ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2019. Т. 26, № 2. С. 129–144

УДК 519.1 DOI 10.33048/daio.2019.26.610

АСИМПТОТИКА ЛОГАРИФМА ЧИСЛА НАБОРОВ, (k, l)-СВОБОДНЫХ ОТ РЕШЕНИЙ, В ОТРЕЗКЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ*)

А. А. Сапоженко[a], *В. Г. Саргсян*[b]

Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия
E-mail: [a]sapozhenko@mail.ru, [b]vahe_sargsyan@ymail.com

Аннотация. Набор $(A_1, \dots, A_{k+l})$ подмножеств отрезка натуральных чисел $[1, n]$ называется (k, l)-свободным от решений, если не существует набора $(a_1, \dots, a_{k+l}) \in A_1 \times \dots \times A_{k+l}$, являющегося решением уравнения $x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{k+l}$. Получена асимптотика логарифма числа наборов, (k, l)-свободных от решений, в отрезке натуральных чисел $[1, n]$. Библиогр. 17.

Ключевые слова: множество, группа, смежный класс, характеристическая функция, прогрессия.

Введение

Пусть k, l — неотрицательные целые числа и $k + l \geqslant 3$. Рассмотрим множество G с определённой на нём операцией сложения. Подмножество $A \subseteq G$ называется (k, l)-*свободным от сумм* ((k, l)-МСС), если не существует набора $(a_1, \dots, a_{k+l}) \in \underbrace{A \times \dots \times A}_{k+l}$, являющегося решением уравнения $x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{k+l}$. Семейство всех (k, l)-МСС в G обозначим через $SF_{k,l}(G)$. Множество, $(2, 1)$-свободное от сумм, называется просто *множеством, свободным от сумм* (МСС). Пусть m, n — натуральные числа. Множество натуральных чисел x таких, что $m \leqslant x \leqslant n$, обозначим через $[m, n]$

В [10] П. Камерон и П. Эрдёш высказали гипотезу, что $SF_{2,1}([1, n]) = O(2^{n/2})$. Они показали, что существуют константы c_0 и c_1 такие, что $|SF_{2,1}([[n/3], n])| \sim c_0 2^{n/2}$ для чётных n и $|SF_{2,1}([[n/3], n])| \sim c_1 2^{n/2}$ для нечётных n.

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16–01–00593а).

В [7] Н. Калкин и Н. Алон в [5] независимо доказали, что[1)]

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2}{n} \log |SF_{2,1}([1,n])| \leqslant 1.$$

А. А. Сапоженко [2] и Б. Грин [11] получили асимптотику числа МСС в начальном отрезке натуральных чисел. А именно, они доказали, что $|SF_{2,1}([1,n])| \sim c(n)2^{n/2}$, где константа $c(n)$ зависит от чётности n.

В [5] Н. Алон показал, что для любого $\varepsilon > 0$ число МСС произвольной группы порядка n не превосходит $2^{n/2+\varepsilon n}$ при всех достаточно больших n. Далее данный результат уточнялся для разных подклассов конечных абелевых групп. В частности, в [1, 15] получена асимптотика числа МСС для конечных абелевых групп, содержащих хотя бы одну подгруппу индекса 2. Обозначим через Z_n циклическую группу порядка n.

В [16] В. Лев и Т. Шон показали, что для достаточно большого простого p справедливы неравенства

$$2^{\lfloor (p-2)/3 \rfloor}(p-1)(1+O(2^{-\varepsilon_1 p})) \leqslant |SF_{2,1}(Z_p)| \leqslant 2^{p/2-\varepsilon_2 p},$$

где ε_1 и ε_2 — положительные константы.

Далее Б. Грин и И. Ружа в [13] с использованием преобразования Фурье получили асимптотику логарифма числа МСС в конечных абелевых группах. В частности, они доказали, что для любой конечной абелевой группы G имеет место $\log |SF_{2,1}(G)| \sim \mu_{2,1}(G)$, где $\mu_{2,1}(G)$ — максимальная мощность МСС в G.

В [3] А. А. Сапоженко получена асимптотика числа МСС в группе простого порядка.

Теорема 1 (Сапоженко). *Для любого $\alpha \in \{-1, 1\}$ существует такая константа c_α, что для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N такое, что для любого простого p вида $p \equiv \alpha \pmod 3$, $p > N$, выполняются неравенства*

$$1 \leqslant \frac{|SF_{2,1}(Z_p)|}{c_\alpha (p-1) 2^{\lfloor (p-2)/3 \rfloor}} < 1 + \varepsilon.$$

Вместе с тем интенсивно исследовали обобщения проблемы Камерона—Эрдёша. В частности, речь шла о числе (k,l)-МСС. В [8] Н. Калкин и А. Тейлор показали, что для каждого $k > 2$ существует такая константа C_k, что $|SF_{k,1}([1,n])|$ не превосходит $C_k 2^{(k-1)n/k}$. Ю. Билу в [6] доказал, что $|SF_{l+1,l}([1,n])| = (1+\bar{o}(1))2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor)}$, а в [9] Н. Калкин и Дж. Томсон показали, что при $k \geqslant 4l - 1$ существует такая константа $C_{k,l}$, что $SF_{k,l}([1,n])$ не превосходит $C_{k,l}2^{(k-l)n/k}$.

В [17] Т. Шоном установлена асимптотика числа (k,l)-МСС в начальном отрезке натуральных чисел $[1,n]$ при некоторых ограничениях

[1)] Здесь и далее $\log x = \log_2 x$

на k и l. В. Лев [14] получил верхнюю оценку числа (k,l)-МСС в отрезке натуральных чисел $[1,n]$. В [4] получена асимптотика логарифма числа (k,l)-МСС для произвольной абелевой группы G порядка n. Доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $|\log|SF_{k,l}(G)| - \mu_{k,l}(G)| < \varepsilon n$ при всех достаточно больших n, где $\mu_{k,l}(G)$ — максимальная мощность (k,l)-МСС в G.

Пусть $b = (b_1,\dots,b_k)$ — фиксированный k-набор ненулевых целых чисел. Для любых действительных чисел $x_1,\dots,x_k$ записываем

$$L_b(x_1,\dots,x_k) = b_1x_1 + \dots + b_kx_k.$$

Будем говорить, что множество $A \subseteq [1,n]$ L_b-*свободное*, если уравнение $L_b(a_1,\dots,a_k) = 0$ не имеет решений таких, что $a_i \in A$ для всех $i \in \{1,\dots,k\}$. Обозначим через $f_{L_b}([1,n])$ мощность наибольшего L_b-свободного подмножества в $[1,n]$, а через $FL_b([1,n])$ — семейство всех L_b-свободных подмножеств в $[1,n]$. В [12] доказано, что

$$\log|FL_b([1,n])| = f_{L_b}([1,n]) + \bar{o}(n).$$

Пусть $A_1,\dots,A_{k+l}$ — подмножества G. Набор множеств $(A_1,\dots,A_{k+l})$ называется (k,l)-*свободным от решений* ((k,l)-НСР), если не существует набора $(a_1,\dots,a_{k+l}) \in A_1 \times \dots \times A_{k+l}$, являющегося решением уравнения

$$x_1 + \dots + x_k = x_{k+1} + \dots + x_{k+l}. \tag{1}$$

Семейство всех (k,l)-НСР в G обозначим через $S_{k,l}(G)$.

Положим

$$\lambda_{k,l}([1,n]) = \max_{(A_1,\dots,A_{k+l}) \in S_{k,l}([1,n])} |A_1 \cup \dots \cup A_{k+l}|.$$

Основным результатом этой работы является

Теорема 2. *Пусть k,l — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $k+l \geqslant 3$. Тогда при $n \to \infty$ справедливо равенство*

$$\log|S_{k,l}([1,n])| = \lambda_{k,l}([1,n]) + \bar{o}(n).$$

1. Гранулирование

Обозначим множества вещественных и комплексных чисел через $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Пусть G — абелева группа порядка n. Пусть отображение $\gamma\colon G \to \mathbb{C}$ таково, что для любых $x,y \in G$ имеют место равенства $|\gamma(x)| = 1$ и $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$. Такое отображение называется *характером* группы G. Через Γ обозначим множество всех характеров группы G. Несложно заметить, что Γ образует группу с операцией $\gamma_1 \star \gamma_2(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$. *Преобразованием Фурье* $f\colon G \to \mathbb{R}$ называется функция $\widehat{f}\colon \Gamma \to \mathbb{C}$, определяемая равенством $\widehat{f}(\gamma) = \sum\limits_{x\in G} f(x)\gamma(x)$.

L-гранулой типа смежного класса называется объединение смежных классов группы G по некоторой подгруппе порядка не меньше L.

Пусть L — целое число и $d \in G$, причём $\operatorname{ord}(d) \geqslant L$, где $\operatorname{ord}(d)$ — порядок элемента d. Пусть H — подгруппа группы G, порождённая элементом d. Разобьём каждый смежный класс подгруппы H на $\lfloor \operatorname{ord}(d)/L \rfloor$ прогрессий вида $\{x + ld \mid 0 \leqslant l \leqslant L-1\}$ и одно «остаточное» множество мощности менее L. Для каждого $d \in G$ фиксируем одно такое разбиение. Объединение полученных прогрессий (в объединение не входят «остаточные» множества) называется *L-гранулой типа прогрессии*.

Отметим, что в определении L-гранулы типа смежного класса (прогрессии) речь идёт об объединении произвольных смежных классов (прогрессий).

Следующие две леммы можно найти в [13, с. 166, леммы 3.3, 3.4].

Лемма 1. *Пусть n — достаточно большое натуральное число, G — абелева группа порядка n, а $L \leqslant \sqrt{n}$. Тогда в группе G имеется не более $2^{3n/L}$ L-гранул обоих типов (прогрессии и смежного класса).*

Лемма 2. *Пусть n — достаточно большое натуральное число, M — множество мощности n, а ρ — вещественное число, меньшее некоторой абсолютной положительной константы. Тогда число подмножеств множества M, мощности не превышающей ρn, не превосходит $2^{n\sqrt{\rho}}$.*

Следующая теорема доказана в [12].

Теорема 3. *Пусть $k \geqslant 3$, $A_1, \ldots, A_k$ — подмножества абелевой группы G порядка n такие, что существует $\overline{o}(n^{k-1})$ решений уравнения $x_1 + \cdots + x_k = 0$ при $x_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда существуют подмножества $A'_1, \ldots, A'_k$ такие, что $A'_i \subseteq A_i$, $|A_i \setminus A'_i| = \overline{o}(n)$, и решений уравнения $x_1 + \cdots + x_k = 0$ при $x_i \in A'_i$ нет.*

Лемма 3. *Пусть G — абелева группа порядка n, $f_1, \ldots, f_{k+l}\colon G \to \mathbb{R}$ и $\widehat{f}_1, \ldots, \widehat{f}_{k+l}$ — преобразования Фурье функций $f_1, \ldots, f_{k+l}$ соответственно. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{\substack{x_1+\cdots+x_k\\ =x_{k+1}+\cdots+x_{k+l}}} f_1(x_1)\ldots f_{k+l}(x_{k+l}) = \frac{1}{n}\sum_{\gamma} \widehat{f}_1(\gamma)\ldots\widehat{f}_k(\gamma)\overline{\widehat{f}_{k+1}(\gamma)}\ldots\overline{\widehat{f}_{k+l}(\gamma)}.$$

Доказательство. С учётом того, что для любого $i = 1, \ldots, k+l$ выполнены соотношения

$$\overline{\widehat{f}_i(\gamma)} = \overline{\sum_{x\in G}\gamma(x)f_i(x)} = \sum_{x\in G}\overline{\gamma(x)f_i(x)} = \sum_{x\in G}\overline{\gamma(x)}f_i(x) = \sum_{x\in G}\gamma(-x)f_i(x)$$

и

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0,\\ n, & \text{если } x = 0,\end{cases}$$

получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{x_1+\dots+x_k\\=x_{k+1}+\dots+x_{k+l}}} f_1(x_1)\dots f_{k+l}(x_{k+l})\\
&\quad=\frac{1}{n}\sum_{x_1,\dots,x_{k+l}\in G}\sum_{\gamma}\bigl(\gamma(x_1+\dots+x_k-x_{k+1}-\dots-x_{k+l})\\
&\qquad\times f_1(x_1)\dots f_{k+l}(x_{k+l})\bigr)\\
&\quad=\frac{1}{n}\sum_{\gamma}\Bigl(\Bigl(\sum_{x_1}\gamma(x_1)f_1(x_1)\Bigr)\dots\Bigl(\sum_{x_k}\gamma(x_k)f_k(x_k)\Bigr)\\
&\qquad\times\Bigl(\sum_{x_{k+1}}\gamma(-x_{k+1})f_{k+1}(x_{k+1})\Bigr)\dots\Bigl(\sum_{x_{k+l}}\gamma(-x_{k+l})f_{k+l}(x_{k+l})\Bigr)\Bigr)\\
&\quad=\frac{1}{n}\sum_{\gamma}\widehat{f}_1(\gamma)\dots\widehat{f}_k(\gamma)\overline{\widehat{f}_{k+1}(\gamma)}\dots\overline{\widehat{f}_{k+l}(\gamma)}.
\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Следующая лемма является обобщением утверждения, которое в [13] доказано, но не выделено в отдельную лемму.

Лемма 4. *Пусть n — достаточно большое натуральное число, G — абелева группа порядка n, m — натуральное число, $m \geqslant 1$, $A_1,\dots,A_m$ — произвольные подмножества группы G, $0<\varepsilon<1/2$, $0<\delta<1$, L и L' — положительные числа, удовлетворяющие неравенству*

$$n > L'(4L/\varepsilon)^{4\delta^{-3}}.$$

Тогда существует подмножество $P\subseteq G$ такое, что

(i) *P — либо прогрессия вида $\{ld \mid -(L-1)\leqslant l\leqslant L-1\}$, причём $\operatorname{ord}(d)\geqslant 2L/\varepsilon$, либо подгруппа группы G порядка не менее L';*

(ii) *для любого $\gamma\in\Gamma$ имеют место неравенства $\bigl|\widehat{A}_i(\gamma)\bigl(1-g(\gamma)\bigr)\bigr|\leqslant\delta n$, где $i=1,\dots,m$, $g(\gamma)=|P|^{-1}\sum\limits_{p\in P}\gamma(p)$, а $A_1(x),\dots,A_m(x)$ — характеристические функции множеств $A_1,\dots,A_m$ соответственно.*

Доказательство. Положим R равным множеству характеров γ таких, что хотя бы для одного A_i, $i\in\{1,\dots,m\}$, имеет место неравенство $\bigl|\widehat{A}_i(\gamma)\bigr|>\delta n/2$. Если R — пустое множество, то в качестве P берём либо любую подгруппу группы G порядка не менее L', либо любую прогрессию вида $\{ld \mid -(L-1)\leqslant l\leqslant L-1\}$, причём $\operatorname{ord}(d)\geqslant 2L/\varepsilon$. Заметим, что при любом выборе P п. (ii) выполняется автоматически, так как $g(\gamma)\in[-1,1]$ для любого $\gamma\in\Gamma$ и для всех $i=1,\dots,m$ справедливо

неравенство $|\widehat{A}_i(\gamma)(1-g(\gamma))| \leqslant 2|\widehat{A}_i(\gamma)| \leqslant 2\delta n/2 = \delta n$. Пусть R — непустое множество и Γ_1 — подгруппа группы Γ, порождённая множеством R. Введём подгруппу G_1 группы G следующим образом:

$$G_1 = \{x \in G \mid \gamma(x) = 1 \ \forall \gamma \in \Gamma_1\}.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|G_1| \geqslant L'$. Положим $P = G_1$. Так как $g(\gamma) \in [-1,1]$, при $\gamma \in \Gamma\backslash\Gamma_1$ получим, что

$$\bigl|\widehat{A}_i(\gamma)\bigl(1-g(\gamma)\bigr)\bigr| \leqslant 2\bigl|\widehat{A}_i(\gamma)\bigr| \leqslant 2\delta n/2 = \delta n$$

для всех $i = 1,\ldots,m$, а при $\gamma \in \Gamma_1$ для всех $i = 1,\ldots,m$ справедливо равенство $\bigl|\widehat{A}_i(\gamma)\bigl(1-g(\gamma)\bigr)\bigr| = 0$.

2. Пусть $|G_1| < L'$. Будем выбирать d так, что если в качестве P возьмём прогрессию $P = \{ld \mid -(L-1) \leqslant l \leqslant L-1\}$, то требования пп. (i) и (ii) будут удовлетворены. Отметим, что при $\gamma \in \Gamma\backslash\Gamma_1$ п. (ii) выполнен. Оценим величину $1-g(\gamma)$. Фиксируем $\gamma \in \Gamma$ и через β обозначим $\arg\gamma(d) \in [-\pi,\pi)$. Имеем

$$\begin{aligned}
0 \leqslant 1-g(\gamma) &= 1 - \frac{1}{2L-1}\sum_{j=-L-1}^{L-1}\bigl(\cos j\beta + i\sin j\beta\bigr) \\
&= 1 - \frac{1}{2L-1} - \frac{2}{2L-1}\sum_{j=1}^{L-1}\cos j\beta = \frac{2L-2}{2L-1} - \frac{2}{2L-1}\sum_{j=1}^{L-1}\cos j\beta \\
&= \frac{2}{2L-1}\sum_{j=1}^{L-1}\bigl(1-\cos j\beta\bigr) \leqslant \frac{1}{2L-1}\sum_{j=1}^{L-1}(j\beta)^2 = \frac{L(L-1)}{6}\beta^2 \leqslant \frac{(L\beta)^2}{6}.
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что если для всех $\gamma \in R$ верно неравенство

$$|\arg\gamma(d)| \leqslant L^{-1}\min\Bigl(\sqrt{6\delta n/|\widehat{A}_1(\gamma)|},\ldots,\sqrt{6\delta n/|\widehat{A}_m(\gamma)|}\Bigr),$$

то п. (ii) выполнен. Также отметим, что для выполнения условия $\mathrm{ord}(d) \geqslant 2L/\varepsilon$ достаточно, чтобы при некотором $\gamma \in \Gamma$ имели место неравенства

$$0 < \bigl|\arg\gamma(d)\bigr| < 2\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2L} = \frac{\pi\varepsilon}{L}.$$

Покажем, что можно выбрать такое $d \notin G_1$, что при всех $\gamma \in R$ справедливо неравенство

$$|\arg\gamma(d)| \leqslant L^{-1}\min\Bigl(\pi\varepsilon, \sqrt{6\delta n/|\widehat{A}_1(\gamma)|},\ldots,\sqrt{6\delta n/|\widehat{A}_m(\gamma)|}\Bigr).$$

Несложно видеть, что если $d_1, d_2 \in G$ принадлежат различным смежным классам G по G_1, т. е. $d_1 - d_2 \notin G_1$, то существует характер $\gamma \in R$ такой, что $\gamma(d_1) \neq \gamma(d_2)$. Таким образом, для существования $d = d_1 - d_2$

с ограничением $\bigl|\arg(\gamma(d))\bigr| < \eta_\gamma$ достаточно, чтобы количество смежных классов по G_1 превосходило $\prod\limits_{\gamma\in R}(1+\lfloor 2\pi/\eta_\gamma\rfloor)$, т. е.

$$\bigl|G/G_1\bigr| > \prod_{\gamma\in R}\left(1+L\max\left(\frac{2}{\varepsilon}, 2\pi\sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{6\delta n}},\dots,2\pi\sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{6\delta n}}\right)\right).$$

Нетрудно убедиться, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\prod_{\gamma\in R}&\left(1+L\max\left(\frac{2}{\varepsilon}, 2\pi\sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{6\delta n}},\dots,2\pi\sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{6\delta n}}\right)\right)\\ &\leqslant \prod_{\gamma\in R}\left(1+(2\pi/\sqrt{6})L\max\left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{\delta n}},\dots,\sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{\delta n}}\right)\right)\\ &\qquad\leqslant (4L)^{|R|}\prod_{\gamma\in R}\max\left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{\delta n}},\dots,\sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{\delta n}}\right).\end{aligned}$$

Заметим, что переход

$$\begin{aligned}\prod_{\gamma\in R}&\left(1+(2\pi/\sqrt{6})L\max\left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{\delta n}},\dots,\sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{\delta n}}\right)\right)\\ &\qquad\leqslant (4L)^{|R|}\prod_{\gamma\in R}\max\left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{\delta n}},\dots,\sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{\delta n}}\right)\end{aligned}$$

справедлив, так как $\max\bigl(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{\delta n}},\dots,\sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{\delta n}}\bigr) > 2$ и для всех $\gamma\in R$ верно неравенство

$$\begin{aligned}1+(2\pi/\sqrt{6})L\max&\left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{\delta n}},\dots,\sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{\delta n}}\right)\\ &\leqslant 4L\max\left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{\delta n}},\dots,\sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{\delta n}}\right).\end{aligned}$$

Из равенства Парсеваля получим

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}\bigl|\widehat{A}_i(\gamma)\bigr|^2 = n\sum_{x\in G}\bigl|A_i(x)\bigr|^2 = n\bigl|A_i\bigr| \leqslant n^2,\quad i=1,\dots,m,$$

откуда вытекает, что

$$\bigl|R\bigr| \leqslant 4\delta^{-2}. \tag{2}$$

Заметим, что для любого $i = 1, \ldots, m$ справедливо неравенство

$$\big|\widehat{A}_i(\gamma)\big| = \Big|\sum_{x \in A_i} \gamma(x)\Big| \leqslant \sum_{x \in A_i} \big|\gamma(x)\big| = \big|A_i\big| \leqslant n, \tag{3}$$

а при $x \geqslant 1$ и $y \geqslant e^{1/e}$ имеет место

$$\max(x, y) \leqslant y^x. \tag{4}$$

Из неравенств (2)–(4) получаем

$$\begin{aligned}
(4L)^{|R|} \prod_{\gamma \in R} \max\left(\frac{1}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{|\widehat{A}_1(\gamma)|}{\delta n}}, \ldots, \sqrt{\frac{|\widehat{A}_m(\gamma)|}{\delta n}}\right) \\
\leqslant (4L)^{4\delta^{-2}} \left(\prod_{\gamma \in R} \max\left(\frac{1}{\varepsilon^2}, \frac{\big|\widehat{A}_1(\gamma)\big|}{\delta n}, \ldots, \frac{\big|\widehat{A}_m(\gamma)\big|}{\delta n}\right)\right)^{1/2} \\
\leqslant \big(4L\big)^{4\delta^{-2}} \big(\varepsilon^{-2}\big)^{(2\delta n)^{-1} \sum\limits_{\gamma \in R} \max(|\widehat{A}_1(\gamma)|, \ldots, |\widehat{A}_m(\gamma)|)} \\
\leqslant \big(4L\big)^{4\delta^{-2}} \big(\varepsilon^{-2}\big)^{(2\delta n)^{-1} n |R|} \leqslant \big(4L\big)^{4\delta^{-2}} \varepsilon^{-4\delta^{-3}} \leqslant \big(4L/\varepsilon\big)^{4\delta^{-3}} \\
< \frac{n}{L'} \leqslant \big|G/G_1\big|.
\end{aligned}$$

Итак, существование подмножества $P \subseteq G$, удовлетворяющего требованиям пп. (i) и (ii), доказано. Лемма 4 доказана.

Лемма 5 (гранулирование)**.** *Пусть n — достаточно большое натуральное число, G — абелева группа порядка n, k, l — натуральные числа, $k + l \geqslant 3$, $(A_1, \ldots, A_{k+l}) \in S_{k,l}(G)$, $0 < \varepsilon < 1/2$, L и L' — положительные числа, удовлетворяющие неравенству*

$$n > L' \, (4L/\varepsilon)^{(k+l)^3 4^{3(k+l)+1} \varepsilon^{-3(k+l+1)}}.$$

Тогда существуют подмножества $A'_1, \ldots, A'_{k+l}$ группы G такие, что

(i) *$A'_1, \ldots, A'_{k+l}$ — либо L-гранулы типа прогрессии, либо L'-гранулы типа смежного класса;*

(ii) *$\big|A_1 \setminus A'_1\big| \leqslant \varepsilon n, \ldots, \big|A_{k+l} \setminus A'_{k+l}\big| \leqslant \varepsilon n;$*

(iii) *$(A'_1, \ldots, A'_{k+l})$ содержит не более εn^{k+l-1} решений уравнения* (1).

Доказательство. Построим множество P согласно лемме 4 при $\delta = \varepsilon^{k+l+1}(k+l)^{-1} 4^{-(k+l)}$. Так как P — подгруппа или прогрессия, симметричная относительно 0, то $g(\gamma) = |P|^{-1} \sum\limits_{p \in P} \gamma(p)$ есть вещественное число из отрезка $[-1, 1]$. Построим множества $A'_1, \ldots, A'_{k+l}$. Рассмотрим два случая.

1. Если P — подгруппа, то в качестве A_i' возьмём объединение смежных классов G по P, содержащих не менее $\varepsilon|P|$ элементов множества A_i, $i=1,\dots,k+l$. Тогда

$$\bigl|A_1\setminus A_1'\bigr|,\dots,\bigl|A_{k+l}\setminus A_{k+l}'\bigr|\leqslant\varepsilon|P|\cdot\frac{n}{|P|}=\varepsilon n.$$

2. Если P — прогрессия с разностью d, то рассмотрим структуру гранул типа прогрессии с разностью d и в качестве A_i' возьмём объединение прогрессий, содержащих не менее $\varepsilon L/2$ элементов множества A_i, $i=1,\dots,k+l$. Отметим, что не более чем $nL/\operatorname{ord}(d)$ элементов из «остаточных» множеств не входят ни в одну из гранул. С учётом того, что $\operatorname{ord}(d)\geqslant 2L/\varepsilon$, получим

$$\bigl|A_1\setminus A_1'\bigr|,\dots,\bigl|A_{k+l}\setminus A_{k+l}'\bigr|\leqslant\frac{\varepsilon L}{2}\cdot\frac{n}{L}+\frac{nL}{\operatorname{ord}(d)}\leqslant\varepsilon n.$$

Пп. (i) и (ii) леммы выполнены в обоих случаях. Докажем п. (iii). Рассмотрим функции

$$a_i(x)=\bigl|P\bigr|^{-1}\bigl|A_i\cap(P+x)\bigr|,\quad i=1,\dots,k+l.$$

Заметим, что равенство

$$\sum_{x\in G}|A_i\cap(P+x)|\gamma(x)=\sum_{c\in A_i}\sum_{p\in P}\gamma(c-p)\tag{5}$$

справедливо, так как $|A_i\cap(P+x)|$ равно количеству пар $(c,p)\in A_i\times P$ таких, что $x=c-p$. Нетрудно видеть, что для преобразования Фурье функций $a_i(x)$ справедливо равенство $\widehat{a}_i(\gamma)=g(\gamma)\widehat{A}_i(\gamma)$, $i=1,\dots,k+l$. Действительно, с учётом того, что $P=-P$, из равенства (5) следует, что

$$\begin{aligned}\widehat{a}_i(\gamma)&=\sum_{x\in G}a_i(x)\gamma(x)=\frac{1}{|P|}\sum_{x\in G}|A_i\cap(P+x)|\gamma(x)\\&=\frac{1}{|P|}\sum_{c\in A_i}\sum_{p\in P}\gamma(c-p)=\frac{1}{|P|}\Bigl(\sum_{c\in A_i}\gamma(c)\Bigr)\Bigl(\sum_{p\in P}\gamma(-p)\Bigr)\\&=\frac{1}{|P|}\Bigl(\sum_{c\in A_i}\gamma(c)\Bigr)\Bigl(\sum_{p\in P}\gamma(p)\Bigr)=g(\gamma)\widehat{A}_i(\gamma).\end{aligned}$$

Так как $g(\gamma)$ вещественное число, то $\overline{\widehat{a}_i(\gamma)}=g(\gamma)\overline{\widehat{A}_i(\gamma)}$, $i=1,\dots,k+l$. Рассмотрим два случая: $x\in A_i'$ и $x\notin A_i'$, $i=1,\dots,k+l$. Пусть $x\in A_i'$. Если P — подгруппа, то $x+P$ содержит не менее $\varepsilon|P|$ элементов множества A_i, а если P — прогрессия, то $x+P$ содержит гранулу, включающую x, поэтому $|(x+P)\cap A_i|\geqslant\varepsilon|P|/4$. Во втором случае, если $x\notin A_i'$,

то $a_i(x) \geqslant 0 = \varepsilon A_i'(x)/4$. Таким образом, получаем, что

$$a_i(x) \geqslant \varepsilon/4 = \varepsilon A_i'(x)/4 \quad \text{для всех } x \in G.$$

Для любых $\gamma \in \Gamma$ и $i = 1, \dots, k+l$ имеем

$$\overline{\widehat{A}_i(\gamma)} = \overline{\sum_{x\in G} A_i(x)\gamma(x)} = \overline{\sum_{x\in A_i} \gamma(x)} = \sum_{x\in A_i} \overline{\gamma(x)}$$
$$= \sum_{x\in A_i} \gamma(-x) = \sum_{x\in -A_i} \gamma(x) = \sum_{x\in -A_i} -A_i(x)\gamma(x) = -\widehat{A}_i(\gamma).$$

Нетрудно убедиться, что для любых $i, j \in \{1, \dots, k+l\}$ ввиду того, что $\overline{\widehat{A}_i(\gamma)} = -\widehat{A}_i(\gamma)$, имеет место

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \widehat{A}_i(\gamma)\widehat{A}_j(\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \overline{-\widehat{A}_i(\gamma)}\widehat{A}_j(\gamma) = n\sum_{x\in G} \overline{-A_i(x)}A_j(x) \leqslant n^2, \tag{6}$$

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \widehat{A}_i(\gamma)\overline{\widehat{A}_j(\gamma)} = n\sum_{x\in G} A_i(x)\overline{A_j(x)} \leqslant n^2. \tag{7}$$

Заметим также, что для любых $\gamma \in \Gamma$ и натурального t справедливо неравенство

$$1 - (g(\gamma))^t \leqslant t(1 - g(\gamma)). \tag{8}$$

Несложно видеть, что

$$|\widehat{A}_i(\gamma)| = \Big|\sum_{x\in A_i} \gamma(x)\Big| \leqslant \sum_{x\in A_i} |\gamma(x)| = |A_i| \leqslant n, \quad i = 1, \dots, k+l. \tag{9}$$

Для всех $i = 1, \dots, k+l$ справедливы также неравенства

$$|\overline{\widehat{A}_i(\gamma)}| \leqslant n. \tag{10}$$

Таким образом, из леммы 3 и неравенств (6)–(10) в силу того, что $(A_1, \dots, A_{k+l}) \in S_{k,l}(G)$, получаем число решений уравнения (1) в $(A_1', \dots, A_{k+l}')$, равное

$$\sum_{\substack{x_1+\dots+x_k\\ =x_{k+1}+\dots+x_{k+l}}} A_1'(x_1)\dots A_{k+l}'(x_{k+l})$$
$$\leqslant \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \sum_{\substack{x_1+\dots+x_k\\ =x_{k+1}+\dots+x_{k+l}}} a_1(x_1)\dots a_{k+l}(x_{k+l})$$
$$= \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}} \sum_{\substack{x_1+\dots+x_k\\ =x_{k+1}+\dots+x_{k+l}}} (a_1(x_1)\dots a_{k+l}(x_{k+l}) - A_1(x_1)\dots A_{k+l}(x_{k+l}))$$

$$= \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}n}\sum_{\gamma\in\Gamma}(\widehat{a}_1(\gamma)\ldots\widehat{a}_k(\gamma)\overline{\widehat{a}_{k+1}(\gamma)}\ldots\overline{\widehat{a}_{k+l}(\gamma)}$$

$$-\widehat{A}_1(\gamma)\ldots\widehat{A}_k(\gamma)\overline{\widehat{A}_{k+1}(\gamma)}\ldots\overline{\widehat{A}_{k+l}(\gamma)})$$

$$= \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}n}\sum_{\gamma\in\Gamma}\widehat{A}_1(\gamma)\ldots\widehat{A}_k(\gamma)\overline{\widehat{A}_{k+1}(\gamma)}\ldots\overline{\widehat{A}_{k+l}(\gamma)}((g(\gamma))^{k+l}-1)$$

$$\leqslant \frac{4^{k+l}}{\varepsilon^{k+l}n}\cdot\max_{\gamma\in\Gamma}|\widehat{A}_4(\gamma)|\ldots|\widehat{A}_k(\gamma)||\overline{\widehat{A}_{k+1}(\gamma)}|\ldots|\overline{\widehat{A}_{k+l}(\gamma)}|$$

$$\times\max_{\gamma\in\Gamma}|\widehat{A}_1(\gamma)||1-(g(\gamma))^{k+l}|\cdot\sum_{\gamma\in\Gamma}\widehat{A}_2(\gamma)\widehat{A}_3(\gamma)$$

$$\leqslant \frac{4^{k+l}(k+l)}{\varepsilon^{k+l}n}\cdot n^{k+l-3}\cdot\max_{\gamma\in\Gamma}|\widehat{A}_1(\gamma)||1-g(\gamma)|\cdot n^2$$

$$\leqslant \frac{4^{k+l}(k+l)}{\varepsilon^{k+l}}\cdot n^{k+l-2}\cdot\delta n=\varepsilon n^{k+l-1}.$$

Примечание. При $k=2$ и $l=1$ (без ограничения общности предположим, что $k\geqslant l$) выражение $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}\widehat{A}_2(\gamma)\widehat{A}_3(\gamma)$ в неравенствах можно заменить выражением $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}\widehat{A}_2(\gamma)\overline{\widehat{A}_3(\gamma)}$. В силу неравенств (6), (7) оба выражения ограничены сверху величиной n^2. Лемма 5 доказана.

2. Число наборов, (k,l)-свободных от решений, в отрезке натуральных чисел

В следующей теореме доказывается существование семейства наборов гранул.

Теорема 4. *Пусть n — достаточно большое натуральное число, k,l — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условиям $k+l\geqslant 3$ и $k\geqslant l$. Тогда существует семейство $\mathcal{F}$ наборов $(F_1,\ldots,F_{k+l})$ подмножеств отрезка натуральных чисел $[1,n]$, удовлетворяющее условиям*

(i) $\log|\mathcal{F}|\leqslant 2(k+l)(kn+1)(k+l-1)^{-1/2}(\log(kn+1))^{-(6(k+l)+8)^{-1}}$;

(ii) *для каждого $(A_1,\ldots,A_{k+l})\in S_{k,l}([1,n])$ существует набор $(F_1,\ldots,F_{k+l})\in\mathcal{F}$ такой, что $A_1\subseteq F_1$, …, $A_{k+l}\subseteq F_{k+l}$;*

(iii) *всякий набор $(F_1,\ldots,F_{k+l})\in\mathcal{F}$ содержит не более $(kn+1)^{k+l-1}\times(\log(kn+1))^{-(3(k+l)+4)^{-1}}$ решений уравнения (1).*

Доказательство. Пусть $\mathbb{Z}_m$ — циклическая группа порядка $m=kn+1$. Положим

$$\mathcal{H}=\{(A_1\cap[1,n],\ldots,A_{k+l}\cap[1,n])\mid(A_1,\ldots,A_{k+l})\in S_{k,l}(\mathbb{Z}_m)\}.$$

Нетрудно убедиться, что $S_{k,l}([1,n]) = \mathcal{H} \subseteq S_{k,l}(\mathbb{Z}_m)$. Положим $L = L' = \lfloor \log m \rfloor$ и

$$\varepsilon = (k+l+1)^{-1}(\log m)^{-(3(k+l)+4)^{-1}}.$$

Несложно видеть, что при достаточно большом m такой выбор параметров удовлетворяет условию леммы 5 (где в качестве G берём $\mathbb{Z}_m$). Таким образом, для каждого набора $(A_1 \ldots, A_{k+l}) \in \mathcal{H}$, применяя лемму 5, построим набор множеств $(A'_1 \ldots, A'_{k+l})$. Положим

$$\mathcal{F} = \{(A_1 \cup A'_1, \ldots, A_{k+l} \cup A'_{k+l}) \mid (A_1 \ldots, A_{k+l}) \in \mathcal{H}\}.$$

Тогда п. (ii) выполнен автоматически. Отсюда в силу п. (ii) леммы 5 вытекает, что мощность семейства $\mathcal{F}$ не превосходит количества наборов $(F_1 \ldots, F_{k+l})$ таких, что для всех $i = 1, \ldots, k+l$ множество F_i является объединением L-гранулы с некоторым подмножеством группы Z_m мощности не более εm. Таким образом, в силу лемм 1 и 2 имеем

$$\log|\mathcal{F}| \leqslant (k+l)(3m/L + m\sqrt{\varepsilon}),$$

что при достаточно большом m не превосходит числа

$$2(k+l)m\sqrt{\varepsilon} = 2(k+l)(kn+1)(k+l-1)^{-1/2}(\log(kn+1))^{-(6(k+l)+8)^{-1}}.$$

П. (i) выполнен. Несложно убедиться, что при добавлении элемента в одно из множеств набора $(F_1, \ldots, F_{k+l}) \in \mathcal{F}$ в нём может образоваться не более чем m^{k+l-2} новых решений уравнения (1). Отсюда в силу п. (iii) леммы 5 получаем, что в каждом наборе $(F_1, \ldots, F_{k+l}) \in \mathcal{F}$ не более чем

$$\varepsilon m^{k+l-1} + \varepsilon m \cdot (k+l)m^{k+l-2} = (kn+1)^{k+l-1}(\log(kn+1))^{-(3(k+l)+4)^{-1}}$$

решений уравнения (1). Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности предположим, что $k \geqslant l$. Пусть $\mathbb{Z}_m$ — циклическая группа порядка $m = kn+1$. Из теоремы 4 следует, что существует семейство $\mathcal{F}$ наборов подмножеств (гранул) отрезка натуральных чисел $[1,n]$, удовлетворяющее условиям пп. (i)–(iii). Пусть $(F_1, \ldots, F_{k+l}) \in \mathcal{F}$. Зафиксируем $(F_1, \ldots, F_{k+l})$ и применим теорему 3 для

$$A_1 = F_1, \ \ldots, \ A_k = F_k, \ A_{k+1} = -F_{k+1}, \ \ldots, \ A_{k+l} = -F_{k+l},$$

подразумевая здесь равенства подмножеств группы $\mathbb{Z}_m$.

Получаем, что существуют $F'_1 \subseteq F_1, \ \ldots, \ F'_{k+l} \subseteq F_{k+l}$ такие, что $|F_i \setminus F'_i| = \overline{o}(m)$, $i = 1, \ldots, k+l$, и $(F'_1, \ldots, F'_{k+l}) \in S_{k,l}([1,n])$. Набор $(Q_1, \ldots, Q_{k+l})$ назовём *поднабором* набора $(W_1, \ldots, W_{k+l})$, если имеет место $Q_1 \subseteq W_1, \ \ldots, \ Q_{k+l} \subseteq W_{k+l}$. Отсюда и из того, что $\log|\mathcal{F}| = \overline{o}(n)$ (п. (i) теоремы 4) и $\overline{o}(m) = \overline{o}(n)$, получаем, что число поднаборов всех наборов семейства $\mathcal{F}$ не превосходит $2^{|F'_1 \cup \cdots \cup F'_{k+l}| + \overline{o}(n)}$. Из п. (ii) теоремы 4

следует, что любой набор из $S_{k,l}([1, n])$ является поднабором некоторого набора из семейства $\mathcal{F}$. Откуда вытекает, что

$$\log |S_{k,l}([1, n])| = \lambda_{k,l}([1, n]) + \bar{o}(n)$$

при $n \to \infty$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Сапоженко А. А.** О числе множеств, свободных от сумм, в абелевых группах // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2002. Т. 4. С. 14–17.
2. **Сапоженко А. А.** Гипотеза Камерона — Эрдёша // Докл. Акад. наук. 2003. Т. 393, № 6. С. 749–752.
3. **Сапоженко А. А.** Решение проблемы Камерона — Эрдёша для групп простого порядка // Вычисл. математика и мат. физика. 2009. Т. 49, № 8. С. 1503–1509.
4. **Саргсян В. Г.** Асимптотика логарифма числа множеств, (k, l)-свободных от сумм, в абелевой группе // Дискрет. математика. 2014. Т. 26, № 4. С. 91–99.
5. **Alon N.** Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of abelian groups // Isr. J. Math. 1991. Vol. 73. P. 247–256.
6. **Bilu Yu.** Sum-free sets and related sets // Combinatorica. 1998. Vol. 18, No. 4. P. 449–459.
7. **Calkin N. J.** On the number of sum-free set // Bull. Lond. Math. Soc. 1990. Vol. 22. P. 140–144.
8. **Calkin N. J., Taylor A. C.** Counting sets of integers, no k of which sum to another // J. Number Theory. 1996. Vol. 57. P. 323–327.
9. **Calkin N. J., Thomson J. M.** Counting generalized sum-free sets // J. Number Theory. 1998. Vol. 68. P. 151–160.
10. **Cameron P. J., Erdös P.** On the number of sets of integers with various properties // Number Theory (Proc. 1st Conf. Can. Number Theory Assoc., (Banff, Canada, April 17–27, 1988)). Berlin: de Gruyter, 1990. P. 61–79.
11. **Green B.** The Cameron–Erdös conjecture // Bull. Lond. Math. Soc. 2004. Vol. 36, No. 6. P. 769–778.
12. **Green B.** A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups // Geom. Funct. Anal. 2005. Vol. 15, No. 2. P. 340–376.
13. **Green B., Ruzsa I.** Sum-free sets in abelian groups // Isr. J. Math. 2005. Vol. 147. P. 157–188.
14. **Lev V. F.** Sharp estimates for the number of sum-free sets // J. Reine Angew. Math. 2003. Vol. 555. P. 1–25.
15. **Lev V. F., Łuczak T., Schoen T.** Sum-free sets in abelian groups // Isr. J. Math. 2001. Vol. 125. P. 347–367.
16. **Lev V. F., Schoen T.** Cameron–Erdös modulo a prime // Finite Fields Appl. 2002. Vol. 8, No. 1. P. 108–119.

17. **Schoen T.** A note on the number of (k, l)-sum-free sets // Electron. J. Comb. 2000. Vol. 17, No. 1. P. 1–8.

Сапоженко Александр Антонович
Саргсян Ваге Гнелович

Статья поступила
20 февраля 2018 г.

После доработки —
10 декабря 2018 г.

Принята к публикации
27 февраля 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2019. Vol. 26, No. 2. P. 129–144

UDC 519.1 DOI 10.33048/daio.2019.26.610

ASYMPTOTICS FOR THE LOGARITHM OF THE NUMBER OF (k,l)-SOLUTION-FREE COLLECTIONS IN AN INTERVAL OF NATURALS

A. A. Sapozhenko[a] and *V. G. Sargsyan*[b]

Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia

E-mail: [a]`sapozhenko@mail.ru`, [b]`vahe_sargsyan@ymail.com`

Abstract. A collection $(A_1,\dots,A_{k+l})$ of subsets of an interval $[1,n]$ of naturals is called (k,l)-*solution-free* if there is no set $(a_1,\dots,a_{k+l}) \in A_1 \times \dots \times A_{k+l}$ that is a solution to the equation $x_1+\dots+x_k = x_{k+1}+\dots+x_{k+l}$. We obtain the asymptotics for the logarithm of the number of sets (k,l)-free of solutions in an interval $[1,n]$ of naturals. Bibliogr. 17.

Keywords: set, group, coset, characteristic function, progression.

REFERENCES

1. A. A. Sapozhenko, On the number of sum-free sets in Abelian groups, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1,* **4**, 14–17, 2002 [Russian].

2. A. A. Sapozhenko, The Cameron–Erdös conjecture, *Dokl. Akad. Nauk,* **393**, No. 6, 749–752, 2003 [Russian].

3. A. A. Sapozhenko, Solution of the Cameron–Erdös problem for groups of prime order, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.,* **49**, No. 8, 1503–1509, 2009 [Russian]. Translated in *Comput. Math. Math. Phys.,* **49**, No. 6, 1435–1441, 2009.

4. V. G. Sargsyan, Asymptotics of the logarithm of the number of (k,l)-sum-free sets in an Abelian group, *Diskretn. Mat.,* **26**, No. 1, 91–99, 2014 [Russian]. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **25**, No. 2, 93–99, 2014.

5. N. Alon, Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of Abelian groups, *Isr. J. Math.,* **73**, 247–256, 1991.

6. Yu. Bilu, Sum-free sets and related sets, *Combinatorica,* **18**, No. 4, 449–459, 1998.

7. N. J Calkin, On the number of sum-free set, *Bull. Lond. Math. Soc.,* **22**, 140–144, 1990.

8. N. J. Calkin and **A. C. Taylor,** Counting sets of integers, no k of which sum to another, *J. Number Theory,* **57**, 323–327, 1996.

9. N. J. Calkin and **J. M. Thomson,** Counting generalized sum-free sets, *J. Number Theory,* **68**, 151–160, 1998.

10. P. J Cameron and **P. Erdös,** On the number of sets of integers with various properties, in *Number Theory* (Proc. 1st Conf. Can. Number Theory Assoc., Banff, Canada, Apr. 17–27, 1988), pp. 61–79, Berlin: de Gruyter, 1990.

11. B. Green, The Cameron–Erdös conjecture, *Bull. Lond. Math. Soc.,* **36**, No. 6, 769–778, 2004.

12. B. Green, A Szemerédi-type regularity lemma in Abelian groups, *Geom. Funct. Anal.,* **15**, No. 2, 340–376, 2005.

13. B. Green and **I. Z. Ruzsa,** Sum-free sets in Abelian groups, *Isr. J. Math.,* **147**, 157–188, 2005.

14. V. F. Lev, Sharp estimates for the number of sum-free sets, *J. Reine Angew. Math.,* **555**, 1–25, 2003.

15. V. F. Lev, T. Łuczak, and **T. Schoen,** Sum-free sets in Abelian groups, *Isr. J. Math.,* **125**, 347–367, 2001.

16. V. F. Lev and **T. Schoen,** Cameron–Erdös modulo a prime, *Finite Fields Appl.,* **8**, No. 1, 108–119, 2002.

17. T. Schoen, A note on the number of (k, l)-sum-free sets, *Electron. J. Comb.,* **17**, No. 1, 1–8, 2000.

Alexandr A. Sapozhenko
Vahe G. Sargsyan

Received February 20, 2018
Revised December 10, 2018
Accepted February 27, 2019