ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2019. Том 26, № 1. С. 20–32

УДК 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2019.26.615

ВТОРОЕ СООТНОШЕНИЕ РИДДЕЛА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

В. А. Воблый

Всероссийский институт научной и технической информации РАН,
ул. Усиевича, 20, 125190 Москва, Россия

E-mail: vitvobl@yandex.ru

Аннотация. Второе соотношение Риддела связывает производящие функции для числа помеченных связных графов и числа помеченных блоков. Рассматриваются условия, при которых это соотношение верно для подкласса связных графов. При этих условиях справедливы формулы, выражающие число графов из подкласса связных графов через производящую функцию их блоков. В качестве приложения получены выражения для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов. Библиогр. 22.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, связный граф, 2-связный граф, производящая функция, блочно-устойчивый класс, параллельно-последовательный граф.

Введение

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Точкой сочленения связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным. *Блок* — это связный граф без точек сочленения (2-связный граф), а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Второе соотношение Риддела — одно из основных при перечислении помеченных графов. Оно связывает производящие функции для числа помеченных связных графов и числа помеченных блоков. В статье рассматриваются условия, при которых второе соотношение Риддела верно для подкласса связных графов. В этих случаях справедливы формулы, полученные из него с помощью теоремы обращения Лагранжа. Эти формулы, выражающие число помеченных связных графов из некоторого класса через производящую функцию их блоков, являются удобным

инструментом для точного и асимптотического перечисления таких графов. В качестве приложения найдены выражения для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов.

1. Второе соотношение Риддела для подклассов связных графов

Пусть C_n — число помеченных связных графов с n вершинами, $C_{n,m}$ — число помеченных связных графов с n вершинами и m рёбрами, B_n — число помеченных блоков с n вершинами, а $B_{n,m}$ — число помеченных блоков с n вершинами и m рёбрами. Введём следующие производящие функции:

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}, \quad B(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!},$$

$$C(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n(n-1)/2} C_{n,m} \frac{x^n y^m}{n!},$$

$$B(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \sum_{m=n}^{n(n-1)/2} B_{n,m} \frac{x^n y^m}{n!}.$$

Очевидно, имеем

$$C(x) = C(x,1), \quad B(x) = B(x,1),$$

$$C'(x) = \left[\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\right]_{y=1}, \quad B'(x) = \left[\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right]_{y=1}.$$

Отметим, что ряды $B(x)$, $C(x)$, $C(x,y)$, $B(x,y)$ являются формальными степенными рядами.

В 1951 г. Риддел [11, 17] получил соотношение

$$\ln \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial B(z,y)}{\partial z}, \quad z = x\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}, \tag{1}$$

из которого при $y = 1$ вытекает

$$\ln C'(x) = B'(xC'(x)). \tag{2}$$

Соотношение (2) является следствием древообразной структуры связного графа, составленной из точек сочленения и блоков. Оно доказано независимо многими авторами [1, 5–8].

Однако это соотношение, верное для всего класса помеченных связных графов, может быть неверным для некоторых его подклассов. Например, (2) не выполняется для класса гомеоморфно несводимых деревьев. В этом случае все блоки графа являются рёбрами, $B(x) = \frac{x^2}{2}$

и (2) равносильно уравнению $z = x\exp(z)$, $z = xC'(z)$. Но единственное решение этого уравнения — это древесная функция $z = T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}x^n$, поэтому $C_n = n^{n-2}$, что не совпадает с числом гомеоморфно несводимых деревьев с n вершинами [14].

Тазава [20] доказал соотношение (2) для класса эйлеровых графов, а Дрмота — для класса внешнепланарных графов [10]. В этих доказательствах неявно используется замкнутость подклассов связных графов относительно композиции блоков.

Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу [12, 15]. Отметим, что класс гомеоморфно несводимых деревьев не является блочно-устойчивым классом графов. В [4, 18, 22] доказано, что классы планарных, геодезических и эйлеровых графов — блочно-устойчивые классы графов соответственно.

Очевидно, что блочная устойчивость подкласса связных графов является необходимым условием для выполнения соотношений (1) и (2) для подкласса связных графов, так как в случае её отсутствия при композиции блоков в связный граф возможен выход за пределы подкласса. Анализируя доказательство формулы (2), данное в книге Харари и Палмера [7], и повторяя его шаг за шагом, как это сделал Тазава [20] для эйлеровых графов, получим, что оно верно для класса блочно-устойчивых связных графов. Существенной является замкнутость блочно-устойчивого класса графов относительно операции соединения блоков в связный граф.

Классы графов, определяемых с помощью конечного списка запрещённых миноров, являющихся блоками, также являются блочно-устойчивыми классами графов [12, 15]. К таким классам графов, помимо планарных и внешнепланарных графов, относятся последовательно-параллельные графы. Однако класс графов без лап (без $K_{1,3}$ подграфов) — не блочно-устойчивый класс (в этом случае запрещённый подграф не является блоком). Действительно, граф, состоящий из трёх треугольников с одной общей вершиной, не принадлежит к классу графов без лап, хотя каждый его блок — граф без лап.

В [13, теорема 6] авторы доказывают (2) для подкласса связных графов, характеризуемых принадлежностью всех блоков некоторому множеству 2-связных графов. (Формально такой класс является блочно-устойчивым классом графов.) К таким графам относятся кактусы (все блоки — рёбра или простые циклы) и полноблочно-кактусные графы (все блоки — простые циклы или полные графы).

Из соотношений (2) и (1) в [2, 3] выведены следующие формулы:

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n}[x^{n-1}]\exp(nB'(x)) = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}]\exp(nB'(x))x^{-n}, \qquad (3)$$

$$C_{n,m} = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]\exp\left(n\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right)x^{-n}y^{-m-1}. \qquad (4)$$

Здесь $[x^i]$ — коэффициентный оператор и $[x^{-1}]$ — оператор формального вычета [5, с. 11, с. 25]. Так как (3) и (4) получены из (2) и (1) с помощью теоремы обращения Лагранжа, формулы (3) и (4) эквивалентны формулам (2) и (1) соответственно.

Таким образом, формулы (3) и (4) справедливы для классов блочно-устойчивых связных графов, а также для классов связных графов, задаваемых конечным множеством блоков.

2. Новые выражения для чисел последовательно-параллельных графов и блоков

Граф называется *последовательно-параллельным*, если он не содержит подразбиения полного графа K_4 [9]. Последовательно-параллельные графы используются при построении надёжных коммуникационных сетей [16]. Целый ряд задач алгоритмической теории графов, являющихся NP-полными для общих графов, может быть решён полиномиальными алгоритмами в классе последовательно-параллельных графов [19].

В [9] найдена асимптотика для числа помеченных последовательно-параллельных графов (не обязательно связных), а также для числа помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин.

Пусть теперь C_n — число помеченных связных последовательно-параллельных графов с n вершинами, $C_{n,m}$ — число помеченных связных последовательно-параллельных графов с n вершинами и m рёбрами, B_n — число помеченных последовательно-параллельных блоков с n вершинами, $B_{n,m}$ — число помеченных последовательно-параллельных блоков с n вершинами и m рёбрами, а $C(x)$, $C(x,y)$, $B(x)$, $B(x,y)$ — соответствующие экспоненциальные производящие функции.

Теорема 1. *Число C_n помеченных связных последовательно-параллельных графов с n вершинами при $n \geqslant 1$ равно*

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{n-1}]\exp\left(\frac{nz((4-2z)e^z-z-2)}{2(2e^z-1)(2e^z-z-1)}\right)$$
$$\times\,(2e^z(2e^z-1)^{n-2}(2e^z-z-1)^n-(2e^z-1)^{n+1}(2e^z-z-1)^{n-2}). \qquad (5)$$

Доказательство. Известны следующие соотношения [9]:

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\ln(1+xD) - \frac{xD(x^2D^2+xD+2-2x)}{4(1+xD)},$$

$$\ln\left(\frac{1+D}{1+y}\right) = \frac{xD^2}{1+xD}, \quad \text{где } D = D(x,y). \tag{6}$$

Обозначим правую часть равенства для $B(x,y)$ через $g(x,D)$. Тогда

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial g(x,D)}{\partial x} + \frac{\partial g(x,D)}{\partial D}\cdot\frac{\partial D(x,y)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial g(x,D)}{\partial x} = \frac{2xD+x^2D^2-2x^2D^3-x^3D^4}{2(1+xD)^2},$$

$$\frac{\partial g(x,D)}{\partial D} = \frac{x^2(1-2xD^2-x^2D^3)}{2(1+xD)^2}.$$

Найдём частную производную по x от левой и правой части (6):

$$\frac{1}{1+D}\frac{\partial D}{\partial x} = \left(D^2+2xD\frac{\partial D}{\partial x}\right)\frac{1}{1+xD} - xD^2\left(D+x\frac{\partial D}{\partial x}\right)\frac{1}{(1+xD)^2},$$

откуда получим

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{D^2(1+D)}{1-2xD^2-x^2D^3}, \quad \frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = \frac{xD(2-xD^2)}{2(1+xD)}.$$

Очевидно, имеем

$$B'(x) = \left[\frac{\partial B(x,y)}{\partial x}\right]_{y=1} = \frac{xD_0\big(2-xD_0^2\big)}{2(1+xD_0)},$$

$$D_0 = D(x,1), \quad \ln\left(\frac{1+D_0}{2}\right) = \frac{xD_0^2}{1+xD_0}.$$

Так как последовательно-параллельные графы являются блочно-устойчивым классом графов, с помощью формулы (2) найдём

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}]\exp\left(n\frac{xD_0\big(2-xD_0^2\big)}{2(1+xD_0)}\right)x^{-n}. \tag{7}$$

Пусть $z = \ln((1+D_0)/2)$, тогда

$$D_0 = 2e^z-1, x = \frac{z}{D_0(D_0-z)} = \frac{1}{2e^z-z-1} - \frac{1}{2e^z-1},$$

$$B'(x) = \frac{z}{2e^z-1} - \frac{z^2}{2(2e^z-z-1)}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{2e^z}{(2e^z-1)^2} - \frac{2e^z-1}{(2e^z-z-1)^2}.$$

Подставляя выражения для D_0 и x в (7), с помощью теоремы о композиции вычетов [5, с. 25] получим

$$C_n = \frac{(n-1)!}{n}[z^{-1}]\exp\left(n\left[\frac{z}{2e^z-1} - \frac{z^2}{2(2e^z-z-1)}\right]\right)$$
$$\times (2e^z-1)^n(2e^z-z-1)^n\left[\frac{2e^z}{(2e^z-1)^2} - \frac{2e^z-1}{(2e^z-z-1)^2}\right]z^{-n},$$

что равносильно формуле (5). Теорема 1 доказана.

Как следствие из теоремы 1 может быть получена явная формула для C_n, содержащая 4-кратную сумму. На практике формула (5) позволяет с помощью пакета программ Maple легко вычислять C_n.

Теорема 2. *Число B_n помеченных 2-связных последовательно-параллельных графов с n вершинами при $n \geqslant 2$ равно*

$$B_n = \frac{(n-1)!}{2}[z^{n-2}]((4-2z)e^z - z - 2)$$
$$\times (2e^z(2e^z-1)^{n-3}(2e^z-z-1)^{n-1} - (2e^z-1)^n(2e^z-z-1)^{n-3}). \quad (8)$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве теоремы 1, имеем

$$B'(x) = \frac{xD_0(2-xD_0^2)}{2(1+xD_0)}), \quad D_0 = D(x,1),$$

$$\ln\left(\frac{1+D_0}{2}\right) = \frac{xD_0^2}{1+xD_0}.$$

После замены переменной $z = \ln((1+D_0)/2)$ получим

$$D_0 = 2e^z - 1, \quad x = \frac{z}{D_0(D_0-z)} = \frac{1}{2e^z-z-1} - \frac{1}{2e^z-1},$$

$$B'(x) = \frac{z}{2e^z-1} - \frac{z^2}{2(2e^z-z-1)}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{2e^z}{(2e^z-1)^2} - \frac{2e^z-1}{(2e^z-z-1)^2},$$

$$B_n = (n-1)![x^{-1}]B'(x)x^{-n} = (n-1)![z^{-1}]\left[\frac{z}{2e^z-1} - \frac{z^2}{2(2e^z-z-1)}\right]$$
$$\times (2e^z-1)^n(2e^z-z-1)^n\left[\frac{2e^z}{(2e^z-1)^2} - \frac{2e^z-1}{(2e^z-z-1)^2}\right]z^{-n}, \quad (9)$$

что равносильно формуле (8). Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для числа B_n помеченных 2-связных последовательно-параллельных графов с n вершинами при $n \geqslant 2$ верна формула*

$$\begin{aligned} B_n = (n-1)! \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i+1} \frac{(-2)^j}{i!} \\ \times \Bigg[(j+1)^i \left(\binom{n-1}{i+2}\binom{n+i}{j} - 2\binom{n}{i+2}\binom{n+i-1}{j} \right) \\ + j^i \left(\frac{1}{2}\binom{n-3}{i}\binom{n+i+1}{j} - \binom{n-2}{i}\binom{n+i}{j} \right) \Bigg], \quad (10) \end{aligned}$$

где биномиальный коэффициент $\binom{n}{m} = 0$ при $n < m$.

Доказательство. Перемножив слагаемые в квадратных скобках в формуле (9), получим

$$\begin{aligned} B_n = (n-1)![z^{-1}]\big(2e^z(2e^z-1)^{n-3}(2e^z-z-1)^n \\ - (2e^z-1)^n(2e^z-z-1)^{n-2} - ze^z(2e^z-1)^{n-2}(2e^z-z-1)^{n-1} \\ + \frac{1}{2}z(2e^z-1)^{n+1}(2e^z-z-1)^{n-3}\big)z^{1-n} = B_{1n} - B_{2n} - B_{3n} + B_{4n}. \end{aligned}$$

Применяя дважды формулу бинома, а затем разложение в ряд для экспоненты, найдём

$$\begin{aligned} B_{1n} &= (n-1)![z^{-1}]2e^z(2e^z-1)^{n-3}(2e^z-z-1)^n z^{1-n} \\ &= (n-1)![z^{-1}]2e^z(2e^z-1)^{n-3}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2e^z-1)^i(-1)^{n-i}z^{1-i} \\ &= (n-1)![z^{-1}]2\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i} \\ &\times \sum_{j=0}^{n+i-3}\binom{n+i-3}{j}2^j e^{(j+1)z}(-1)^{n+i-3-j}z^{1-i} \\ &= 2(n-1)![z^{-1}]\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n+i-3}\binom{n}{i}(-1)^{j+3}\binom{n+i-3}{j}2^j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(j+1)^k}{k!}z^{k+1-i} \\ &= 2(n-1)!\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n+i-3}\binom{n}{i}\binom{n+i-3}{j}\frac{(-1)^{j+1}2^j(j+1)^{i-2}}{(i-2)!}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$B_{2n} = (n-1)![z^{-1}](2e^z-1)^n(2e^z-z-1)^{n-2}z^{1-n}$$
$$= (n-1)![z^{-1}](2e^z-1)^n\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(2e^z-1)^i(-1)^{n-i-2}z^{-1-i}$$
$$= (n-1)![z^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(-1)^{n-i-2}\sum_{j=0}^{n+i}\binom{n+i}{j}2^je^{jz}(-1)^{n+i-j}z^{-1-i}$$
$$= (n-1)![z^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i}\binom{n-2}{i}(-1)^j\binom{n+i}{j}2^j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{j^k}{k!}z^{k-1-i}$$
$$= (n-1)!\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i}\binom{n-2}{i}\binom{n+i}{j}\frac{(-1)^j2^jj^i}{i!},$$

$$B_{3n} = (n-1)![z^{-1}]e^z(2e^z-1)^{n-2}(2e^z-z-1)^{n-1}z^{2-n}$$
$$= (n-1)![z^{-1}]e^z(2e^z-1)^{n-2}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(2e^z-1)^i(-1)^{n-1-i}z^{1-i}$$
$$= (n-1)![z^{-1}]\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-1)^{n-1-i}$$
$$\times\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n+i-2}{j}2^je^{(j+1)z}(-1)^{n+i-2-j}z^{1-i}$$
$$= (n-1)![z^{-1}]\sum_{i=0}^{-1}n\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n-1}{i}(-1)^{j+3}\binom{n+i-2}{j}2^j$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(j+1)^k}{k!}z^{k+1-i}$$
$$= (n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n-1}{i}\binom{n+i-2}{j}\frac{(-1)^{j+1}2^j(j+1)^{i-2}}{(i-2)!},$$

$$B_{4n} = (n-1)![z^{-1}]\frac{1}{2}(2e^z-1)^{n+1}(2e^z-z-1)^{n-3}z^{2-n}$$
$$= (n-1)![z^{-1}]\frac{1}{2}(2e^z-1)^{n+1}\sum_{i=0}^{n-3}\binom{n-3}{i}(2e^z-1)^i(-1)^{n-i-3}z^{-1-i}$$

$$= (n-1)![z^{-1}]\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-3}\binom{n-3}{i}(-1)^{n-i-3}$$

$$\times \sum_{j=0}^{n+i+1}\binom{n+i+1}{j}2^j e^{jz}(-1)^{n+i+1-j}z^{-1-i}$$

$$= (n-1)![z^{-1}]\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{j=0}^{n+i+1}\binom{n-3}{i}(-1)^j\binom{n+i+1}{j}2^j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{j^k}{k!}z^{k-1-i}$$

$$= (n-1)!\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{j=0}^{n+i+1}\binom{n-3}{i}\binom{n+i+1}{j}\frac{(-1)^j 2^j j^i}{i!}.$$

Учитывая, что в формулах для B_{1n} и B_{3n} факториал $(i-2)!$ в знаменателе обнуляет слагаемые при $i=0$ и $i=1$, после сдвига индекса суммирования на 2 получим

$$B_{1n} = 2(n-1)!\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-1}\binom{n-2}{i+2}\binom{n+i-1}{j}\frac{(-1)^{j+1}2^j(j+1)^i}{i!},$$

$$B_{3n} = (n-1)!\sum_{i=0}^{n-3}\sum_{j=0}^{n+i}\binom{n-1}{i+2}\binom{n+i}{j}\frac{(-1)^{j+1}2^j(j+1)^i}{i!}.$$

Так как биномиальный коэффициент $\binom{n}{m}$ равен 0 при $n<m$, подставляя B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}, B_{4n} в B_n, получим формулу (10). Теорема 3 доказана.

В следующей таблице представлены числа B_n и C_n, вычисленные с помощью формул из теорем 1 и 3 и пакета программ Maple.

n	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	9	152	3810	126402	5210576	256469544	14666168250
C_n	4	37	622	16146	576964	46137532	409056704	94285316890

Отметим, что в «Онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей» [21] отсутствуют данные о числе помеченных связных (2-связных) последовательно-параллельных графов с заданным числом вершин.

Замечание. Так как последовательно-параллельный граф — это граф, не содержащий подразбиения полного графа K_4, диаграммы непомеченных 2-связных последовательно-параллельных графов с четырьмя вершинами имеются в книге Харари и Палмера [7] (3-я и 4-я диаграммы на с. 16). С учётом симметрии им соответствуют 9 помеченных графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воблый В. А.** О перечислении помеченных связных графов по числу точек сочленения. // Дискрет. математика. 2008. Т. 20, № 1. С. 52–63.
2. **Воблый В. А.** Об одной формуле для числа помеченных связных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 4. С. 48–59.
3. **Воблый В. А.** О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 2. С. 5–20.
4. **Воблый В. А., Мелешко А. К.** Перечисление помеченных полноблочно-кактусных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 2. С. 24–32.
5. **Гульден Я., Джексон Д.** Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990. 504 с.
6. **Сачков В. Н.** Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: МЦНМО, 2004. 421 с.
7. **Харари Ф., Палмер Э.** Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 324 с.
8. **Bergeron F., Labelle G., Leroux P.** Combinatorial species and tree-like structures. Cambridge: Camb. Univ. Press., 1998. 457 p.
9. **Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Comb. 2007. Vol. 28, No. 8. P. 2091–2105.
10. **Drmota M.** Random trees. Wien; NewYork: Springer, 2009. 458 p.
11. **Ford G. W., Uhlenbeck G. E.** Combinatorial problems in the theory graphs, I // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1956. Vol. 42, No. 3. P. 122–128.
12. **McDiarmid C., Scott A.** Random graphs from a block stable class // Eur. J. Comb. 2016. Vol. 58. P. 96–106.
13. **Labelle G., Leroux P., Ducharme M. G.** Graph weights arising from Mayer's theory cluster integrals // Sémin. Lothar. Comb. 2007. Vol. 54, Art. B54m.
14. **Meir A., Moon J. W.** On nodes of degree two in random trees // Mathematika. 1968. Vol. 15, No. 2. P. 188–192.
15. **Noy M.** Random planar graphs and beyond // Proc. Int. Congr. Math. (Seoul, Korea, Aug. 13–21, 2014). Seoul, 2014. Vol. IV. P. 407–431.
16. **Radhavan S.** Low-connectivity network design on series-parallel graphs // Networks. 2004. Vol. 43, No. 3. P. 163–176.
17. **Riddell R. J., Jr., Uhlenbeck G. E.** On the theory of the virial development of the equation of state of monoatomic gases // J. Chem. Phys. 1953. Vol. 21, No. 11. P. 2056–2064.
18. **Stemple J. G., Watkins M. E.** On planar geodetic graphs // J. Comb. Theory. 1968. Vol. 4, No. 2. P. 101–117.
19. **Takamizawa K., Nishezeki T., Saito N.** Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs // J. ACM. 1982. Vol. 29, No. 3. P. 623–641.
20. **Tazawa S.** Enumeration of labeled 2-connected Euler graphs // J. Comb. Inform. Syst. Sci. 1998. Vol. 23, No. 1–4. P. 407–414.

21. The on-line encyclopedia of integer sequences (http://oeis.org).
22. **Whitney H.** Non-separable and planar graphs // Trans. Amer. Math. Soc. 1932. Vol. 34, No. 2. P. 339–362.

Воблый Виталий Антониевич

Статья поступила
3 апреля 2018 г.
После доработки —
1 октября 2018 г.
Принята к публикации
28 ноября 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2019. Volume 26, No. 1. P. 20–32

UDC 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2019.26.615

THE SECOND RIDDEL RELATION AND ITS CONSEQUENCES

V. A. Voblyi

All-Russian Institute for Scientific and Technical Information RAS,
20 Usievicha St., 125190 Moscow, Russia
E-mail: vitvobl@yandex.ru

Abstract. The second Riddell relation relates the generating functions for the number of labeled connected graphs and the number of labeled blocks. We consider the conditions under which this relation is true for a subclass of connected graphs. Under these conditions, the formulas are valid that express the number of graphs from a subclass of labeled connected graphs trough the generating function of their blocks. By way of application, we obtain expressions for the numbers of labeled connected and 2-connected series-parallel graphs. Bibliogr. 22.

Keywords: enumeration, labeled graph, connected graph, 2-connected graph, generating function, block-stable class, series-parallel graph.

REFERENCES

1. **V. A. Voblyi,** On enumeration of labelled connected graphs by the number of cutpoints, *Diskretn. Mat.,* **20**, No. 1, 52–63, 2008 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **18**, No. 1, 57–69, 2008.
2. **V. A. Voblyi,** A formula for the number of labeled connected graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **19**, No. 4, 48–59, 2012 [Russian].
3. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled connected graphs with given order and size, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **23**, No. 2, 5–20, 2016 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **10**, No. 2, 302–310, 2016.
4. **V. A. Voblyi** and **A. K. Meleshko,** Enumeration of labeled block-cactus graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **21**, No. 2, 24–32, 2014 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **8**, No. 3, 422–427, 2014.
5. **I. P. Goulden** and **D. M. Jackson,** *Combinatorial Enumeration,* John Wiley & Sons, New York, 1983. Translated under the title *Perechislitel'naya kombinatorika,* Nauka, Moscow, 1990 [Russian].
6. **V. N. Sachkov,** *An Introduction to Combinatorial Methods of Discrete Mathematics,* MTsNMO, Moscow, 2004 [Russian].

7. **F. Harary** and **E. M. Palmer,** *Graphical Enumeration,* Acad. Press, New York, 1973. Translated under the title *Perechislenie grafov,* Mir, Moscow, 1977 [Russian].
8. **F. Bergeron, G. Labelle,** and **P. Leroux,** *Combinatorial Species and Tree-Like Structures,* Camb. Univ. Press, Cambridge, 1998.
9. **M. Bodirsky, O. Gimenez, M. Kang,** and **M. Noy,** Enumeration and limit laws of series-parallel graph, *Eur. J. Comb.,* **28**, 2091–2105, 2007.
10. **M. Drmota,** *Random Trees: An Interplay between Combinatorics and Probability,* Springer, Wien, 2009.
11. **G. W. Ford** and **G. E. Uhlenbeck,** Combinatorial problems in the theory of graphs. I, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA,* **42**, No. 3, 122–128, 1956.
12. **C. McDiarmid** and **A. Scott,** Random graphs from a block stable class, *Eur. J. Comb.,* **58**, 96–106, 2016.
13. **G. Labelle, P. Leroux,** and **M. G. Ducharme,** Graph weights arising from Mayer's theory cluster integrals, *Sémin. Lothar. Comb.,* **54**, Art. B54m, 2007.
14. **A. Meir** and **J. W. Moon,** On nodes of degree two in random trees, *Mathematika,* **15**, No. 2, 188–192, 1968.
15. **M. Noy,** Random planar graphs and beyond, *Proc. Int. Congr. Math., Seoul, Korea, Aug. 13–21, 2014,* Vol. IV, pp. 407–430, ICM 2014 Organ. Comm., Seoul, 2014.
16. **S. Radhavan,** Low-connectivity network design on series-parallel graphs, *Networks,* **43**, No. 3, 163–176, 2004.
17. **R. J. Riddell, Jr.** and **G. E. Uhlenbeck,** On the theory of the virial development of the equation of state of monoatomic gases, *J. Chem. Phys.,* **21**, No. 11, 2056–2063, 1953.
18. **J. G. Stemple** and **M. E. Watkins,** On planar geodetic graphs, *J. Comb. Theory,* **4**, No. 2, 101–117, 1968.
19. **K. Takamizawa, T. Nishezeki,** and **N. Saito,** Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs, *J. ACM,* **29**, No. 3, 623–641, 1982.
20. **S. Tazawa,** Enumeration of labeled 2-connected Euler graphs, *J. Comb. Inf. Syst. Sci.,* **23**, No. 1–4, 407–414, 1998.
21. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Available at http://oeis.org (accessed Nov. 5, 2018).
22. **H. Whitney,** Non-separable and planar graphs, *Trans. Am. Math. Soc.,* **34**, No. 2, 339–362, 1932.

Vitaly A. Voblyi

Received April 3, 2018
Revised October 1, 2018
Accepted November 28, 2018