ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2019. Том 26, № 1. С. 5–19

УДК 519.8 DOI 10.33048/daio.2019.26.624

АСПЕКТЫ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев[a]

Белорусский гос. университет,
пр-т Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
E-mail: [a]vemelichev@gmail.com

Аннотация. Рассматривается многокритериальная задача целочисленного линейного программирования с конечным множеством допустимых решений, состоящая в поиске множества экстремальных решений. Получены нижняя и верхняя оценки радиуса T_1-устойчивости задачи в предположении, что в пространстве решений и критериальном пространстве заданы произвольные нормы Гёльдера. Выделен класс задач с бесконечно большим радиусом. Отдельно рассмотрен случай многокритериальной линейной булевой задачи. Библиогр. 22.

Ключевые слова: многокритериальная задача ЦЛП, множество экстремальных решений, радиус устойчивости, T_1-устойчивость, норма Гёльдера.

Введение

Один из известных подходов к исследованию проблем устойчивости многокритериальных задач дискретной оптимизации ориентирован на получение количественных оценок, характеризующих меру устойчивости решений к возмущениям параметров задачи. В основу этого подхода положено ключевое понятие радиуса устойчивости задачи, под которым понимается предельный уровень возмущений исходных данных задачи, сохраняющих некоторое наперёд заданное свойство её решений. Это понятие было введено В. К. Леонтьевым для линейной однокритериальной траекторной задачи, т. е. задачи на системе подмножеств конечного множества. Многие публикации В. К. Леонтьева и Э. Н. Гордеева посвящены анализу устойчивости таких задач и, в частности, получению формул и разработке алгоритмов вычисления радиусов устойчивости. Наиболее полно эти результаты отражены в статье [4].

В случае векторного критерия большинство полученных результатов связано с выводом формул и получением оценок радиуса различных видов устойчивости многокритериальных задач булева или целочисленного программирования с линейными [7–9, 11, 12, 22], минимаксными (максиминными) и другими [2, 5, 6, 10, 13, 20] критериями. При этом под многокритериальной задачей, как правило, понимается задача поиска множества Парето, т. е. множества всех эффективных решений, а в пространствах параметров задаётся не только чебышёвская норма.

В теории принятия решений при наличии многих критериев наряду с широко известным принципом оптимальности по Парето рассматриваются и другие функции выбора, которые оказываются полезными в ряде прикладных задач (см., например, [1, 15, 16, 18, 19]). В данной работе под многокритериальной задачей целочисленного линейного программирования (ЦЛП) будем понимать задачу поиска совокупно-экстремального множества, т. е. множества всех экстремальных решений.

Обычно под устойчивостью многокритериальной задачи дискретной оптимизации понимается дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу оптимального отображения, задающего функцию выбора, т. е. в нашем случае — существование такой окрестности в пространстве параметров задачи, внутри которой невозможно появление новых экстремальных решений. Иначе говоря, совокупно-экстремальное множество может лишь сузиться. Ослабление этого требования приводит к такому типу устойчивости, который трактуется как существование окрестности первоначальных данных задачи, внутри которой хотя и возможно появление новых экстремальных решений, однако для каждого возмущения должно существовать хотя бы одно экстремальное решение исходной задачи (не обязательно одно и то же), сохраняющее свою экстремальность. Следуя терминологии из [6, 11, 13, 17], будем называть такой тип устойчивости T_1-устойчивостью.

Впервые T_1-устойчивость была исследована в [14] для однокритериальной (скалярной) линейной траекторной задачи в случае, когда в пространстве параметров задана норма Чебышёва. Позднее в [7, 11] были получены нижняя и верхние оценки радиуса этого типа устойчивости для многокритериальных линейных задач булева и целочисленного программирования с паретовским принципом оптимальности и обобщёнными нормами, заданными в пространствах параметров задачи. В [13] аналогичные оценки радиуса T_1-устойчивости были получены для многокритериальной задачи о максимальном разрезе графа, а в [20] — для инвестиционной булевой задачи с критериями рисков Сэвиджа и паретовским принципом оптимальности в предположении, что в пространствах параметров задач заданы различные нормы Гёльдера.

В данной статье найдены нижняя и верхняя границы для радиуса T_1-устойчивости многокритериальной задачи ЦЛП с совокупно-экстремальным принципом оптимальности в случае, когда в критериальном пространстве и пространстве решений заданы произвольные нормы Гёльдера. Выделен класс задач с бесконечным радиусом T_1-устойчивости. В случае булевых переменных верхние оценки уточнены. Полученные результаты анонсированы в [3].

1. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим многокритериальную задачу ЦЛП в следующей постановке. Пусть $\mathbf{R}^m$ — критериальное пространство, $\mathbf{R}^n$ – пространство решений, $C = (c_{ij}) \in \mathbf{R}^{m\times n}$ — матрица, строки которой обозначим через $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in}) \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subset \mathbf{Z}^n$, причём количество элементов множества X конечно и больше одного. На множестве (допустимых) решений X зададим векторный линейный критерий

$$Cx = (C_1x, C_2x, \dots, C_mx)^T \to \min_{x\in X}.$$

Под *m-критериальной задачей ЦЛП* $Z^m(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, будем понимать задачу поиска *совокупно-экстремального множества* (*множества экстремальных решений*), которое определим традиционным образом [1, 18, 19]:

$$E^m(C) = \{x \in X \mid \exists k \in N_m\ \forall x' \in X\ (C_k(x - x') \leqslant 0)\}.$$

Определение множества $E^m(C)$ можно записать иначе:

$$E^m(C) = \{x \in X \mid \exists k \in N_m\ (E_k(x, C_k) = \varnothing)\},$$

где

$$E_i(x, C_i) = \{x' \in X \mid (C_i(x - x') > 0)\}, \quad i \in N_m,\ x \in X.$$

Легко понять, что совокупно-экстремальный выбор можно трактовать как выделение лучших решений по каждому из m критериев и объединение их в единое целое. Очевидно, что $E^1(C)$, где $C \in \mathbf{R}^n$, является множеством всех оптимальных решений скалярной задачи ЦЛП $Z^1(C)$.

Учитывая конечность множества X, нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений, верных при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$:

$$E^m(C) = S^m(C) \setminus (P^m(C) \setminus L^m(C)),$$
$$E^m(C) \cap P^m(C) = L^m(C), \quad L^m(C) \subseteq E^m(C) \subseteq S^m(C),$$

где $P^m(C)$ — множество Парето, $S^m(C)$ — множество Слейтера, $L^m(C)$ — лексикографическое множество [16]. Эти множества задаются следующим образом:

$$P^m(C) = \{x \in X \mid \nexists x^0 \in X \ (Cx \geqslant Cx^0 \,\&\, Cx \neq Cx^0)\},$$
$$S^m(C) = \{x \in X \mid \nexists x^0 \in X \ \forall i \in N_m \ (C_i x > C_i x^0)\},$$
$$L^m(C) = \bigcup_{\pi \in \Pi_m} L(C, \pi).$$

Здесь $L(C, \pi) = \{x \in X \mid \forall x' \in X \ (Cx \underset{\pi}{\leqslant} Cx')\}$, Π_m — множество всех $m!$ перестановок чисел $1, 2, \ldots, m$; $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) \in \Pi_m$, а бинарное отношение $\underset{\pi}{\leqslant}$ векторов $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_m)$ из $\mathbf{R}^m$ задаётся формулой

$$y \underset{\pi}{\leqslant} y' \Leftrightarrow (y = y') \vee (\exists k \in N_m \ \forall i \in N_{k-1} \ (y_{\pi_k} < y'_{\pi_k} \,\&\, y_{\pi_i} = y'_{\pi_i})),$$

где $N_0 = \varnothing$.

Очевидно, что все приведённые здесь множества непусты при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Возмущение элементов матрицы C будем осуществлять путём прибавления к ней матриц C' из $\mathbf{R}^{m \times n}$. Таким образом, *возмущённая задача* $Z^m(C + C')$ имеет вид

$$(C + C')x \to \min_{x \in X},$$

а совокупно-экстремальное множество такой задачи равно $E^m(C + C')$.

В пространстве решений $\mathbf{R}^n$ зададим произвольную *норму Гёльдера* l_p, $p \in [1, \infty]$, т. е. под нормой вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbf{R}^n$ будем понимать число

$$\|a\|_p = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{j \in N_n} |a_j|^p \Big)^{1/p}, & \text{если } 1 \leqslant p < \infty, \\ \max\{|a_j| \mid j \in N_n\}, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

В критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ зададим произвольную норму Гёльдера l_q, отличную, вообще говоря, от нормы l_p. Под нормой матрицы $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ со строками C_i, $i \in N_m$, будем понимать норму вектора, компонентами которого являются нормы строк матрицы. Тем самым

$$\|C\|_{pq} = \|(\|C_1\|_p, \|C_2\|_p, \ldots, \|C_m\|_p)\|_q.$$

В пространстве решений $\mathbf{R}^n$ наряду с нормой l_p, $p \in [1, \infty]$, будем использовать сопряжённую с ней норму l_{p^*}, где числа p и p^*, как обычно, связаны равенством

$$1/p + 1/p^* = 1,$$

при этом полагаем $p^* = 1$, если $p = \infty$, и $p^* = \infty$, если $p = 1$. Поэтому далее считаем, что областью изменений чисел p и p^* является отрезок

$[1, \infty]$, а сами числа связаны указанными выше условиями. В этих обозначениях будем считать, что $1/p = 0$ при $p = \infty$.

Легко видеть, что для вектора $a \in \mathbf{R}^n$ с условием $|a_j| = \alpha,\ j \in N_n$, при любом числе $p \in [1, \infty]$ справедливо равенство

$$\|a\|_p = \alpha n^{1/p}. \tag{1}$$

Кроме того, известно, что для любых векторов $a, b \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство Гёльдера

$$|a^T b| \leqslant \|a\|_p \|b\|_{p^*}. \tag{2}$$

Следуя [6,11,17], *радиусом* T_1*-устойчивости* (в терминологии [7,12,21] радиусом сильной устойчивости) задачи ЦЛП $Z^m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, с нормами Гёльдера l_p и l_q в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно назовём число

$$\rho^m(p,q) = \begin{cases} \sup \Xi_{pq}, & \text{если } \Xi_{pq} \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Xi_{pq} = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Xi_{pq} = \{\varepsilon > 0 \mid \forall C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon)\ (E^m(C) \cap E^m(C + C') \neq \varnothing)\},$$

а $\Omega_{pq}(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m \times n} \mid \|C'\|_{pq} < \varepsilon\}$ — *множество возмущающих матриц*. Тем самым радиус T_1-устойчивости — это предельный уровень всех таких аддитивных возмущений элементов матрицы C, для каждого из которых исходная и возмущённая задачи имеют хотя бы одно общее экстремальное решение.

Очевидно, что в случае, когда множество $\overline{E}^m(C) = X \setminus E^m(C)$ пусто, пересечение $E^m(C) \cap E^m(C + C')$ непусто при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon)$ и всяком числе $\varepsilon > 0$. Поэтому радиус T_1-устойчивости такой задачи не ограничен сверху, т. е. $\rho^m(p,q) = \infty$.

В противном случае ($\overline{E}^m(C) \neq \varnothing$) задачу $Z^m(C)$ будем называть *нетривиальной*. В этом случае рассмотрим следующие два класса задач. Задачу $Z^m(C)$ назовём *вырожденной*, если выполняется формула

$$\forall x \notin E^m(C)\ \forall a \in \mathbf{R}^n\ \exists x^0 \in E^m(C)\ (a^T(x - x^0) \geqslant 0).$$

Если же верно отрицание этой формулы, т. е.

$$\exists x^0 \notin E^m(C)\ \exists a \in \mathbf{R}^n\ \forall x \in E^m(C)\ (a^T(x^0 - x) < 0), \tag{3}$$

то задачу $Z^m(C)$ будем называть *невырожденной*. Нетрудно видеть, что нетривиальная задача $Z^m(C)$ является невырожденной в том и только том случае, когда хотя бы при одном решении $x^0 \notin E^m(C)$ совместна система, состоящая из $|E^m(C)|$ строгих линейных неравенств с n переменными. В частности, как будет показано далее (см. доказательство теоремы), невырожденными являются все *булевы задачи* $Z^m_B(C)$, т. е. такие задачи $Z^m(C)$, у которых все переменные булевы ($X \subseteq \{0,1\}^n$). Приведём также пример, свидетельствующий, что существуют и вырожденные нетривиальные задачи $Z^m(C)$.

Пусть $m = n = 2$, $X = \{x^1, x^2, x^3\}$, причём $x^1 = (3,1)^T$, $x^2 = (7,3)^T$, $x^3 = (5,2)^T$, а $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Тогда $E^2(C) = \{x^1, x^2\}$, $\overline{E}^2(C) = \{x^3\}$ и $x^3 - x^1 = x^2 - x^3$. Это означает, что при любом векторе $a \in \mathbf{R}^2$ либо $a^T(x^3 - x^1) \geqslant 0$, либо $a^T(x^3 - x^2) \geqslant 0$. Следовательно, эта задача вырожденная и, как будет показано далее, её радиус T_1-устойчивости $\rho^2(p,q)$ равен бесконечности.

2. Леммы

Лемма 1. *Для всякой невырожденной многокритериальной задачи ЦЛП $Z^m(C)$ найдётся такая ненулевая матрица $C^* \in \mathbf{R}^{m\times n}$, что множество $E^m(C) \cap E^m(C^*)$ пусто.*

Доказательство. По определению невырожденной задачи $Z^m(C)$ справедлива формула (3), т. е. для любого решения $x \in E^m(C)$ верно строгое неравенство

$$a^T(x^0 - x) < 0. \tag{4}$$

Очевидно, что $a \neq \mathbf{0}$. Пусть строки C_i^*, $i \in N_m$, матрицы $C^* \in \mathbf{R}^{m\times n}$ заданы по правилу

$$C_i^* = a^T, \quad i \in N_m.$$

Тогда, учитывая (4), получаем

$$C_i^* x^0 < C_i^* x, \quad i \in N_m,$$

т. е. $x \notin E^m(C^*)$ при $x \in E^m(C)$. Следовательно, $E^m(C) \cap E^m(C^*) = \varnothing$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть решение $x^0 \in E^m(C)$ невырожденной задачи $Z^m(C)$ и возмущающая матрица $C' \in \mathbf{R}^{m\times n}$ со строками C_i', $i \in N_m$, таковы, что для некоторого индекса $k \in N_m$ справедливо равенство*

$$E_k(x^0, C_k + C_k') \cap \overline{E}^m(C) = \varnothing. \tag{5}$$

Тогда

$$E^m(C) \cap E^m(C + C') \neq \varnothing. \tag{6}$$

Доказательство. При $x^0 \in E^m(C + C')$ утверждение леммы очевидно. Пусть $x^0 \notin E^m(C + C')$. Тогда найдётся такое решение $x^* \in E^m(C + C')$, что $x^* \in E_k(x^0, C_k + C_k')$. С учётом (5) заключаем, что $x^* \in E^m(C)$. Следовательно, справедливо неравенство (6). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если $\rho^m(p,q) < \infty$, то справедлива формула*

$$\exists a \in \mathbf{R}^n \ \forall x \in E^m(C) \ \exists x^0(x) \notin E^m(C) \ (a^T(x^0(x) - x) < 0). \qquad (7)$$

Доказательство. Допустим, что, напротив, формула (7) не выполняется, т. е.

$$\forall a \in \mathbf{R}^n \ \exists x^0 \in E^m(C) \ \forall x' \notin E^m(C) \ (a^T(x' - x^0) \geqslant 0),$$

и пусть $C' \in \mathbf{R}^{m\times n}$ — произвольная матрица со строками C'_i, $i \in N_m$. Тогда для произвольно выбранного индекса $k \in N_m$ существует такое решение $x^0 \in E^m(C)$, что для каждого решения $x' \notin E^m(C)$ выполняется неравенство

$$(C_k + C'_k)(x' - x^0) \geqslant 0,$$

поэтому $x' \notin E_k(x^0, C_k + C'_k)$. Применяя лемму 2, убеждаемся в справедливости (6) при любой матрице $C' \in \mathbf{R}^{m\times n}$. Следовательно, $\rho^m(p,q) = \infty$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.

3. Основной результат

Для нетривиальной задачи ЦЛП $Z^m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, введём следующие обозначения при любых $p, q \in [1, \infty]$:

$$\varphi_m(p) = \min_{x\notin E^m(C)} \min_{i\in N_m} \max_{x'\in X\setminus\{x\}} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_{p^*}},$$

$$\psi_m(p) = \max_{x'\in E^m(C)} \max_{i\in N_m} \min_{x\notin E^m(C)} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_{p^*}},$$

$$\chi_m(p,q) = n^{1/p} m^{1/q} \min_{x\notin E^m(C)} \max_{i\in N_m} \max_{x'\in E^m(C)} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1}.$$

Теорема 1. *При любых $m \in \mathbf{N}$ и $p, q \in [1, \infty]$ для радиуса T_1-устойчивости $\rho^m(p,q)$ нетривиальной задачи ЦЛП $Z^m(C)$ справедливы оценки:*

$$0 < \max\{\varphi_m(p), \psi_m(p)\}$$
$$\leqslant \rho^m(p,q) \begin{cases} \leqslant \|C\|_{pq}, & \text{если } Z^m(C) \text{ — невырожденная задача,} \\ = \infty, & \text{если } Z^m(C) \text{ — вырожденная задача,} \end{cases}$$

причём если $Z^m(C) = Z^m_B(C)$, то

$$0 < \max\{\varphi_m(p), \psi_m(p)\} \leqslant \rho^m(p,q) \leqslant \min\{\chi_m(p,q), \|C\|_{pq}\}.$$

Доказательство. Поскольку справедлива формула

$$\forall x \notin E^m(C) \ \forall i \in N_m \ \exists x^0 \in X \ (C_i(x - x^0) > 0),$$

очевидно неравенство $\varphi_m(p) > 0$, свидетельствующее о положительности нижней оценки радиуса T_1-устойчивости и самого радиуса.

Докажем неравенство $\rho^m(p,q) \geqslant \varphi_m(p)$. Пусть $C' \in \Omega_{pq}(\varphi_m(p))$ — возмущающая матрица со строками C'_i, $i \in N_m$. Тогда согласно определению числа $\varphi_m(p)$ верна формула

$$\forall x \notin E^m(C)\ \forall i \in N_m\ \exists x^0 \in X \setminus \{x\}$$
$$\left(\frac{C_i(x-x^0)}{\|x-x^0\|_{p^*}} \geqslant \varphi_m(p) > \|C'\|_{pq} \geqslant \|C'_i\|_p\right).$$

Поэтому благодаря неравенству Гёльдера (2) для любого индекса $i \in N_m$ существует такое решение $x^0 \neq x$, что

$$(C_i + C'_i)(x-x^0) = C_i(x-x^0) + C'_i(x-x^0)$$
$$\geqslant C_i(x-x^0) - \|C'_i\|_p\|x-x^0\|_{p^*} > 0,$$

т. е. $x \notin E^m(C+C')$ при $x \notin E^m(C)$. Таким образом, любое неэкстремальное решение задачи $Z^m(C)$ остаётся таковым в любой возмущённой задаче $Z^m(C+C')$, а значит, верно включение $E^m(C+C') \subseteq E^m(C)$. Следовательно, $E^m(C) \cap E^m(C+C') \neq \varnothing$ при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_{pq}(\varphi_m(p))$, т. е. $\rho^m(p,q) \geqslant \varphi_m(p)$.

Далее докажем справедливость неравенства

$$\rho^m(p,q) \geqslant \psi_m(p). \tag{8}$$

Поскольку очевидна формула

$$\exists x' \in E^m(C)\ \exists k \in N_m\ \forall x \notin E^m(C)\ (C_k(x-x') > 0),$$

верно неравенство $\psi_m(p) > 0$.

Пусть $C' \in \Omega_{pq}(\psi_m(p))$. Тогда согласно определению числа $\psi_m(p)$ существуют такие $x^0 \in E^m(C)$ и $k \in N_m$, что для любого решения $x \notin E^m(C)$ выполняются неравенства

$$\frac{C_k(x-x^0)}{\|x-x^0\|_{p^*}} \geqslant \psi_m(p) > \|C'\|_{pq} \geqslant \|C'_k\|_p.$$

Отсюда, используя неравенство Гёльдера (2), выводим, что для любого решения $x \notin E^m(C)$ и всякой матрицы $C' \in \Omega_{pq}(\psi_m(p))$ выполняются соотношения

$$(C_k + C'_k)(x-x^0) = C_k(x-x^0) + C'_k(x-x^0)$$
$$\geqslant C_k(x-x^0) - \|C'_k\|_p\|x-x^0\|_{p^*} > 0.$$

Тем самым очевидно равенство

$$\overline{E}^m(C) \cap E_k(x^0, C_k + C'_k) = \varnothing.$$

Следовательно, согласно лемме 2 справедливо неравенство (6) при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_{pq}(\psi_m(p))$, т. е. верно неравенство (8).

Докажем неравенство $\rho^m(p,q) \leqslant \|C\|_{pq}$, справедливое для невырожденной задачи ЦЛП $Z^m(C)$. Согласно лемме 1 для такой задачи найдётся ненулевая матрица $C^* \in \mathbf{R}^{m\times n}$ с условием

$$E^m(C) \cap E^m(C^*) = \varnothing. \tag{9}$$

Рассмотрим возмущающую матрицу

$$C^0 = \eta C^* - C,$$

где

$$0 < \eta < \frac{\varepsilon - \|C\|_{pq}}{\|C^*\|_{pq}}.$$

Очевидны соотношения

$$\|C^0\|_{pq} = \|\eta C^* - C\|_{pq} \leqslant \eta\|C^*\|_{pq} + \|C\|_{pq} < \varepsilon,$$

откуда в силу условия (9) имеем

$$\forall \varepsilon > \|C\|_{pq}\ \exists C^0 \in \Omega_{pq}(\varepsilon)\ (E^m(C) \cap E^m(C + C^0) = \varnothing).$$

Следовательно, $\rho^m(p,q) \leqslant \|C\|_{pq}$.

Далее покажем, что в случае вырожденной задачи ЦЛП $Z^m(C)$, где $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, радиус устойчивости $\rho^m(p,q)$ равен ∞. Допустим, напротив, что $\rho^m(p,q) < \infty$. Тогда согласно лемме 3 верна формула (7). Поэтому, полагая

$$x^* = \operatorname{argmin}\{a^T x^0(x) \mid x \in E^m(C)\},$$

получаем неравенство

$$a^T(x^0(x^*) - x) < 0,$$

справедливое для любого решения $x \in E^m(C)$. Тем самым верна формула (3), т. е. задача $Z^m(C)$ невырожденна. Полученное противоречие завершает доказательство равенства $\rho^m(p,q) = \infty$.

Далее рассмотрим m-критериальную линейную булеву задачу $Z^m_B(C)$, $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $m \geqslant 1$, $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$, при условии, что она нетривиальная. Нижние оценки радиуса $\rho^m(p,q)$ остаются прежними.

Сначала докажем справедливость верхней оценки $\rho^m(p,q) \leqslant \chi_m(p,q)$. В соответствии с определением величины $\chi_m(p,q)$, которая является положительным числом, справедлива формула

$$\exists x^0 = (x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)^T \notin E^m(C)\ \forall i \in N_m\ \forall x \in E^m(C)$$
$$(\chi_m(p,q)\|x^0 - x\|_1 \geqslant n^{1/p} m^{1/q} C_i(x^0 - x)). \tag{10}$$

Полагая $\varepsilon > \chi_m(p,q)$, элементы возмущающей матрицы $C^0 = \left(c^0_{ij}\right) \in \mathbf{R}^{m\times n}$ зададим по правилу

$$c^0_{ij} = \begin{cases} -\delta, & \text{если } i \in N_m,\ x^0_j = 1, \\ \delta, & \text{если } i \in N_m,\ x^0_j = 0, \end{cases}$$

где

$$\chi_m(p,q) < \delta n^{1/p} m^{1/q} < \varepsilon. \tag{11}$$

Поэтому согласно (1) имеем

$$\|C_i^0\|_p = \delta n^{1/p}, \quad \|C^0\|_{pq} = \delta n^{1/p} m^{1/q}, \quad C^0 \in \Omega_{pq}(\varepsilon).$$

Кроме того, находим

$$C_i^0(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 < 0, \quad i \in N_m.$$

Отсюда, используя (10) и (11), заключаем, что для каждого решения $x \in E^m(C)$ и всякого индекса $i \in N_m$ имеют место соотношения

$$\big(C_i + C_i^0\big)(x^0 - x) \leqslant (\chi_m(p,q)(n^{1/p}m^{1/q})^{-1} - \delta)\|x^0 - x\|_1 < 0.$$

Это значит, что $x \notin E^m(C + C^0)$ при $x \in E^m(C)$. Поэтому при любом числе $\varepsilon > \chi_m(p,q)$ существует такая возмущающая матрица $C^0 \in \Omega_{pq}(\varepsilon)$, что $E^m(C) \cap E^m(C + C^0) = \varnothing$, т. е. $\rho^m(p,q) < \varepsilon$ для всякого числа $\varepsilon > \chi_m(p,q)$. Следовательно, $\rho^m(p,q) \leqslant \chi_m(p,q)$.

Наконец, докажем, что для радиуса $\rho^m(p,q)$ булевой задачи $Z_B^m(C)$ справедлива верхняя оценка $\rho^m(p,q) \leqslant \|C\|_{pq}$. Для этого достаточно показать, что всякая нетривиальная булева задача является невырожденной.

Пусть $x^0 = \big(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\big)^T \notin E^m(C)$ и $\alpha > 0$. Задав компоненты вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$ по правилу

$$a_j = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x_j^0 = 0, \\ -\alpha, & \text{если } x_j^0 = 1, \end{cases}$$

для всякого решения $x \in E^m(C)$ получим $a^T(x^0 - x) < 0$. Таким образом, верна формула (3), свидетельствующая, что задача $Z_B^m(C)$ невырожденная. Поэтому по доказанному ранее $\rho^m(p,q) \leqslant \|C\|_{pq}$. Теорема 1 доказана.

В случае чебышёвской нормы в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ из теоремы вытекает

Следствие 1. *Для радиуса T_1-устойчивости $\rho^m(\infty,\infty)$ многокритериальной нетривиальной булевой задачи $Z_B^m(C)$ с линейными критериями справедливы оценки*

$$0 < \min_{x \notin E^m(C)} \min_{i \in N_m} \max_{x' \in X \setminus \{x\}} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1}$$
$$\leqslant \rho^m(\infty,\infty) \leqslant \min_{x \notin E^m(C)} \max_{i \in N_m} \max_{x' \in E^m(C)} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1}.$$

Отсюда получаем следующую известную формулу [14] для радиуса T_1-устойчивости скалярной линейной булевой задачи $Z^1_B(C),\ C \in \mathbf{R}^n$:

$$\rho^1(\infty,\infty) = \varphi(\infty) = \chi_1(\infty,\infty) = \min_{x \notin E^1(C)} \max_{x' \in E^1(C)} \frac{C^T(x-x')}{\|x-x'\|_1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Айзерман М. А., Алексеров Ф. Т.** Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990. 240 с.
2. **Бухтояров С. Е., Емеличев В. А.** О мере устойчивости решений векторного варианта одной инвестиционной задачи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 2. С. 5–16.
3. **Бухтояров С. Е., Емеличев В. А.** Об одном типе устойчивости задачи целочисленного линейного программирования с несколькими критериями // Танаевские чтения: Докл. 8-й междунар. науч. конф. (Минск, 27–30 марта 2018 г.). Минск: ОИПИ НАН Беларуси, 2018. С. 48–51.
4. **Гордеев Э. Н.** Сравнение трёх подходов к исследованию устойчивости решений задач дискретной оптимизации и вычислительной геометрии // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 3. С. 18–35.
5. **Емеличев В. А., Коротков В. В.** Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда // Дискрет. математика. 2012. Т. 24, № 3. С. 3–16.
6. **Емеличев В. А., Котов В. М., Кузьмин К. Г., Лебедева Т. Т., Семенова Н. В., Сергиенко Т. И.** Устойчивость и эффективные алгоритмы решения задач дискретной оптимизации с многими критериями и неполной информацией // Пробл. управления и информатики. 2014. № 1. С. 53–67.
7. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Об одном типе устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования в случае монотонной нормы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 5. С. 45–51.
8. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискрет. математика. 2007. Т. 19, № 3. С. 79–83.
9. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Кибернетика и систем. анализ. 2010. № 1. С. 82–89.
10. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Анализ устойчивости эффективного решения векторной задачи о максимальном разрезе графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 4. С. 27–35.

11. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе T_1-устойчивости многокритериальной линейной булевой задачи с нормами Гёльдера в пространствах параметров // Таврич. вестн. математики и информатики. 2016. Т. 30, № 1. С. 49–64.
12. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 47–69.
13. **Кузьмин К. Г.** Единый подход к получению количественных характеристик устойчивости задачи о максимальном разрезе графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 5. С. 30–51.
14. **Леонтьев В. К.** Устойчивость в линейных дискретных задачах // Пробл. кибернетики. Вып. 35. М.: Наука, 1979. С. 169–184.
15. **Лотов А. В., Поспелова И. И.** Многокритериальные задачи принятия решений. М.: МАКС Пресс, 2008. 197 с.
16. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 256 с.
17. **Сергиенко И. В., Шило В. П.** Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наукова думка, 2003. 258 с.
18. **Шоломов Л. А.** Логические методы исследования дискретных моделей выбора. М.: Наука, 1989. 288 с.
19. **Юдин Д. Б.** Вычислительные методы теории принятия решений. М.: Наука, 1989. 320 с.
20. **Emelichev V. A., Bukhtoyarov S. E., Mychkov V. I.** An investment problem under multicriteriality, uncertainty and risk // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat. 2016. No. 3. P. 82–98.
21. **Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P.** Stability and regularization of vector problem of integer linear programming // Optimization. 2002. Vol. 51, No. 4. P. 645–676.
22. **Emelichev V. A., Podkopaev D. P.** Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming // Discrete Optim. 2010. Vol. 7, No. 1–2. P. 48–63.

Бухтояров Сергей Евгеньевич,
Емеличев Владимир Алексеевич

Статья поступила
15 июля 2018 г.

После доработки —
19 октября 2018 г.

Принята к публикации
28 ноября 2018 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2019. Volume 26, No. 1. P. 5–19

UDC 519.8 DOI 10.33048/daio.2019.26.624

STABILITY ASPECTS OF MULTICRITERIA INTEGER LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

S. E. Bukhtoyarov and *V. A. Emelichev*[a]

Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Ave., 220030 Minsk, Belarus
E-mail: [a]vemelichev@gmail.com

Abstract. Under consideration are the multicriteria integer linear programming problems with finitely many feasible solutions. The problem itself consists in finding a set of extremal solutions. We derive some lower and upper bounds for the T_1-stability radius under assumption that arbitrary Hölder norms are given in the solution and criteria spaces. A class of the problems with an infinitely large stability radius is specified. We also consider the case of the multicriteria linear Boolean problem. Bibliogr. 22.

Keywords: multicriteria ILP problem, set of extremal solutions, stability radius, T_1-stability, the Hölder norm.

REFERENCES

1. **M. A. Aizerman** and **F. T. Alekserov,** *The Alternative Choice: Theoretical Foundations,* Nauka, Moscow, 1990 [Russian].
2. **S. E. Bukhtoyarov** and **V. A. Emelichev,** On the stability measure of solutions to a vector variant of an investment problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 2, 5–16, 2015 [Russian]. Translated in *Appl. Ind. Math.,* **9**, No. 3, 328–334, 2015.
3. **S. E. Bukhtoyarov** and **V. A. Emelichev,** On a stability type of an integer linear programming problem with several criteria, *Proc. 8th Int. Conf. "Tanaevskie chteniya", Minsk, Belarus, Mar. 27–30, 2018,* pp. 48–51, OIPI NAN Belarusi, Minsk, 2018 [Russian].
4. **E. N. Gordeev,** Comparison of three approaches to studying stability of solutions to problems of discrete optimization and computational geometry, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 3, 18–35, 2015 [Russian]. Translated in *Appl. Ind. Math.,* **9**, No. 3, 358–366, 2015.

5. **V. A. Emelichev** and **V. V. Korotkov,** On stability of a vector Boolean investment problem with Wald's criteria, *Diskretn. Mat.,* **24**, No. 3, 3–16, 2012 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **22**, No. 4, 367–381, 2012.
6. **V. A. Emelichev, V. M. Kotov, K. G. Kuzmin, T. T. Lebedeva, N. V. Semenova,** and **T. I. Sergienko,** Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information, *Probl. Upr. Inform.,* No. 1, 53–67, 2014 [Russian]. Translated in *J. Autom. Inf. Sci.,* **46**, No. 2, 27–41, 2014.
7. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** On a type of stability of a milticriteria integer linear programming problem in the case of a monotone norm, *Izv. RAN, Teor. Sist. Upravl.,* No. 5, 45–51, 2007 [Russian]. Translated in *J. Comput. Syst. Sci. Int.,* **46**, No. 5, 714–720, 2007.
8. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** A general approach to studying the stability of a Pareto optimal solutions of a vector integer linear programming problem, *Diskretn. Mat.,* **19**, No. 3, 79–83, 2007 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **17**, No. 4, 349–354, 2007.
9. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** Stability radius of a vector integer linear programming problem: Case of a regular norm in the space of criteria, *Kibern. Sist. Anal.,* No. 1, 82–89, 2010 [Russian]. Translated in *Cybern. Syst. Anal.,* **46**, No. 1, 72–79, 2010.
10. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** Stability analysis of the effective solution to the vector problem on the maximal cut of a graph, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 4, 27–35, 2013 [Russian].
11. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** On the T_1-stability radius of a multicriteria linear Boolean problem with Hölder norms in parameter spaces, *Tavricheskiy Vestn. Mat. Inform.,* **30**, No. 1, 49–64, 2016 [Russian].
12. **V. A. Emelichev** and **D. P. Podkopaev,** Stability and regularization of vector integer programs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **8**, No. 1, 47–69, 2001 [Russian].
13. **K. G. Kuzmin,** A general approach to the calculation of stability radii for the max-cut problem with multiple criteria, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 5, 30–51, 2015 [Russian]. Translated in *Appl. Ind. Math.,* **9**, No. 4, 527–539, 2015.
14. **V. K. Leontiev,** Stability in linear discrete problems, in *Problems of Cybernetics,* Vol. 35, pp. 169–184, Nauka, Moscow, 1979 [Russian].
15. **A. V. Lotov** and **I. I. Pospelova,** *Multicriteria Decision-Making Problems,* MAKS Press, Moscow, 2008 [Russian].
16. **V. V. Podinovski** and **V. D. Nogin,** *Pareto-Optimal Solutions to Multicriteria Problems,* Fizmatlit, Moscow, 2007 [Russian].
17. **I. V. Sergienko** and **V. P. Shilo,** *Discrete Optimization Problems: Problems, Solution Methods, Research,* Naukova dumka, Kiev, 2003 [Russian].
18. **L. A. Sholomov,** *Logical Methods for Investigation of Discrete Choice Models,* Nauka, Moscow, 1989 [Russian].
19. **D. B. Yudin,** *Computational Methods in Decision-Making Theory,* Nauka, Moscow, 1989 [Russian].

20. V. A. Emelichev, S. E. Bukhtoyarov and **V. I. Mychkov,** An investment problem under multicriteriality, uncertainty and risk, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat.,* No. 3, 82–98, 2016.

21. V. A. Emelichev, E. Girlich, Yu. V. Nikulin and **D. P. Podkopaev,** Stability and regularization of vector problem of integer linear programming, *Optimization*, **51**, No. 4, 645–676, 2002.

22. V. A. Emelichev and **D. P. Podkopaev,** Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming, *Discrete Optim.,* **7**, No. 1–2, 48–63, 2010.

Sergey E. Bukhtoyarov,
Vladimir A. Emelichev

Received July 15, 2018
Revised October 19, 2018
Accepted November 28, 2018