$ -мерной клетки комплекса  $\omega$ . Предполагается, что клетки  $\Omega \in \omega$  образуют разбиение симплекса  $\sigma$ : они не пересекаются по относительным внутренностям  $\Omega^\circ$  и покрывают весь симплекс, примыкая друг к другу по граням.

Клетки комплекса  $\xi$  являются подмножествами открытого симплекса  $\sigma^\circ$  — внутренности симплекса  $\sigma$ . Полномерные из них задаются условием  $p \in \sigma^\circ$  и неравенствами вида

$$p_j/p_k \geq \gamma_{jk}. \quad (3)$$

Полномерной клетке  $\Omega \in \omega$  в комплексе  $\xi$  соответствует вершина  $q$ , а  $(n-2)$ -мерной грани клетки  $\Omega$  — примыкающая к  $q$  одномерная клетка комплекса  $\xi$ .

Для задания вершины  $q$  в  $\xi$  нужно, чтобы неравенства некоторого набора из  $n-1$  неравенств (3) выполнялись как равенства. Такой набор должен обладать условием полноты, определяя все условия пропорциональности для компонент вектора  $q$ . Вместе с требованием  $\sum_{j=1}^n q_j = 1$  это

уже определит точку  $q$  однозначно. Парам  $(j, k)$ , отвечающим условиям такого набора, можно сопоставить дуги  $u = (j, k)$  ориентированного графа-дерева с множеством вершин  $J = \{1, \dots, n\}$ .

Одномерным клеткам комплекса  $\Xi \in \xi$  (рёбрам) будут отвечать наборы из  $n-2$  условий указанного типа и графы, состоящие из двух компонент связности, которые также будут деревьями. Разбиению графа на две компоненты связности отвечает разбиение всего множества вершин  $J$  на два непересекающихся подмножества:  $Q$  и  $J/Q$ . Для точек  $\tilde{q} \in \Xi$  координаты  $\tilde{q}_j$  на каждой из компонент связности будут сохранять взаимные пропорции, задаваемые любой из точек клетки  $\Xi$ , в частности, вершиной  $q$ :

$$\tilde{q}_j = tq_j, \quad j \in Q, \quad (4)$$

$$\tilde{q}_k = \tau q_k, \quad k \in J/Q, \quad (5)$$

где  $t$  и  $\tau$  — параметры, связь между которыми задаётся условием

$$\sum_{j=1}^n \tilde{q}_j = 1.$$

Таким образом, одномерные клетки  $\Xi \in \xi$  (рёбра комплекса  $\xi$ ) характеризуются разбиениями множества  $J$  на два непересекающихся подмножества, как это имеет место и для отвечающих им  $(n-2)$ -мерных клеток  $\Omega \in \omega$ .

**Условие согласования** [10]. Одномерная клетка комплекса  $\xi$  и отвечающая ей  $(n-2)$ -мерная клетка комплекса  $\omega$  задают одно и то же разбиение множества  $J$  на две части:  $\{S, J \setminus S\}$  из (2) совпадает с  $\{Q, J \setminus Q\}$  из (4), (5).

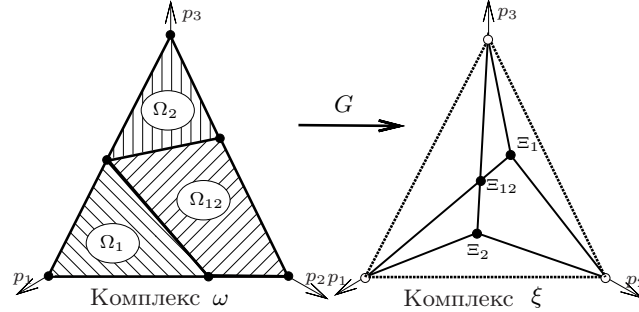


Рис. 2. Полиэдральные комплексы модели обмена

Это условие задаёт уже однозначно все другие соответствия между клетками комплексов  $\omega$  и  $\xi$ : пересечению клеток комплекса  $\omega$  отвечает выпуклая оболочка соответствующих клеток комплекса  $\xi$ .

На рис. 2 представлены полиэдральные комплексы на симплексе цен, возникающие при исследовании модели обмена, когда число участников равно 2, а число товаров — 3. Комплексы содержат по 17 клеток, при этом в комплексе  $\omega$  имеется три полномерных клетки  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_{12}$ , которым в комплексе  $\xi$  соответствуют три вершины  $\Xi_1, \Xi_2, \Xi_{12}$ .

### 3. Монотонные регулярные отображения

С задачей полиэдральной комплементарности естественно связать точечно-множественное отображение  $G$ , сопоставляющее каждой точке  $p$  из относительной внутренней  $\Omega^\circ$  клетки  $\Omega \in \omega$  соответствующую клетку  $\Xi$ :  $G(p) = \Xi$ ,  $p \in \Omega^\circ$ . В результате задача полиэдральной комплементарности принимает вид задачи о неподвижной точке: *найти точку  $p$ , принадлежащую  $G(p)$* . Легко видеть, что отображение  $G$  непрерывно сверху. При этом граничным точкам симплекса  $\sigma$  отвечают незамкнутые клетки комплекса  $\Xi$ . Поэтому отображение  $G$  условиям теоремы Какутани не удовлетворяет. Но если незначительно уменьшить симплекс  $\sigma$ , заменив условия  $p_j \geq 0$  на  $p_j \geq \varepsilon$ , то все образы  $G(p)$  для таких  $p$  будут уже замкнутыми, и теорема Какутани применима. Это приводит к рассмотрению сужения отображения  $G$  на открытый симплекс  $\sigma^\circ$ , которое будем обозначать через  $G^\circ$ . Таким образом, в рассматриваемой задаче полиэдральной комплементарности решение всегда существует и для его отыскания нужно найти неподвижную точку отображения  $G^\circ$ .

В дальнейшем будем предполагать, что клетки комплекса  $\xi$  покрывают весь открытый симплекс  $\sigma^\circ$ .

**Определение 1** [10]. Будем говорить о *регулярной задаче полиэдральной комплементарности*, если неравенства (2) имеют вид

$$\sum_{j \in S} p_j - \sum_{k \notin S} p_k \geq \gamma \quad (6)$$

и  $-1 \leq \gamma \leq 1$ . Соответствующее отображение  $G$  будем также называть *регулярным*.

Рассмотрения идут на симплексе  $\sigma$ , поэтому для  $p \in \sigma$  выполняется равенство  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ , которое можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{j \in S} p_j + \sum_{k \notin S} p_k = 1.$$

Добавляя это равенство к (6), получаем эквивалентное неравенство

$$\sum_{j \in S} p_j \geq \tilde{\gamma}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma + 1}{2}. \quad (7)$$

В классе регулярных отображений выделяется подкласс локально монотонных, определение которых близко к определению монотонных отображений в  $\mathbb{R}^n$ . Для  $q = (q_1, \dots, q_n) > 0$  введём вектор

$$\ln q = (\ln q_1, \dots, \ln q_n).$$

**Определение 2** [10]. Будем говорить, что *точечно-множественное отображение*  $G: \sigma \rightarrow 2^{\sigma^o}$  *логарифмически монотонно убывающее*, если

$$(p^2 - p^1, \ln q^2 - \ln q^1) \leq 0 \quad \forall p^1, p^2 \in \sigma, \forall q^1 \in G(p^1), q^2 \in G(p^2).$$

**Определение 3** [10]. Полномерные клетки  $\Omega_1, \Omega_2 \in \omega$  называются *соседними*, если они имеют общую  $(n - 2)$ -мерную грань. Отвечающие им в  $\xi$  вершины  $q^1, q^2$  также именуются *соседними* (в  $\xi$ ).

Если требовать выполнение приведённого выше условия монотонности лишь для любых соседних клеток  $\Omega_1, \Omega_2$ , т. е. при  $p^1 \in \Omega_1^o, p^2 \in \Omega_2^o$ , получим определение *локально логарифмически монотонно убывающего отображения*. Смена знака неравенства на противоположный даёт определение логарифмически монотонно возрастающего отображения.

Используемую терминологию можно пояснить следующим образом. Пусть отображение возрастающее, полномерные клетки  $\Omega_1, \Omega_2$  соседние и им соответствуют вершины  $q^1, q^2$ . Принимая  $h = \ln q^2 - \ln q^1$ , имеем  $(h, p^2 - p^1) \geq 0$ , т. е.  $h$  — нормаль гиперплоскости, разделяющей клетки  $\Omega_1, \Omega_2$ . Для точек  $q^1, q^2$  будут также выполняться соотношения

$$(h, q^2 - q^1) = (\ln q^2 - \ln q^1, q^2 - q^1) \geq 0$$

ввиду известного свойства функции  $(q, \ln q)$ .

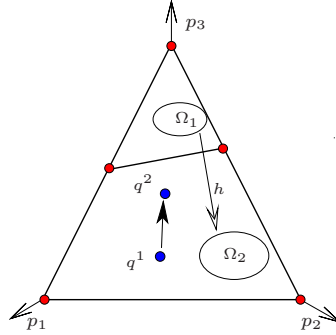


Рис. 3. Локально убывающее отображение

Таким образом, взаимное расположение соседних в  $\xi$  вершин  $q^1 = G(p^1)$ ,  $q^2 = G(p^2)$  будет таким же, как и расположение клеток  $\Omega_1, \Omega_2$ : из того, что клетка  $\Omega_2$  расположена по направлению  $h$  «дальше», чем клетка  $\Omega_1$ , следует, что по этому направлению точка  $q^2$  также «дальше», чем  $q^1$ ; рост аргумента влечёт рост образа. Это свойство возрастающих функций. Тем самым локально логарифмически возрастающие отображения являются локально возрастающими в этом более широком понимании.

На рис. 3 приведён пример локально убывающего отображения. Точки  $q^1, q^2$  являются образами множеств  $\Omega_1^\circ, \Omega_2^\circ$ .

**Определение 4** [10]. Логарифмически монотонно возрастающее отображение называется *потенциальным*, если существует заданная на  $\sigma$  кусочно-линейная выпуклая функция  $\bar{f}$  такая, что

$$\forall p \in \sigma \quad \partial \bar{f}(p) = \{\ln q + t\theta \mid q \in G(p), t \in R^1\}, \quad (8)$$

где  $\theta = (1, \dots, 1)$ , а  $\partial \bar{f}(p)$  — субдифференциал функции  $\bar{f}$  в точке  $p$ .

Для убывающих отображений следует требовать вогнутость функции  $\bar{f}$ , корректируя соответствующим образом определение субдифференциала функции.

**Теорема 1** [10]. Локально логарифмически монотонное отображение  $G^\circ$  потенциально.

#### 4. Сведение задачи о неподвижной точке убывающего отображения к задаче оптимизации

В случае убывающих отображений имеет место единственность неподвижной точки. Действительно, если  $p^1, p^2$  — две неподвижные точки,



т. е.  $p^1 \in G(p^1)$ ,  $p^2 \in G(p^2)$ , то из определения логарифмически убывающего отображения имеем

$$(p^2 - p^1, \ln p^2 - \ln p^1) \leq 0,$$

что эквивалентно неравенству

$$(p^2, \ln p^2 - \ln p^1) + (p^1, \ln p^1 - \ln p^2) \leq 0.$$

Оба слагаемых в левой части неотрицательны ввиду известного свойства функции  $(p, \ln p)$  (энтропии):

$$\begin{aligned} (p, \ln p) &\geq (p, \ln q) \quad \forall p, q > 0, \\ (p, \ln p) &= (p, \ln q) \iff p = q. \end{aligned}$$

В результате оба слагаемых равны нулю, откуда  $p^1 = p^2$ .

Покажем, что задача отыскания неподвижной точки в рассматриваемом случае сводится к задаче минимизации выпуклой функции на  $\sigma^\circ$ . Прежде всего, следует отметить, что неподвижная точка не может лежать на границе симплекса  $\sigma$ . Следовательно, речь идёт о неподвижной точке отображения  $G^\circ$ . Введём для  $p > 0$  функцию  $h(p) = (p, \ln p)$ . Обозначим через  $\bar{h}(p)$  сужение этой функции на  $\sigma^\circ$ . Рассмотрим функцию

$$\varphi(p) = \bar{h}(p) - \bar{f}(p),$$

где  $\bar{f}(p)$  — потенциальная функция отображения  $G^\circ$ . Функция  $\bar{h}(p)$  строго выпуклая, а  $\bar{f}(p)$  — вогнутая кусочно-линейная. Поэтому  $\varphi(p)$  будет строго выпуклой. Несложно убедиться, что у функции  $\varphi(p)$  в  $\sigma^\circ$  существует, и притом единственная, точка минимума. Это является следствием того, что производная функции одной переменной  $(p_j, \ln p_j)$  стремится к  $+\infty$  при  $p_j \rightarrow +0$ , а функция  $\bar{f}(p)$  кусочно-линейная.

**Теорема 2.** *Неподвижная точка отображения  $G$  совпадает с точкой минимума функции  $\varphi(p)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\hat{p}$  — точка минимума функции  $\varphi(p)$ . Это означает, что  $0 \in \partial\varphi(\hat{p})$ . Имеем  $\partial\varphi(\hat{p}) = \partial\bar{h}(\hat{p}) - \partial\bar{f}(\hat{p})$ . С учётом того, что  $\hat{p} \in \sigma^\circ$ ,

$$\partial\bar{h}(\hat{p}) = \{\ln \hat{p} + t\theta \mid t \in R^1\}, \quad (9)$$

$$\partial\bar{f}(\hat{p}) = \{\ln q + t\theta \mid q \in G^\circ(\hat{p}), t \in R^1\}, \quad (10)$$

получаем  $\ln \hat{p} + t\theta = \ln \hat{q}$  при некотором  $\hat{q} \in G^\circ(\hat{p})$  и подходящем  $t = t^\circ$ . Однако  $\hat{p}, \hat{q} \in \sigma^\circ$ , поэтому  $t^\circ = 0$  и  $\hat{p} = \hat{q}$ , откуда  $\hat{p} \in G^\circ(\hat{p})$ , т. е.  $\hat{p}$  — неподвижная точка отображения  $G^\circ$ .

Покажем обратное. Пусть  $\hat{p} \in G^\circ(\hat{p})$ . Тем самым  $\ln \hat{p} \in \text{Ln}(G^\circ(\hat{p}))$ . Из (10), (9) получаем  $\partial\bar{h}(\hat{p}) \subset \partial\bar{f}(\hat{p})$ , а значит,

$$0 \in \partial\bar{h}(\hat{p}) - \partial\bar{f}(\hat{p}) = \partial\varphi(\hat{p}).$$

Ввиду выпуклости функции  $\varphi(p)$  это означает, что  $\hat{p}$  — точка минимума этой функции. Теорема 2 доказана.

Отображение  $G$  обратимо, и его неподвижная точка будет таковой и для обратного отображения  $G^{-1}$ . Для  $G^{-1}$  потенциальной функцией будет  $\bar{f}^*$  — сопряжённая к функции  $f$ . При этом для вогнутой функции  $f(x)$  сопряжённая задаётся формулой

$$f^*(y) = \inf_x \{(y, x) - f(x)\}.$$

Субдифференциальные отображения этих функций взаимно обратны [3, с. 235]:

$$y \in \partial f(x) \iff x \in \partial f^*(y).$$

Переход к отображению  $G^{-1}$  позволяет получить новое утверждение:

**Теорема 3.** *Неподвижная точка отображения  $G$  совпадает с точкой максимума на  $\sigma^\circ$  вогнутой функции  $\psi(q) = \bar{f}^*(\ln q)$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\hat{p} \in \sigma^\circ$  — неподвижная точка отображения  $G$ , т. е.  $\hat{p} \in G(\hat{p})$ . Это означает, что  $\ln \hat{p} \in \text{Ln}(G^\circ(\hat{p}))$ , а значит,  $\ln \hat{p} \in \partial \bar{f}(\hat{p})$ . Из этого следует, что

$$\hat{p} \in \partial \bar{f}^*(\ln \hat{p}).$$

Вместе с этим  $\ln \hat{p} \in \partial \bar{h}(\hat{p})$ , тем самым

$$\hat{p} \in \partial \bar{h}^*(\ln \hat{p}).$$

Отсюда следует, что  $0 \in \partial g(\hat{x})$  для функции  $g(x) = \bar{h}^*(x) - \bar{f}^*(x)$  при  $\hat{x} = \ln \hat{p}$ . Это означает, что  $\hat{x} = \ln \hat{p}$  является точкой минимума выпуклой функции  $g(x)$ . Для функции  $\bar{h}^*$  известна (см. [3, с. 166]) формула

$$\bar{h}^*(x) = \ln \sum_j e^{x_j}, \quad x = (x_1, \dots, x_n). \quad (11)$$

Для  $x = \ln p$  при любом  $p \in \sigma^\circ$  получаем

$$\bar{h}^*(\ln p) = \ln \sum_j e^{\ln p_j} = \ln \sum_j p_j = \ln 1 = 0.$$

Таким образом,

$$\bar{h}^*(\ln p) \equiv 0 \quad \text{при } p \in \sigma^\circ \quad (12)$$

и  $g(\ln p) = -\bar{f}^*(\ln p)$ . Получили требуемое:  $\hat{x} = \ln \hat{p}$  является точкой минимума выпуклой функции  $-\bar{f}^*(x)$ , а значит, точка  $\hat{p}$  — точка максимума вогнутой функции  $\psi(p) = \bar{f}^*(\ln p)$ .

Покажем обратное. Для этого следует повторить выкладки в обратном порядке. Пусть  $\hat{p}$  доставляет максимум функции  $\psi(p)$  и тем самым

$\hat{x} = \ln \hat{p}$  доставляет минимум функции  $-\bar{f}^*(x)$ , а с учётом (12) — минимум функции  $g(x) = \bar{h}^*(x) - \bar{f}^*(x)$ . Из этого следует, что

$$0 \in \partial g(\hat{x}) = \partial \bar{h}^*(\hat{x}) - \partial \bar{f}^*(\hat{x}).$$

Но из (11) для  $x = \hat{x} = \ln \hat{p}$  вытекает, что множество  $\partial \bar{h}^*(\hat{x})$  состоит из одного вектора  $q$  с компонентами

$$q_j = \frac{e^{\hat{x}_j}}{\sum_j e^{\hat{x}_j}} = \frac{\hat{p}_j}{\sum_j \hat{p}_j}.$$

Ввиду того, что  $\hat{p} \in \sigma$ , имеем  $q = \hat{p}$ . Таким образом,  $\partial \bar{h}^*(\hat{x}) = \{\hat{p}\}$  и, следовательно,  $\hat{p} \in \partial \bar{f}^*(\ln \hat{p})$ , что эквивалентно тому, что

$$\ln \hat{p} \in \partial \bar{f}(\hat{p}).$$

Тем самым  $\hat{p}$  — неподвижная точка отображения  $G$ . Теорема 3 доказана.

Доказанные теоремы показывают, что для логарифмически монотонно убывающих отображений верны соотношения двойственности, как в задачах линейного программирования.

**Утверждение 1.** Для функций  $\varphi(p)$  и  $\psi(q)$  выполняется неравенство

$$\varphi(p) \geq \psi(q) \quad \forall p, q \in \sigma^\circ,$$

которое обращается в равенство, лишь когда  $p = q$  — неподвижная точка отображения  $G$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения легко получается безотносительно к теоремам 2 и 3 следующим образом.

Известно, что

$$(p, \ln p) \geq (p, \ln q) \quad \forall p, q \in \sigma^\circ,$$

и здесь имеет место равенство лишь при  $p = q$ .

Для сопряжённых вогнутых функций имеем

$$(x, y) \geq f(x) + f^*(y) \quad \forall p, q \in \sigma^\circ,$$

и равенство здесь достигается лишь при  $y \in \partial f(x)$ .

Принимая в этих выкладках  $x = p$ ,  $y = \ln q$ , получим

$$(p, \ln q) \geq f(p) + f^*(\ln q) \quad \forall p, q \in \sigma^\circ,$$

и равенство возможно лишь при  $\ln q \in \partial f(p)$ . С учётом того, что  $(p, \ln p) \geq (p, \ln q)$ , отсюда получаем

$$\varphi(p) = (p, \ln p) - f(p) \geq f^*(\ln q) = \psi(q),$$

и равенство здесь имеет место, лишь когда  $\ln p \in \partial f(p)$ , т. е. когда  $p$  — неподвижная точка отображения  $G$ . Утверждение 1 доказано.

### 5. Методы отыскания неподвижных точек

Теоремы 2 и 3 позволяют предложить конечные процедуры отыскания неподвижных точек исследуемых отображений. Эти процедуры базируются на идее субоптимизации, лежащей в основе метода минимизации квазивыпуклой функции на многограннике. В рассматриваемом случае используется тот факт, что множество  $\sigma^\circ$  снабжено клеточной структурой подобно граневой структуре многогранника.

Докажем предварительно вспомогательное утверждение. Рассмотрим пару отвечающих друг другу клеток  $\Omega \in \omega$ ,  $\Xi \in \xi$ . Пусть  $L, M$  — соответствующие аффинные носители этих клеток:  $L \supset \Omega$ ,  $M \supset \Xi$ .

**Лемма 1.** *Многообразия  $L$  и  $M$  пересекаются в единственной точке множества  $\sigma^\circ$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Уточним прежде всего вид линейной системы уравнений, задающей  $L$  — аффинный носитель клетки  $\Omega \in \omega$ .

Клетке  $\Omega$  отвечает определённая клетка  $\Xi \in \xi$ . Аффинный носитель  $M$  этой клетки задаётся некоторым набором линейно независимых уравнений, отвечающих активным (для точек из  $\Xi$ ) неравенствам (3). С рассматриваемой парой клеток  $(\Omega, \Xi)$  свяжем граф  $\tilde{\Gamma}$  с множеством вершин  $J$  и множеством дуг вида  $(j, k)$ , отвечающих уравнениям выделенного набора. Из условий на рассматриваемые комплексы  $\omega$  и  $\xi$  следует, что для клетки  $\Omega$  можно указать содержащую её цепь подчинённости клеток  $\Omega_0 \prec \dots \prec \Omega_{(n-1)}$ , в которой  $\Omega_0$  является 0-мерной клеткой, т. е. вершиной комплекса, а  $\Omega_{(n-1)}$  — полномерной клеткой. Соответствующие графы будут характеризоваться нарастающим количеством дуг: при переходе от  $\Omega_s$  к  $\Omega_{(s+1)}$  в соответствующий граф добавляется ещё одна дуга, соединяющая две компоненты связности графа. Вершине  $\tilde{\Omega}$  отвечает граф  $\tilde{\Gamma}$ , все вершины которого изолированы, а клетке  $\hat{\Omega}_{(n-1)}$  — полный граф-дерево  $\hat{\Gamma}$ . Аффинный носитель вершины  $\tilde{\Omega}$  имеет тривиальное описание в виде системы уравнений:

$$p_j = d_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Графы, отвечающие клеткам большей размерности, распадаются на компоненты связности. Пусть  $\tau$  — число компонент графа  $\tilde{\Gamma}$  и  $J = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_\tau$  — получающееся разбиение множества вершин. Несложно убедиться, что линейная система, задающая  $L$ , будет эквивалентна системе вида

$$\sum_{j \in Q_\nu} p_j = \sum_{j \in Q_\nu} d_j, \quad \nu = 1, \dots, \tau. \quad (14)$$

Это следует из таких рассуждений. Граф  $\tilde{\Gamma}$  получается из графа  $\hat{\Gamma}$  удалением некоторых дуг. Каждой удаляемой дуге отвечает уравнение, получающееся из неравенства (7):

$$\sum_{j \in S} p_j = \tilde{\gamma}, \quad (15)$$

где  $S$  — одно из двух подмножеств, возникающих при разбиении  $J$  в результате удаления дуги. Результирующая система уравнений, задающая аффинный носитель  $L$ , будет обладать той особенностью, что все переменные  $p_j$  группируются по компонентам связности и фигурируют в системе в качестве слагаемых сумм вида  $\sum_{j \in J_\nu} p_j$ , где  $J_\nu$  — множество

вершин  $\nu$ -й компоненты связности. Это позволяет переписать систему относительно новых переменных  $w_\nu = \sum_{j \in J_\nu} p_j$ . Связи между этими пе-

ременными можно охарактеризовать, если ввести новый граф  $\check{\Gamma}$ , сопоставляя каждой компоненте связности вершину и вводя связи между вершинами в соответствии с исключаемыми дугами: если исключаемая дуга соединяет компоненты связности  $\nu_1, \nu_2$  исходного графа  $\tilde{\Gamma}$ , то в графе  $\check{\Gamma}$  ей будет отвечать дуга  $(\nu_1, \nu_2)$ . Таким образом, каждой вершине отвечает своя переменная  $w_\nu$ , а примыкающей дуге — уравнение. Добавляя уравнение  $\sum_{\nu=1}^{\tau} w_\nu = 1$ , которое следует из  $\sum_{j \in J} p_j = 1$ , получаем

систему из  $\tau$  уравнений с  $\tau$  неизвестными. Граф  $\check{\Gamma}$ , как и граф  $\tilde{\Gamma}$ , также является деревом, а возникающая система для переменных  $w_\nu$  имеет треугольную структуру. В результате все переменные определяются последовательно. Несложно убедиться в том, что при удалении новой дуги из графа  $\tilde{\Gamma}$  какая-то из компонент связности распадётся на две новых компоненты, что приведёт к замене соответствующей переменной суммой двух новых переменных и появлению нового уравнения. Обратная операция (добавление новой дуги) приводит к сложению двух уравнений системы и замене суммы двух переменных одной. Отсюда и следует вид системы (14).

Вернёмся к доказательству леммы. Условия, описывающие соответствующую клетку  $\Xi \in \xi$ , задают координаты  $q_j$  на каждой компоненте связности с точностью до положительного множителя:

$$q_j = t_\nu \bar{q}_j, \quad j \in Q_\nu.$$

Множители  $t_\nu$  определяются из соответствующего уравнения (14) после подстановки  $p_j = q_j$ . Это и даст однозначно точку пересечения многообразий  $L$  и  $M$ . Лемма 1 доказана.

Пусть  $\Omega \in \omega$ ,  $\Xi \in \xi$ ,  $L \supset \Omega$ ,  $M \supset \Xi$  такие, как выше, и  $r$  — точка пересечения многообразий  $M$  и  $L$ . Сужая, если нужно, клетку  $\Omega$ , будем считать, что  $r \in \Omega^\circ$ . Как следует из [10], функция  $\bar{f}$  на каждой полномерной клетке  $\Omega_i$  совпадает с некоторой линейной функцией  $f_i$ . Выделим полный набор полномерных клеток  $\Omega_i$ ,  $i \in \hat{I}$ , содержащих  $\Omega$ . Рассмотрим соответствующий набор функций  $f_i$ ,  $i \in \hat{I}$ , и функцию

$$f_\wedge(p) = \min_{i \in \hat{I}} f_i(p).$$

Пусть  $\bar{f}_\wedge$  — её сужение на  $\sigma^\circ \cap M$ :

$$\bar{f}_\wedge = \begin{cases} f_\wedge(p), & \text{если } p \in \sigma^\circ \cap M, \\ -\infty & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть, как и выше,  $h(p) = (p, \ln p)$  и  $\bar{h}(p)$  — сужение этой функции на  $\sigma^\circ$ . Рассмотрим функцию

$$\hat{\varphi}(p) = \bar{h}(p) - \bar{f}_\wedge(p).$$

**Теорема 4.** Точка  $r$  является точкой минимума функции  $\hat{\varphi}(p)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В данном случае множество  $\partial \bar{f}_\wedge(p)$  одно и то же для всех точек  $p \in L$ . Несложно убедиться в том, что оно совпадает с множеством

$$\{\ln q + t\theta \mid q \in M, t \in R^1\}.$$

Из  $r \in L$  теперь следует  $\{\ln r + t\theta\} \subset \partial \bar{f}_\wedge(r)$ . Однако

$$\{\ln r + t\theta\} = \partial \bar{h}(r).$$

Тем самым  $\partial \bar{h}(r) \subset \partial \bar{f}_\wedge(r)$ , а значит,  $0 \in \partial(\bar{h} - \bar{f}_\wedge)(r) = \partial \hat{\varphi}(r)$ . Ввиду выпуклости функции  $\hat{\varphi}$  получаем требуемое — точка  $r$  является точкой минимума этой функции. Теорема 4 доказана.

**Замечание 1.** Следует отметить, что для  $p \in \Omega$  имеем  $f_\wedge(p) = f(p)$ ,  $\bar{f}_\wedge(p) = \bar{f}(p)$ , а значит,  $\hat{\varphi}(p) = \varphi(p)$ .

Введём в рассмотрение функцию  $f_\vee(p)$ :

$$f_\vee(p) = \begin{cases} f(p), & \text{если } p \in \Omega, \\ -\infty, & \text{если } p \notin \Omega. \end{cases}$$

Пусть  $f_\vee^*$  — сопряжённая к этой функции.

**Теорема 5.** Точка  $r$  является точкой максимума функции  $\psi_\vee(q) = f_\vee^*(\ln q)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, выделим множество  $\widehat{I}$ , отвечающее набору полномерных клеток  $\Omega_i$ , содержащих точку  $r$ . Не ограничивая общности, можно считать, что клетка  $\Omega$  является пересечением этих клеток, значит,  $r \in \Omega^\circ$ . Имеем

$$\partial \bar{f}(r) = \{\ln q + t\theta \mid q \in \Xi, t \in R^1\}.$$

Несложно убедиться, что при переходе от  $\bar{f}(r)$  к  $f_\vee(r)$  в этой формуле  $\Xi$  заменится на  $M \cap \sigma^\circ$ :

$$\partial f_\vee(r) = \{\ln q + t\theta \mid q \in M \cap \sigma^\circ, t \in R^1\}.$$

Но  $r \in M$ , тем самым  $\ln r \in \partial f_\vee(r)$ , а  $r \in \partial f_\vee^*(\ln r)$ . С другой стороны,  $r \in \partial \bar{h}^*(\ln r)$ . В результате имеем  $0 \in \partial(\bar{h}^* - f_\vee^*)(\ln r)$ . Как уже отмечалось в (12),  $\bar{h}^*(\ln p) \equiv 0$  при  $p \in \sigma^\circ$ . В итоге  $0 \in \partial(f_\vee^*)(\ln r)$ . Это означает, что точка  $z = \ln r$  доставляет максимум вогнутой функции  $f_\vee^*(z)$ , а следовательно, точка  $r$  доставляет максимум функции  $\psi_\vee(q) = f_\vee^*(\ln q)$ . Теорема 5 доказана.

**Замечание 2.** Для точек  $q \in \Xi$ , ввиду того, что  $\Xi \subset L$ , имеем  $f_\vee^*(\ln q) = \bar{f}^*(\ln q)$ , а значит,  $\psi_\vee(q) = \psi(q)$ .

**5.1. Методы субоптимизации.** Для реализации процедур оптимизации функций  $\varphi(p)$ ,  $\psi(q)$  не требуется получать эти функции явно. Нужно лишь уметь проверять неравенства, задающие клетки  $\Omega \in \omega$  и  $\Xi \in \xi$ . Приведём краткое описание процесса для минимизации функции  $\varphi(p)$ . Двойственная процедура, состоящая в максимизации функции  $\psi(q)$ , вполне аналогична.

На текущем  $k$ -м шаге процесса имеется пара отвечающих друг другу клеток  $\Omega_k \in \omega$ ,  $\Xi_k \in \xi$  и пара точек  $p^k \in \Omega_k$ ,  $q^k \in \Xi_k$ . Клетке  $\Xi_k$  отвечает граф  $\Gamma_k$ . Определяется  $r^k$  — точка пересечения аффинных носителей  $L_k \supset \Omega_k$ ,  $M_k \supset \Xi_k$ . При этом для  $L_k$  пользуемся системой (14) при  $\alpha_\nu = \sum_{j \in Q_\nu} p_j^k$ , а для  $M_k$  — условиями

$$q_j = t_\nu q_j^k, \quad j \in Q_\nu.$$

Здесь  $Q_\nu$  отвечает  $\nu$ -й компоненте связности графа  $\Gamma_k$ .

СЛУЧАЙ (i):  $r^k \notin \Omega_k$ . По теореме 4 точка  $r^k$  — точка минимума функции  $\widehat{\varphi}(p)$ . Ввиду строгой выпуклости этой функции  $\widehat{\varphi}(r^k) < \widehat{\varphi}(p^k)$ , и значение функции  $\widehat{\varphi}(p)$  будет убывать при движении точки  $p$  по отрезку  $[p^k, r^k]$ . Но для точек  $p \in \Omega_k$  эта функция совпадает с функцией  $\varphi$  (замечание 1). Таким образом, будет убывать значение  $\varphi(p)$ . Движущаяся точка  $p(t) = (1-t)p^k + tr^k$  при некотором  $t = t^* < 1$  достигает грани клетки  $\Omega_k$ . Эта грань принимается в качестве  $\Omega_{k+1}$ , и соответственно

определился  $\Xi_{k+1}$ . Принимаем  $p^{k+1} = p(t^*)$ ,  $q^{k+1} = q^k$  и переходим к следующему шагу. Заметим, что размерность клетки  $\Omega_k$  при этом уменьшается. Такие шаги повторяются до тех пор, пока не окажется, что  $r^k \in \Omega_k$ . Это заведомо будет так, когда клетка  $\Omega_k$  выродится в одну точку и будет  $r^k = p^k$ .

СЛУЧАЙ (ii):  $r^k \in \Omega_k$ . В этом случае можно считать, что  $p^k = r^k$ . Иначе можно просто заменить  $p^k$  на  $r^k$  с уменьшением значения  $\varphi(p)$ . Если  $r^k \in \Xi_k$ , то  $r^k$  является искомой неподвижной точкой. В противном случае ищем максимальное  $t^*$ , при котором точка  $q(t) = (1-t)q^k + tr^k$  ещё содержится в  $\Xi_k$ . При  $t = t^*$  точка  $q(t)$  достигает некоторой грани клетки  $\Xi_k$ , которая и принимается в качестве  $\Xi_{k+1}$ . Отвечающей ей клеткой комплекса  $\omega$  будет  $\Omega_{k+1}$ . Принимаем  $p^{k+1} = p^k$ ,  $q^{k+1} = q(t^*)$  и переходим к следующему шагу.

Для обоснования описанного процесса предполагаем выполненным

**Условие невырожденности.** Размерность текущих клеток  $\Omega_k$ ,  $\Xi_k$  на каждом шаге процесса меняется на единицу.

Это аналог известного условия невырожденности в линейном программировании, гарантирующего конечность симплекс-метода. Ясно, что условие будет выполняться при незначительной вариации стартовых точек  $p^0$ ,  $q^0$ .

**Замечание 3.** При выполнении описанной процедуры в случае (ii) клетка  $\Omega_k$  расширяется:  $\Omega_{k+1} \supset \Omega_k$ . Ввиду условия невырожденности  $\dim \Omega_{k+1} = \dim \Omega_k + 1$ : одно из уравнений в описании клетки  $\Omega_k$  становится неравенством. Для имеющейся точки  $p^k$  оно выполняется как равенство. Чтобы исключить тривиальный возврат к прежней клетке  $\Omega_k$ , нужно показать, что новая точка  $r^{k+1}$  удовлетворяет введённому неравенству. Формат статьи не позволяет привести подробное доказательство этого факта.

**5.2. Конечность процесса.** Доказательство конечности описанного метода использует стандартную схему рассмотрений метода субоптимизации и состоит в следующем.

В течение процесса значение  $\varphi(p^k)$  может только убывать. Легко видеть, что это убывание будет строгим после реализации случая (ii). Действительно, в случае (ii) можно считать, что  $r^k \in \Omega_k^\circ$ . С учётом замечания 3 будет возможен положительный сдвиг из  $p^k$  в направлении точки  $r^{k+1}$  без нарушения ограничений, задающих  $\Omega_{k+1}$ . В результате будет  $\varphi(p^{k+1}) < \varphi(p^k)$ , но значение  $\varphi(p^k)$  в случае (ii) однозначно определено самой клеткой  $\Omega_k$ . Следовательно, такая клетка не может повториться в дальнейшем течении процесса. Процесс конечен ввиду конечности общего числа клеток комплекса  $\omega$ .



Автор выражает искреннюю признательность анонимному рецензенту за внимательное прочтение статьи и содержательные замечания, способствовавшие улучшению текста.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Общая теория гомологий. М.: Наука, 1979. 416 с.
2. Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии. М.: Наука, 1986. 120 с.
3. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
4. Шмырёв В. И. Об отыскании неподвижных точек кусочно-постоянных монотонных отображений в  $R^n$  // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 2. С. 299–301.
5. Шмырёв В. И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 5. С. 1062–1066.
6. Шмырёв В. И. Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 162–175.
7. Шмырёв В. И. Задача полиэдральной комплементарности // Оптимизация. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988. Вып. 44. С. 82–95.
8. Шмырёв В. И. Об одном алгоритме отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 2. С. 139–154.
9. Шмырёв В. И. Алгоритмы полиэдральной комплементарности для отыскания равновесия в линейных моделях конкурентной экономики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 2. С. 84–101.
10. Шмырёв В. И. Полиэдральная комплементарность на симплексе. Потенциальность регулярных отображений // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 118–128.
11. Adsul B., Babu C. S., Gang J., Mehta R., Sohoni M. A simplex-like algorithm for Fisher markets // Algorithmic game theory (SAGT 2010). Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. P. 18–29. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 6386).
12. Birnbaum B., Devanur N. R., Xiao L. Distributed algorithms via gradient descent for Fisher markets // Proc. 12th ACM Conf. Electronic Commerce (San Jose, CA, June 5–9, 2011). P. 127–136. New York: ACM, 2011.
13. Cole R., Devanur N., Gkatzelis V., Jain K., Mai T., Vazirani V. V., Yazdanbod S. Convex program duality, Fisher markets, and Nash social welfare // Proc. 18th ACM Conf. Economics and Computation (Cambridge, MA, June 26–30, 2017). P. 459–460. New York: ACM, 2017.
14. Devanur N. R., Jain K., Mai T., Vazirani V. V., Yazdanbod S. New convex programs for Fisher’s market model and its generalizations. 2016. arXiv:1603.01257.
15. Devanur N. R., Papadimitriou C. H., Saberi A., Vazirani V. V. Market equilibrium via a primal–dual algorithm for a convex program // J. ACM. 2008. Vol. 55, No. 5. P. 22:1–22:18.

16. **Eisenberg E., Gale D.** Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method // Ann. Math. Stat. 1959. Vol. 30, No. 1. P. 165–168.
17. **Gang J., Mehta R., Sohoni M., Vishnoi N. K.** Towards polynomial simplex-like algorithms for market equilibria // Proc. 24th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (New Orleans, LA, Jan. 6–8, 2013). P. 1226–1242. Philadelphia, PA: SIAM, 2013.
18. **Shmyrev V. I.** An iterative approach for searching an equilibrium in Piecewise linear exchange model // Discrete Optimization and Operations Research. Proc. 9th Int. Conf. DOOR (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2019). Cham: Springer. P. 61–72. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).
19. **Shmyrev V. I.** Polyhedral complementarity and fixed points problem of decreasing regular mappings on simplex // Optimization and Applications. Proc. 8th Int. Conf. Optim. Methods Appl. (Petrovac, Montenegro, Oct. 2–7, 2017) P. 511–516. Aachen: RWTH Aachen Univ., 2017. (CEUR Workshop Proc.; Vol. 1987).
20. **Vazirani V. V.** Spending constraint utilities, with applications to the adwords market // Math. Oper. Res. 2010. Vol. 35, No. 2. P. 458–478.

*Шмырёв Вадим Иванович*

Статья поступила

19 октября 2017 г.

После доработки —

19 сентября 2018 г.

Принята к публикации

26 сентября 2018 г.

POLYHEDRAL COMPLEMENTARITY ON A SIMPLEX: SEARCH  
FOR FIXED POINTS OF DECREASING REGULAR MAPPINGS

V. I. Shmyrev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Sobolev Institute of Mathematics,  
4 Acad. Koptug Ave., 630090 Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State University,  
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia

*E-mail:* shvi@math.nsc.ru

**Abstract.** We study the problem of finding a fixed point for a special class of piecewise-constant mappings of a simplex into itself which arise in connection with the search for equilibrium prices in the classical exchange model and its various versions. The consideration is based on the polyhedral complementarity which is a natural generalization of linear complementarity. Here we study the mappings arising from models with fixed budgets. Mappings of this class possess a special property of monotonicity (logarithmic monotonicity), which makes it possible to prove that they are potential. We show that the problem of finding fixed points of these mappings is reducible to optimization problems for which it is possible to propose finite suboptimization algorithms. We give description of two algorithms. Illustr. 3, bibliogr. 20.

**Keywords:** polyhedral complex, complementarity, monotonicity, potentiality, fixed point, suboptimization, algorithm.

REFERENCES

1. P. S. Aleksandrov, *A General Theory of Homologies*, Nauka, Moscow, 1979 [Russian].
2. L. S. Pontryagin, *The Basics of Combinatorial Topology*, Nauka, Moscow, 1986 [Russian].
3. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970. Translated under the title *Vypuklyi analiz*, Mir, Moscow, 1973 [Russian].
4. V. I. Shmyrev, On the determination of fixed points of piecewise constant monotone mappings in  $R^n$ , *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **259**, No. 2, 299–301, 1981 [Russian]. Translated in *Sov. Math., Dokl.*, **24**, No. 1, 88–90, 1981.

5. **V. I. Shmyrev**, On an approach to the determination of equilibrium in elementary exchange models, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **268**, No. 5, 1062–1066, 1983 [Russian]. Translated in *Sov. Math., Dokl.*, **27**, No. 1, 230–233, 1983.
6. **V. I. Shmyrev**, An algorithm for the search of equilibrium in a linear exchange model, *Sib. Mat. Zh.*, **26**, No. 2, 162–175, 1985 [Russian]. Translated in *Sib. Math. J.*, **26**, No. 2, 288–300, 1985.
7. **V. I. Shmyrev**, A problem of polyhedral complementarity, in *Optimization*, Vol. 44, pp. 82–95, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1988 [Russian].
8. **V. I. Shmyrev**, An algorithm for finding equilibrium in the linear exchange model with fixed budgets, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **11**, No. 2, 139–154, 2008 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **3**, No. 4, 505–518, 2009.
9. **V. I. Shmyrev**, Polyhedral complementarity algorithms for searching an equilibrium in linear models of competitive economy, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **21**, No. 2, 84–101, 2014 [Russian].
10. **V. I. Shmyrev**, Polyhedral complementarity on a simplex. Potentiality of regular mappings, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **21**, No. 1, 118–128, 2018 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **12**, No. 1, 167–176, 2018.
11. **B. Adsul**, **C. S. Babu**, **J. Gang**, **R. Mehta**, and **M. Sohoni**, A simplex-like algorithm for Fisher markets, in *Algorithmic Game Theory* (Proc. 3rd Int. Symp., Athens, Greece, Oct. 18–20, 2010), pp. 18–29, Springer, Heidelberg, 2010 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 6386).
12. **B. Birnbaum**, **N. R. Devanur**, and **L. Xiao**, Distributed algorithms via gradient descent for Fisher markets, in *Proc. 12th ACM Conf. Electronic Commerce, San Jose, CA, USA, June 5–9, 2011*, pp. 127–136, ACM, New York, 2011.
13. **R. Cole**, **N. R. Devanur**, **V. Gkatzelis**, **K. Jain**, **T. Mai**, **V. V. Vazirani**, and **S. Yazdanbod**, Convex program duality, Fisher markets, and Nash social welfare, in *Proc. 18th ACM Conf. Econ. Comput., Cambridge, MA, USA, June 26–30, 2017*, pp. 459–460, ACM, New York, 2017.
14. **N. R. Devanur**, **K. Jain**, **T. Mai**, **V. V. Vazirani**, and **S. Yazdanbod**, New convex programs for Fisher’s market model and its generalizations, 2016 (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1603.01257).
15. **N. R. Devanur**, **C. H. Papadimitriou**, **A. Saberi**, and **V. V. Vazirani**, Market equilibrium via a primal–dual algorithm for a convex program, *J. ACM*, **55**, No. 5, 22:1–22:18, 2008.
16. **E. Eisenberg** and **D. Gale**, Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method, *Ann. Math. Stat.*, **30**, No. 1, 165–168, 1959.
17. **J. Gang**, **R. Mehta**, **M. Sohoni** and **N. K. Vishnoi**, Towards polynomial simplex-like algorithms for market equilibria, in *Proc. 24th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, New Orleans, LA, USA, Jan. 6–8, 2013*, pp. 1226–1242, SIAM, Philadelphia, PA, 2013.
18. **V. I. Shmyrev**, An iterative approach for searching an equilibrium in piecewise linear exchange model, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016), pp. 61–72, Springer, Cham, 2016 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).

19. **V. I. Shmyrev**, Polyhedral complementarity and fixed points problem of decreasing regular mappings on simplex, in *Optimization and Applications* (Proc. VIII Int. Conf. Optim. Methods Appl., Petrovac, Montenegro, Oct. 2–7, 2017), pp. 511–516, RWTH Aachen Univ., Aachen, 2017 (CEUR Workshop Proc., Vol. 1987). Available at <http://ceur-ws.org/Vol-1987> (accessed Nov. 15, 2018).
20. **V. V. Vazirani**, Spending constraint utilities with applications to the adwords market, *Math. Oper. Res.*, **35**, No. 2, 458–478, 2010.

Vadim I. Shmyrev

Received October 19, 2017

Revised September 19, 2018

Accepted September 26, 2018