ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2019. Том 26, № 1. С. 33–54

УДК 519.6:519.147 DOI 10.33048/daio.2019.26.609

О ЧИСЛЕ И РАСПОЛОЖЕНИИ СЕНСОРОВ ДЛЯ МНОГОКРАТНОГО ПОКРЫТИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ЧАСТИ ПЛОСКОСТИ

Ш. И. Галиев[a], *А. В. Хорьков*[b]

Казанский национальный исследовательский
технический университет им. А. Н. Туполева,
ул. К. Маркса, 10, 420011 Казань, Россия
E-mail: [a]sh.galiev@mail.ru, [b]aLex22fcrk@yandex.ru

Аннотация. Предложена методика определения числа сенсоров, их расположения и нахождения приближённых нижних оценок количества сенсоров для многократного покрытия произвольного ограниченного выпуклого замкнутого множества с непустой внутренностью на плоскости. Задача многократного покрытия рассмотрена при наличии ограничений на минимально возможные расстояния между сенсорами, а также при отсутствии таких ограничений. Для решения указанных задач строятся задачи 0–1 линейного программирования (ЛП). Используется эвристический алгоритм решения построенных задач 0–1 ЛП больших размерностей. Приведены результаты численных расчётов, и для некоторых частных случаев выявлено, что найденные числа сенсоров нельзя уменьшить. Табл. 1, ил. 3, библиогр. 42.

Ключевые слова: сенсорные сети, многократное покрытие, k-кратное покрытие, k-покрытие кругами заданного радиуса, число сенсоров для мониторинга заданной области, расположение сенсоров.

Введение

Беспроводная сенсорная сеть содержит, как правило, большое число сенсоров для мониторинга (обзора, покрытия) заданной области G. При проектировании беспроводных сенсорных сетей важной задачей является определение числа и расположения сенсоров для k-кратного покрытия ($k \geqslant 1$) заданной области G. Задача k-кратного покрытия (обзора) области G сенсорами известна также как задача k-кратного покрытия области G равными кругами.

Пусть G — ограниченное выпуклое замкнутое множество на плоскости P, имеющее непустую внутренность. Введём на P декартову систему

координат xOy. Пусть $d(t,s)$ — евклидово расстояние между точками t и s на P, и сенсоры имеют радиус обзора (покрытия), равный r. Считаем, что сенсор s (точка s) является центром круга радиуса r. В дальнейшем круг радиуса r и сенсор с радиусом обзора r в ряде случаев считаются синонимами.

Совокупность сенсоров $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$ с одинаковыми радиусами обзора r образует k-кратное покрытие (для краткости, k-покрытие) множества G, $1 \leqslant k \leqslant m$, если для каждой точки $t \in G$ существует не менее k сенсоров s_j таких, что $d(s_j, t) \leqslant r$, $s_j \in S$.

Задачи определения числа и расположения сенсоров (кругов) для k-покрытия заданных областей исследуются во многих работах, например, [1, 2, 10–13, 16, 22, 24–26, 28, 37, 40–42]. Существует много работ по задачам покрытия (1-покрытия) кругами как всей плоскости, так и ограниченных частей, например, квадрата, круга, треугольника и некоторых других фигур (см. [3, 17, 18, 23, 27, 30–36, 38]). В указанных работах, как правило, ставится задача минимизации радиусов покрывающих кругов при их известном количестве. Для решения таких задач используются минимаксиминные модели [34], области Вороного [3], модели деформируемых стержней [38] и другие методы. Отметим, что в работах [33–35] получены покрытия треугольника, квадрата и круговой области кругами, радиус которых найден с точностью до 19–20 знаков после запятой. Очевидно, что получение таких результатов для произвольных областей нереально.

Имеются также работы по k-покрытиям при $k \geqslant 2$, но их меньше, чем по однократным покрытиям. Для задач k-покрытий, $k \geqslant 2$, предлагаются различные методы как для определения минимальных радиусов известного числа кругов, так и для определения числа кругов заданных радиусов (см. [4,5,17,26,28,41,42]). Отметим, что рассматриваемые задачи покрытия относятся к NP-полным задачам (см., например, [6,7,9,20,29]).

Существует много публикаций по задачам обзора и многократного обзора с помощью сенсорных систем (см. работы [1, 2, 10, 11, 13, 16, 22, 25, 26, 40–42]). В различных публикациях по обзору в таких сетях в качестве критерия выбираются: минимизация числа сенсоров, минимизация энергозатрат, обеспечение коммуникационных возможностей системы, обнаружение при накоплении получаемого сигнала и многие другие характеристики системы. Среди разнообразных требований задача обзора является одной из приоритетных. Методы решения задач обзора связных областей G разнообразны. Достаточно распространенным является построение на G сетки, когда вместо обзора G исследуется обзор узлов построенной сетки. В некоторых работах задачи обзора формулируются, когда необходимо покрыть конечное множество точек зонами

обзора сенсоров, которые, в свою очередь, располагаются в некоторых точках конечного множества. Например, в [41] рассматривается выбор сенсоров в некоторых вершинах (конечного) графа для обзора вершин этого графа.

В данной работе предложена методика нахождения приближённого числа кругов (сенсоров) и их расположения для k-покрытия, $k \geqslant 1$, произвольного ограниченного выпуклого замкнутого множества G с непустой внутренностью на плоскости P. Ввиду того, что расположение в одной точке нескольких сенсоров нежелательно, вводятся ограничения на минимальные расстояния между сенсорами. Для решения задач обзора области при наличии ограничений или без них на заданном множестве G строится прямоугольная сетка, узлы которой образуют конечное множество T_Δ. Далее, с использованием T_Δ строятся задачи 0–1 линейного программирования (ЛП), решение которых позволяет найти оценки необходимого числа кругов и их расположения. Получены приближённые нижние оценки числа кругов для указанного покрытия G. Проведены численные расчёты, и для некоторых частных случаев выявлено, что оценки для них достижимы, следовательно, неулучшаемы.

1. Математические модели задачи

Выберем шаг Δ построения сетки на множестве G. С шагом $\Delta x = \Delta y = \Delta$ построим прямоугольную сетку на G. Совокупность линий, образующих сетку на G, порождает квадраты C_Δ со стороной Δ. Узлы сетки, содержащиеся в G, порождают конечное множество $T_\Delta = \{t_1, \dots, t_n\}$, $t_i \in G$.

Если квадрат C_Δ содержится целиком в G, то по определению каждая его вершина принадлежит T_Δ. Если квадрат C_Δ частично содержится в G, точнее, площадь множества $(C_\Delta \cap G)$ больше нуля, то точки входа границы G ($\operatorname{fr} G$) в C_Δ и точки выхода границы G из C_Δ добавим к множеству T_Δ. Если C_Δ частично содержится в G и множество $D = C_\Delta \cap G$ содержит центр s квадрата C_Δ, то точку s добавим к множеству T_Δ. Если указанная точка s не принадлежит D, то через s строим отрезки l_1 и l_2 длины Δ, лежащие в C_Δ и параллельные сторонам C_Δ. К множеству T_Δ отнесём точки пересечения $\operatorname{fr} G$ с l_1 и l_2, при этом если пересечение $\operatorname{fr} G$ с l_j, $j = 1, 2$, является некоторым отрезком $[d_1, d_2]$, то к T_Δ относим только точки d_1 и d_2.

Если шаг построения сетки равен $\Delta/2$, то $T_{\Delta/2}$ строится аналогично построению T_Δ с добавлением всех точек T_Δ к множеству построенных узлов для $\Delta/2$, следовательно, $T_\Delta \subset T_{\Delta/2}$.

Пусть заданы G, k, Δ, r и построено конечное множество T_Δ. Рассмотрим следующие задачи.

Задача P1. *Найти k-покрытие множества G кругами радиуса r таким образом, чтобы минимизировать число покрывающих кругов.*

Задача P2. *Найти k-покрытие множества G кругами радиуса r таким образом, чтобы минимизировать число покрывающих кругов при условии, что центр каждого покрывающего круга совпадает с некоторой точкой множества T_Δ и каждая точка из T_Δ совпадает не более чем с одним из возможных центров кругов.*

Задача P3. *Найти k-покрытие множества T_Δ кругами радиуса r таким образом, чтобы минимизировать число покрывающих кругов и расположить центр каждого покрывающего круга в T_Δ, при этом каждая точка из T_Δ должна совпадать не более чем с одним из возможных центров кругов.*

Рассмотрим вначале задачу P3. Пусть выбрана Δ и на G построено множество T_Δ. Введём параметр α и определим

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } d(t_i, t_j) \leqslant r - \alpha, \\ 0, & \text{если } d(t_i, t_j) > r - \alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Для корректного введения формул (1) должно выполняться условие: $\alpha < r$. В дальнейшем полагаем, что $\Delta \leqslant r/4$. Определим следующие переменные: z_i — число кругов радиуса $r-\alpha$, центры которых совпадают с точкой t_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Построим задачу

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n \to \min \tag{2}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{gathered} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n \geqslant k, \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \dots + a_{2n}z_n \geqslant k, \\ \dots \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n \geqslant k. \end{gathered} \tag{3}$$

$$z_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{4}$$

Ограничения (3) обеспечивают покрытие каждой точки t_i не менее чем k кругами.

Если в (1) положить $\alpha = 0$, то задача (2)–(4) будет задачей k-покрытия T_Δ наименьшим числом кругов радиуса r, при котором центры кругов совпадают с некоторыми точками T_Δ. Это утверждение легко следует, например, из [8, с. 71], если подмножества S_j множества T_Δ состоят из точек T_Δ, принадлежащих замкнутому кругу радиуса r с центром в $t_j \in T_\Delta$. Таким образом, для решения задачи P3 решаем систему (2)–(4) при $\alpha = 0$.

Рассмотрим задачу P2. При покрытии множества T_Δ кругами радиуса r не гарантируется покрытие исходного множества G. Квадрат C_Δ, порождённый прямоугольной сеткой, имеет диагональ, равную $\sqrt{2}\Delta$. Если уменьшить радиусы покрывающих кругов на половину диагонали, т. е. на $\alpha_0 = \Delta\sqrt{2}/2$, и круги радиуса $r - \alpha_0$ образуют k-покрытие T_Δ, то очевидно, что круги исходного радиуса r образуют k-покрытие множества G. Величину α_0 можно заменить на α, $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant 2\alpha_0$.

Лемма 1. *Пусть выбрано Δ, $\alpha = \Delta\sqrt{2}$, построено T_Δ, $T_{\Delta/2}$. Тогда каждое k-покрытие множества T_Δ кругами радиуса $r - \alpha$ порождает k-покрытие множества $T_{\Delta/2}$ кругами радиуса $r - \alpha/2$.*

Доказательство. Пусть решена задача (2)–(4) при $\alpha = \Delta\sqrt{2}$ и получено минимально возможное число кругов, скажем, с центрами в точках $c_1, c_2, \ldots, c_m$ ($c_i \in T_\Delta$), которые образуют k-покрытие множества T_Δ кругами радиуса $r - \alpha$. Тогда для любого $t_i \in T_\Delta$ существует не менее k точек c_l таких, что $d(t_i, c_l) \leqslant r - \alpha$.

Для любой точки $s_i \in T_{\Delta/2}$ найдётся $t_j \in T_\Delta$ такое, что $d(s_i, t_j) \leqslant \alpha/2$ и для t_j существует не менее k точек c_l таких, что $d(t_j, c_l) \leqslant r - \alpha$. Следовательно, имеем

$$d(s_i, c_l) \leqslant d(s_i, t_j) + d(t_j, c_l) \leqslant \alpha/2 + r - \alpha = r - \alpha/2.$$

Таким образом, число ($n_{\alpha/2}$) кругов радиуса $r - \alpha/2$, образующих k-покрытие множества $T_{\Delta/2}$, будет не больше числа (n_α) кругов, образующих k-покрытие множества T_Δ (кругами радиуса $r - \alpha$).

В результате получаем неравенство

$$n_{\alpha/2} \leqslant n_\alpha. \tag{5}$$

Лемма 1 доказана.

Пусть выбраны r, Δ и $\alpha = \Delta\sqrt{2}$.

Теорема 1. *Существует m такое, что решение задачи* (2)–(4) *при*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } d(t_i, t_j) \leqslant r - \alpha/2^m, \\ 0, & \text{если } d(t_i, t_j) > r - \alpha/2^m, \end{cases}$$

даёт минимальное число кругов $M = n_{\alpha/2^m}$ такое, что для любого $j \geqslant 1$ имеем $n_{\alpha/2^{m+j}} = M$. Эти M кругов радиуса $r - \alpha/2^m$ образуют k-покрытие множества $T_{\Delta/2^m}$, а при их радиусе, равном r, они образуют k-покрытие множества G.

Доказательство. Пусть величина Δ выбрана и построено множество T_Δ. Если в (1) положить $\alpha = \Delta\sqrt{2}$ и решить задачу (2)–(4), то получим минимальное число (n_α) кругов радиуса $r - \alpha$, которые образуют k-покрытие множества T_Δ. Отметим, что если эти n_α кругов имеют новый радиус, равный r, то они образуют k-покрытие множества G.

Последовательно полагаем $\Delta := \Delta/2^m$ ($\alpha := \alpha/2^m$), строим $T_{\Delta/2^m}$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, и решаем задачи (2)–(4), где в (1) величину α заменяем на $\alpha/2^m$. В результате будем последовательно получать числа $n_{\alpha/2^m}$ кругов радиуса $r - \alpha/2^m$, которые обеспечивают k-покрытие множества $T_{\Delta/2^m}$. Из соотношения (5) имеем

$$n_\alpha \geqslant n_{\alpha/2} \geqslant n_{\alpha/2^2} \geqslant n_{\alpha/2^3} \geqslant \ldots \geqslant n_{\alpha/2^m} \geqslant \ldots. \tag{6}$$

Последовательность целых чисел (6) невозрастающая и ограничена снизу некоторым числом $M^* > 0$. Следовательно, начиная с некоторого m, все $n_{\alpha/2^{m+j}}$ будут одинаковы для любого $j \geqslant 1$, пусть $n_{\alpha/2^{m+j}} = M$. Если положить, что радиусы этих кругов равны r, то они образуют k-покрытие множества G. Теорема 1 доказана.

Таким образом, для нахождения приближённого решения задачи P2 нет необходимости выбирать все меньшее и меньшее Δ, ибо начиная с некоторой величины шага построения сетки ($\Delta := \Delta/2^m$) дальнейшее уменьшение Δ не меняет числа кругов для покрытия G. Тогда число M является наименьшей оценкой числа кругов радиуса r, образующих k-покрытие множества G и полученных как решение задачи (2)–(4).

Из теоремы 1 следует, что P2 можно решить, используя задачу 0–1 ЛП (2)–(4) при соответствующем выборе Δ ($\Delta := \Delta/2^m$). Очевидно, что решая указанную задачу 0–1 ЛП при выбранном Δ, получаем верхнюю оценку числа кругов для покрытия множества G.

Рассмотрим, например, задачу покрытия единичного квадрата кругами радиуса 0,3. Если выбирать Δ последовательно равными 0,1, 0,05, 0,025 и 0,0125, то верхние оценки числа кругов для (однократного) покрытия получатся равными 9, 8, 7 и 7 соответственно. Известно, что минимально возможное число кругов равно 6.

Остаётся вопрос, как выбрать величину Δ. Ясно, что Δ нужно выбирать достаточно малой. При этом возрастает размерность указанной задачи. Признаком приемлемого выбора Δ может служить совпадение величин n_α и $n_{\alpha/2}$. Мы вынуждено выбирали Δ, исходя из возможностей нашего компьютера решать задачи 0–1 ЛП. Ясно, что в общем случае получим приближённое решение для P2. Важно, что в дальнейшем при выполнении некоторого условия мы укажем ещё и нижнюю оценку для числа сенсоров.

Приближённое решение задачи P2 принимаем за приближённое решение задачи P1.

2. Введение ограничений на расстояния между сенсорами

Как уже отмечено, расположение в одной точке нескольких сенсоров нежелательно, поэтому введём ограничения на минимальные расстояния между сенсорами. Отметим, что уже на этапе формулировки задач P2 и P3 предусмотрено, что в одной точке может располагаться не более одного сенсора. Это в математической модели записано в виде условия (4): $z_i \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. При рассмотрении задач k-покрытия заданного множества минимальным числом кругов очевидно, что в любой точке не может быть более k центров кругов. Если рассматривать задачу покрытия минимальным числом кругов при условии, что центры кругов могут совпадать, то в задаче (2)–(4) условие (4) заменится условием

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, k\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{7}$$

При решении полученной задачи (2), (3), (7) можно использовать, например, библиотеку CPLEX, но потребуется больше времени для решения такой задачи. Так, для задачи 3-покрытия единичного квадрата кругами радиуса 0,3, используя систему (2), (3), (7) вместо системы (2)–(4), в наших вычислениях потребовалось примерно в 1,5 больше машинного времени.

Если минимальное расстояние между сенсорами задано больше Δ, то необходимо вводить дополнительные условия. Так, в [26] для введения указанных ограничений строится очень громоздкая математическая модель. Мы введём это условие следующим способом.

Пусть требуется, чтобы расстояние между сенсорами было не меньше заданной величины λ. Из условия покрытия всех точек отрезка, соединяющего два ближайших друг к другу центра кругов, очевидно, что величина λ не может быть больше чем $2r$, здесь r — радиус покрывающих кругов. Более того, из условия однократного покрытия произвольного G несложно получить, что $\lambda \leqslant r\sqrt{3}$. При кратности покрытия $k > 1$ очевидно, что $\lambda \leqslant r$. Таким образом, при рассмотрении однократного покрытия можно выбирать λ в пределах $0 < \lambda \leqslant r\sqrt{3}$, а при $k > 1$ выбирать λ в пределах $0 < \lambda \leqslant r$. В зависимости от покрываемой области G могут возникнуть иные условия для величины λ, и эти условия могут быть различными в зависимости от G. Например, для 3-покрытия равностороннего треугольника W со стороной, равной c, очевидно, что $\lambda \leqslant c$, иначе центры покрывающих кругов окажутся вне W. Представим общую процедуру учёта ограничений между центрами кругов, следуя [19].

Пусть для каждой точки t_i из T имеется p_i точек t_j $(i \neq j,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, для которых $d(t_i, t_j) < \lambda$. Определим коэффициенты

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } d(t_i, t_j) < \lambda \\ 0, & \text{если } d(t_i, t_j) \geqslant \lambda \end{cases}, \quad i \neq j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

$$b_{ii} = p_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Введём следующие ограничения:

$$\begin{gathered} b_{11} z_1 + b_{12} z_2 + \cdots + b_{1n} z_n \leqslant p_1, \\ b_{21} z_1 + b_{22} z_2 + \cdots + b_{2n} z_n \leqslant p_2, \\ \cdots \\ b_{n1} z_1 + b_{n2} z_2 + \cdots + b_{nn} z_n \leqslant p_n. \end{gathered} \tag{8}$$

Ограничения (8) обеспечивают, чтобы расстояния между сенсорами были не меньше чем λ. Следовательно, решив задачу (2)–(4) с ограничением (8), можно получить расположение сенсоров с учётом минимальных расстояний между ними. Считаем, что величина λ выбрана таким образом, что задача (2)–(4), (8) имеет решение.

Построенные задачи являются задачами 0–1 ЛП. Их можно решать любым решателем задач целочисленного ЛП. При уменьшении шага Δ построения сетки возрастает размерность n рассматриваемой задачи и время решения становится неприемлемым. Поэтому, как и многие другие авторы, мы предлагаем возможный вариант эвристического алгоритма их решения для больших значений n.

Прежде всего отметим, что решение задачи ЛП менее затратно по времени, чем решение целочисленной задачи ЛП. Если в задаче 0–1 ЛП условия $z_i \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, заменить условиями $0 \leqslant z_i \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то полученная задача будет считаться релаксированной задачей ЛП.

3. Эвристический алгоритм решения задачи (2)–(4)

Одним из эвристических способов решения задач 0–1 ЛП является использование решений релаксированной задачи ЛП (см., например, [4, 14, 15, 21, 39]). В некоторых случаях для решения исходной задачи строится только релаксированная задача, в других случаях кроме релаксированной строится дополнительная новая задача 0–1 ЛП. По аналогии с указанными работами будем использовать как релаксированную задачу, так и новую задачу 0–1 ЛП. Представим эту процедуру в виде следующего алгоритма 1.

Алгоритм 1

Шаг 1. Для задачи (2)–(4) строится релаксированная задача, отличающаяся от исходной только тем, что ограничения целочисленности заменяются ограничениями $0 \leqslant z_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Шаг 2. Решаем построенную релаксированную задачу ЛП. Пусть найдено её решение и оптимальные значения переменных равны $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*$, соответственно. Если все z_i^*, $1 \leqslant i \leqslant n$, принимают значения 0 либо 1, то исходная задача 0–1 ЛП решена. Если среди z_i^* имеются нецелочисленные значения, то переходим к шагу 3.

Шаг 3. Упорядочиваем значения z_i^*, $1 \leqslant i \leqslant n$, по невозрастанию. Выбираем величину q и в упорядоченном массиве значений z_i^*, $1 \leqslant i \leqslant n$, выбираем q первых значений. Может оказаться, что среди q первых значений содержится только $v < p$ отличных от нуля. Тогда к этим v ненулевым значениям добавляем $q - v$ нулевых значений z_i^*, $1 \leqslant i \leqslant n$, которые выбираются случайным образом (по равномерному закону распределения). Таким же образом осуществляется выборка, когда необходимо выбрать одно из нескольких одинаковых значений. Пусть указанным образом выбрали значения z_j^*: $z_{m1}^*, z_{m2}^*, \ldots, z_{mq}^*$. Вводим переменные y_l, $1 \leqslant l \leqslant q$, и коэффициенты $b_{il} = a_{i,ml}$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant q$. Далее строится 0–1 задача ЛП, так называемая ядерная задача:

$$\begin{gathered}
y_1 + y_2 + \cdots + y_q \to \min \\
b_{11}y_1 + \cdots + b_{1q}y_q \geqslant k, \\
\cdots \\
b_{n1}y_1 + \cdots + b_{n1}y_q \geqslant k, \\
y_i \in \{0, 1\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant q.
\end{gathered}$$

Шаг 4. Решаем ядерную задачу. Пусть ядерная задача решена и найдены оптимальные значения y_i: $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_q^*$. Для каждого $y_l^* = 1$ полагаем соответствующее значение z_{il}^* равным 1. Для остальных значений полагаем, что $z_{il}^* = 0$. Полученные результаты принимаются за решение задачи (2)–(4).

Величина q выбирается таким образом, чтобы можно было решить ядерную задачу точным методом без привлечения эвристик и случайных процедур. В данной работе величина Δ, в основном, выбиралась равной 0,01, при которой получаются задачи 0–1 ЛП с числом переменных, равным примерно 10000. В ряде случаев мы решали задачу с 14000 переменных. При этих значениях размерности задачи величина q выбиралась равной 300 и полученные решения оказывались приемлемыми.

Если вводятся ограничения (8), то в данной работе задача (2)–(4), (8) решается без эвристики. Можно решать, используя указанную эвристику, но при построении ядерной задачи необходимо преобразовать ограничения (8), используя новые переменные y_l, $1 \leqslant l \leqslant q$.

4. Нижняя оценка для числа сенсоров

Пусть выбраны r, $\Delta > 0$, k $(1 \leqslant k \leqslant 4)$, $\lambda = 3\Delta$, определено $\beta = \Delta\sqrt{2}$ и построено T_Δ.

Теорема 2. *Пусть n_{opt} — минимальное число кругов радиуса r, которые обеспечивают k-покрытие множества G, когда минимальное расстояние между сенсорами не меньше λ, n_1 — минимальное число кругов радиуса $r + \beta$, полученное как решение задачи* (2)–(4) *при $\alpha = 0$ (и образующее k-покрытие T_Δ). Тогда*

$$n_1 \leqslant n_{\text{opt}}. \tag{9}$$

Доказательство. Считаем, что для выбранного множества G существует минимальное число n_{opt} кругов радиуса r, которые обеспечивают k-покрытие множества G, когда минимальное расстояние между сенсорами не меньше λ. Положим, что центры $m = n_{\text{opt}}$ $(m \geqslant 1)$ кругов расположены в точках $c_1, \ldots, c_m$, $c_i \in G$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Из условия, что $\min\{d(c_i, c_j) \geqslant \lambda \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j\}$, следует, что все точки $c_1, \ldots, c_m$ различны, пусть $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$.

Для выбранного Δ найдём T_Δ (независимо от C). Для нахождения T_Δ на G построена сеть с шагом Δ, поэтому расстояние от $c_i \in C$ до ближайшего узла сетки не больше чем β. Пусть из c_i сдвигом на величину не более β можно достичь некоторой t из T_Δ. Тогда c_i принадлежит замкнутому кругу K радиуса β с центром в t. Так как диаметр круга K меньше 3Δ, в K нет других точек из $C \backslash \{c_i\}$, из которых можно достичь t. Следовательно, в каждую точку из T_Δ, не совпадающую с точкой из C, можно сдвинуть не более одной точки из C. При указанных сдвигах минимальное возможное расстояние между центрами кругов может уменьшиться, но останется не меньше величины Δ.

Итак, если c_i не совпадает с точкой из T_Δ , то сдвинем её к ближайшей точке из T_Δ, в которой нет точки из C. Указанный сдвиг осуществляем на величину, не превышающую β. Кроме сдвигов, увеличим радиусы кругов на величину β. Круги радиуса r с центрами в точках $c_1, \ldots, c_m$ образуют k-покрытие множества G. После сдвигов центров и увеличения радиусов на величину β очевидно, что эти m кругов с центрами в T_Δ будут образовывать k-покрытие множества G, следовательно, и множества T_Δ, при этом минимальное расстояние между центрами кругов окажется не меньшим величины Δ. Зная Δ и T_Δ, решим задачу (2)–(4)

для радиусов кругов $r+\beta$ (при $\alpha=0$). В результате получим минимальное число n_1 кругов радиуса $r+\beta$, образующих k-покрытие T_Δ. Следовательно, имеем соотношение (9). Теорема 2 доказана.

Нам неизвестна величина n_{opt}, но n_1 найдена как решение задачи (2)–(4). Величина n_1, полученная в (9), зависит от Δ. Аналогично доказательству теоремы 1 можно показать, что, начиная с некоторой Δ, дальнейшее уменьшение Δ не влияет на величину n_1.

Получаем следующую процедуру определения нижней оценки числа кругов для обеспечения k-покрытия ($1 \leqslant k \leqslant 4$) заданной области G при условии, что минимально возможное расстояние между центрами кругов не меньше величины 3Δ. Решим задачу (2)–(4) для радиусов $r+\beta$, где коэффициенты a_{ij} определяются по (1) при $\alpha=0$. Найденное число ненулевых z_i даёт нижнюю оценку числа кругов, обеспечивающих указанное k-покрытие области G.

Для покрытия единичного квадрата кругами радиуса 0,3 выбираем Δ последовательно равными 0,1, 0,05, 0,025 и 0,0125, тогда нижние оценки числа кругов для (однократного) покрытия получатся равными 4, 5, 5 и 6 соответственно. Известно, что минимально возможное число кругов равно 6.

Рассмотрим случай с введёнными ограничениями (8), когда $\lambda \geqslant 3\Delta$. Считаем, что существует наименьшее число M^* кругов радиуса r, которые обеспечивают k-покрытие G, при котором наименьшее расстояние между центрами кругов не меньше чем λ. Выберем Δ и построим T_Δ. Центры кругов, не лежащие в точках из T_Δ, сдвинем в ближайшую точку из T_Δ, не содержащую центр покрывающего круга, пусть этот сдвиг не превышает величину $\beta=\Delta\sqrt{2}$. Увеличим радиусы кругов на β. Тогда M^* кругов радиуса $r+\beta$ обеспечивают k-покрытие G, следовательно, и k-покрытие T_Δ. После указанных сдвигов условия (8) выполняются для некоторого $\lambda^* \in [\lambda-2\beta, \lambda+2\beta]$. Если решить задачу (2)–(4), (8), где величина λ заменена на λ^*, то получим число $n_1(\lambda^*)$ кругов, при этом

$$n_1(\lambda^*) \leqslant M^*. \tag{10}$$

В задаче (2)–(4), (8) минимизируется число кругов, поэтому ограничения (8) могут только увеличивать число кругов. Следовательно, для получения нижней границы числа кругов нужно выбрать $\lambda^*=\lambda-2\beta$. Таким образом, неравенство (10) позволяет оценить неизвестное число M^*.

5. Численные результаты

Число кругов для однократного покрытия некоторых фигур, например квадрата, треугольника и круга кругами наименьших возможных

Таблица 1

Числа кругов (сенсоров) и их оценки для покрытия квадрата, прямоугольника и круга при заданных значениях радиусов r кругов (зон обзора сенсоров)

r	Кратность покрытия (k)								
	квадрата 1×1			прямоугольника $1{,}22 \times 0{,}82$			круга радиуса 0,5642		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0,5	3/4 (3/4)	6/8 (6/8)	10/12 (10/12)	3/3 (3/3)	6/6 (6/6)	9/9 (9/10)	3/3 (3/3)	6/6 (6/6)	9/9 (9/10)
0,45	4/4 (4/4)	8/8 (8/8)	12/12 (12/12)	3/4 (3/4)	7/8 (7/8)	10/12 (10/12)	4/4 (4/4)	7/7 (7/7)	11/11 (10/11)
0,4	4/4 (4/4)	8/8 (8/8)	12/12 (12/12)	4/4 (4/4)	8/8 (8/8)	12/12 (12/13)	4/4 (4/5)	8/8 (8/9)	12/12 (12/13)
0,35	4/5 (4/5)	8/10 (8/10)	12/15 (13/16)	4/5 (4/5)	9/10 (9/10)	15/15 (15/16)	5/5 (5/5)	10/10 (9/11)	14/14 (14/16)
0,3	6/7 (6/7)	12/13 (12/14)	17/21 (17/21)	6/6 (6/6)	12/12 (12/12)	18/18 (18/19)	7/7 (6/7)	12/14 (12/14)	18/19 (18/21)
0,25	9/9 (9/9)	17/18 (17/18)	25/27 (25/28)	8/9 (8/9)	16/18 (16/19)	22/26 (23/28)	8/8 (8/9)	15/15 (15/18)	23/24 (23/28)

радиусов, можно найти в разных публикациях (см., например, [18, 27, 30–36, 38]). Для k-покрытия при $k \geqslant 2$ известны только некоторые результаты [4, 5, 17, 28, 37, 41, 42]. Мы получаем оценки числа кругов для k-покрытия ($1 \leqslant k \leqslant 4$) произвольного множества G и при этом можем добавить ограничения на минимальные расстояния между кругами.

Для проведения расчётов в качестве покрываемых областей были выбраны единичный квадрат, прямоугольник со сторонами 1,22 и 0,82 и круг радиуса 0,5642. Указанные размеры выбраны таким образом, чтобы площади этих фигур были примерно одинаковыми. В дальнейшем символ / используется как разделитель. Минимальное допустимое расстояние λ между центрами кругов задаётся при $\lambda > \Delta$ с помощью ограничений (8), а при $\lambda = \Delta$ они уже учитываются ограничениями (4). Полученные в результате расчётов числа кругов совпадают с их верхними оценками, поэтому верхние оценки мы не записываем.

В табл. 1 приведены числа кругов и их нижние оценки для квадрата, прямоугольника и круга при выбранных значениях радиусов r покрывающих кругов и кратности покрытия k, равной 1, 2 и 3. В верхней строке (для выбранного радиуса r) приведена нижняя оценка числа кругов для $\lambda \geqslant 3\Delta$, затем полученное значение числа кругов при $\lambda \geqslant \Delta$.

В нижней строке (для выбранного радиуса r) в скобках записаны нижняя оценка числа кругов для $\lambda \geqslant r/2$, затем полученное значение числа кругов при $\lambda \geqslant r/2$.

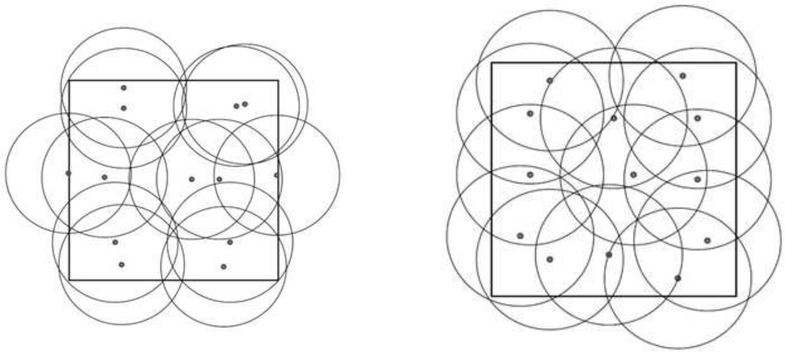
Из табл. 1 видно, что для некоторых случаев покрытий полученные значения числа кругов совпадают с их нижними оценками, следовательно, эти результаты не улучшаемы. В других случаях нижние оценки отличаются незначительно от достигнутых значений.

Проведём сравнительный анализ для однократного покрытия квадрата. Из [3, 35, 36, 38] следует, что при радиусах кругов, равных 0,5, 0,45, 0,4, 0,35 и 0,25, минимально возможное число кругов для покрытия квадрата равно 4, 4, 4, 5 и 9 соответственно, эти же числа получены в данной работе. Для радиуса 0,3 в данной работе число кругов равно 7, хотя квадрат можно покрыть шестью кругами. Число кругов можно было бы уменьшить на единицу, выбирая Δ меньше 0,01, но наш компьютер не справляется с этим. Результаты, представленные в табл. 1, оказываются приемлемыми с учётом того, что данный подход позволяет выяснять необходимое число кругов для произвольного ограниченного выпуклого множества G, а не только отдельных областей.

Имеются только единичные работы по учёту расстояния между сенсорами (см. [12, 26]). Эти ограничения могут вводиться с учётом взаимного влияния устройств друг на друга, либо в силу иных причин. Введение ограничений между центрами кругов в некоторых случаях не меняет числа покрывающих кругов, но в других случаях число кругов и их расположения меняются. Например, для 3-покрытия квадрата кругами радиуса 0,25 потребовалось 27 кругов, а при введении ограничения (8) $\lambda = r/2$ — 28 кругов. Аналогично для 2-покрытия прямоугольника кругами радиуса 0,25 требуется 18 кругов, а при введении условия (8) $\lambda = r/2$ покрытие осуществляется девятнадцатью кругами. Для случаев, когда число кругов отлично от указанных для них нижних оценок, оказывается, что разница между достигнутыми значениями и нижними оценками невелика.

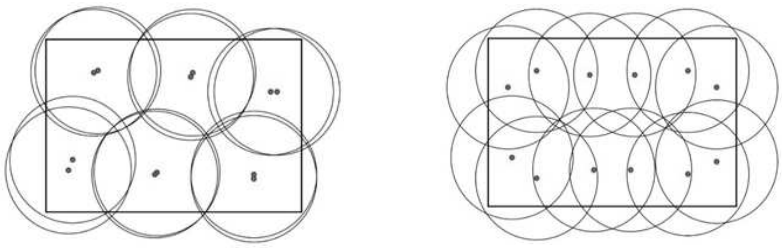
Табл. 1 показывает, что в зависимости от фигуры (квадрат, прямоугольник или круг) оценки числа кругов меняются, но незначительно, так как площади выбранных фигур примерно одинаковы. Так, например, 2-покрытие квадрата кругам радиуса 0,3 осуществляется 13 кругами, а прямоугольника — 12 кругами.

Расположение кругов на выбранной области получаем, решая задачу (2)–(4), либо задачу (2)–(4), (8) при заданном значении радиуса кругов и заданной величине λ для (8). На рис. 1–3 приведены примеры 2-покрытия кругами радиуса 0,3 квадрата 1×1, прямоугольника $1{,}22 \times 0{,}82$ и круга радиуса 0,5642 без ограничений (8) и с ограничениями (8)



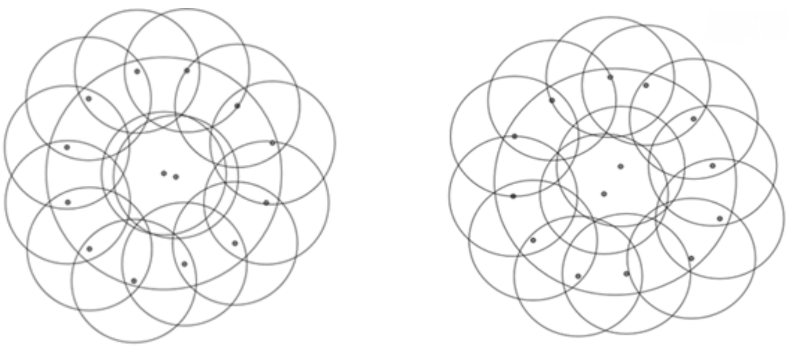
а *б*

Рис. 1. 2-Покрытия квадрата кругами радиуса 0,3 при отсутствии и наличии ограничений между центрами кругов



а *б*

Рис. 2. 2-Покрытия прямоугольника кругами радиуса 0,3 при отсутствии и наличии ограничений между центрами кругов



а *б*

Рис. 3. 2-Покрытия круговой области кругами радиуса 0,3 при отсутствии и наличии ограничений между центрами кругов

при $\lambda = 0{,}5r$, где r — радиус покрывающих кругов ($r = 0{,}3$). На рисунках слева приведены расположения сенсоров без ограничений (8), а справа — с ними.

Расчёты проводились на компьютере Intel Core i7–4790K, ОЗУ 8Гб, Windows 10x64 с использованием библиотеки CPLEX–12.6.3. Время счёта величин, представленных в табл. 1, занимает от нескольких секунд до нескольких минут. Например, время счёта оценки числа кругов при $r = 0{,}3$, $k = 2$ для покрытия квадрата равно примерно 10 секундам. Так как эти результаты должны рассчитываться заранее, а не в онлайн режиме, не приводим время счёта для отдельных случаев.

Заключение

В данной статье представлена математическая модель и методика определения числа кругов (сенсоров), их расположения и приближённых нижних оценок для k-покрытия ($1 \leqslant k \leqslant 4$) произвольной ограниченной выпуклой области G с непустой внутренностью на плоскости. Выявлено, что при построении сеток с шагом Δ на G (дискретизации задачи) нет необходимости выбирать все меньшее и меньшее Δ, ибо существует значение Δ, после которого результаты не меняются. Приведён эффективный и простой способ учёта минимально возможного расстояния между центрами покрывающих кругов (сенсоров). Приведены приближённые нижние оценки числа кругов для k-покрытия заданной области при условии существования такого покрытия; все результаты получены для k-покрытия достаточно произвольного ограниченного множества. Приведены численные результаты, которые демонстрируют эффективность метода, а для известных случаев совпадают с опубликованными ранее. Метод основан на решении 0–1 задачи ЛП. Методики очевидным образом распространяются на случай k-покрытия в трёхмерном пространстве.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за замечания и полезные рекомендации, позволившие улучшить работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алдын-оол Т. А., Ерзин А. И., Залюбовский В. В.** Покрытие плоской области случайно распределенными сенсорами // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, № 4. С. 7–25.
2. **Астраков С. Н., Ерзин А. И.** Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов // Вычисл. технологии. 2010. Т. 17, № 1. С. 26–34.
3. **Брусов В. С., Пиявский С. А.** Вычислительный алгоритм оптимального покрытия плоских областей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 2. С. 304–312.

4. **Галиев Ш. И., Карпова М. А.** Оптимизация многократного покрытия ограниченного множества кругами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 7. С. 757–769.
5. **Галиев Ш. И., Хорьков А. В.** Многократные покрытия кругами равностороннего треугольника, квадрата и круга // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 6. С. 5–28.
6. **Еремеев А. В., Заозёрская Л. А., Колоколов А. А.** Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 7, № 2. С. 22–46.
7. **Кузюрин Н. Н.** О сложности построения асимптотически оптимальных покрытий и упаковок // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 1. С. 11–13.
8. **Сигал И. Х., Иванова А. П.** Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М.: Физматлит. 2002. С. 240.
9. **Хачай М. Ю., Поберий М. И.** Вычислительная сложность и аппроксимируемость серии геометрических задач о покрытии // Тр. ин-та математики и механики УРО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 247–260.
10. **Ammari H. M.** Challenges and opportunities of connected k-covered wireless sensor networks. Berlin; Heidelberg: Spinger-Verl. 2009. P. 342.
11. **Andersen T., Tirthapura S.** Wireless sensor deployment for 3D coverage with constraints // Proc. 6th Int. Conf. Networked Sensing Systems. Pittsburg, 2009. P. 78–81.
12. **Astrakov S. N.** Coverings of sets with restrictions on the arrangement of circles // Proc. VIII Int. Conf. Optimization and Applications (OPTIMA-2017) (Petrovac, Montenegro). published at www.ceur-ws.org. 2017. P. 67–72.
13. **Aziz N. A. A., Aziz K. A., Ismail W. Z. W.** Coverage strategies for wireless sensor networks // World Acad. Sci., Eng. Technology Int. J. Electron. Commun. Eng. 2009. Vol. 3, No. 2. P. 145–159.
14. **Bertsimas. D., Vohra. R.** Rounding algorithms for covering problems // Math. Program. 1998. Vol. 80. P. 63–89.
15. **Caprara A., Fischetti M., Tóth P.** A heuristic method for the set covering problem // Oper. Res. 1999. Vol. 47. P. 730–743.
16. **Erzin A., Astrakov S.** Min-density stripe covering and applications in sensor networks // Lect. Notes Comput. Sci. 2011. Vol. 6784. P. 152–162.
17. **Fejes Tóth G.** Multiple packing and covering of the plane with circles // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1976. Vol. 27, No. 1–2. P. 135–140.
18. **Fejes Tóth G.** Thinnest covering of circle by eight, nine and ten congruent circles // Comb. Comput. Geom. 2005. Vol. 52. P. 361–376.
19. **Galiev Sh. I., Lisafina M. S.** Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain // Eur. J. Oper. Res. 2013. Vol. 230. P. 505–514.
20. **Garey M. R., Jonson D. S.** Computers and intractability // A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco : W. H. Freeman, 1979.
21. **Hall N., Hochbaum D. A.** A fast approximation algorithm for the multicovering problem // Discrete Appl. Math. 1989. Vol. 15. P. 35–40.

22. Hawbani A., Wang X. F., Husaini N., Karmoshi S. Grid coverage algorithm & analysis for wireless sensor networks // Netw. Protocols Algorithms. 2014. Vol. 6, No. 4. P. 65–81.

23. Heppes A., Melissen H. Covering a rectangle with equal circles // Period. Math. Hungar. 1997. Vol. 34. P. 65–81.

24. Hochbaum D. S., Maass W. Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and vlsi // J. ACM. 1985. Vol. 32, No. 1. P. 130–136.

25. Huang C. F., Tseng Y. C. A survey of solutions to the coverage problems in wireless sensor networks // J. Internet Technology. 2005. Vol. 6, No. 1. P. 1–8.

26. Kim J. E., Han J., Lee C. G. Optimal 3-coverage with minimum separation requirements for ubiquitous computing environments // Mobile Netw. Appl. 2009. P. 556–570.

27. Krotoszynski S. Covering a disk with smaller disks // Studia Sci. Math. Hungar. 1993. Vol. 28, No. 3–4. P. 277–283.

28. Kumar S., Lai T. H., Balogh J. On k-coverage in a mostly sleeping sensor network // Proc. ACM MobiCom. 2004. P. 144–158.

29. Megiddo N. On the complexity of some common geometric location problems // SIAM J. Comput. 1984. Vol. 13. P. 182–196.

30. Melissen J. B. M. Loosest circle coverings of an equilateral triangle // Math. Mag. 1997. Vol. 70. P. 119–125.

31. Melissen J. B. M., Schuur P. C. Improved coverings of a square with six and eight equal circles // Electron. J. Comb. 1996. Vol. 3 R32. P. 10 (electronic).

32. Melissen J. B. M., Schuur P. C. Covering a rectangle with six and seven circles // Discrete Appl. Math. 2000. Vol. 99. P. 149–156.

33. Nurmella K. J. Covering a circle by congruent circular discs // Preprint. Departament of Computer Sciences and Engineering. Helsinki Univ. Technology, 1998.

34. Nurmella K. J. Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles // Exp. Math. 2000. Vol. 9. P. 241–250.

35. Nurmella K. J., Östergard P. R. J. Covering a square with up to 30 equal circles // Res. Rep. A62 Lab. Technology Helsinki Univ., 2000. www.tcs.hut.fi/Publications/reports.

36. Suzuki A., Drezner Z. The minimum number equitable radius location problems with continuous domain // Eur. J. Oper. Res. 2009. P. 17–30.

37. Tabirca T., Yang L. T., Tabirca S. Smallest number of sensors for k-covering // Int. J. Comput. Commun. 2013. Vol. 8. P. 312–319.

38. Tarnai T., Gáspár Zs. Covering a square by equal circles // Elem. Math. 1995. Vol. 50. P. 167–170.

39. Umetani S., Yagiura M. Relaxation heuristics for the set covering problem // J. Oper. Res. Soci. Jap. 2007. Vol. 50, No. 4. P. 350–375.

40. Wang B. Coverage problems in sensor networks: a survey // J. ACM Comput. Surv. (CSUR). 2011. Vol. 43. P. 167–170.

41. **Yang S., Dai F., Cardei M., Wu J.** On connected multiple point coverage in wireless sensor networks // Int. J. Wireless Inform. Netw. 2006. Vol. 13, No. 4. P. 289–301.
42. **Yeasmin N.** k-Coverage problems and solutions in wireless sensor networks: a survey // Int. Jo. Comput. Appl. 2014. Vol. 100, No. 17. P. 1–6.

Галиев Шамиль Ибрагимович,
Хорьков Александр Владимирович

Статья поступила
7 февраля 2018 г.
После доработки —
22 октября 2018 г.
Принята к публикации
28 ноября 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2019. Volume 26, No. 1. P. 33–54

UDC 519.6:519.147 DOI 10.33048/daio.2019.26.609

ON THE NUMBER AND ARRANGEMENT OF SENSORS FOR THE MULTIPLE COVERING OF BOUNDED PLANE DOMAINS

Sh. I. Galiev[a] and *A. V. Khorkov*[b]

Tupolev Kazan National Research Technical University,
10 Karl Marks Street, 420011 Kazan, Russia
E-mail: [a]sh.galiev@mail.ru, [b]aLex22fcrk@yandex.ru

Abstract. We propose a method for determining the number of sensors, their arrangement, and approximate lower bounds for the number of sensors for the multiple covering of an arbitrary closed bounded convex area in a plane. The problem of multiple covering is considered with restrictions on the minimal possible distances between the sensors and without such restrictions. To solve these problems, some 0–1 linear programming (LP) problems are constructed. We use a heuristic solution algorithm for 0–1 LP problems of higher dimensions. The results of numerical implementation are given and for some particular cases it is obtained that the number of sensors found can not be decreased. Tab. 1, illustr. 3, bibliogr. 42.

Keywords: wireless sensor network, multiple covering, k-fold covering, k-covering with circles of given radius, number of sensors for monitoring of given area, arrangement of sensors.

REFERENCES

1. **T. A. Aldyn-ool, A. I. Erzin,** and **V. V. Zalyubovskiy,** The coverage of a planar region by randomly deployed sensors, *Vestn. NGU, Ser. Mat. Mekh. Inform.,* **10**, No. 4, 7–25, 2010 [Russian].
2. **S. N. Astrakov** and **A. I. Erzin,** Construction of efficient covering models in the monitoring of extended objects, *Vychisl. Tekhnol.,* **17**, No. 1, 26–34, 2012 [Russian].
3. **V. S. Brusov** and **S. A. Piyavskii,** A computational algorithm for optimally covering a plane region, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **11**, No. 2, 304–312, 1971 [Russian]. Translated in *USSR Comput. Math. Math. Phys.,* **11**, No. 2, 17–27, 1971.

4. **Sh. I. Galiev** and **M. A. Karpova,** Optimization of multiple covering of a bounded set with circles, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **50**, No. 4, 757–769, 2010 [Russian]. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **50**, No. 4, 721–732, 2010.
5. **Sh. I. Galiev** and **A. V. Khorkov,** Multiple circle coverings of an equilateral triangle, square, and circle, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 6, 5–28, 2015 [Russian].
6. **A. V. Eremeev, L. A. Zaozerskaya,** and **A. A. Kolokolov,** The set covering problem: Complexity, algorithms, and experimental investigations, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **7**, No. 2, 22–46, 2000 [Russian].
7. **N. N. Kuzyurin,** On the complexity of asymptotically optimal coverings and packing, *Dokl. Akad. Nauk,* **363**, No. 1, 11–13, 1998 [Russian]. Translated in *Dokl. Math.,* **58**, No. 3, 345–346, 1998.
8. **I. Kh. Sigal** and **A. P. Ivanova,** *Introduction to Applied Discrete Programming: Models and Computational Algorithm,* Fizmatlit, Moscow, 2002 [Russian].
9. **M. Yu. Khachai** and **M. I. Poberii,** Computational complexity and approximability of a series of geometric covering problems, *Tr. Inst. Mat. Mekh.,* **18**, No. 3, 247–260, 2012 [Russian]. Translated in *Proc. Steklov Inst. Math.,* **284**, Suppl. 1, S87–S95, 2014.
10. **H. M. Ammari,** *Challenges and Opportunities of Connected k-Covered Wireless Sensor Networks: From Sensor Deployment to Data Gathering,* Springer, Heidelberg, 2009 (Stud. Comput. Intell., Vol. 215).
11. **T. Andersen** and **S. Tirthapura,** Wireless sensor deployment for 3D coverage with constraints, *Proc. 6th Int. Conf. Networked Sensing Syst., Pittsburgh, USA, June 17–19, 2009*, pp. 78–81, IEEE, Piscataway, 2009.
12. **S. N. Astrakov,** Coverings of sets with restrictions on the arrangement of circles, in *Optimization and Applications* (Proc. VIII Int. Conf. Optim. Methods Appl., Petrovac, Montenegro, Oct. 2–7, 2017), pp. 67–72, RWTH Aachen Univ., Aachen, 2017 (CEUR Workshop Proc., Vol. 1987). Available at http://ceur-ws.org/Vol-1987 (accessed Nov. 15, 2018).
13. **N. A. A. Aziz, K. A. Aziz,** and **W. Z. W. Ismail,** Coverage strategies for wireless sensor networks, *Int. J. Electron. Commun. Eng.,* **3**, No. 2, 145–159, 2009.
14. **D. Bertsimas** and **R. Vohra,** Rounding algorithms for covering problems, *Math. Program.,* **80**, No. 1, 63–89, 1998.
15. **A. Caprara, M. Fischetti,** and **P. Toth,** A heuristic method for the set covering problem, *Oper. Res.,* **47**, No. 5, 730–743, 1999.
16. **A. I. Erzin** and **S. N. Astrakov,** Min-density stripe covering and applications in sensor networks, in *Computational Science and Its Applications — ICCSA 2011* (Proc. 2011 Int. Conf. Comput. Sci. Its Appl., Santander, Spain, June 20–23, 2011), Pt. III, pp. 152–162, Springer, Heidelberg, 2011 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 6784).
17. **G. Fejes Tóth,** Multiple packing and covering of the plane with circles, *Math. Acad. Sci. Hungar.,* **27**, No. 1–2, 135–140, 1976.

18. G. Fejes Tóth, Thinnest covering of a circle by eight, nine, or ten congruent circles, in *Combinatorial and Computational Geometry,* pp. 361–376, Cambridge Univ. Press, New York, 2005 (Math. Sci. Res. Inst. Publ., Vol. 52).

19. Sh. I. Galiev and **M. S. Lisafina,** Linear models for the approximate solution of the problem of packing equal circles into a given domain, *Eur. J. Oper. Res.,* **230**, 505–514, 2013.

20. M. R. Garey and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,* Freeman, San Francisco, 1979. Translated under the title *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi,* Mir, Moscow, 1982.

21. N. G. Hall and **D. S. Hochbaum,** A fast approximation algorithm for the multicovering problem, *Discrete Appl. Math.,* **15**, No. 1, 35–40, 1986.

22. A. Hawbani, X. F. Wang, N. Husaini, and **S. Karmoshi,** Grid coverage algorithm & analysis for wireless sensor networks, *Netw. Protoc. Algorithms,* **6**, No. 4, 65–81, 2014.

23. A. Heppes and **H. Melissen,** Covering a rectangle with equal circles, *Period. Math. Hung.,* **34**, No. 1–2, 65–81, 1997.

24. D. S. Hochbaum and **W. Maass,** Approximation schemes for covering and packing problems in image processing and VLSI, *J. ACM,* **32**, No. 1, 130–136, 1985.

25. C. F. Huang and **Y. C. Tseng,** A survey of solutions to the coverage problems in wireless sensor networks, *J. Internet Technol.,* **6**, No. 1, 1–8, 2005.

26. J. E. Kim, J. Han and **C. G. Lee,** Optimal 3-coverage with minimum separation requirements for ubiquitous computing environments, *Mob. Netw. Appl.,* 556–570, 2009.

27. S. Krotoszyński, Covering a disk with smaller disks, *Stud. Sci. Math. Hung.,* **28**, No. 3–4, 277–283, 1993.

28. S. Kumar, T. H. Lai, and **J. Balogh,** On k-coverage in a mostly sleeping sensor network, in *Proc. 10th Annu. Int. Conf. Mob. Comput. Netw.,* pp. 144–158, ACM, New York, 2004.

29. N. Megiddo and **K. J. Supowit,** On the complexity of some common geometric location problems, *SIAM J. Comput.,* **13**, No.1, 182–196, 1984.

30. H. Melissen, Loosest circle coverings of an equilateral triangle, *Math. Mag.,* **70**, No. 2, 118–124, 1997.

31. J. B. M. Melissen and **P. C. Schuur,** Improved coverings of a square with six and eight equal circles, *Electron. J. Comb.,* **3**, No. 1/R32, 1–10, 1996. Available at http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v3i1r32 (accessed Nov. 20, 2018).

32. J. B. M. Melissen and **P. C. Schuur,** Covering a rectangle with six and seven circles, *Discrete Appl. Math.,* **99**, No. 1–3, 149–156, 2000.

33. K. J. Nurmela, Covering a circle by congruent circular discs, *Prepr. Helsinki Univ. Technol.,* Helsinki Univ. Technol., Helsinki, 1998.

34. K. J. Nurmela, Conjecturally optimal coverings of an equilateral triangle with up to 36 equal circles, *Exp. Math.,* **9**, No. 2, 241–250, 2000.

35. **K. J. Nurmela** and **P. R. J. Östergård,** Covering a square with up to 30 equal circles, *Res. Rep. 62,* Helsinki Univ. Technol., Helsinki, Finland, 2000. Available at http://www.tcs.hut.fi/old/reports/A62abstract.html (accessed Nov. 20, 2018).
36. **A. Suzuki** and **Z. Drezner,** The minimum number equitable radius location problems with continuous domain, *Eur. J. Oper. Res.,* **195**, No. 1, 17–30, 2009.
37. **T. Tabirca, L. T. Yang,** and **S. Tabirca,** Smallest number of sensors for k-covering, *Int. J. Comput. Commun. Control,* **8**, No. 2, 312–319, 2013.
38. **T. Tarnai** and **Zs. Gáspár,** Covering a square by equal circles, *Elem. Math.,* **50**, 167–170, 1995.
39. **S. Umetani** and **M. Yagiura,** Relaxation heuristics for the set covering problem, *J. Oper. Res. Soc. Jpn.,* **50**, No. 4, 350–375, 2007.
40. **B. Wang,** Coverage problems in sensor networks: A survey, *J. ACM Comput. Surv.,* **43**, No. 4, 167–170, 2011.
41. **S. Yang, F. Dai, M. Cardei, J. Wu,** and **F. Patterson,** On connected multiple point coverage in wireless sensor networks, *Int. J. Wirel. Inf. Netw.,* **13**, No. 4, 289–301, 2006.
42. **N. Yeasmin,** k-coverage problems and solutions in wireless sensor networks: A survey, *Int. J, Comput. Appl.,* **100**, No. 17, 1–6, 2014.

Shamil I. Galiev,
Alexander V. Khorkov

Received February 7, 2018
Revised October 22, 2018
Accepted November 28, 2018