ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2019. Том 26, № 1. С. 74–88

УДК 519.174.3 DOI 10.33048/daio.2019.26.606

КЁНИГОВЫ ГРАФЫ ОТНОСИТЕЛЬНО 4-ПУТИ И ЕГО ОСТОВНЫХ НАДГРАФОВ *)

Д. С. Малышев[1,a], *Д. Б. Мокеев*[2,1,b]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

[2]Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия,

E-mail: [a]dsmalyshev@rambler.ru, [b]MokeevDB@gmail.com

Аннотация. Описывается класс графов, у которых для каждого подграфа максимальное число вершинно непересекающихся 4-путей равно минимальной мощности множества вершин таких, что каждый 4-путь подграфа содержит хотя бы одну из этих вершин. Полностью описано множество минимальных запрещённых подграфов данного класса. Кроме того, представлено альтернативное описание класса, в основе которого лежит операция подразбиения рёбер, применяемая к двудольным мультиграфам, и добавление так называемых висячих подграфов, изоморфных треугольникам и звёздам. Ил. 1, библиогр. 19.

Ключевые слова: упаковка подграфов, вершинное покрытие подграфов, четырёхвершинный путь, кёнигов граф.

Введение

Пусть $\mathcal{X}$ — множество графов. Произвольное множество попарно вершинно непересекающихся порождённых подграфов графа G, изоморфных графам из $\mathcal{X}$, называется *$\mathcal{X}$-упаковкой G*. Произвольное подмножество множества вершин графа G, покрывающее все порождённые подграфы графа G, изоморфные графам из $\mathcal{X}$, называется *вершинным покрытием G относительно $\mathcal{X}$* или просто *$\mathcal{X}$-покрытием.* Иными словами, каждый порождённый подграф графа G, изоморфный графу из $\mathcal{X}$, содержит вершину $\mathcal{X}$-покрытия. Граф называется *кёниговым относительно $\mathcal{X}$*, если в любом его порождённом подграфе наибольшая мощность $\mathcal{X}$-упаковки равна наименьшей мощности $\mathcal{X}$-покрытия [1]. Класс всех

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

кёниговых графов относительно множества $\mathcal{X}$ обозначается через $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Если множество $\mathcal{X}$ состоит из единственного графа H, то будем говорить об H-упаковках, H-покрытиях и кёниговых графах относительно H.

Отметим, что в литературе под $\mathcal{X}$-покрытием часто понимают также множество вершин графа G, покрывающее все (не только порождённые) подграфы графа G, изоморфные графам из $\mathcal{X}$ (см., например, [12, 15]). Будем называть такие $\mathcal{X}$-покрытия *слабыми*. Аналогично, *слабыми $\mathcal{X}$-упаковками* будем называть совокупности любых (а не только порождённых) попарно вершинно непересекающихся подграфов, изоморфных графам из $\mathcal{X}$.

Задачам об $\mathcal{X}$-упаковке и $\mathcal{X}$-покрытии графа посвящено немало работ, особенно их алгоритмическим аспектам (см., например, [2, 11, 19]). Ряд работ, в частности, посвящён задачам об упаковке и покрытии путей различной длины. Известно, что задача о слабом P_k-покрытии полиномиально разрешима в классе деревьев и NP-трудна в общем случае при $k \geqslant 2$ [5, 18], а задача о слабой P_k-упаковке полиномиально разрешима при $k = 2$ [10] и NP-полна при $k \geqslant 3$ в общем случае [13] и в 3-регулярных графах [16]. Более того, при $k \geqslant 4$ задача о слабой P_k-упаковке является APX-полной, т. е. в предположении $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ для неё не существует приближённого алгоритма с произвольным константным коэффициентом аппроксимации [7].

Тем не менее известно, что задача о P_k-упаковке (как в слабом, так и в «порождённом» случае) решается за линейное время в классе лесов при любом k [16]. Кроме того, известно описание нескольких классов графов, на которых задачи о P_k-упаковке и P_k-покрытии при разных k решаются за полиномиальное время (см., например, [4, 6, 14, 17] для слабого и [3, 4] для «порождённого» случаев).

Обозначим через $\langle H\rangle$ множество всех остовных надграфов графа H, т. е. множество графов, полученных из H добавлением рёбер. В частности, $\langle P_4\rangle = \{P_4, C_4, \text{3-pan}, K_4 - e, K_4\}$, где 3-pan — граф, полученный из P_4 добавлением ребра, соединяющего его лист с вершиной степени 2, не смежной ему, $K_4 - e$ — граф, полученный из K_4 удалением ребра.

Нетрудно видеть, что если H является подграфом графа G, то подграф, порождённый его вершинами, изоморфен одному из графов множества $\langle H\rangle$. Поэтому верно то, что всякая слабая H-упаковка графа G является его $\langle H\rangle$-упаковкой, а всякое слабое H-покрытие — его $\langle H\rangle$-покрытием. Таким образом, для любого H класс $\mathcal{K}(\langle H\rangle)$ можно охарактеризовать как множество графов, в любом порождённом подграфе которых наибольшая мощность слабой H-упаковки равна наименьшей мощности слабого H-покрытия.

Для любого H класс $\mathcal{K}(\langle H\rangle)$ является *наследственным*, т. е. он замкнут относительно удаления вершин. Известно, что любой наследственный класс может быть охарактеризован множеством минимальных запрещённых порождённых подграфов, т. е. минимальных по включению вершин графов, не принадлежащих данному классу. Подробное описание дано, например, в [9] для класса $\mathcal{K}(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ — множество всех простых циклов, и в [4] для класса $\mathcal{K}(\langle P_3\rangle)$.

Настоящая работа посвящена описанию класса кёниговых графов относительно множества $\langle P_4\rangle$. Показано, что данный класс является *монотонным*, т. е. он замкнут относительно удаления не только вершин, но и рёбер. Известно, что любой монотонный класс может быть охарактеризован множеством минимальных запрещённых подграфов (не только порождённых), т. е. минимальных по включению вершин и рёбер графов, не принадлежащих данному классу. Все такие графы для класса $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$ описаны в разд. 2. Кроме того, в разд. 3 и 4 описан класс ST-графов, полученных из двудольных мультиграфов применением операции подразбиения рёбер и добавления некоторых висячих подграфов, и доказано, что он совпадает с классом $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$.

1. Определения и обозначения

В статье используются стандартные обозначения K_n, P_n, C_n для полных графов, простых путей и простых циклов на n вершинах соответственно.

Будем обозначать через S_n дерево на $n+1$ вершинах, n из которых являются листьями. Наибольшее число элементов в $\langle P_4\rangle$-упаковке графа G обозначим через $\mu_{\langle P_4\rangle}(G)$, а минимальное число вершин в его $\langle P_4\rangle$-покрытии — через $\beta_{\langle P_4\rangle}(G)$. Подграф, изоморфный одному из графов множества $\langle P_4\rangle$, назовём *квартетом*. Обозначим через (v_1, v_2, v_3, v_4) квартет, состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4. Обозначим через $V(G)$ множество вершин графа G. Множество вершин, смежных с вершиной v, будем обозначать через $N(v)$.

Пусть G — граф, $A \subseteq V(G)$. Обозначим через $G \setminus A$ граф, полученный из G удалением всех вершин множества A.

Рассматривая цикл C_n, предполагаем, что его вершины пронумерованы вдоль цикла числами $0, 1, \ldots, n-1$. При этом арифметические операции с номерами вершин выполняются по модулю n. Каждое из множеств всех его вершин с номерами из заданного класса вычетов по модулю 4 назовём 4-*классом*.

Отметим, что для любого графа G выполняется неравенство

$$\mu_{\langle P_4\rangle}(G) \leqslant \beta_{\langle P_4\rangle}(G),$$

поэтому для доказательства равенства этих величин достаточно предъявить $\langle P_4\rangle$-упаковку и $\langle P_4\rangle$-покрытие графа G одинаковой мощности.

2. Запрещённые подграфы

Если F — минимальный по включению вершин и рёбер граф, не принадлежащий $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$, то будем называть его *минимальным запрещённым графом* данного класса.

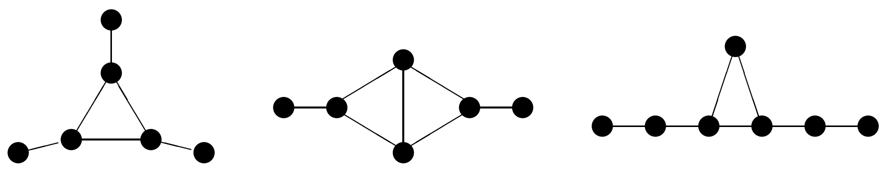

Рис. 1. 3 запрещённых графа для класса $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$

Непосредственной проверкой легко установить, что графы net, co-twin-house и longhorn, изображённые на рис. 1, не принадлежат классу $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$. Для каждого из них

$$\mu_{\langle P_4\rangle}(G) = 1, \quad \beta_{\langle P_4\rangle}(G) = 2,$$

причём каждый из них состоит не более чем из 7 вершин. При этом каждый собственный подграф каждого из них кёнигов относительно $\langle P_4\rangle$. Таким образом, справедлива

Лемма 1. *Графы* net, co-twin-house, longhorn *являются минимальными запрещёнными графами для* $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$.

В [3] доказано, что любой лес является кёниговым графом относительно P_4. Поскольку лес не содержит других подграфов, изоморфных графам из $\langle P_4\rangle$, кроме P_4, справедлива

Лемма 2. *Любой лес является кёниговым графом относительно* $\langle P_4\rangle$.

Рассмотрим бесконечные серии минимальных запрещённых подграфов для класса $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$. Очевидно, что

$$\mu_{\langle P_4\rangle}(C_{4k}) = \mu_{\langle P_4\rangle}(C_{4k+1}) = \mu_{\langle P_4\rangle}(C_{4k+2}) = \mu_{\langle P_4\rangle}(C_{4k+3}) = k,$$
$$\beta_{\langle P_4\rangle}(C_{4k}) = \beta_{\langle P_4\rangle}(C_{4k-1}) = \beta_{\langle P_4\rangle}(C_{4k-2}) = \beta_{\langle P_4\rangle}(C_{4k-3}) = k,$$

поэтому ввиду леммы 2 имеет место

Лемма 3. *Цикл* C_n *принадлежит классу* $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$, *если* $n = 3$ *или* n *кратно* 4, *и является минимальным запрещённым графом для* $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$, *если* $n > 3$ *и* n *не кратно* 4.

Рассмотрим граф, получающийся из цикла C_n добавлением двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла. Этот граф обозначим через $A(n,k)$, где k — расстояние между вершинами цикла, смежными с добавленными вершинами.

Лемма 4. *Если n кратно 4, а k не кратно 2, то $A(n,k)$ является минимальным запрещённым графом для класса $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$.*

Доказательство. Пусть $n = 4t$. Тогда $|V(A(n,k))| = 4t+2$. Очевидно, что $\mu_{\langle P_4\rangle}(A(n,k)) = t$. Предположим, что существует $\langle P_4\rangle$-покрытие C графа $A(n,k)$, имеющее мощность t. Тогда оно содержится в цикле C_n этого графа и является его наименьшим $\langle P_4\rangle$-покрытием, а следовательно, является его 4-классом. Так как k нечётно, одна из вершин, смежных с вершинами степени 1 в $A(n,k)$, смежна также с вершиной из C. Но тогда расстояние до другой ближайшей вершины из C равно 3. Стало быть, эта вершина, смежная с ней вершина степени 1 и ещё две вершины цикла порождают квартет, не покрытый множеством C. Следовательно,

$$\beta_{\langle P_4\rangle}(A(n,k)) > t \quad \text{и} \quad A(n,k) \notin \mathcal{K}(\langle P_4\rangle).$$

Рассмотрим подграф графа $A(n,k)$, полученный удалением вершины степени 1 или ребра, инцидентного ей. Его компонента связности, не являющаяся изолированной вершиной, состоит из цикла с добавленной вершиной степени 1. Для этого графа, очевидно,

$$\mu_{\langle P_4\rangle}(G) = \beta_{\langle P_4\rangle}(G) = t,$$

поэтому он кёнигов относительно $\langle P_4\rangle$.

Другие подграфы графа $A(n,k)$ являются лесами или изоморфны циклу C_{4t}, и по леммам 2, 3 все они являются кёниговыми относительно $\langle P_4\rangle$. Лемма 4 доказана.

Введём обозначение $\mathcal{F}$ для множества всех запрещённых графов, описанных в леммах 1, 3, 4:

$$\mathcal{F} = \{\text{net, co-twin-house, longhorn}\} \\ \cup \{C_n \mid n > 3 \text{ не кратно } 4\} \cup \{A(n,k) \mid n \text{ кратно } 4,\ k \text{ нечётно}\}.$$

Поскольку каждый квартет состоит из 4 вершин, для любого графа G справедливо неравенство

$$4\mu_{\langle P_4\rangle}(G) \leqslant |V(G)|.$$

Отметим также, что для любого графа $H \in \mathcal{F}$ имеет место неравенство

$$|V(H)| \leqslant 4\mu_{\langle P_4\rangle}(H) + 3,$$

т. е. значение параметра $\mu_{\langle P_4 \rangle}$ в H максимально для данного числа вершин. Пусть H' — остовный надграф графа H. Очевидно, что любое множество вершин графа H, порождающее какой-нибудь квартет, порождает также квартет графа H'. Тогда

$$\beta_{\langle P_4 \rangle}(H) \leqslant \beta_{\langle P_4 \rangle}(H') \quad \text{и} \quad \mu_{\langle P_4 \rangle}(H) \leqslant \mu_{\langle P_4 \rangle}(H').$$

Поскольку $|V(H')| = |V(H)|$ и в силу того, что $\mu_{\langle P_4 \rangle}(H)$ максимально для данного числа вершин, имеют место следующие соотношения:

$$\mu_{\langle P_4 \rangle}(H') = \mu_{\langle P_4 \rangle}(H) < \beta_{\langle P_4 \rangle}(H) \leqslant \beta_{\langle P_4 \rangle}(H').$$

Значит, $H' \notin \mathcal{K}(\langle P_4 \rangle)$.

Пусть граф G содержит подграф H, изоморфный одному из графов $\mathcal{F}$. Тогда G содержит H или один из его остовных надграфов в качестве порождённого подграфа, т. е. не является кёниговым относительно $\langle P_4 \rangle$. Таким образом, можно сформулировать следствие из лемм 1, 3, 4.

Следствие 2. *Никакой граф класса $\mathcal{K}(\langle P_4 \rangle)$ не содержит подграфов, изоморфных графам множества $\mathcal{F}$.*

3. ST-графы

Опишем процедуру ST-расширения и класс ST-графов, а также докажем, что ST-расширение двудольных мультиграфов всегда даёт кёниговы графы относительно $\langle P_4 \rangle$.

Определение 1. Будем называть связный подграф H графа G *висячим*, если существует вершина $c \in V(G \setminus H)$ такая, что H является компонентой связности графа $G \setminus \{c\}$. Вершину c будем называть *контактной вершиной* висячего подграфа H.

Определение 2. Пусть H — двудольный мультиграф. Процедура *ST-расширения* H состоит в следующем.

(1) Каждое цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу, в том числе длины 2) мультиграфа H подразбить одной вершиной. Все вершины, кроме добавленных при подразбиении, будем называть *старыми.*

(2) Добавить к графу несколько висячих подграфов, изоморфных C_3 или S_k, где k — произвольные целые неотрицательные числа, так, что контактная вершина каждого из них является старой.

Будем называть полученный граф *ST-расширением* мультиграфа H. Назовём *ST-графом* граф, который является ST-расширением произвольного двудольного мультиграфа.

Отметим, что если в п. (1) определения ST-расширения допустить подразбиение нецикловых рёбер H, то класс графов не изменится, так как в результате получим ST-расширение графа, полученного из H подразбиением соответствующих рёбер.

Теорема 1. *Любой ST-граф является кёниговым графом относительно $\langle P_4 \rangle$.*

Доказательство. Пусть G — граф, полученный ST-расширением произвольного двудольного мультиграфа H. Из сделанного выше замечания следует, что любой подграф графа G также является ST-графом. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mu_{\langle P_4 \rangle}(G) = \beta_{\langle P_4 \rangle}(G)$.

Нетрудно видеть, что граф кёнигов относительно $\langle P_4 \rangle$ тогда и только тогда, когда каждая его компонента связности является кёниговым графом относительно $\langle P_4 \rangle$. Таким образом, не уменьшая общности, можно считать, что граф G связный.

Доказательство проведём индукцией по числу вершин графа G. Если G изоморфен одному из графов K_1, C_3, S_k, где $k \in \mathbb{N}$, то граф G не содержит квартетов и $\mu_{\langle P_4 \rangle}(G) = \beta_{\langle P_4 \rangle}(G) = 0$.

Предположим, что G содержит хотя бы один квартет и $\mu_{\langle P_4 \rangle}(G') = \beta_{\langle P_4 \rangle}(G')$ для любого его собственного порождённого подграфа G'.

Возможны следующие случаи.

1. В G имеется висячий подграф T, изоморфный C_3 с контактной вершиной y. Тогда вершины $V(T) \cup \{y\}$ составляют квартет. Рассмотрим граф G', полученный из графа G удалением вершин этого квартета. Пусть M — наибольшая $\langle P_4 \rangle$-упаковка, а C — наименьшее $\langle P_4 \rangle$-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Добавив к M квартет, составленный из вершин $V(T) \cup \{y\}$, получим $\langle P_4 \rangle$-упаковку мощности $|M| + 1$. Добавив к C вершину y, получим $\langle P_4 \rangle$-покрытие той же мощности графа G.

2. В G имеется висячий подграф T, изоморфный S_k, где $k \geqslant 2$, с контактной вершиной y, причём y смежна хотя бы с одним из листов графа T. Тогда все квартеты, содержащие вершины из $V(T) \cup \{y\}$, проходят через вершину y. Пусть x_1 — лист графа T, смежный с y, x_2 — его центральная вершина, а x_3 — другой его лист. Тогда (x_1, x_2, x_3, y) является квартетом. Рассмотрим граф G', полученный из G удалением вершин этого квартета. Пусть M — наибольшая $\langle P_4 \rangle$-упаковка, а C — наименьшее $\langle P_4 \rangle$-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Теперь $M \cup \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ y)\}$ — $\langle P_4 \rangle$-упаковка, а $C \cup \{y\}$ — $\langle P_4 \rangle$-покрытие той же мощности графа G.

3. В G имеется висячий подграф T_1, изоморфный S_k, где $k \geqslant 1$, и висячий подграф T_2, изоморфный графу S_l, где $l \geqslant 1$, или графу K_1

с общей контактной вершиной y. Тогда все квартеты, содержащие вершины из $V(T_1) \cup V(T_2) \cup \{y\}$, проходят через вершину y. Пусть x_1 и x_2 — вершины графов T_1 и T_2 соответственно, смежные с y. Пусть x_3 — вершина графа T_1, отличная от x_1. Тогда (x_1, x_2, x_3, y) является квартетом. Рассмотрим граф G', полученный из G удалением вершин этого квартета. Пусть M — наибольшая $\langle P_4 \rangle$-упаковка, а C — наименьшее $\langle P_4 \rangle$-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Теперь $M \cup \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ y)\}$ — $\langle P_4 \rangle$-упаковка, а $C \cup \{y\}$ — $\langle P_4 \rangle$-покрытие той же мощности графа G.

4. В графе G не выполняется ни одно из условий случаев 1–3, но имеется висячий подграф T, изоморфный S_k, где $k \geqslant 1$, контактная вершина y которого является цикловой в мультиграфе H, причём если $k \geqslant 2$, то y смежна только с одной его центральной вершиной. Тогда все квартеты, содержащие вершины из $V(T) \cup \{y\}$, проходят через вершину y. Пусть x_1 — центральная вершина графа T, а x_2 — его лист. Пусть z — цикловая вершина графа $G \setminus T$, смежная с y и добавленная при подразбиении циклового ребра мультиграфа H. Тогда (x_2, x_1, y, z) является квартетом. Поскольку y — цикловая вершина мультиграфа H, она является цикловой вершиной также и в G. Рассмотрим один из циклов, содержащих y и z, и пронумеруем его вершины вдоль цикла $0, 1, \ldots, 4n-1$ так, что y имеет номер 0, а z — номер 1. Отметим что все вершины с нечётными номерами имеют степень 2.

Рассмотрим граф G', полученный из G удалением вершин x_1, x_2, y. Пусть M — наибольшая $\langle P_4 \rangle$-упаковка, а C — наименьшее $\langle P_4 \rangle$-покрытие графа G'. Отметим, что если квартет графа G' содержит пронумерованную вершину с нечётным номером, то он содержит также и одну из её смежных вершин, имеющую чётный номер, причём если квартет содержит вершины $2i-1$ и $2i+1$, то он содержит также $2i$ и одну из вершин $2i-2$, $2i+2$. Таким образом, количество пронумерованных вершин, входящих в квартеты $\langle P_4 \rangle$-упаковки, с чётными номерами не меньше, чем с нечётными.

Предположим, что M содержит квартет, содержащий вершину z. Тогда среди пронумерованных вершин есть вершина с номером $2i+1$, где $1 \leqslant i \leqslant 2n-1$, не содержащаяся ни в одном квартете M. Возьмём i такое, что все вершины с нечётными (а значит, и с чётными) номерами, меньшими $2i+1$, содержатся в квартетах множества M. Тогда существует квартет $q \in M$, содержащий вершины с номерами $2i-1$ и $2i$. Пусть q не содержит вершины $2i-2$, т. е. $q = (2i-1, 2i, v_1, v_2)$, где v_1 — непронумерованная вершина. Тогда

$$M \setminus \{(2i-1, 2i, v_1, v_2)\} \cup \{(2i, 2i+1, v_1, v_2)\}$$

также является наибольшей $\langle P_4\rangle$-упаковкой графа G', причём вершина с номером $2i-1$ не входит ни в один из её квартетов. В противном случае $q=(2i-3,2i-2,2i-1,2i)$. Тогда

$$M\setminus\{(2i-3,2i-2,2i-1,2i)\}\cup\{(2i-2,2i-1,2i,2i+1)\}$$

также является наибольшей $\langle P_4\rangle$-упаковкой графа G', причём вершина с номером $2i-3$ не входит ни в один из её квартетов. Отметим, что минимальный номер вершины, не входящий ни в один квартет наибольшей $\langle P_4\rangle$-упаковки, уменьшился. С помощью нескольких таких «сдвигов» можно получить $\langle P_4\rangle$-упаковку, ни один квартет которой не содержит вершину z с номером 1.

Таким образом, существует такая наибольшая $\langle P_4\rangle$-упаковка, что вершина z не входит ни в один её квартет. Не уменьшая общности, предположим, что M — именно такая $\langle P_4\rangle$-упаковка.

По предположению индукции $|M|=|C|$. Теперь $M\cup\{(x_1,x_2,y,z)\}$ — $\langle P_4\rangle$-упаковка, а $C\cup\{y\}$ — $\langle P_4\rangle$-покрытие той же мощности графа G.

5. В графе G не выполняется ни одно из условий случаев 1–4, тогда в графе G любой квартет содержит хотя бы одну вершину, не являющуюся вершиной висячего подграфа, изоморфного C_3 и S_k, а также контактной вершиной таких висячих подграфов, причём любая цикловая вершина может являться контактной вершиной только для висячих подграфов, изоморфных K_1.

Рассмотрим такой блок X графа G, что $|X|\geqslant 4$ и в нём не более одного шарнира имеет в $G\setminus X$ соседа степени больше 1 (если последовательно удалить все висячие вершины из G, то X соответствует одному из листов дерева блоков и шарниров полученного графа). Такой шарнир, если он существует, обозначим через v_0. В противном случае обозначим через v_0 произвольную вершину блока X, не добавленную при подразбиении. Каждая вершина блока X является цикловой.

Обозначим через X_0 подграф мультиграфа H, из которого подразбиением вершин получен граф X, и построим в нём наибольшее паросочетание M_0 и наименьшее вершинное покрытие C_0. Поскольку X_0 содержит только цикловые рёбра, зафиксировав одну из долей мультиграфа X_0, каждому ребру $m_i\in M_0$ можно поставить в соответствие ребро m_i', имеющее с m_i общую вершину в выбранной доле. Очевидно, что $m_i'\notin M_0$ и $m_i'\neq m_j'$ при $i\neq j$. В процессе процедуры ST-расширения каждое ребро подграфа X_0 подразбивается одной вершиной. Для каждого $m_i\in M_0$ возьмём квартет, состоящий из вершин, инцидентных m_i, и вершин, добавленных при подразбиении рёбер m_i и m_i'. Полученное множество квартетов M_1 составляет $\langle P_4\rangle$-упаковку графа X.

Легко видеть, что C_0 является $\langle P_4 \rangle$-покрытием графа X, при этом $|C_0| = |M_1|$. Отметим, что C_0 является также $\langle P_4 \rangle$-покрытием подграфа G, образованного вершинами X, и висячих подграфов, имеющих контактные вершины в X.

Если v_0 принадлежит какому-нибудь наименьшему вершинному покрытию графа X_0, то в качестве C_0 рассмотрим именно такое $\langle P_4 \rangle$-покрытие.

Пусть v_0 не принадлежит никакому наименьшему вершинному покрытию графа X_0, но одно из рёбер M_0 инцидентно v_0 (заметим, что такое паросочетание всегда существует).

Рассмотрим множество A вершин той же доли графа X_0, что и v_0, не инцидентных никаким рёбрам из M_0. Отметим, что A непусто, иначе вся доля, содержащая v_0, является наименьшим вершинным покрытием, содержащим v_0. Поскольку v_0 не принадлежит никакому наименьшему вершинному покрытию графа X_0, хотя бы из одной из вершин $a \in A$ существует чередующийся путь в v_0 (под чередующимся путём здесь подразумевается путь, в котором рёбра, входящие и не входящие в M_0, чередуются между собой). Это следует из доказательства теоремы Кёнига (см., например, [8]). Заменой рёбер данного пути, входящих в M_0, рёбрами этого же пути, не входящими в него, получим новое наибольшее паросочетание M_0' графа X_0. Каждому новому ребру $m_i \in M_0'$ поставим в соответствие ребро m_i' этого же чередующегося пути в направлении от вершины v_0, а ребру, инцидентному a, поставим в соответствие другое ребро, инцидентное той же вершине. Таким образом, v_0 не покрыта M_0' и одно из рёбер, инцидентное v_0, не поставлено в соответствие ни одному ребру паросочетания. Обозначим через v_1 вершину, подразбивающую его в процессе процедуры ST-расширения.

Обозначим через X' подграф G, состоящий из X и всех присоединённых к X висячих вершин G. Отметим что, поскольку в графе G не существует других висячих подграфов с контактными вершинами из X, кроме K_1, C_0 является $\langle P_4 \rangle$-покрытием также для графа X'.

Рассмотрим граф G', полученный из графа G удалением вершин подграфа X', если v_0 принадлежит какому-нибудь наименьшему вершинному покрытию графа X_0, и подграфа $X' \setminus \{v_0, v_1\}$ в противном случае. Пусть M — наибольшая $\langle P_4 \rangle$-упаковка, а C — наименьшее $\langle P_4 \rangle$-покрытие графа G'. По предположению индукции $|M| = |C|$. Множество $M \cup M_1$ является $\langle P_4 \rangle$-упаковкой, а $C \cup C_0$ — $\langle P_4 \rangle$-покрытием графа G. Поскольку $|C_0| = |M_1|$, имеем $\mu_{\langle P_4 \rangle}(G) = \beta_{\langle P_4 \rangle}(G)$. Теорема 1 доказана.

4. Полное описание графов класса $\mathcal{K}(\langle P_4\rangle)$

Покажем, что любой кёнигов граф относительно $\langle P_4\rangle$ является ST-расширением какого-либо двудольного мультиграфа, а также докажем, что описанные в разд. 2 запрещённые подграфы полностью описывают данный класс графов.

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны для графа G :*
(1) *граф G — кёнигов граф относительно $\langle P_4\rangle$;*
(2) *граф G не содержит подграфов из множества $\mathcal{F}$;*
(3) *граф G является ST-расширением некоторого двудольного мультиграфа.*

Доказательство. По следствию 2 п. (1) влечёт п. (2). Из теоремы 1 следует, что п. (3) влечёт п. (1). Покажем, что из п. (2) следует п. (3).

Пусть G — связный граф, не содержащий подграфов из $\mathcal{F}$. Обозначим через G_0 подграф графа G, полученный удалением всех его висячих подграфов, изоморфных C_3, а также тех висячих подграфов, изоморфных S_k, где $k \geqslant 1$, в которых контактная вершина смежна не менее, чем с двумя вершинами, одна из которых — центральная вершина графа S_k.

Если два таких висячих подграфа пересекаются, но не содержатся один в другом, нетрудно убедиться, что граф G является либо подграфом K_4, либо графом C_3, к одной или двум вершинам которого подвешены подграфы S_0. В каждом из указанных случаев граф G является ST-расширением двудольного мультиграфа. Поэтому можно считать, что все удалённые из G висячие подграфы попарно вершинно не пересекаются.

Покажем, что в G_0 нет треугольников. Предположим, что G_0 содержит треугольник. Обозначим через x, y, z вершины какого-нибудь треугольника в этом графе. Рассмотрим следующие случаи.

1. В G существует вершина u, смежная со всеми вершинами треугольника. Поскольку ни один из треугольников, состоящих из вершин множества $\{x, y, z, u\}$, не является висячим подграфом в графе G, по крайней мере две из этих вершин смежны с другими вершинами этого графа. Пусть v смежна с x, а w смежна с y в графе G. Тогда если $v = w$, то G содержит подграф C_5. Иначе G содержит подграф $A(4, 1)$.

2. Существуют попарно различные вершины u, v, w такие, что (u, x), (v, y), (w, z) являются рёбрами графа G. Тогда граф G содержит подграф net.

3. Существуют различные вершины u, v такие, что (u, x), (u, y), (v, z) являются рёбрами графа G. Поскольку треугольник u, x, y не является висячим в графе G, существует вершина $w \notin \{u, x, y, z\}$, смежная с одной из вершин этого треугольника. Если $w = v$, то G содержит подграф C_5.

Если w не совпадает с v и смежна с u, то G содержит подграф co-twin-house. Иначе граф G содержит подграф net.

4. Вершина z не имеет других соседей, кроме x, y. Так как ни один подграф, порождённый множествами вершин $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$ или $\{x, y, z\}$, не является висячим в графе G, существуют различные вершины u, v такие, что (u, x), (v, y) являются рёбрами графа G. Нетрудно видеть, что вершины u, x, z порождают подграф, изоморфный S_2 с центральной вершиной x. Звезда с центральной вершиной x не является висячим подграфом в G. Значит, существует вершина $s \neq y$, смежная с одним из листов этой звезды. Случай, когда этот лист является соседом y, уже разобран в п. 3. Не уменьшая общности, предположим, что вершина s смежна с u, причём $s \neq v$, иначе G содержит подграф C_5. Аналогично существует вершина $t \notin \{y, u\}$, смежная с v. Если $s = t$, то G содержит подграф C_5, иначе G содержит подграф longhorn.

Итак, в графе G_0 нет треугольников. Пусть Z — какой-нибудь блок размера больше 2 в графе G_0. Каждая его вершина цикловая. Из леммы 3 следует, что длина любого цикла графа Z кратна 4. Пусть x — вершина графа Z, имеющая в графе G степень больше 2, если такая вершина существует, или произвольная его вершина в противном случае. Тогда все вершины графа Z, расстояние до которых от x нечётно, имеют в графе G степень 2, иначе G содержит запрещённый подграф типа $A(n, k)$. Назовём такие вершины *проходными* в графе G_0.

Построим мультиграф H, заменяя во всех циклах графа G_0 каждую проходную вершину одним ребром, соединяющим её соседние вершины. Очевидно, что G_0 получается из H подразбиением каждого циклового ребра, а G является ST-расширением мультиграфа H. Поскольку в G_0 все циклы имеют длину, кратную 4, в H все циклы имеют чётную длину, а значит, мультиграф H двудольный. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Класс $\mathcal{K}(\langle P_4 \rangle)$ монотонный и полностью определяется множеством минимальных запрещённых подграфов $\mathcal{F}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Мокеев Д. Б.** Кёниговы графы относительно 3-пути // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 4. С. 3–14.
2. **Малышев Д. С.** Влияние роста упаковочного числа графов на сложность задачи о независимом множестве // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, № 2. С. 63–67.
3. **Мокеев Д. Б.** О кёниговых графах относительно P_4 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Т. 24, № 3. С. 61–79.
4. **Alekseev V. E., Mokeev D. B.** König graphs for 3-paths and 3-cycles // Discrete Appl. Math. 2016. Vol. 204. P. 1–5.

5. **Brešar B., Kardoš F., Katrenič J., Semanišin G.** Minimum k-path vertex cover // Discrete Appl. Math. 2011. Vol. 159, No. 12. P. 1189–1195.
6. **Deming R. W.** Independence numbers of graphs — an extension of the König-Egervary theorem // Discrete Math. 1979. Vol. 27. P. 23–33.
7. **Devi N. S., Mane A. C., Mishra S.** Computational complexity of minimum P_4 vertex cover problem for regular and $K_{1,4}$-free graphs // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 184. P. 114–121.
8. **Diestel R.** Graph theory. Heidelberg: Springer, 2005. (Grad. Texts Math.; Vol. 173). 322 p.
9. **Ding G., Xu Z., Zang W.** Packing cycles in graphs, II // J. Comb. Theory, Ser. B. 2003. Vol. 87, No. 2. P. 244–253.
10. **Edmonds J.** Paths, trees, and flowers // Can. J. Math. 1965. Vol. 17, No. 3–4. P. 449–467.
11. **Hell P.** Graph packings // Electron. Notes Discrete Math. 2000. Vol. 5. P. 170–173.
12. **Kardoš F., Katrenič J., Schiermeyer I.** On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs // Theor. Comput. Sci. 2011. Vol. 412, No. 50. P. 7009–7017.
13. **Kirkpatrick D. G., Hell P.** On the completeness of a generalized matching problem // Proc. 10th Annu. ACM Symp. Theory Comput. (San Diego, CA, May 1–3, 1978). New York: ACM, 1978. P. 240–245.
14. **Kosowski A., Małafiejski M., Żyliński P.** Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition // Graphs Comb. 2008. Vol. 24, No. 5. P. 461–468.
15. **Li Y., Tu J.** A 2-approximation algorithm for the vertex cover P_4 problem in cubic graphs // Int. J. Comput. Math. 2014. Vol. 91, No. 10. P. 2103–2108.
16. **Masuyama S., Ibaraki T.** Chain packing in graphs // Algorithmica. 1991. Vol. 6, No. 1. P. 826–839.
17. **Sterboul F.** A Characterization of graphs in which the transversal number equals the matching number // J. Comb. Theory, Ser. B. 1979. Vol. 27. P. 228–229.
18. **Tu J., Zhou W.** A primal-dual approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem // Theor. Comput. Sci. 2011. Vol. 412, No. 50. P. 7044–7048.
19. **Yuster R.** Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition // Comput. Sci. Rev. 2007. Vol. 1, No. 1. P. 12–26.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
Мокеев Дмитрий Борисович

Статья поступила
12 декабря 2017 г.

После доработки —
30 октября 2018 г.

Принята к публикации
28 ноября 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2019. Volume 26, No. 1. P. 74–88

UDC 519.174.3 DOI 10.33048/daio.2019.26.606

KÖNIG GRAPHS WITH RESPECT TO THE 4-PATH AND ITS SPANNING SUPERGRAPHS

D. S. Malyshev and *D. B. Mokeev*

[1]National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

[2]Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Avenue, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [a]dsmalyshev@rambler.ru, [b]MokeevDB@gmail.com

Abstract. We describe the class of graphs whose every subgraph has the next property: The maximal number of disjoint 4-paths is equal to the minimal cardinality of sets of vertices such that every 4-path in the subgraph contains at least one of these vertices. We completely describe the set of minimal forbidden subgraphs for this class. Moreover, we present an alternative description of the class based on the operations of edge subdivision applied to bipartite multigraphs and the addition of the so-called pendant subgraphs, isomorphic to triangles and stars. Illustr. 1, bibliogr. 19.

Keywords: subgraph packing, vertex cover of a subgraph, 4-path, König graph.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev** and **D. B. Mokeev,** König graphs with respect to 3-paths, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 4, 3–14, 2012 [Russian].
2. **D. S. Malyshev,** The impact of the growth rate of the packing number of graphs on the computational complexity of the independent set problem, *Diskretn. Mat.,* **25**, No. 2, 63–67, 2013 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **23**, No. 3–4, 245–249, 2013.
3. **D. B. Mokeev,** On König graphs with respect to P_4, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **24**, No. 3, 61–79, 2017 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **11**, No. 3, 421–430, 2017.
4. **V. E. Alekseev** and **D. B. Mokeev,** König graphs for 3-paths and 3-cycles, *Discrete Appl. Math.,* **204**, 1–5, 2016.

5. **B. Brešar, F. Kardoš, J. Katrenič,** and **G. Semanišin,** Minimum k-path vertex cover, *Discrete Appl. Math.,* **159**, No. 12, 1189–1195, 2011.
6. **R. W. Deming,** Independence numbers of graphs – an extension of the König–Egervary theorem, *Discrete Math.,* **27**, 23–33, 1979.
7. **N. S. Devi, A. C. Mane,** and **S. Mishra,** Computational complexity of minimum P_4 vertex cover problem for regular and $K_{1,4}$-free graphs, *Discrete Appl. Math.,* **184**, No. 12, 114–121, 2015.
8. **R. Diestel,** *Graph Theory,* Springer, Heidelberg, 2005 (Grad. Texts Math., Vol. 173).
9. **G. Ding, Z. Xu,** and **W. Zang,** Packing cycles in graphs, II, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **87**, No. 2, 244–253, 2003.
10. **J. Edmonds,** Paths, trees, and flowers, *Can. J. Math.,* **17**, No. 3–4, 449–467, 1965.
11. **P. Hell,** Graph packings, *Electron. Notes Discrete Math.,* **5**, 170–173, 2000.
12. **F. Kardoš, J. Katrenič,** and **I. Schiermeyer,** On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs, *Theor. Comput. Sci.,* **412**, No. 50, 7009–7017, 2011.
13. **D. G. Kirkpatrick** and **P. Hell,** On the completeness of a generalized matching problem, in *Proc. X Annu. ACM Symp. Theory Comput., San Diego, USA, May 1–3, 1978,* pp. 240–245, ACM, New York, 1978.
14. **A. Kosowski, M. Małafiejski,** and **P. Żyliński,** Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition, *Graphs Comb.,* **24**, No. 5, 461–468, 2008.
15. **Y. Li** and **J. Tu,** A 2-approximation algorithm for the vertex cover P_4 problem in cubic graphs, *Int. J. Comput. Math.,* **91**, No. 10, 2103–2108, 2014.
16. **S. Masuyama** and **T. Ibaraki,** Chain packing in graphs, *Algorithmica*, **6**, No. 1, 826–839, 1991.
17. **F. Sterboul,** A characterization of graphs in which the transversal number equals the matching number, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **27**, No. 2, 228–229, 1979.
18. **J. Tu** and **W. Zhou,** A primal-dual approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem, *Theor. Comput. Sci.,* **412**, No. 50, 7044–7048, 2011.
19. **R. Yuster,** Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition, *Comput. Sci. Rev.,* **1**, No. 1, 12–26, 2007.

Dmitry S. Malyshev,
Dmitry B. Mokeev

Received December 12, 2017
Revised October 30, 2018
Accepted November 28, 2018