ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2019. Том 26, № 1. С. 89–113

УДК 519.718.7 DOI 10.33048/daio.2019.26.623

КОРОТКИЕ ПОЛНЫЕ ПРОВЕРЯЮЩИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ СХЕМ ИЗ ДВУХВХОДОВЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ *)

К. А. Попков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4, 125047 Москва, Россия
E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Аннотация. Установлено, что почти любую булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $\{x \,\&\, y, x \vee y, x \oplus y, 1\}$, допускающей полный проверяющий тест длины не более 4 относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов. Доказаны также следующие утверждения: любую булеву функцию от n переменных можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $\{x \,\&\, y, x \vee y, x \oplus y, 1\}$ (в базисе $\{x \,\&\, y, x \vee y, x \vee \overline{y}, x \oplus y\}$), содержащей не более одной фиктивной входной переменной и допускающей полный проверяющий тест длины не более 5 (соответственно не более 4) относительно неисправностей такого же типа. Ил. 2, библиогр. 24.

Ключевые слова: схема из функциональных элементов, произвольная константная неисправность, полный проверяющий тест.

Введение

Работа посвящена задаче синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов (СФЭ, см. [11, 12, 9]). Пусть имеется СФЭ S с n входами ($n \geqslant 1$), на которые подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$, и одним выходом, реализующая булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$, где $\tilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Предположим, что на схему воздействует некоторый источник неисправностей, который может вызывать неисправности (некоторого заранее определённого вида) произвольного числа её элементов. Тогда реализуемая на выходе схемы булева функция $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, будет отличаться от функции $f(\tilde{x}^n)$. Все такие функции $g(\tilde{x}^n)$ называются *функциями неисправности* схемы S. Под *полным проверяющим тестом* (ППТ) для схемы S понимается такое множество T двоичных наборов длины n, что для любой функции неисправности g схемы S такой, что $g \not\equiv f$, в T

*) Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14–21–00025 П).

найдётся набор $\widetilde{\sigma}$, на котором $f(\widetilde{\sigma}) \neq g(\widetilde{\sigma})$. Мощность множества T называется *длиной* теста. Множество, содержащее все двоичные наборы длины n, представляет собой тривиальный ППТ длины 2^n.

Любое множество булевых функций будем называть *базисом* [5].

Пусть B — произвольный функционально полный базис и T — ППТ для некоторой СФЭ S в базисе B. Введём следующие обозначения [5]: $D_B(T)$ — длина теста T; $D_B(S) = \min D_B(T)$, где минимум берётся по всем ППТ T для схемы S; $D_B(f) = \min D_B(S)$, где минимум берётся по всем схемам S в базисе B, реализующим функцию f; $D_B(n) = \max D_B(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных.

Пусть допустимые неисправности элементов схем таковы, что функция, возникающая на выходе любого неисправного элемента, тождественно равна некоторой булевой константе. Если данная константа заведомо равна p для любого неисправного элемента, то такие неисправности называются *однотипными константными типа* p; в противном случае они называются *произвольными константными* [5]. Вполне разумно не рассматривать неисправности типа α у элементов, реализующих в исправном состоянии булеву константу α.

В случае произвольных константных неисправностей Н. П. Редькин в [6, 8] для любого полного конечного базиса B_1 получил оценку

$$D_{B_1}(n) \leqslant 2(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n);$$

Д. С. Романов в [10] доказал, что существует базис B_2, состоящий из не более чем 46 булевых функций от не более чем семи переменных, в котором $2 \leqslant D_{B_2}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 1$. В [5] доказано существование такого базиса B_3, состоящего из двух булевых функций от не более чем четырёх переменных, что $D_{B_3}(n) = 2$ при $n \geqslant 1$. В случае однотипных константных неисправностей типа p Н. П. Редькин в [7] для базиса $B_4 = \{\&, \vee, \neg\}$ получил оценку $D_{B_4}(n) \leqslant n$ при $n \geqslant 1$, где $p = 0$ или 1. Впоследствии указанная оценка была улучшена Ю. В. Бородиной, которая в [1] установила, что $D_{B_4}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$. Также ею доказаны соотношения $D_{B_5}(n) = 1$ при $p = 0$ [3] (совместно с П. А. Бородиным) и $D_{B_6}(n) \geqslant n+1$ при $p = 1$, $n \geqslant 2$ [2], где $B_5 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$, $B_6 = \{|\}$ (штрих Шеффера).

Развитие теории тестирования СФЭ за рубежом, по всей видимости, началось с результата Редди [21]. Различные вариации метода построения схем, изложенного в [21] и основанного на представлении булевых функций полиномами Жегалкина (в англоязычной терминологии — каноническими выражениями Рида — Маллера, RMC expressions), а также введение в схемы дополнительных входов (control points) и/или выходов (observation points), использовались, например, в [13–20, 22–24].

При этом, насколько известно автору, ни для какого функционально полного базиса B не было получено никаких оценок величин $D_B(n)$ и $D_B^{(+k)}(n)$, где величина $D_B^{(+k)}(n)$ определяется ниже и является неким аналогом величины $D_B(n)$.

В данной работе будем рассматривать только произвольные константные неисправности функциональных элементов. Будут доказаны следующие неравенства: $D_{B_7}(f) \leqslant 4$ для почти всех булевых функций f от n переменных, $D_{B_7}^{(+1)}(n) \leqslant 5$ и $D_{B_7'}^{(+1)}(n) \leqslant 4$ (теоремы 1–3), где

$$B_7 = \{x \,\&\, y, x \vee y, x \oplus y, 1\},$$
$$B_7' = \{x \,\&\, y, x \vee y, x \vee \overline{y}, x \oplus y\},$$

Введём обозначения

$$\tilde{0}^r = \underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, \quad \tilde{1}^r = \underbrace{1, \ldots, 1}_{r},$$

где $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (в случае $r = 0$ они обозначают пустую строку: например, $(\tilde{0}^0, 1, \tilde{0}^{n-1}) = (1, \tilde{0}^{n-1})$).

Будем говорить, что элемент E' *расположен в цепочке выше* (*ниже*) элемента E, если в этой цепочке существует ориентированный путь от E' к E (соответственно от E к E') [5].

Вместо «вход схемы S, отвечающий переменной x_i» для краткости будем писать «вход x_i схемы S».

1. Тесты для схем без фиктивных входных переменных

Лемма 1. *Пусть S — произвольная* СФЭ, *некоторые элементы в которой могут быть неисправны, Z — произвольная непустая цепочка из элементов в этой схеме, $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ — такие входные наборы схемы S, что на выходе верхнего элемента цепочки Z и на всех её входах, кроме, быть может, входов её верхнего элемента, на данных двух наборах возникают одинаковые значения. Тогда значения на выходах всех элементов этой цепочки на наборах $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ одинаковы.*

Доказательство. Пусть цепочка Z состоит из d элементов; занумеруем их сверху вниз числами от 1 до d. Докажем по индукции, что значения на выходе i-го элемента на наборах $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ совпадают, где $i = 1, \ldots, d$.

База индукции. Пусть $i = 1$. На выходе первого элемента (т. е. верхнего элемента цепочки Z) по условию леммы возникают одинаковые значения на наборах $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$. База индукции доказана.

Предположение и шаг индукции. Пусть утверждение доказано для $i = j < d$, докажем его для $i = j + 1$. На тех входах $(j+1)$-го элемента, которые соединены в цепочке Z с выходом j-го элемента, на наборах $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ возникнут одинаковые значения по предположению индукции. На всех остальных входах $(j+1)$-го элемента, т. е. на тех его входах, которые являются входами цепочки Z, значения на данных двух наборах также совпадают в силу условия леммы. Тогда значения на выходе $(j+1)$-го элемента на наборах $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$, очевидно, будут совпадать как в случае исправности, так и в случае неисправности этого элемента (когда на его выходе реализуется некоторая булева константа). Шаг индукции доказан. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим базис $B_7 = \{x \,\&\, y, x \vee y, x \oplus y, 1\}$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $x \,\&\, y$ (вида $x \vee y$, $x \oplus y$, 1), будем называть *конъюнктором* (соответственно *дизъюнктором*, *сумматором*, *элементом «константа* 1*»*).

Лемма 2. *Любую булеву функцию $f(\tilde{x}^t)$, где $t \geqslant 3$, для которой выполнены соотношения $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $f(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f(\tilde{1}^t)$, можно реализовать* СФЭ *в базисе B_7, допускающей* ППТ $\{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$.

Доказательство. Пусть

$$f'(\tilde{x}^t) = (x_1 \vee \dots \vee x_t) \oplus x_1 \dots x_t \oplus f(\tilde{x}^t). \tag{1}$$

Тогда

$$\begin{gathered} f'(\tilde{0}^t) = 0 \oplus 0 \oplus f(\tilde{0}^t) = f(\tilde{0}^t), \\ f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = 1 \oplus 0 \oplus f(1, \tilde{0}^{t-1}) = \overline{f}(1, \tilde{0}^{t-1}) = f(\tilde{0}^t), \\ f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = 1 \oplus 0 \oplus f(0, \tilde{1}^{t-1}) = \overline{f}(0, \tilde{1}^{t-1}) = f(\tilde{1}^t), \\ f'(\tilde{1}^t) = 1 \oplus 1 \oplus f(\tilde{1}^t) = f(\tilde{1}^t), \end{gathered}$$

откуда

$$f'(\tilde{0}^t) = f'(1, \tilde{0}^{t-1}), \tag{2}$$

$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = f'(\tilde{1}^t). \tag{3}$$

Представим функцию f' полиномом Жегалкина:

$$f'(\tilde{x}^t) = K_1 \oplus \dots \oplus K_m \oplus c, \tag{4}$$

где $c \in \{0, 1\}$, а $K_1, \dots, K_m$ — попарно различные конъюнкции переменных из множества $\{x_1, \dots, x_t\}$ (в случае $m = 0$ полагаем $K_1 \oplus \dots \oplus K_m \oplus c = c$). Из соотношений (2), (4) следует, что

$$f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = f'(\tilde{0}^t) = \underbrace{0 \oplus \dots \oplus 0}_{m} \oplus c = c. \tag{5}$$

Если среди конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ присутствует слагаемое x_1, то на наборе $(1, \tilde{0}^t)$ каждая из этих конъюнкций, кроме x_1, обратится в нуль, а слагаемое x_1 — в единицу, поэтому $f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = 1 \oplus c$ в силу (4), однако это противоречит соотношению (5). Поэтому ни одна из конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ не равна x_1. Далее, пусть переменная x_1 входит в m_1 конъюнкций из числа $K_1, \ldots, K_m$ и не входит в остальные $m - m_1$ конъюнкций. Тогда из соотношения (4) следует, что

$$f'(\tilde{1}^t) = \underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{m} \oplus c,$$

$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = \underbrace{0 \oplus \cdots \oplus 0}_{m_1} \oplus \underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{m-m_1} \oplus c = \underbrace{1 \oplus \cdots \oplus 1}_{m-m_1} \oplus c,$$

а отсюда и из соотношения (3) — что числа m и $m - m_1$ одной чётности, т. е. число m_1 чётно.

Пусть $i_2, \ldots, i_t \in \{2, \ldots, t\}$ — попарно различные индексы, причём $i_2 < \cdots < i_k$ и $i_{k+1} < \cdots < i_t$, где $k \in \{2, \ldots, t-1\}$. Докажем тождество

$$\begin{aligned} x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \equiv (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}) \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \vee x_{i_{k+2}}) \\ \oplus \cdots \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_{t-1}} \vee x_{i_t}) \oplus x_1 x_2 \ldots x_t \oplus x_{i_{k+1}} \oplus \cdots \oplus x_{i_t}. \end{aligned} \tag{6}$$

Преобразуем его правую часть, используя тождество $x \vee y \equiv x \oplus y \oplus xy$ для $x, y \in \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} &(x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}) \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \vee x_{i_{k+2}}) \\ &\quad \oplus \cdots \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_{t-1}} \vee x_{i_t}) \oplus x_1 x_2 \ldots x_t \oplus x_{i_{k+1}} \oplus \cdots \oplus x_{i_t} \\ &\equiv (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \oplus x_{i_{k+1}} \oplus x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}}) \\ &\quad \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \oplus x_{i_{k+2}} \oplus x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} x_{i_{k+2}}) \\ &\quad \oplus \cdots \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_{t-1}} \oplus x_{i_t} \oplus x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_t}) \\ &\quad \oplus x_1 x_2 \ldots x_t \oplus x_{i_{k+1}} \oplus \cdots \oplus x_{i_t}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что после раскрытия всех скобок в правой части полученного тождества каждое слагаемое, кроме $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, будет присутствовать в ней ровно два раза (с учётом того, что $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_t} \equiv x_1 x_2 \ldots x_t$), откуда следует справедливость соотношения (6).

Каждую из конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ из представления (4), содержащих переменную x_1, кроме $x_1 x_2 \ldots x_t$, перепишем в соответствии с (6) (напомним, что ни одна из них не равна x_1). Тогда равенство (4) примет вид

$$f'(\tilde{x}^t) = K'_1 \oplus \cdots \oplus K'_{m'} \oplus c, \tag{7}$$

где каждое из слагаемых $K'_1, \ldots, K'_{m'}$ является либо конъюнкцией переменных из множества $\{x_2, \ldots, x_t\}$, либо конъюнкцией $x_1 x_2 \ldots x_t$, либо имеет вид $x_1 x_{i_2} \dots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}$, где $k \in \{2, \dots, t-1\}$ и $i_2, \dots, i_k, i_{k+1} \in \{2, \dots, t\}$, причём $i_2 < \dots < i_k$ и i_{k+1} — минимальное число из множества $\{2, \dots, t\} \setminus \{i_2, \dots, i_k\}$. При этом слагаемое $x_1 x_2 \dots x_t$ входит в правую часть представления (7) по одному разу за каждую конъюнкцию из множества $\{K_1, \dots, K_m\}$, содержащую переменную x_1 (см. правую часть тождества (6)), число которых равно m_1 и, как показано выше, чётно. Следовательно, все слагаемые $x_1 x_2 \dots x_t$ в правой части (7) можно взаимно уничтожить. Также в ней можно избавиться от всех остальных пар одинаковых слагаемых. Поэтому можно считать, что все слагаемые $K'_1, \dots, K'_{m'}$ попарно различны и каждое из них либо является конъюнкцией переменных из множества $\{x_2, \dots, x_t\}$, либо имеет вид $x_1 x_{i_2} \dots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}$ (в случае $m' = 0$ полагаем $K'_1 \oplus \dots \oplus K'_{m'} \oplus c = c$).

В силу (1), (7) имеем

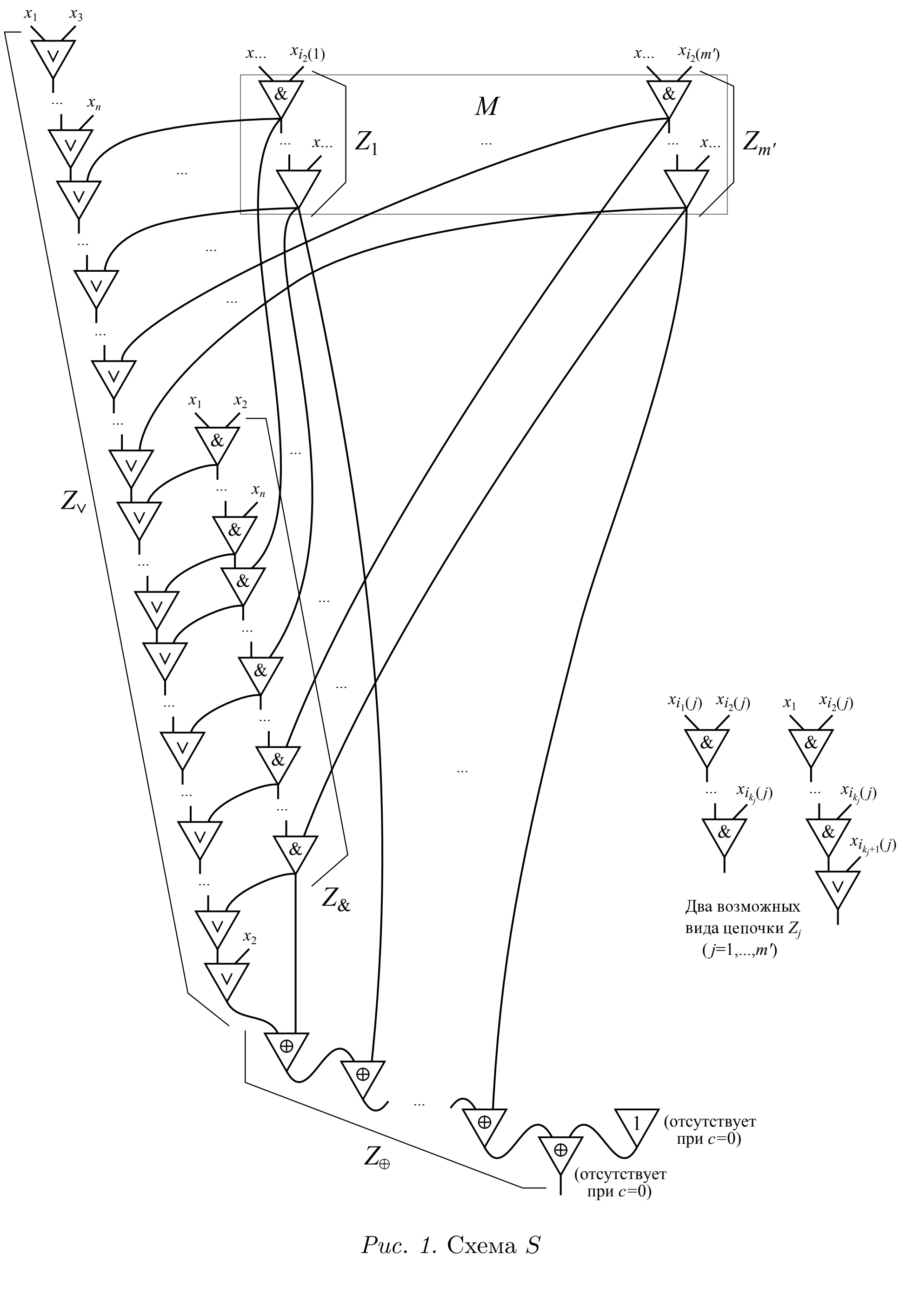
$$(x_1 \vee \dots \vee x_t) \oplus x_1 \dots x_t \oplus f(\tilde{x}^t) = K'_1 \oplus \dots \oplus K'_{m'} \oplus c,$$

откуда

$$f(\tilde{x}^t) = (x_1 \vee \dots \vee x_t) \oplus x_1 \dots x_t \oplus K'_1 \oplus \dots \oplus K'_{m'} \oplus c. \tag{8}$$

Реализуем функцию f схемой S в базисе B_7 в соответствии с представлением (8) (см. рис. 1). Каждое слагаемое K'_j, $j \in \{1, \dots, m'\}$, являющееся конъюнкцией каких-то переменных $x_{i_1(j)}, \dots, x_{i_{k_j}(j)} \in \{x_2, \dots, x_t\}$, реализуем цепочкой Z_j из $k_j - 1$ конъюнкторов, на входы которой подаются все указанные переменные (в случае $k_j = 1$ эта цепочка пуста, т. е. не содержит функциональных элементов, а её выход совпадает с соответствующим входом схемы). Далее каждое слагаемое K'_j, $j \in \{1, \dots, m'\}$, вида $x_1 x_{i_2(j)} \dots x_{i_{k_j}(j)} \vee x_{i_{k_j+1}(j)}$, где $k_j \in \{2, \dots, t-1\}$ и $i_2(j), \dots, i_{k_j}(j)$, $i_{k_j+1}(j) \in \{2, \dots, t\}$, причём $i_2(j) < \dots < i_{k_j}(j)$, а $i_{k_j+1}(j)$ — минимальное число из множества $\{2, \dots, t\} \setminus \{i_2(j), \dots, i_{k_j}(j)\}$, реализуем цепочкой Z_j из $k_j - 1$ конъюнкторов и одного дизъюнктора, нижним элементом в которой является дизъюнктор; на свободные входы конъюнкторов подаются переменные $x_1, x_{i_2(j)}, \dots, x_{i_{k_j}(j)}$, а на свободный вход дизъюнктора — переменная $x_{i_{k_j+1}(j)}$, причём переменная x_1 подаётся на один из входов верхнего конъюнктора цепочки Z_j. Множество всех построенных к данному моменту функциональных элементов обозначим через M.

Выходы всех элементов из множества M и входы «x_1», …, «x_t» схемы S соединим с входами цепочки $Z_\&$ из конъюнкторов, причём входы «x_1» и «x_2» схемы соединим с входами верхнего конъюнктора этой цепочки. Затем выходы всех элементов из множества M и из цепочки $Z_\&$, а также входы «x_1», …, «x_t» схемы S соединим с входами цепочки $Z_\vee$ из дизъюнкторов, причём вход «x_1» схемы соединим с одним из входов верхнего, а вход «x_2» схемы — с одним из входов нижнего дизъюнктора



x_1 x_3
x_n
$x_{\ldots}$ $x_{i_2(1)}$
$x_{\ldots}$ $x_{i_2(m')}$
M
Z_1
$Z_{m'}$
x_1 x_2
x_n
$Z_\vee$
$Z_\&$
x_2
$Z_\oplus$
1
(отсутствует при c=0)
(отсутствует при c=0)
$x_{i_1(j)}$ $x_{i_2(j)}$
x_1 $x_{i_2(j)}$
$x_{i_{k_j}(j)}$
$x_{i_{k_j}(j)}$
$x_{i_{k_j+1}(j)}$
Два возможных вида цепочки Z_j (j=1,...,m')

Рис. 1. Схема S

этой цепочки. Наконец, выходы цепочек $Z_\vee, Z_\&, Z_1, \ldots, Z_{m'}$, а также — в случае $c = 1$ — выход элемента «константа 1» соединим с входами цепочки $Z_\oplus$ из сумматоров, причём выход цепочки $Z_\vee$ соединим с одним из входов верхнего сумматора. Выходом схемы S будем считать выход цепочки $Z_\oplus$.

Докажем, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^t)$. В силу (8) достаточно доказать, что на выходах цепочек $Z_\&$ и $Z_\vee$ реализуются функции $x_1 \ldots x_t$ и $x_1 \vee \cdots \vee x_t$ соответственно. На любом входном наборе схемы S, хотя бы одна компонента которого равна 0, на соответствующий вход схемы, а значит, и на некоторый вход цепочки $Z_\&$ поступит нуль, поэтому на выходе этой цепочки возникнет значение 0. В то же время на наборе $(\tilde{1}^t)$ на выходах всех элементов из множества M, как нетрудно видеть из их определения, возникнут единицы, поэтому на все входы цепочки $Z_\&$ поступят значения 1 и такое же значение возникнет на её выходе. Тем самым показано, что на выходе указанной цепочки реализуется в точности функция $x_1 \ldots x_t$.

Далее, на любом входном наборе схемы S, хотя бы одна компонента которого равна 1, на соответствующий вход схемы, а значит, и на некоторый вход цепочки $Z_\vee$ поступит единица, поэтому на выходе этой цепочки возникнет значение 1. В то же время на наборе $(\tilde{0}^t)$ на выходах всех элементов из множества M и из цепочки $Z_\&$, как нетрудно видеть из их определения, возникнут нули, поэтому на все входы цепочки $Z_\vee$ поступят значения 0 и такое же значение возникнет на её выходе. Тем самым показано, что на выходе указанной цепочки реализуется в точности функция $x_1 \vee \cdots \vee x_t$. Следовательно, схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^t)$.

Докажем, что множество $\{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является ППТ для схемы S. Цепочку, представляющую собой объединение цепочек $Z_\vee$ и $Z_\oplus$, для удобства обозначим через $Z_{\vee,\oplus}$. Рассмотрим три случая.

1. Имеет место либо неисправность хотя бы одного элемента цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, либо неисправность типа 1 хотя бы одного элемента из множества M или из цепочки $Z_\&$. Нетрудно заметить, что для любого $j \in \{1, \ldots, m'\}$ такого, что цепочка Z_j непуста, на каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$ на всех входах этой цепочки, кроме, быть может, одного из входов её верхнего элемента, возникнут нули. По построению верхний элемент цепочки Z_j является конъюнктором и хотя бы на один из его входов подаётся одна из переменных $x_2, \ldots, x_t$, равная 0 на каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$. Поэтому на выходе данного элемента на этих двух наборах возникнет одно и то же значение (нуль, если он исправен, либо некоторая булева константа, если он неисправен). Тогда по лемме 1 на выходах всех

элементов цепочки Z_j на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$ возникнут одинаковые значения.

Получаем, что при рассматриваемой неисправности элементов схемы S значения на выходе каждого элемента из множества M совпадают на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$. Отсюда следует, что на данных двух наборах на все входы цепочки $Z_{\&}$, кроме того входа её верхнего конъюнктора, который соединён с входом «x_1» схемы, поступят одинаковые значения. При этом на другой вход указанного конъюнктора подаётся переменная x_2, равная 0 на каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$. Поэтому на выходе данного конъюнктора на этих двух наборах возникнет одно и то же значение (нуль, если он исправен, либо некоторая булева константа, если он неисправен). Тогда по лемме 1 на выходах всех элементов цепочки $Z_{\&}$ на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$ возникнут одинаковые значения.

Из сказанного выше и определения цепочек $Z_{\vee}$, $Z_{\oplus}$ следует, что на рассматриваемых двух наборах на все входы цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, кроме того входа её верхнего дизъюнктора, который соединён с входом «x_1» схемы S, поступят одинаковые значения (отметим, что при $c = 1$ указанное свойство справедливо и для того входа цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, который соединён с выходом элемента «константа 1», вне зависимости от исправности или неисправности этого элемента). Рассмотрим два подслучая.

1.1. Неисправен хотя бы один элемент E из цепочки $Z_{\vee,\oplus}$. Пусть Z — нижняя часть этой цепочки, верхним элементом которой является E. Тогда на выходе (неисправного) верхнего элемента цепочки Z на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$, очевидно, возникнет одно и то же значение, поэтому по лемме 1 значения на выходах всех элементов этой цепочки, в том числе выходного, совпадающего с выходным элементом цепочек $Z_{\vee,\oplus}$, $Z_{\oplus}$ и, следовательно, с выходом схемы S, на данных двух наборах одинаковы. Таким образом, неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$, поскольку $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$ по условию леммы 2.

1.2. Все элементы цепочки $Z_{\vee,\oplus}$ исправны, но имеет место неисправность типа 1 хотя бы одного элемента E' из множества M или из цепочки $Z_{\&}$. По определению цепочки $Z_{\vee}$ выход элемента E' соединён с входом одного из её дизъюнкторов E. На каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$ на указанный вход поступит значение 1, поэтому на выходе дизъюнктора E на этих двух наборах возникнет единица. Пусть Z — нижняя часть цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, верхним элементом которой является E. Тогда по лемме 1 значения на выходах всех элементов цепочки Z, в том числе выходного, совпадающего с выходом схемы S, на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$ одинаковы. Таким образом, неисправность будет обнаружена на одном из этих двух наборов, поскольку $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$. Случай 1 разобран.

2. Случай 1 не выполнен, но при этом имеет место неисправность типа 0 хотя бы одного элемента из множества M или из цепочки $Z_{\&}$. Нетрудно заметить, что для любого $j \in \{1, \ldots, m'\}$ такого, что слагаемое K'_j является конъюнкцией каких-то переменных из множества $\{x_2, \ldots, x_t\}$, на каждом из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$ при отсутствии неисправностей в цепочке Z_j на её выходе возникнет значение 1, а при наличии в ней неисправности типа 0 хотя бы одного элемента — значение 0 (отметим, что при указанном условии на j данная цепочка состоит только из конъюнкторов, а неисправности типа 1 элементов в ней невозможны в силу невыполнения случая 1). Для всех остальных $j \in \{1, \ldots, m'\}$ нижним элементом цепочки Z_j по построению является дизъюнктор, на один из входов которого подаётся переменная $x_{i_{k_j+1}(j)} \in \{x_2, \ldots, x_t\}$. На каждом из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$ на указанный вход поступит значение 1, поэтому на выходе цепочки Z_j на этих двух наборах возникнет одно и то же значение (единица, если выходной дизъюнктор данной цепочки исправен, либо нуль, если он неисправен).

На один из входов нижнего дизъюнктора цепочки $Z_{\vee}$ по построению подаётся переменная x_2, равная 1 на каждом из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$. Поэтому на выходе данной цепочки на обоих этих наборах возникнет значение 1. Наконец, в силу предположения случая 2 и определения цепочки $Z_{\&}$ либо один из её входов соединён с выходом неисправного и выдающего 0 элемента из множества M, либо имеет место неисправность типа 0 хотя бы одного элемента самой этой цепочки (либо и то, и другое), при этом в ней не может быть неисправности типа 1 ни одного элемента. Отсюда получаем, что на выходе цепочки $Z_{\&}$ реализуется тождественный нуль.

Из сказанного выше и определения цепочки $Z_{\oplus}$ следует, что на наборах $(0, \tilde{1}^{t-1})$ и $(\tilde{1}^t)$ на все входы цепочки $Z_{\oplus}$ поступят одинаковые значения. Тогда и значения на выходе схемы S на этих двух наборах совпадают, поскольку все элементы цепочки $Z_{\oplus}$ исправны в силу невыполнения случая 1. Таким образом, неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$ с учётом того, что $f(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f(\tilde{1}^t)$ по условию леммы 2. Случай 2 разобран.

3. Случаи 1 и 2 не выполнены, но при этом $c = 1$ и имеет место неисправность типа 0 элемента «константа 1». Тогда все остальные элементы в схеме S исправны и указанную неисправность можно обнаружить на любом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$, $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$. Случай 3 разобран.

В итоге любую неисправность схемы S можно обнаружить хотя бы на одном из этих четырёх наборов. Следовательно, множество $\{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является ППТ для этой схемы. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Доля булевых функций f от n переменных, для которых $D_{B_7}(f) \leqslant 4$, стремится к 1 при $n \to \infty$.*

Доказательство. Вместо $D_{B_7}(f)$ для краткости будем писать $D(f)$. Пусть $n \geqslant 3$ и F_n — множество таких булевых функций от n переменных, каждая из которых принимает значение 1 ровно на 0, 1, 3 или 4 наборах из множества $A_i = \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^i, 1, \tilde{0}^{n-i-1}), (\tilde{1}^i, 0, \tilde{1}^{n-i-1}), (\tilde{1}^n)\}$ для каждого $i = 0, \ldots, n-1$. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная булева функция, не принадлежащая множеству F_n. Докажем неравенство $D(f) \leqslant 4$. Существует такое $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, что функция f принимает значение 1 ровно на двух наборах из множества A_i. Без ограничения общности будем считать, что $i = 0$ (в противном случае можно соответствующим образом переименовать переменные функции f, для полученной функции $\hat{f}$ доказать неравенство $D(\hat{f}) \leqslant 4$, а затем воспользоваться очевидным равенством $D(f) = D(\hat{f})$). Тогда функция f принимает значение 1 ровно на двух наборах из множества $A_0 = \{(\tilde{0}^n), (1, \tilde{0}^{n-1}), (0, \tilde{1}^{n-1}), (\tilde{1}^n)\}$. Отсюда, в частности, следует соотношение

$$f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) \oplus f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n) = 0,$$

а из него — соотношение

$$f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n).$$

Возможны два случая.

1. Пусть $f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n) = 1$. Тогда

$$f(\tilde{0}^n) \neq f(1, \tilde{0}^{n-1}) \quad \text{и} \quad f(0, \tilde{1}^{n-1}) \neq f(\tilde{1}^n),$$

а значит, неравенство $D(f) \leqslant 4$ следует из леммы 2 при $t = n$.

2. Пусть $f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n) = 0$. Тогда

$$f(\tilde{0}^n) = f(1, \tilde{0}^{n-1}) \quad \text{и} \quad f(0, \tilde{1}^{n-1}) = f(\tilde{1}^n).$$

Рассмотрим функцию $f'(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1$. Имеем

$$f'(\tilde{0}^n) = f(\tilde{0}^n) \oplus 0 = f(\tilde{0}^n) = f(1, \tilde{0}^{n-1}) \neq f(1, \tilde{0}^{n-1}) \oplus 1 = f'(1, \tilde{0}^{n-1}),$$
$$f'(0, \tilde{1}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus 0 = f(0, \tilde{1}^{n-1}) = f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{1}^n) \oplus 1 = f'(\tilde{1}^n),$$

т. е. $f'(\tilde{0}^n) \neq f'(1, \tilde{0}^{n-1})$ и $f'(0, \tilde{1}^{n-1}) \neq f'(\tilde{1}^n)$. В таком случае в силу леммы 2 при $t = n$ функцию $f'(\tilde{x}^n)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B_7, для которой множество A_0 является ППТ. Выход схемы S' соединим с одним из входов сумматора E, на другой вход которого подадим переменную x_1. Выход элемента E будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S. При отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе, очевидно, реализуется функция $f'(\tilde{x}^n) \oplus x_1 = f(\tilde{x}^n)$.

Если элемент E неисправен, то на выходе схемы S реализуется некоторая булева константа, которую можно отличить от функции f на наборах из множества A_0, поскольку данная функция на двух наборах из этого множества принимает значение 1, а на двух — значение 0. Если же элемент E исправен, а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен, то получающуюся функцию неисправности g подсхемы S' при $g \not\equiv f'$ можно отличить от функции f' на каком-то наборе $\widetilde{\sigma} \in A_0$, так как A_0 — ППТ для S', поэтому $g(\widetilde{\sigma}) \neq f'(\widetilde{\sigma})$. На выходе схемы S возникнет функция неисправности $g \oplus x_1$, которую можно отличить от функции $f = f' \oplus x_1$ на наборе $\widetilde{\sigma}$ в силу предыдущего соотношения. Тем самым доказано, что множество A_0 является ППТ для схемы S, откуда следует, что $D(f) \leqslant 4$. Случай 2 разобран. Неравенство $D(f) \leqslant 4$ полностью доказано.

Найдём мощность множества F_n. Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0,1\}$ через $F_n^{\alpha_1\alpha_2}$ обозначим подмножество множества F_n, состоящее из всех булевых функций, принимающих на наборах $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$ значения α_1 и α_2 соответственно. В силу определения множества F_n для любого $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ на паре наборов $((\tilde{0}^i, 1, \tilde{0}^{n-i-1}), (\tilde{1}^i, 0, \tilde{1}^{n-i-1}))$ любая функция из множества F_n^{00} должна принимать одну из пар значений $(0,0)$, $(0,1)$ или $(1,0)$, любая функция из каждого из множеств F_n^{01}, F_n^{10} — одну из пар значений $(0,0)$ или $(1,1)$, а любая функция из множества F_n^{11} — одну из пар значений $(0,1)$, $(1,0)$ или $(1,1)$. При этом на $2^n - 2n - 2$ двоичных наборах длины n, не принадлежащих множеству $A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}$, любая функция из каждого из множеств F_n^{00}, F_n^{01}, F_n^{10}, F_n^{11} может принимать произвольные значения. Отсюда следуют соотношения

$$\begin{gathered}
\left|F_n^{00}\right| = \left|F_n^{11}\right| = 3^n \cdot 2^{2^n-2n-2}, \quad \left|F_n^{01}\right| = \left|F_n^{10}\right| = 2^n \cdot 2^{2^n-2n-2}, \\
|F_n| = \left|F_n^{00}\right| + \left|F_n^{01}\right| + \left|F_n^{10}\right| + \left|F_n^{11}\right| \\
= (2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n) \cdot 2^{2^n-2n-2} = (3^n + 2^n) \cdot 2^{2^n-2n-1}, \\
\frac{|F_n|}{2^{2^n}} = \frac{3^n + 2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty),
\end{gathered}$$

т. е. отношение числа булевых функций из множества F_n к общему числу булевых функций от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше показано, что для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству F_n, выполнено неравенство $D(f) \leqslant 4$, откуда следует справедливость теоремы 1.

Рассмотрим базисы $B_7' = \{x \,\&\, y, x \vee y, x \vee \overline{y}, x \oplus y\}$, $B_7'' = \{x \,\&\, y, x \vee y, x \,\&\, \overline{y}, x \vee \overline{y}, \overline{x} \,\&\, \overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, x \oplus y, x \sim y, 1\}$. Любой функциональный элемент, реализующий функцию вида $\psi(x, y)$, где $\psi(x, y)$ — произвольная булева функция, будем называть *ψ-элементом.*

Лемма 3. *Пусть булеву функцию* $f(\tilde{x}^t)$ *можно реализовать* СФЭ S *в базисе* B_7'', *допускающей* ППТ T. *Тогда эту же функцию можно реализовать* СФЭ *в базисе* B_7', *допускающей* ППТ T.

Доказательство. Если в схеме S нет выходного элемента, то её выход совпадает с одним из её входов, поэтому $f \in \{x_1, \ldots, x_t\}$. Тогда функцию f можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов; у такой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому любое множество двоичных наборов длины n, в том числе и T, является для неё ППТ. Далее, если в схеме S нет ни одного φ-элемента для каждой функции $\varphi(x,y) \in \{x \,\&\, \overline{y}, \overline{x} \,\&\, \overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, x \sim y\}$, а также ни одного элемента «константа 1», то эта схема является схемой и в базисе B_7', откуда следует утверждение леммы.

Пусть теперь в схеме S есть выходной элемент и хотя бы один φ-элемент, где $\varphi(x,y) \in \{x \,\&\, \overline{y}, \overline{x} \,\&\, \overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, x \sim y\}$, либо хотя бы один элемент «константа 1». Для каждой функции φ из указанного множества заменим каждый φ-элемент схемы S блоком S_φ, состоящим из трёх функциональных элементов: $\overline{\varphi}$-элемента, $(x \vee \overline{y})$-элемента E_1 (одного и того же для каждого блока S_φ), на оба входа которого подаётся переменная x_1, и сумматора, входы которого соединяются с выходами данных двух элементов; входами этого блока являются входы указанного $\overline{\varphi}$-элемента, а выходом — выход указанного сумматора. На выходе элемента E_1 реализуется функция $x_1 \vee \overline{x}_1 = 1$, а на выходе блока S_φ — функция $\overline{\varphi} \oplus 1 = \varphi$ от его входов. Далее заменим каждый элемент «константа 1» схемы S элементом E_1. Полученную схему обозначим через S'.

Заметим, что

$$\overline{\varphi}(x,y) \in \{\overline{x \,\&\, \overline{y}}, \overline{\overline{x} \,\&\, \overline{y}}, \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}, \overline{x \sim y}\} = \{y \vee \overline{x}, x \vee y, x \,\&\, y, x \oplus y\},$$

поэтому S' является схемой в базисе B_7'. Каждый блок S_φ реализует ту же функцию, что и φ-элемент, а элемент E_1 — константу 1, поэтому схема S' реализует ту же функцию, что и схема S, т. е. функцию $f(\tilde{x}^t)$. Выход элемента E_1, а также выход выходного элемента схемы S' соединим с входами конъюнктора $E_\&$; выход этого конъюнктора будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S''. Очевидно, что при отсутствии неисправностей в схеме S'' она также реализует функцию $f(\tilde{x}^t)$.

Докажем, что любая функция неисправности схемы S'' будет функцией неисправности схемы S. При произвольной неисправности элемента $E_\&$ и/или при неисправности типа 0 элемента E_1 схема S'', очевидно, станет реализовывать некоторую булеву константу, но такая же константа возникнет на выходе схемы S при соответствующей неисправности её выходного элемента. Пусть теперь элемент $E_\&$ исправен, элемент E_1

реализует константу 1 (это может быть как при его исправности, так и при его неисправности типа 1), а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен и g' — получающаяся при этом функция неисправности схемы S''. Легко видеть, что при произвольной неисправности $\overline{\varphi}$-элемента и/или сумматора в произвольном блоке S_φ схемы S'' на выходе этого блока реализуется некоторая булева константа. Тогда при соответствующих неисправностях φ-элементов схемы S, отсутствии неисправностей среди элементов «константа 1» и таких же неисправностях остальных элементов схемы S, как и в схеме S'', на выходе схемы S возникнет функция неисправности g, удовлетворяющая тождеству $g \,\&\, 1 \equiv g'$, т. е. совпадающая с функцией g'.

Тем самым показано, что любая функция неисправности схемы S'' является функцией неисправности схемы S. Поэтому ППТ T для схемы S является ППТ и для схемы S'' в базисе B_7'. Лемма 3 доказана.

Введём обозначение $\alpha^\beta = \alpha \oplus \beta \oplus 1$, где $\alpha, \beta \in \{0,1\}$. Очевидно, что $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^0 = \overline{\alpha}$, $1^\beta = \beta$ и $0^\beta = \overline{\beta}$.

Лемма 4. *Пусть для булевой функции $f(\tilde{x}^t)$, $t \geqslant 3$, существуют такие булевы константы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$, что $f(\widetilde{\sigma}_1) \neq f(\widetilde{\sigma}_2)$ и $f(\widetilde{\sigma}_3) \neq f(\widetilde{\sigma}_4)$, где*

$$\widetilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t), \quad \widetilde{\sigma}_2 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t),$$
$$\widetilde{\sigma}_3 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_t), \quad \widetilde{\sigma}_4 = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_t).$$

Тогда функцию $f(\tilde{x}^t)$ можно реализовать СФЭ *в базисе B_7', допускающей* ППТ $\{\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3, \widetilde{\sigma}_4\}$.

Доказательство. В силу леммы 3 достаточно доказать это утверждение для базиса B_7''. Рассмотрим функцию $f'(\tilde{x}^t) = f\big(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}\big)$. Имеем

$$f'(\tilde{0}^t) = f(0^{\sigma_1}, \ldots, 0^{\sigma_t}) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_t) = f(\widetilde{\sigma}_4),$$
$$f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = f(1^{\sigma_1}, 0^{\sigma_2}, \ldots, 0^{\sigma_t}) = f(\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_t) = f(\widetilde{\sigma}_3),$$
$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = f(0^{\sigma_1}, 1^{\sigma_2}, \ldots, 1^{\sigma_t}) = f(\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t) = f(\widetilde{\sigma}_2),$$
$$f'(\tilde{1}^t) = f(1^{\sigma_1}, \ldots, 1^{\sigma_t}) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_t) = f(\widetilde{\sigma}_1),$$

откуда

$$f'(\tilde{0}^t) = f(\widetilde{\sigma}_4) \neq f(\widetilde{\sigma}_3) = f'(1, \tilde{0}^{t-1}),$$
$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = f(\widetilde{\sigma}_2) \neq f(\widetilde{\sigma}_1) = f'(\tilde{1}^t),$$

т. е. $f'(\tilde{0}^t) \neq f'(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $f'(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f'(\tilde{1}^t)$. Тогда в силу леммы 2 функцию $f'(\tilde{x}^t)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B_7, для которой множество $T' = \{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является ППТ.

Предположим, что в схеме S' не содержится выходного элемента. Тогда выход этой схемы совпадает с одним из её входов, $f' \in \{x_1, \ldots, x_t\}$ и $f(\tilde{x}^t) = f'\big(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}\big) \in \{x_1, \ldots, x_t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_t\}$. Если $f \in \{x_1, \ldots, x_t\}$, то функцию f можно реализовать схемой, не содержащей функциональных элементов; у этой схемы нет ни одной функции неисправности, поэтому множество $T = \{\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3, \widetilde{\sigma}_4\}$ является для неё ППТ. Если же $f = \overline{x}_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$, то функцию f можно реализовать схемой S, состоящей из элемента «константа 1» и сумматора, входы которого соединяются с выходом этого элемента и входом «x_i» схемы. У такой схемы, очевидно, есть три функции неисправности — 0, 1 и x_i. Функцию $x_i = \overline{f}$ можно отличить от функции f на любом наборе из множества T, а функции 0 и 1 от функции f — на наборах $\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2 \in T$ в силу соотношения $f(\widetilde{\sigma}_1) \neq f(\widetilde{\sigma}_2)$, поэтому T — ППТ для схемы S.

Далее будем считать, что в схеме S' содержится выходной элемент. Пусть X_0 — подмножество множества $\{x_1, \ldots, x_t\}$ входных переменных этой схемы, состоящее из всех таких переменных x_i, что $\sigma_i = 0$. Для каждой функции $\varphi(x, y) \in \{x \,\&\, y, x \vee y, x \oplus y\}$ заменим каждый φ-элемент схемы S', хотя бы на один вход которого подаётся переменная из множества X_0, своим φ'-элементом, где $\varphi'(x, y) = \varphi(x^{\alpha_1}, y^{\alpha_2})$, а $\alpha_1 = 0$ ($\alpha_2 = 0$) в том и только том случае, когда на вход рассматриваемого φ-элемента, отвечающий переменной x (соответственно y), подаётся переменная из множества X_0. Полученную схему обозначим через S. Легко видеть, что она является схемой в базисе B_7'', например,

$$x^{\alpha_1} \oplus y^{\alpha_2} = x \oplus \alpha \oplus 1 \oplus y \oplus \alpha_2 \oplus 1 \in \{x \oplus y, x \oplus y \oplus 1\} = \{x \oplus y, x \sim y\} \subset B_7''.$$

Также нетрудно заметить, что на выходе каждого элемента схемы S при отсутствии в ней неисправностей реализуется та же функция, что и на выходе соответствующего элемента схемы S' при подаче на входы схемы S', отвечающие переменным из множества X_0, отрицаний этих переменных, другими словами, при подаче на входы схемы S' вместо переменных $x_1, \ldots, x_t$ функций $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}$ соответственно. Отсюда следуют три утверждения:

1) на выходе схемы S реализуется функция $f'\big(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}\big) = f(\tilde{x}^t)$;

2) при неисправностях некоторых элементов схемы S и таких же неисправностях соответствующих элементов схемы S' на выходе каждого (исправного или неисправного) элемента схемы S реализуется та же функция, что и на выходе соответствующего элемента схемы S' при подаче на входы схемы S' вместо переменных $x_1, \ldots, x_t$ функций $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}$ соответственно;

3) при возможном наличии неисправностей элементов в схеме S и таких же неисправностей соответствующих элементов в схеме S' при подаче на входы схемы S наборов $\widetilde{\sigma}_1$, $\widetilde{\sigma}_2$, $\widetilde{\sigma}_3$ и $\widetilde{\sigma}_4$ значения на выходе каждого

(исправного или неисправного) элемента схемы S будут совпадать со значениями на выходе соответствующего элемента схемы S' на наборах $(\tilde{1}^t)$, $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $(\tilde{0}^t)$ соответственно. (В качестве пояснения к утверждению 3 можно написать, например, равенство $\left(\overline{\sigma}_1^{\sigma_1}, \sigma_2^{\sigma_2}, \ldots, \sigma_t^{\sigma_t}\right) = (0, \tilde{1}^{t-1})$.)

В свою очередь, из утверждения 2 вытекает, что если на выходе выходного элемента схемы S, т. е. на выходе всей этой схемы, при неисправностях некоторых её элементов возникает функция неисправности $g(\tilde{x}^t)$, то при таких же неисправностях соответствующих элементов схемы S' на её выходе возникнет функция неисправности $g'(\tilde{x}^t)$, удовлетворяющая условию $g'\left(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}\right) = g(\tilde{x}^t)$. Докажем, что функцию g можно отличить от функции f на наборах из множества $\{\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3, \widetilde{\sigma}_4\}$, если $g \not\equiv f$. Из последнего соотношения следует, что

$$g'\left(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}\right) \not\equiv f'\left(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}\right),$$

значит, $g' \not\equiv f'$. Множество $T' = \{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является ППТ для схемы S', поэтому функцию неисправности g' этой схемы можно отличить от функции f' на наборах из T', т. е. выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\begin{aligned} g'(\tilde{1}^t) &\neq f'(\tilde{1}^t),\\ g'(0, \tilde{1}^{t-1}) &\neq f'(0, \tilde{1}^{t-1}),\\ g'(1, \tilde{0}^{t-1}) &\neq f'(1, \tilde{0}^{t-1}),\\ g'(\tilde{0}^t) &\neq f'(\tilde{0}^t). \end{aligned}$$

Из утверждения 3 вытекают равенства

$$\begin{aligned} g(\widetilde{\sigma}_1) &= g'(\tilde{1}^t),\\ g(\widetilde{\sigma}_2) &= g'(0, \tilde{1}^{t-1}),\\ g(\widetilde{\sigma}_3) &= g'(1, \tilde{0}^{t-1}),\\ g(\widetilde{\sigma}_4) &= g'(\tilde{0}^t), \end{aligned}$$

а при отсутствии неисправностей в схемах S и S' — равенства

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\sigma}_1) &= f'(\tilde{1}^t),\\ f(\widetilde{\sigma}_2) &= f'(0, \tilde{1}^{t-1}),\\ f(\widetilde{\sigma}_3) &= f'(1, \tilde{0}^{t-1}),\\ f(\widetilde{\sigma}_4) &= f'(\tilde{0}^t). \end{aligned}$$

Сравнивая последние двенадцать соотношений между собой, заключаем, что выполнено хотя бы одно из неравенств $g(\widetilde{\sigma}_1) \neq f(\widetilde{\sigma}_1)$, $g(\widetilde{\sigma}_2) \neq f(\widetilde{\sigma}_2)$, $g(\widetilde{\sigma}_3) \neq f(\widetilde{\sigma}_3)$, $g(\widetilde{\sigma}_4) \neq f(\widetilde{\sigma}_4)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, множество $\{\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3, \widetilde{\sigma}_4\}$ является ППТ для схемы S в базисе B_7'', реализующей функцию $f(\tilde{x}^t)$. Лемма 4 доказана.

2. Тесты для схем с одной фиктивной входной переменной

В соответствии с [4, с. 88–89] будем говорить, что СФЭ *содержит k фиктивных входных переменных и реализует функцию* $f(\tilde{x}^n)$, если данная схема содержит k входных переменных, отличных от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и реализует булеву функцию, не зависящую существенно от этих k переменных и равную функции $f(\tilde{x}^n)$. Будем также предполагать, что все наборы из любого ППТ для такой схемы имеют длину $n+k$ (по общему числу её входных переменных). Например, на рис. 2 изображена схема, содержащая одну фиктивную входную переменную x_0 и реализующая функцию x_1x_2.

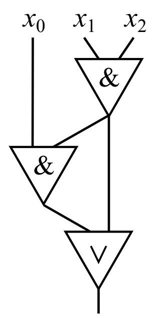


Рис. 2

По аналогии с обозначениями $D_B(f)$, $D_B(n)$ введём обозначения

$$D_B^{(+k)}(f) = \min D_B(S),$$

где минимум берётся по всем СФЭ S в базисе B, содержащим не более k фиктивных входных переменных и реализующим функцию $f(\tilde{x}^n)$, и

$$D_B^{(+k)}(n) = \max D_B^{(+k)}(f),$$

где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. Ясно, что для любой булевой функции f и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено соотношение

$$D_B^{(+k)}(f) \leqslant D_B^{(+0)}(f) = D_B(f). \tag{9}$$

Теорема 2. *Справедливо неравенство* $D_{B_7}^{(+1)}(n) \leqslant 5$.

Доказательство. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ надо доказать, что $D_{B_7}^{(+1)}(f) \leqslant 5$. В силу (9) достаточно рассмотреть случай $D_{B_7}(f) \geqslant 6$ (отметим, что по теореме 1 доля таких функций f от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$). Тогда $n \geqslant 3$, поскольку в противном случае любая СФЭ без фиктивных входных переменных, реализующая любую булеву функцию от $n \leqslant 2$ переменных, допускает тривиальный ППТ, состоящий из всех $2^n \leqslant 4$ двоичных наборов длины n. Пусть $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, не зависящая существенно от переменной x_0 и равная функции $f(\tilde{x}^n)$; $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0$. Имеем

$$f'(\tilde{0}^{n+1}) = f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1}) \oplus 0 = f^{(+1)}(1, \tilde{0}^n) \neq f^{(+1)}(1, \tilde{0}^n) \oplus 1 = f'(1, \tilde{0}^n),$$

$$f'(0, \tilde{1}^n) = f^{(+1)}(0, \tilde{1}^n) \oplus 0 = f^{(+1)}(\tilde{1}^{n+1}) \neq f^{(+1)}(\tilde{1}^{n+1}) \oplus 1 = f'(\tilde{1}^{n+1}),$$

т. е. $f'(\tilde{0}^{n+1}) \neq f'(1, \tilde{0}^n)$ и $f'(0, \tilde{1}^n) \neq f'(\tilde{1}^{n+1})$. В таком случае в силу леммы 2 при $t = n+1$ функцию $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B_7, для которой множество $T = \{(\tilde{0}^{n+1}), (1, \tilde{0}^n), (0, \tilde{1}^n), (\tilde{1}^{n+1})\}$ является ППТ. Выход схемы S' соединим с одним из входов сумматора E, на другой вход которого подадим переменную x_0. Выход элемента E будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S. При отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе, очевидно, реализуется функция $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0 = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Если элемент E исправен, а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен, то получающуюся функцию неисправности g подсхемы S' при $g \not\equiv f'$ можно отличить от функции f' на каком-то наборе $\widetilde{\sigma} \in T$, так как T — ППТ для S', поэтому $g(\widetilde{\sigma}) \neq f'(\widetilde{\sigma})$. На выходе схемы S возникнет функция неисправности $g \oplus x_0$, которую можно отличить от функции $f^{(+1)} = f' \oplus x_0$ на наборе $\widetilde{\sigma}$ в силу предыдущего соотношения. Если же элемент E неисправен, то на выходе схемы S реализуется некоторая булева константа. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{1}^n)$. Тогда

$$f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1}) = f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{1}^n) = f^{(+1)}(\tilde{1}^{n+1}),$$

т. е. значения функции $f^{(+1)}$ на наборах $(\tilde{0}^{n+1})$ и $(\tilde{1}^{n+1})$ различаются, поэтому её можно отличить от любой из булевых констант на одном из наборов $(\tilde{0}^{n+1}), (\tilde{1}^{n+1}) \in T$. Тем самым доказано, что множество T является ППТ длины 4 для схемы S.

2. Пусть $f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{1}^n)$. Функцию $f^{(+1)}$ можно отличить от константы $\overline{f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1})}$ на наборе $(\tilde{0}^{n+1}) \in T$, а от константы $f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1})$ в случае $f^{(+1)} \not\equiv f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1})$ — на любом наборе $\widetilde{\pi}$ длины $n+1$, на котором функция $f^{(+1)}$ принимает значение $\overline{f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1})}$. Тем самым доказано, что множество $T \cup \{\widetilde{\pi}\}$ является ППТ длины 5 для схемы S.

В каждом из случаев 1 и 2 установлено, что схема S в базисе B_7, реализующая функцию $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, допускает ППТ длины не более 5, а отсюда и из определений этой функции и величины $D_{B_7}^{(+1)}(f)$ следует неравенство $D_{B_7}^{(+1)}(f) \leqslant 5$. Теорема 2 доказана.

Два двоичных набора одинаковой длины называются *противоположными*, если они различаются во всех компонентах.

Теорема 3. *Справедливо неравенство* $D_{B_7'}^{(+1)}(n) \leqslant 4$.

Доказательство. Для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ надо доказать, что $D_{B_7'}^{(+1)}(f) \leqslant 4$. В случае $n \leqslant 2$ любая СФЭ без фиктивных входных переменных, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, допускает тривиальный ППТ, состоящий из всех $2^n \leqslant 4$ двоичных наборов длины n, откуда следует требуемое неравенство. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$. Рассмотрим два случая.

1. Существуют такие булевы константы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, что $f(\widetilde{\sigma}_1) \neq f(\widetilde{\sigma}_2)$ и $f(\widetilde{\sigma}_3) \neq f(\widetilde{\sigma}_4)$, где $\widetilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\widetilde{\sigma}_2 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\widetilde{\sigma}_3 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ и $\widetilde{\sigma}_4 = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$. Тогда $D_{B_7'}^{(+1)}(f) \leqslant 4$ в силу леммы 4 при $t = n$ и соотношения (9), что и требовалось доказать.

2. Отрицание случая 1: для любых булевых констант $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ выполнено хотя бы одно из равенств $f(\widetilde{\sigma}_1) = f(\widetilde{\sigma}_2)$, $f(\widetilde{\sigma}_3) = f(\widetilde{\sigma}_4)$, где $\widetilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\widetilde{\sigma}_2 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\widetilde{\sigma}_3 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ и $\widetilde{\sigma}_4 = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$. Если $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$), то функцию f можно реализовать схемой, состоящей из одного элемента «константа 1» (состоящей из одного сумматора, на оба входа которого подаётся переменная x_1, соответственно). Очевидно, что единственной отличной от f функцией неисправности такой схемы является константа 0 (соответственно 1), которую можно отличить от функции f на любом наборе, поэтому $D_{B_7'}^{(+1)}(f) \leqslant 1$.

Пусть теперь $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv 1$. Тогда существуют такие два набора $\widetilde{\pi}_1$ и $\widetilde{\pi}_2$ длины n, различающиеся ровно в одной компоненте, что $f(\widetilde{\pi}_1) \neq f(\widetilde{\pi}_2)$. Без ограничения общности они различаются в первой компоненте. Пусть $\widetilde{\pi}_1 = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$, тогда $\widetilde{\pi}_2 = (\overline{\pi}_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$. В силу предположения случая 2 имеем $f(\widetilde{\pi}_3) = f(\widetilde{\pi}_4)$, где $\widetilde{\pi}_3 = (\pi_1, \overline{\pi}_2, \ldots, \overline{\pi}_n)$, $\widetilde{\pi}_4 = (\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2, \ldots, \overline{\pi}_n)$. Тогда либо $f(\widetilde{\pi}_3) = f(\widetilde{\pi}_4) \neq f(\widetilde{\pi}_1)$, либо $f(\widetilde{\pi}_3) = f(\widetilde{\pi}_4) \neq f(\widetilde{\pi}_2)$, откуда либо $f(\widetilde{\pi}_4) \neq f(\widetilde{\pi}_1)$, либо $f(\widetilde{\pi}_3) \neq f(\widetilde{\pi}_2)$. Заметим, что $\widetilde{\pi}_4$ и $\widetilde{\pi}_1$, а также $\widetilde{\pi}_3$ и $\widetilde{\pi}_2$ — противоположные наборы, поэтому существуют такие противоположные наборы $\widetilde{\tau}$ и $\widetilde{\tau}'$ длины n, что

$$f(\widetilde{\tau}) \neq f(\widetilde{\tau}'). \tag{10}$$

Пусть $\widetilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, тогда $\widetilde{\tau}' = (\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$. Положим

$$\widetilde{\tau}_0 = (0, \tau_1, \ldots, \tau_n), \quad \widetilde{\tau}_1 = (1, \tau_1, \ldots, \tau_n),$$
$$\widetilde{\tau}'_0 = (0, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n), \quad \widetilde{\tau}'_1 = (1, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n).$$

Пусть $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — булева функция, не зависящая существенно от переменной x_0 и равная функции $f(\widetilde{x}^n)$; $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0$. Имеем

$$f'(\widetilde{\tau}_0) = f^{(+1)}(\widetilde{\tau}_0) \oplus 0 = f^{(+1)}(\widetilde{\tau}_1) \neq f^{(+1)}(\widetilde{\tau}_1) \oplus 1 = f'(\widetilde{\tau}_1),$$
$$f'(\widetilde{\tau}'_0) = f^{(+1)}(\widetilde{\tau}'_0) \oplus 0 = f^{(+1)}(\widetilde{\tau}'_1) \neq f^{(+1)}(\widetilde{\tau}'_1) \oplus 1 = f'(\widetilde{\tau}'_1),$$

т. е. $f'(\widetilde{\tau}_0) \neq f'(\widetilde{\tau}_1)$ и $f'(\widetilde{\tau}'_0) \neq f'(\widetilde{\tau}'_1)$. В таком случае в силу леммы 4 при $t = n + 1$ функцию $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B'_7, для которой множество $T = \{\widetilde{\tau}_0, \widetilde{\tau}_1, \widetilde{\tau}'_0, \widetilde{\tau}'_1\}$ является ППТ. Выход схемы S' соединим с одним из входов сумматора E, на другой вход которого подадим переменную x_0. Выход элемента E будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S. При отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе, очевидно, реализуется функция $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0 = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Если элемент E неисправен, то на выходе схемы S реализуется некоторая булева константа, которую можно отличить от функции $f^{(+1)}$ на наборах $\widetilde{\tau}_0, \widetilde{\tau}'_0 \in T$, поскольку

$$f^{(+1)}(\widetilde{\tau}_0) = f(\widetilde{\tau}) \neq f(\widetilde{\tau}') = f^{(+1)}(\widetilde{\tau}'_0)$$

в силу (10). Если же элемент E исправен, а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен, то получающуюся функцию неисправности g подсхемы S' при $g \not\equiv f'$ можно отличить от функции f' на каком-то наборе $\widetilde{\sigma} \in T$, так как T — ППТ для S', поэтому $g(\widetilde{\sigma}) \neq f'(\widetilde{\sigma})$. На выходе схемы S возникнет функция неисправности $g \oplus x_0$, которую можно отличить от функции $f^{(+1)} = f' \oplus x_0$ на наборе $\widetilde{\sigma}$ в силу предыдущего соотношения. Тем самым доказано, что множество T является ППТ длины 4 для схемы S в базисе B'_7, реализующей функцию $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Отсюда и из определений этой функции и величины $D^{(+1)}_{B_7}(f)$ следует неравенство $D^{(+1)}_{B'_7}(f) \leqslant 4$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бородина Ю. В.** О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. математика и кибернетика. 2008. № 1. С. 40–44.
2. **Бородина Ю. В.** Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x \mid y\}$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2015. № 4. С. 49–51.

3. **Бородина Ю. В., Бородин П. А.** Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискрет. математика. 2010. Т. 22, вып. 3. С. 127–133.
4. **Попков К. А.** О тестах замыкания для контактных схем // Дискрет. математика. 2016. Т. 28, вып. 1. С. 87–100.
5. **Попков К. А.** Полные проверяющие тесты длины два для схем при произвольных константных неисправностях элементов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 25, № 2. С. 62–81.
6. **Редькин Н. П.** О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1986. № 1. С. 72–74.
7. **Редькин Н. П.** О схемах, допускающих короткие тесты // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1988. № 2. С. 17–21.
8. **Редькин Н. П.** О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Мат. вопросы кибернетики. Вып. 2. М.: Наука, 1989. С. 198–222.
9. **Редькин Н. П.** Надежность и диагностика схем. М.: Изд-во МГУ, 1992. 192 с.
10. **Романов Д. С.** О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, вып. 2. С. 104–120.
11. **Яблонский С. В.** Надежность и контроль управляющих систем // Мат. Всесоюз. семинара по дискрет. математике и ее прил. (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 7–12.
12. **Яблонский С. В.** Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Мат. вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. С. 5–25.
13. **DasGupta S., Hartmann C. R. P., Rudolph L. D.** Dual-mode logic for function-independent fault testing // IEEE Trans. Comput. 1980. Vol. 29, No. 11. P. 1025–1029.
14. **Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N.** Network structure for testability improvement in exclusive-OR sum of products Reed–Muller canonical circuits // Int. J. Eng. Res. Gen. Sci. 2015. Vol. 3, No. 3. P. 368–378.
15. **Hayes J. P.** On modifying logic networks to improve their diagnosability // IEEE Trans. Comput. 1974. Vol. 23, No. 1. P. 56–62.
16. **Hirayama T., Koda G., Nishitani Y., Shimizu K.** Easily testable realization based on OR-AND-EXOR expansion with single-rail inputs // IEICE Trans. Inf. Syst. 1999. Vol. E-82D, No. 9. P. 1278–1286.
17. **Jameil A. K.** A new single stuck fault detection algorithm for digital circuits // Int. J. Eng. Res. Gen. Sci. 2015. Vol. 3, No. 1. P. 1050–1056.
18. **Neelakantan P. N., Ebenezer Jeyakumar. A.** Single stuck-at fault diagnosing circuit of Reed–Muller canonical exclusive-or sum of product Boolean expressions // J. Comput. Sci. 2006. Vol. 2, No. 7. P. 595–599.
19. **Rahagude N. P.** Integrated enhancement of testability and diagnosability for digital circuits: Diss. . . . Mast. Sci. Blacksburg, Virginia, 2010. 75 pp.

20. **Rahaman H., Das D. K., Bhattacharya B. B.** Testable design of AND-EXOR logic networks with universal test sets // Comput. Electr. Eng. 2009. Vol. 35, No. 5. P. 644–658.
21. **Reddy S. M.** Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. Vol. 21, No. 11. P. 1183–1188.
22. **Saluja K. K., Reddy S. M.** On minimally testable logic networks // IEEE Trans. Comput. 1974. Vol. 23, No. 5. P. 552–554.
23. **Saluja K. K., Reddy S. M.** Fault detecting test sets for Reed–Muller canonic networks // IEEE Trans. Comput. 1975. Vol. 24, No. 10. P. 995–998.
24. **Singh S. P., Sagar B. B.** Stuck-at fault detection in combinational network coefficients of the RMC with fixed polarity (Reed–Muller coefficients) // Int. J. Emerg. Trends Electr. Electron. (IJETEE). 2013. Vol. 1, No. 3. P. 93–96.

Попков Кирилл Андреевич

Статья поступила
16 июля 2018 г.
После доработки —
2 августа 2018 г.
Принята к публикации
28 ноября 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2019. Volume 26, No. 1. P. 89–113

UDC 519.718.7 DOI 10.33048/daio.2019.26.623

SHORT COMPLETE FAULT DETECTION TESTS FOR LOGIC NETWORKS WITH FAN-IN TWO

K. A. Popkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics,
4 Miusskaya Square, 125047 Moscow, Russia

E-mail: kirill-formulist@mail.ru

Abstract. It is established that we can implement almost every Boolean function on n variables by a logic network in the basis $\{x\&y,\ x \vee y,\ x \oplus y,\ 1\}$, allowing a complete fault detection test with length at most 4 under arbitrary stuck-at faults at outputs of gates. The following assertions are also proved: We can implement each Boolean function on n variables by a logic network in the basis $\{x\&y,\ x\vee y,\ x\oplus y,\ 1\}$ (in the basis $\{x\&y,\ x\vee y,\ x\vee\overline{y},\ x\oplus y\}$) containing at most one dummy variable and allowing a complete fault detection test of length at most 5 (at most 4, respectively) under faults of the same type. Illustr. 2, bibliogr. 24.

Keywords: logic network, arbitrary stuck-at fault, complete fault detection test.

REFERENCES

1. **Yu. V. Borodina,** Synthesis of easily-tested circuits in the case of single-type constant malfunctions at the element outputs, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 15,* No. 1, 40–44, 2008 [Russian]. Translated in *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.,* **32**, No. 1, 42–46, 2008.
2. **Yu. V. Borodina,** Lower estimate of the length of the complete test in the basis $\{x \mid y\}$, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1,* No. 4, 49–51, 2015 [Russian]. Translated in *Mosc. Univ. Math. Bull.,* **70**, No. 4, 185–186, 2015.
3. **Yu. V. Borodina** and **P. A. Borodin,** Synthesis of easily testable circuits over the Zhegalkin basis in the case of constant faults of type 0 at outputs of elements, *Diskretn. Mat.,* **22**, No. 3, 127–133, 2010 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **20**, No. 4, 441–449, 2010.
4. **K. A. Popkov,** Tests of contact closure for contact circuits, *Diskretn. Mat.,* **28**, No. 1, 87–100, 2016 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **26**, No. 5, 299–308, 2016.

5. **K. A. Popkov,** Complete fault detection tests of length 2 for logic networks under stuck-at faults of gates, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **25**, No. 2, 62–81, 2018 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **12**, No. 2, 302–312, 2018.
6. **N. P. Red'kin,** On complete checking tests for circuits of functional elements, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1,* No. 1, 72–74, 1986 [Russian].
7. **N. P. Red'kin,** On circuits admitting short tests, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1,* No. 2, 17–21, 1988 [Russian].
8. **N. P. Red'kin,** On complete fault detection tests for logic circuits, in *Mathematical Problems of Cybernetics,* Vol. 2, pp. 198–222, Nauka, Moscow, 1989 [Russian].
9. **N. P. Red'kin,** *Reliability and Diagnosis of Circuits,* Izd. MGU, Moscow, 1992 [Russian].
10. **D. S. Romanov,** On the synthesis of circuits admitting complete fault detection test sets of constant length under arbitrary constant faults at the outputs of the gates, *Diskretn. Mat.,* **25**, No. 2, 104–120, 2013 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **23**, No. 3–4, 343–362, 2013.
11. **S. V. Yablonskii,** Reliability and monitoring of control systems, in *Proc. All-Union Seminar on Discrete Math. and Its Applications, Moscow, Russia, Jan. 31 – Feb. 2, 1984,* pp. 7–12, Izd. MGU, Moscow, 1986 [Russian].
12. **S. V. Yablonskii,** Certain questions of reliability and monitoring of control systems, in *Mathematical Problems of Cybernetics,* Vol. 1, pp. 5–25, Nauka, Moscow, 1988 [Russian].
13. **S. DasGupta, C. R. P. Hartmann,** and **L. D. Rudolph,** Dual-mode logic for function-independent fault testing, *IEEE Trans. Comput.,* **29**, No. 11, 1025–1029, 1980.
14. **V. Geetha, N. Devarajan,** and **P. N. Neelakantan,** Network structure for testability improvement in exclusive-OR sum of products Reed–Muller canonical circuits, *Int. J. Eng. Res. Gen. Sci.,* **3**, No. 3, 368–378, 2015.
15. **J. P. Hayes,** On modifying logic networks to improve their diagnosability, *IEEE Trans. Comput.,* **23**, No. 1, 56–62, 1974.
16. **T. Hirayama, G. Koda, Y. Nishitani,** and **K. Shimizu,** Easily testable realization based on OR-AND-EXOR expansion with single-rail inputs, *IEICE Trans. Inf. Syst.,* **E-82D**, No. 9, 1278–1286, 1999.
17. **A. K. Jameil,** A new single stuck fault detection algorithm for digital circuits, *Int. J. Eng. Res. Gen. Sci.,* **3**, No. 1, 1050–1056, 2015.
18. **P. N. Neelakantan** and **A. Ebenezer Jeyakumar,** Single stuck-at fault diagnosing circuit of Reed–Muller canonical exclusive-or sum of product Boolean expressions, *J. Comput. Sci.,* **2**, No. 7, 595–599, 2006.
19. **N. P. Rahagude,** Integrated enhancement of testability and diagnosability for digitac circuits, *Mast. Sci. Dissertation,* VA Polytech. Inst. State Univ., Blacksburg, VA, 2010.
20. **H. Rahaman, D. K. Das,** and **B. B. Bhattacharya,** Testable design of AND-EXOR logic networks with universal test sets, *Comput. Electr. Eng.,* **35**, No. 5, 644–658, 2009.

21. **S. M. Reddy,** Easily testable realization for logic functions, *IEEE Trans. Comput.,* **21**, No. 1, 124–141, 1972.

22. **K. K. Saluja** and **S. M. Reddy,** On minimally testable logic networks, *IEEE Trans. Comput.,* **23**, No. 5, 552–554, 1974.

23. **K. K. Saluja** and **S. M. Reddy,** Fault detecting test sets for Reed–Muller canonic networks, *IEEE Trans. Comput.,* **24**, No. 10, 995–998, 1975.

24. **S. P. Singh** and **B. B. Sagar,** Stuck-at fault detection in combinational network coefficients of the RMC with fixed polarity (Reed–Muller coefficients), *Int. J. Emerg. Trends Electr. Electron.,* **1**, No. 3, 93–96, 2013.

Kirill A. Popkov

Received July 16, 2018
Revised August 2, 2018
Accepted November 28, 2018