

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ 3/5-ПРИБЛИЖЁННЫЙ АЛГОРИТМ
ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ
О ТРЁХ КОММИВОЯЖЁРАХ НА МАКСИМУМ^{*)}

А. Н. Глебов^{1,2,a}, С. Г. Токтохоева^{2,b}

¹Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: ^aangle@math.nsc.ru, ^bs.toktokhoeva@ya.ru

Аннотация. Разработан первый полиномиальный приближённый алгоритм с гарантированной оценкой точности для несимметричного случая задачи о трёх коммивояжёрах на максимум, где требуется найти три рёберно непересекающихся гамильтоновых цикла максимального суммарного веса в полном взвешенном ориентированном графе. Для полученного алгоритма обоснована гарантированная оценка точности $\frac{3}{5}$ и кубическая оценка временной сложности. Ил. 18, библиогр. 27.

Ключевые слова: гамильтонов цикл, задача коммивояжёра, задача нескольких коммивояжёров, приближённый алгоритм, гарантированная оценка точности.

Введение

Задача коммивояжёра TSP (Travelling Salesman Problem) на протяжении многих лет является одной из наиболее актуальных и активно исследуемых проблем комбинаторной оптимизации. В последние 20–30 лет всё большее внимание специалистов привлекают различные модификации и обобщения задачи коммивояжёра. К их числу относится задача m -PSP об m коммивояжёрах (m -Peripatetic Salesman Problem), в которой требуется найти m непересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов с минимальным (m -PSP-min) или максимальным (m -PSP-max) суммарным

^{*)}Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18–01–00353, 18–01–00747).

весом рёбер в полном взвешенном графе. В зависимости от того, является входной граф простым или ориентированным, различают симметричный m -PSP и несимметричный m -APSP варианты задачи.

Проблема m -PSP была впервые поставлена Краупом в [25] и с тех пор исследовалась в различных постановках: на детерминированных и случайных входных данных, для произвольной [1, 9], метрической [2, 4, 20] и евклидовой [3, 5] весовых функций, а также для случаев, когда веса рёбер графа принадлежат заданному числовому интервалу или конечному множеству значений [6–8, 10]. В статьях [8, 10] и в дипломной работе А. В. Гордеевой (2010 г.) были построены приближённые алгоритмы для специального варианта задачи, когда весовые функции для искоемых гамильтоновых циклов различны.

Актуальность исследования проблемы m -PSP обусловлена её применениями в различных прикладных задачах, к числу которых относится задача о выборе маршрутов обходчиков [27], когда для группы из m сторожей требуется найти систему замкнутых маршрутов, не имеющих общих участков, чтобы избежать дублирования и повысить безопасность охраняемой территории. Де Корт [16] указывает на постановки задач из области сетевого дизайна, когда для повышения надёжности и устойчивости связи внутри сети требуется покрыть все её узлы системой непересекающихся цикловых соединений. Также он упоминает о применениях 2-PSP в задачах теории расписаний с элементами маршрутизации, когда каждая работа должна выполняться на одной и той же машине дважды, но технологические ограничения системы не позволяют оба раза выполнять работы в одном и том же порядке.

В [13] указаны несколько полиномиально разрешимых случаев задачи 2-PSP. Де Корт [14–16] предложил верхние и нижние оценки для применения метода ветвей и границ в задаче 2-PSP и показал, что задача отыскания двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов NP-трудна. Отсюда следует NP-трудность задачи 2-PSP с одной весовой функцией как на минимум, так и на максимум. Проблема остаётся NP-трудной и в случае, когда для различных гамильтоновых циклов используются различные весовые функции [4].

Как следствие, усилия большинства специалистов направлены на выявление полиномиально разрешимых подслучаев задач TSP и m -PSP и построение полиномиальных приближённых алгоритмов для этих задач. Обзор полученных в данном направлении результатов можно найти в [19, 21]. Большая часть этих результатов относится к симметричному случаю задачи m -PSP. В частности, для симметричной задачи 2-PSP-тах в [1, 9] были разработаны полиномиальные алгоритмы с гарантированными оценками точности $3/4$ и $7/9$. В [6] построена серия полиномиальных приближённых алгоритмов для варианта задачи 2-PSP-min,

когда весовая функция принимает значения 1 и 2 и является общей для двух гамильтоновых циклов. Наилучший из этих алгоритмов имеет оценку точности $6/5$. В [8,10] та же задача с весами 1 и 2 исследована в случае, когда весовые функции циклов различны. Для этого варианта задачи получены полиномиальные алгоритмы с оценками $7/5$ [8] и $4/3$ [10]. Для метрической задачи m -PSP-max в [20] разработан полиномиальный алгоритм с оценкой точности $5/6$, а для евклидовой m -PSP-max в [3] получен асимптотически точный полиномиальный алгоритм.

Возникновение новых задач маршрутизации, в частности, задач о распределении транспортных потоков в сетях, приводит к тому, что всё более актуальным становится изучение несимметричной задачи m -APSP. Заметим, что в случае $m \geq 2$ данная задача допускает две различные интерпретации, при одной из которых в гамильтоновых циклах допускаются встречные дуги (т. е. дуга (x, y) может принадлежать одному циклу, а дуга (y, x) — другому), а при другой интерпретации такие ситуации исключаются. Для приложений более актуален второй вариант задачи, однако разработка приближённых алгоритмов для этого случая сопряжена со значительными трудностями, так как малоприменимы оказываются полиномиальные алгоритмы для нахождения подграфов экстремального веса с заданными степенями вершин. Ввиду этого обстоятельства практически все известные приближённые алгоритмы с гарантированными оценками точности для задачи m -APSP, включая алгоритм для 2-APSP-max из [11] и алгоритм из настоящей статьи, разработаны для случая, когда гамильтоновы циклы могут иметь встречные дуги.

В принципе, построение приближённых алгоритмов для несимметричных задач ATSP и m -APSP вызывает гораздо большие трудности, чем разработка аналогичных алгоритмов в симметричном случае. Так, один из лучших приближённых алгоритмов для задачи ATSP-max [24] имеет гарантированную оценку точности $2/3$, в то время как для симметричной TSP-max ещё с 1984 г. известен полиномиальный алгоритм с оценкой $3/4$ [12], а в более современных статьях разрабатываются алгоритмы с лучшими оценками точности, такими как $25/33$ [22], $7/9$ [26] и $4/5$ [17]. Отметим, что приближённый алгоритм для задачи ATSP-max в [24] носит некомбинаторный характер и основан на изощрённом применении методов линейного программирования. В [11] для задачи 2-APSP-max построен полиномиальный алгоритм, который также имеет оценку точности $2/3$, но основан на комбинаторных подходах.

В настоящей работе впервые разработан полиномиальный приближённый алгоритм для задачи 3-APSP-max, имеющий гарантированную оценку точности $3/5$ и кубическую оценку временной сложности. Как и алгоритм в [11], данный алгоритм основан на построении специальной

раскраски рёбер орграфа и последующем выделении трёх рёберно непересекающихся частичных туров (наборов цепей) достаточно большого веса, которые достраиваются до гамильтоновых циклов.

1. Основные определения и результат работы

Далее в работе рассматривается полный взвешенный ориентированный n -вершинный граф $G = G(V, E, w)$ (входной граф задачи 3-APSP-max) с множеством вершин V , множеством дуг E и неотрицательной весовой функцией дуг $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Для каждого подграфа G' орграфа G через $w(G')$ обозначается суммарный вес дуг в G' .

Несимметричная задача о трёх коммивояжёрах на максимум (3-APSP-max) заключается в нахождении в орграфе G трёх ориентированных гамильтоновых циклов H_1, H_2, H_3 максимального суммарного веса, не имеющих общих дуг:

$$w(H_1) + w(H_2) + w(H_3) \rightarrow \max.$$

(При этом если цикл H_i содержит дугу (X, Y) , то допускается, что другой цикл H_j может содержать встречную дугу (Y, X) .) Через w^* обозначается вес оптимального решения задачи 3-APSP-max.

При построении приближённого решения задачи 3-APSP-max нам будут полезны следующие понятия. Для каждого подграфа G' орграфа G и каждой его вершины v зафиксируем следующие обозначения:

- $d^+(v)$ — *полустепень захода* (число входящих в v дуг орграфа G');
- $d^-(v)$ — *полустепень исхода* (число исходящих из v дуг орграфа G');
- $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$ — *степень вершины v в G'* .

Подграф G' орграфа G будем называть (k, k) -регулярным, если для каждой его вершины v выполняется равенство $d^+(v) = d^-(v) = k$. Обозначим через $G_{3,3}$ остовный $(3,3)$ -регулярный подграф максимального веса в G . Заметим, что $w(G_{3,3}) \geq w^*$. Справедливость этого неравенства следует из того, что объединение трёх гамильтоновых циклов из оптимального решения задачи 3-APSP-max является остовным $(3,3)$ -регулярным подграфом в G .

Ориентированным 2-фактором (или просто *2-фактором*) в орграфе G будем называть любой его остовный $(1,1)$ -регулярный подграф, т. е. набор из вершинно непересекающихся контуров (ориентированных циклов), покрывающих все вершины G . *Частичным туром* (или просто *туром*) в орграфе G (или в его подграфе G') будем называть набор из вершинно непересекающихся ориентированных цепей, покрывающих все вершины орграфа. Среди цепей тура могут быть одновершинные. Их будем называть *тривиальными* или *синглами*, а цепи, состоящие более

чем из одной вершины, — *нетривиальными*. Через $|T|$ и $p(T)$ обозначается число рёбер и число цепей в частичном туре T соответственно. Ясно, что для любого частичного тура T в орграфе G' выполняется равенство

$$|T| + p(T) = |V(G')|. \quad (1)$$

Заметим, что любой частичный тур T в орграфе G можно дополнить до гамильтонова цикла, добавляя дуги между концевыми вершинами цепей тура T .

Двудольной моделью орграфа G будем называть двудольный неориентированный граф D с долями $V = V(G)$ и V' , где V' — множество дубликатов всех вершин орграфа G , и $\{X, Y'\} \in E(D) \Leftrightarrow (X, Y) \in E(G)$.

Далее в статье приводится описание и анализ приближённого алгоритма $A_{3/5}$ для задачи 3-APSP-max. Основная идея алгоритма заключается в нахождении в остовном $(3, 3)$ -регулярном подграфе $G_{3,3}$ трёх рёберно непересекающихся частичных туров достаточно большого веса и в последующем замыкании этих туров в рёберно непересекающиеся гамильтоновы циклы в G . Для реализации этой идеи на стадии замыкания туров в гамильтоновы циклы требуется, чтобы число вершин орграфа было не меньше 21. При меньшем числе вершин предлагается использовать алгоритм полного перебора для отыскания оптимального решения задачи 3-APSP-max.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Представленный ниже алгоритм $A_{3/5}$ находит в полном взвешенном ориентированном графе $G = G(V, E, w)$ три рёберно непересекающихся гамильтоновых цикла H_1, H_2, H_3 , суммарный вес которых составляет не менее $3/5$ от веса оптимального решения задачи 3-APSP-max. Время работы алгоритма $A_{3/5}$ оценивается как $O(n^3)$, где n — число вершин графа G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 составляет содержание следующих пяти разделов статьи, в которых формулируется алгоритм $A_{3/5}$ и подробно описываются и анализируются составляющие его процедуры.

2. Описание алгоритма $A_{3/5}$ для задачи 3-APSP-max

Если $n < 21$, то при помощи алгоритма полного перебора находим в орграфе G три не пересекающихся по дугам гамильтоновых цикла H_1, H_2, H_3 , составляющих оптимальное решение задачи 3-APSP-max. Предположим, что $n \geq 21$.

ФАЗА 1. Построим двудольную модель D орграфа G . При помощи алгоритма Габова [18] за время $O(n^3)$ найдём в D остовный 3-регулярный подграф D_3 максимального веса. Выделим в G соответствующий ему

(3,3)-регулярный подграф $G_{3,3}$ максимального веса. Согласно сделанным выше замечаниям имеем $w(G_{3,3}) \geq w^*$.

ФАЗА 2. Выделим в $G_{3,3}$ все компоненты связности: K^1, K^2, \dots, K^l . Последовательно, для каждого $i = 1, 2, \dots, l$, построим в K^i три рёберно непересекающихся частичных тура $T_1(i), T_2(i), T_3(i)$ со следующими свойствами:

$$w(T_1(i)) + w(T_2(i)) + w(T_3(i)) \geq \frac{3}{5}w(K^i), \quad p(T_2(i)) \geq \frac{n_i}{6}, \quad p(T_3(i)) \geq \frac{n_i}{4},$$

где n_i — число вершин компоненты K^i .

Построение частичных туров в K^i производится по-разному, в зависимости от строения компоненты. Выделим следующие два случая.

СЛУЧАЙ 2.1. В орграфе K^i нет циклов длины 2 (т. е. K^i не содержит встречных дуг).

В этом случае сначала разбиваем множество дуг $E(K^i)$ на три ориентированных 2-фактора $F_1(i), F_2(i), F_3(i)$, используя процедуру «Факторизация(K)», описанную в разд. 3 статьи. Затем с помощью процедуры « $F \rightarrow T$ » из того же раздела для каждого $j = 1, 2, 3$ выделяем внутри 2-фактора $F_j(i)$ частичный тур $T_j(i)$, обладающий следующими свойствами:

$$w(T_j(i)) \geq \frac{3}{5}w(F_j(i)), \quad p(T_j(i)) \geq \frac{n_i}{4}.$$

СЛУЧАЙ 2.2. Компонента связности K^i содержит цикл длины 2.

В этом случае сначала разбиваем множество дуг $E(K^i)$ на пять частичных туров T'_1, T'_2, \dots, T'_5 , используя рекурсивную процедуру «Ациклическая 5-раскраска(K)», описанную в разд. 4. Упорядочим полученные туры по неубыванию числа цепей: $p(T'_1) \leq p(T'_2) \leq \dots \leq p(T'_5)$. Если выполнены неравенства $p(T'_2) \geq \frac{n_i}{6}$ и $p(T'_3) \geq \frac{n_i}{4}$, то выберем в качестве $T_1(i), T_2(i), T_3(i)$ три тура из T'_1, T'_2, \dots, T'_5 , имеющих наибольший вес. Пронумеруем туры $T_1(i), T_2(i), T_3(i)$ так, что

$$p(T_1(i)) \leq p(T_2(i)) \leq p(T_3(i)).$$

Если хотя бы одно из неравенств $p(T'_2) \geq \frac{n_i}{6}$ или $p(T'_3) \geq \frac{n_i}{4}$ не выполняется, то, используя процедуру «Выравнивание($T'_1-T'_5$)», описанную в разд. 5, перестроим туры T'_1, T'_2, \dots, T'_5 так, чтобы эти неравенства выполнялись. После этого определим туры $T_1(i), T_2(i), T_3(i)$ таким же образом, как описано выше.

После того как частичные туры $T_1(i), T_2(i), T_3(i)$ для всех компонент связности орграфа $G_{3,3}$ построены, определим рёберно непересекающиеся частичные туры T_1, T_2, T_3 в $G_{3,3}$, полагая $T_j = \bigcup_{i=1}^l T_j(i)$, $j = 1, 2, 3$.

Нетрудно убедиться, что выполняются неравенства:

$$w(T_1) + w(T_2) + w(T_3) \geq \frac{3}{5}w(G_{3,3}) \geq \frac{3}{5}w^*, \quad p(T_2) \geq \frac{n}{6}, \quad p(T_3) \geq \frac{n}{4}.$$

ФАЗА 3. Достроим полученные в фазе 2 частичные туры T_1, T_2, T_3 до рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, H_3 в G при помощи процедуры «Замыкание(T_1-T_3)», описанной в разд. 6. Указанная процедура при построении циклов H_1, H_2, H_3 использует все рёбра туров T_1, T_2, T_3 , что обеспечивает выполнение неравенства

$$w(H_1) + w(H_2) + w(H_3) \geq w(T_1) + w(T_2) + w(T_3) \geq \frac{3}{5}w^*.$$

Предъявляем набор гамильтоновых циклов H_1, H_2, H_3 в качестве искомого приближённого решения задачи 3-APSP-max.

3. Построение частичных туров в компонентах связности, не содержащих встречных дуг

В данном разделе описываются процедуры для построения ориентированных 2-факторов и частичных туров в компонентах связности орграфа $G_{3,3}$, не содержащих встречных дуг. В силу $(3, 3)$ -регулярности и отсутствия встречных дуг каждая такая компонента содержит не менее 7 вершин (для каждой вершины v все входящие и исходящие из неё дуги ведут в разные вершины, а значит, число соседей v равно 6).

Следующая процедура получает на входе связный $(3, 3)$ -регулярный орграф K с числом вершин $n \geq 7$, не содержащий встречных дуг (компоненту связности орграфа $G_{3,3}$), и за время $O(n^{3/2})$ разбивает множество его дуг на три ориентированных 2-фактора F_1, F_2, F_3 .

Факторизация(K). Рассмотрим двудольную модель орграфа K , т. е. соответствующую ему компоненту связности D^K в 3-регулярном двудольном графе D_3 , построенном в фазе 1 алгоритма. Разобьём множество рёбер графа D^K на три паросочетания. Это можно сделать с помощью алгоритма Хопкрофта и Карпа [23] за время $O(n^{3/2})$. В орграфе K найденным паросочетаниям соответствуют искомые рёберно непересекающиеся 2-факторы F_1, F_2, F_3 .

Следующая процедура получает на входе ориентированный 2-фактор F с числом вершин $n \geq 7$, не содержащий циклов длины 2, и за время $O(n)$ находит в нём частичный тур T , удовлетворяющий условиям $w(T) \geq \frac{3}{5}w(F)$ и $p(T) \geq \frac{n}{4}$.

Процедура $F \rightarrow T$. Раскрасим дуги 2-фактора F в три цвета следующим образом. Для каждого цикла, входящего в F , будем красить его дуги периодически в цвета 1, 2, 3 (за цветом 3 следует 1) в порядке

следования дуг по циклу. Каждый следующий цикл начинаем раскрашивать с цвета, следующего за тем, на котором завершилась раскраска предыдущего цикла.

После завершения раскраски удалим из F все дуги того цвета, который имеет наименьший суммарный вес. Покажем, что оставшиеся дуги 2-фактора F образуют искомым частичный тур T , обладающий требуемыми свойствами. Действительно, из отсутствия в F циклов длины 2 и способа раскраски следует, что из каждого цикла в F удалена хотя бы одна дуга. Значит, T является частичным туром. Из минимальности веса рёбер удаляемого цвета следует, что

$$w(T) \geq \frac{2}{3}w(F) \geq \frac{3}{5}w(F).$$

Наконец, из способа раскраски вытекает, что число дуг каждого цвета, а значит, и число удалённых из F дуг, не меньше $\lfloor \frac{|E(F)|}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Поскольку число цепей в T равно числу удалённых из F дуг, имеем $p(T) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Остается заметить, что в силу условия $n \geq 7$ выполнено неравенство $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \geq \frac{n}{4}$.

4. Построение ациклической 5-раскраски дуг

Данный раздел посвящён описанию ключевой для алгоритма $A_{3/5}$ процедуры «Ациклическая 5-раскраска», позволяющей разбить рёбра компоненты связности орграфа $G_{3,3}$, содержащей цикл длины 2, на пять частичных туров. Процедура носит рекурсивный характер. При её первом вызове на вход подаётся компонента связности K орграфа $G_{3,3}$, содержащая цикл длины 2. Однако в процессе работы (при последующих вызовах) процедура применяется уже к подграфам K , которые не являются $(3, 3)$ -регулярными и могут не содержать циклов длины 2. Поэтому в общем случае процедура «Ациклическая 5-раскраска», представленная ниже, в качестве входных данных получает связный n -вершинный орграф $K'(V', E')$ со следующими свойствами:

- (i) $(\forall v \in V') \quad d^+(v) \leq 3$ и $d^-(v) \leq 3$;
- (ii) K' содержит либо вершину степени не более 5, либо цикл длины 2.

Результатом работы процедуры является такая раскраска $\varphi: E(K') \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ дуг орграфа K' в пять цветов, что множество дуг каждого цвета порождает частичный тур в K' .

Ациклическая 5-раскраска(K'). Если K' содержит не более пяти дуг, то красим их в попарно различные цвета. Иначе рассмотрим следующие два случая.

СЛУЧАЙ А1. Орграф K' содержит 2-цикл (A, B, A) . Обозначим другие дуги, инцидентные вершинам A и B , через (C, A) , (D, A) , (A, F) ,

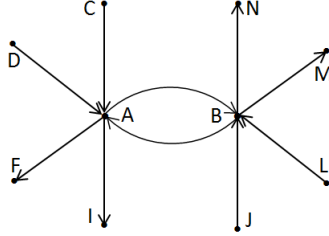


Рис. 1. 2-Цикл (A, B, A) и дуги, инцидентные вершинам A и B

(A, I) , (J, B) , (L, B) , (B, M) , (B, N) (рис. 1). Заметим, что некоторых из этих дуг может не существовать.

Удалим дуги (A, B) и (B, A) из орграфа K' . Применяя «Ациклическую 5-раскраску» к полученному орграфу (или к его компонентам связности), получаем 5-раскраску φ всех дуг орграфа K' за исключением дуг (A, B) и (B, A) . Обращение к этой процедуре корректно, так как условие (i) очевидным образом выполняется, а вершины A и B после удаления дуг (A, B) и (B, A) имеют степень не более 4, т. е. (ii) также выполняется. Если возможно, то продолжим раскраску φ на дуги (A, B) и (B, A) . Если же это невозможно, то предварительно перекрасим одну или несколько дуг, инцидентных вершинам A и B . Ввиду простоты случаев, не требующих предварительной перекраски, далее проанализируем только случаи, где такая перекраска требуется.

Подслучай А1.1. Дугу (A, B) невозможно окрасить ни в один из пяти цветов.

Для каждого цвета $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ возможны лишь следующие ситуации, когда дугу (A, B) нельзя окрасить в цвет α (назовём такие ситуации *запретами* для цвета α).

- При вершине A есть исходящая дуга цвета α (в этом случае цвет α назовём *исходящим из A*).
- При вершине B есть входящая дуга цвета α (α — *входящий в B* цвет).
- В K' есть цепь (B, \dots, A) цвета α (в этом случае цвет α назовём *цикловым* для дуги (A, B)).

Комбинируя варианты запретов, получаем в подслучае А1.1 следующие ситуации с непродолжаемой раскраской φ , требующие перекраски (здесь и далее перечисление вариантов раскраски производится с точностью до переобозначения цветов, симметрии между вершинами A и B и замены ориентации всех дуг орграфа на противоположную).

А1.1.1: Цвет 1 цикловой, цвета 2 и 3 исходящие из вершины A , цвета 4 и 5 входящие в вершину B .

А1.1.2: Цвета 1 и 2 цикловые, 3 и 4 исходящие из вершины A , цвет 5 входящий в вершину B .

Подслучай А1.2. Ни одну из дуг (A, B) и (B, A) нельзя окрасить ни в один из цветов 1, 2, 3, 4 (в этом случае для каждой из дуг (A, B) и (B, A) допустимым является лишь цвет 5, но при окрашивании обеих дуг этим цветом образуется одноцветный цикл длины 2).

Цвет $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ является запрещённым для обеих дуг (A, B) , (B, A) в следующих случаях:

- α — цикловой цвет для одной из дуг (A, B) или (B, A) ;
- α — *двусторонний входящий* цвет, т. е. в каждую из вершин A, B входит дуга цвета α ;
- α — *двусторонний исходящий* цвет, т. е. из каждой из вершин A, B исходит дуга цвета α ;
- α — *односторонний* цвет, т. е. либо при вершине A , либо при вершине B есть входящая и исходящая дуги цвета α .

Перебирая различные комбинации запретов для (A, B) и (B, A) на цвета 1, 2, 3, 4 и принимая во внимание соображения чётности, получаем следующие шесть случаев непродолжаемой раскраски в подслучае А1.2.

А1.2.1: Все цвета 1, 2, 3, 4 односторонние.

А1.2.2: Цвет 1 двусторонний входящий, цвет 2 двусторонний исходящий, цвета 3 и 4 односторонние.

А1.2.3: Цвета 1 и 2 двусторонние входящие, цвета 3 и 4 двусторонние исходящие.

А1.2.4: Цвета 1, 2 цикловые для дуг (A, B) и (B, A) соответственно, цвета 3, 4 односторонние.

А1.2.5: Цвета 1, 2 цикловые для дуг (A, B) и (B, A) соответственно, цвет 3 двусторонний входящий, цвет 4 двусторонний исходящий.

А1.2.6: Все цвета цикловые (по два для каждой из дуг (A, B) , (B, A)).

Перед тем как перейти к разбору случаев, введём следующее определение. Будем называть цвет $\alpha \in \{1, 2, \dots, 5\}$ *хорошим* для дуги (u, v) по отношению к вершине u (к вершине v), если при этой вершине нет исходящих (входящих) дуг цвета α . Заметим, что среди любых трёх цветов, отличных от цвета дуги (u, v) , найдётся как хороший цвет по отношению к вершине u , так и хороший цвет по отношению к v .

Разбор случаев с перекраской будем производить в удобном для нас порядке, не придерживаясь заданной выше нумерации.

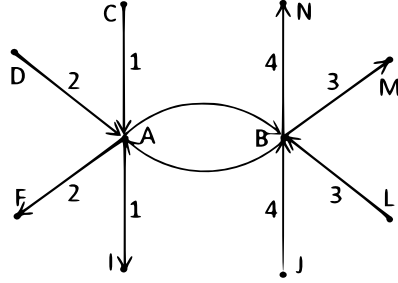


Рис. 2. A1.2.1

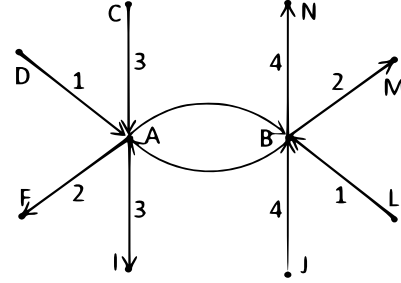


Рис. 3. A1.2.2

4.1. Разбор подслучаев случая A1.

A1.2.1. В этом подслучае имеем $\varphi(C, A) = \varphi(A, I) = 1$, $\varphi(D, A) = \varphi(A, F) = 2$, $\varphi(L, B) = \varphi(B, M) = 3$, $\varphi(J, B) = \varphi(B, N) = 4$ (рис. 2). Рассмотрим дугу (B, N) . Перекрашиваем её в какой-либо хороший для этой дуги по отношению к N цвет из множества $\{1, 2, 5\}$ (его существование следует из сделанного выше замечания). Затем полагаем $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 4$.

A1.2.2. $\varphi(D, A) = \varphi(L, B) = 1$, $\varphi(A, F) = \varphi(B, M) = 2$, $\varphi(C, A) = \varphi(A, I) = 3$, $\varphi(J, B) = \varphi(B, N) = 4$ (рис. 3). Если при вершине N есть входящие дуги цветов 3 и 5 и имеется цепь (N, \dots, L) , окрашенная в цвет 1, то перекрашиваем дугу (B, M) в хороший по отношению к вершине M цвет $\alpha \in \{1, 3, 5\}$ и совершаем раскраску: $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 2$. Иначе, если в вершину N одновременно не входят дуги цвета 3 и 5, то перекрасим дугу (B, N) в хороший по отношению к вершине N цвет $\beta \in \{1, 3, 5\}$ и положим $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 4$.

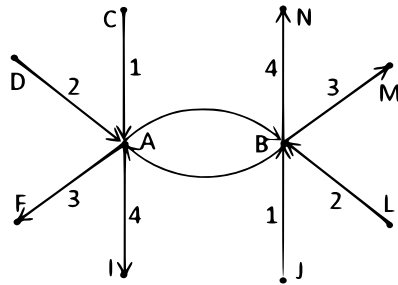


Рис. 4. A1.2.3

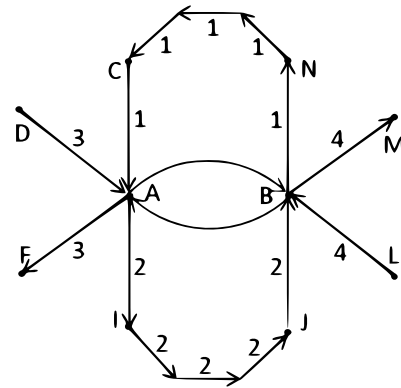


Рис. 5. A1.2.4

A1.2.3. $\varphi(C, A) = \varphi(J, B) = 1$, $\varphi(D, A) = \varphi(L, B) = 2$, $\varphi(A, F) = \varphi(B, M) = 3$, $\varphi(A, I) = \varphi(B, N) = 4$ (рис. 4). Если возможно, то перекрашиваем дугу (B, N) в хороший по отношению к вершине N цвет $\alpha \in \{1, 2, 5\}$ и полагаем $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 4$. Невозможно перекрасить (B, N) , если выполняется одна из следующих ситуаций.

(1) $\alpha = 1$ (при вершине N есть входящие дуги цветов 2 и 5) и имеется цепь (N, \dots, J) цвета 1. Тогда (B, N) окрасим в $\alpha = 1$ и, чтобы избавиться от цикла, состоящего из дуг цвета 1, перекрасим (J, B) . Пусть $\beta \in \{3, 4, 5\}$ — хороший цвет для дуги (J, B) по отношению к J . Если нет цепи (M, \dots, J) , окрашенной в цвет 3, то перекрасим (J, B) в β и положим $\varphi(A, B) := 1$, $\varphi(B, A) := 5$. Пусть $\beta = 3$ и имеется цепь (M, \dots, J) цвета 3. Тогда если при вершине M нет входящих дуг цвета 4, то осуществим перекраски: $\varphi(B, M) := 4$, $\varphi(B, N) := 3$, $\varphi(J, B) := 3$. Затем окрасим (A, B) в цвет 1, а (B, A) в 5. Если же в вершину M входит дуга цвета 4, то перекрасим (B, M) в хороший по отношению к M цвет $\gamma \in \{1, 5\}$, а дуги (B, N) и (J, B) оставим окрашенными в 4 и 1 соответственно, как это было изначально. Тогда полагаем $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 3$.

(2) $\alpha = 2$ (при вершине N есть входящие дуги цветов 1 и 5) и имеется цепь (N, \dots, L) цвета 2. В данной ситуации поступаем аналогично тому, как действовали в предыдущем пункте.

(3) $\alpha \in \{1, 2\}$ (при вершине N есть входящая дуга цвета 5) и одновременно есть цепи (N, \dots, J) цвета 1 и (N, \dots, L) цвета 2. Тогда перекрасим дугу (B, M) в хороший для неё по отношению к вершине M цвет из множества $\{1, 2, 5\}$ и затем осуществим раскраску: $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 3$.

A1.2.4. Имеем цепь (B, N, \dots, C, A) , окрашенную в цвет 1, и цепь (A, I, \dots, J, B) , окрашенную в цвет 2, $\varphi(D, A) = \varphi(A, F) = 3$, $\varphi(L, B) = \varphi(B, M) = 4$ (рис. 5). Рассмотрим дугу (D, A) . Пусть $\alpha \in \{2, 4, 5\}$ — хороший цвет для этой дуги по отношению к вершине D . Тогда перекрашиваем (D, A) в α и полагаем $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 3$.

A1.2.5. В орграфе K' имеются цепь (B, N, \dots, C, A) цвета 1 и цепь (A, I, \dots, J, B) цвета 2, $\varphi(D, A) = \varphi(L, B) = 3$, $\varphi(A, F) = \varphi(B, M) = 4$ (рис. 6). Если возможно, то перекрасим дугу (D, A) в какой-либо хороший по отношению к вершине D цвет $\alpha \in \{2, 4, 5\}$, после чего положим $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 3$. В противном случае из вершины D исходят дуги цветов 2 и 5 (следовательно, среди цветов множества $\{2, 4, 5\}$ хорошим будет только цвет 4) и имеется цепь от F к D , окрашенная в цвет 4. Тогда осуществляем перекраски: $\varphi(D, A) := 4$, $\varphi(A, F) := \beta$, где $\beta \in \{1, 3, 5\}$ — хороший цвет для (A, F) по отношению к вершине F . Затем полагаем $\varphi(A, B) := 4$, $\varphi(B, A) := 5$.

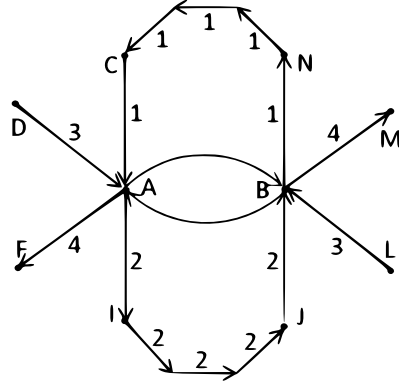


Рис. 6. A1.2.5

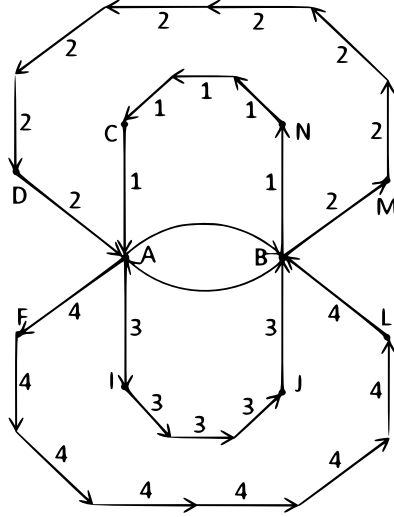


Рис. 7. A1.2.6

A1.2.6. В K' имеются цепь (B, N, \dots, C, A) цвета 1, цепь (B, M, \dots, D, A) цвета 2, цепь (A, I, \dots, J, B) цвета 3 и цепь (A, F, \dots, L, B) , окрашенная в цвет 4 (рис. 7). Перекрасим дуги: $\varphi(C, A) := \alpha$, $\varphi(A, I) := \beta$, где $\alpha \in \{3, 4, 5\}$, $\beta \in \{1, 2, 5\}$ – хорошие цвета для дуг (C, A) и (A, I) по отношению к вершинам C и I соответственно. Случай, когда для данных дуг хорошим цветом является только 5 и при этом есть цепь, соединяющая вершины I и C цвета 5, рассмотрим ниже. В зависимости от α и β выполняется одна из следующих ситуаций.

(1) $\alpha \neq 3$, $\beta \neq 1$ (при этом исключается оговоренный выше случай). В этой ситуации докрасим дуги (A, B) и (B, A) следующим образом: $\varphi(A, B) := 1$, $\varphi(B, A) := 3$.

(2) $\alpha = 3$, $\beta \neq 1$. Полагаем $\varphi(A, B) := 1$, $\varphi(B, A) := 5$.

(3) $\alpha \neq 3$, $\beta = 1$. Полагаем $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 3$.

(4) $\alpha = 3$, $\beta = 1$. Перекрашиваем дугу (C, A) в цвет 3, оставляем $\varphi(A, I) = 3$ и полагаем $\varphi(A, B) := 1$, $\varphi(B, A) := 5$.

Перейдём к вышеупомянутому случаю, когда $\alpha = \beta = 5$ и имеется цепь от I до C , окрашенная в цвет 5. Среди рассмотренных дуг (C, A) , (A, I) перекрасим только (C, A) в единственный хороший для неё цвет 5. Рассмотрим дугу (A, F) . Перекрасим (A, F) в хороший для неё по отношению к вершине F цвет $\gamma \in \{1, 2, 5\}$. Затем полагаем $\varphi(B, A) := 4$, $\varphi(A, B) := \delta$, где $\delta \in \{1, 5\} \setminus \{\gamma\}$.

A1.1.1. В орграфе K' есть цепь (B, N, \dots, C, A) , окрашенная в цвет 1, при этом $\varphi(A, F) = 2$, $\varphi(A, I) = 3$, $\varphi(J, B) = 4$, $\varphi(L, B) = 5$, $\varphi(D, A) = \alpha$,

$\varphi(B, M) = \beta$, где $\alpha, \beta \in \{2, 3, 4, 5\}$ (рис. 8). Заметим, что верно такое утверждение: если α — хороший цвет для (B, F) и (B, I) относительно F и I соответственно, то нет цепи цвета α либо от F до вершины D , либо от I до D . Без потери общности будем считать, что нет цепи, окрашенной в цвет α , от F до D . Если $\alpha = \beta = 2$, то перекрасим дугу (A, I) в цвет $\gamma \in \{1, 4, 5\}$, который является хорошим для (A, I) по отношению к вершине I , и окрасим дуги (A, B) и (B, A) следующим образом: $\varphi(A, B) := 3$, $\varphi(B, A) := \delta$, где $\delta \in \{4, 5\} \setminus \{\gamma\}$. Если α или β не 2, то перекрасим дугу (A, F) в хороший для неё по отношению к вершине F цвет $\epsilon \in \{1, 4, 5\}$. Если $\epsilon = 4$, $\{\alpha, \beta\} = \{3, 5\}$ и есть цепь (F, \dots, J) цвета 4, то в зависимости от того, какие значения имеют α и β , получаем либо случай A1.2.4, либо случай A1.2.5, разбор которых описан выше. Аналогично, если $\epsilon = 5$, $\{\alpha, \beta\} = \{3, 4\}$ и есть цепь (F, \dots, L) , окрашенная в цвет 5, то получаем один из случаев A1.2.4 или A1.2.5. Во всех остальных случаях осуществляем раскраску $\varphi(A, B) := 2$, $\varphi(B, A) := \zeta$, где $\zeta \in \{3, 4, 5\} \setminus \{\alpha, \beta\}$.

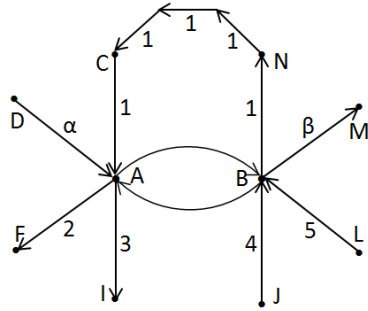


Рис. 8. A1.1.1

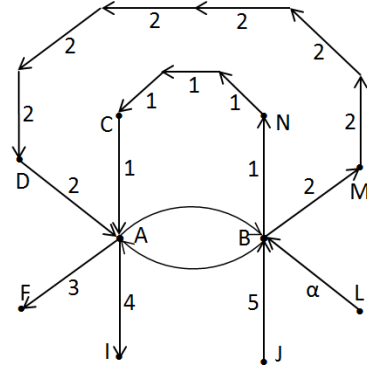
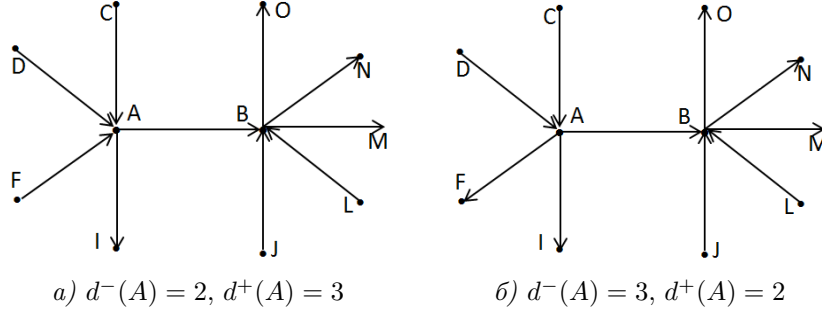


Рис. 9. A1.1.2

A1.1.2. В орграфе K' есть цепь (B, N, \dots, C, A) , окрашенная в цвет 1, и цепь (B, M, \dots, D, A) , окрашенная в цвет 2; $\varphi(A, F) = 3$, $\varphi(A, I) = 4$, $\varphi(J, B) = 5$, $\varphi(L, B) = \alpha$, где $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ (рис. 9). Перекрашиваем дугу (J, B) в хороший для (J, B) по отношению к вершине J цвет $\beta \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{\alpha\}$. Затем выполняем раскраску $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := \gamma$, где $\gamma \in \{3, 4\}$, за исключением случая, когда $\beta = 4$ и выполняется одно из следующих условий.

(1) Имеется цепь (I, \dots, J) , окрашенная в цвет 4. Тогда полагаем $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 3$.

(2) Имеется цепь (F, \dots, L) цвета 3 и $\alpha = 3$. В этом случае определим $\varphi(A, B) := 5$, $\varphi(B, A) := 4$.

Рис. 10. Дуга (A, B) и смежные с ней дуги

(3) Имеются цепи (I, \dots, J) цвета 4 и (F, \dots, L) цвета 3 и $\alpha = 3$. Тогда это случай A1.2.6, который был разобран ранее.

СЛУЧАЙ A2. Орграф K' не содержит 2-циклов, но содержит вершину A степени не более 5.

Удалим из K' одну из дуг при вершине A . Без ограничения общности будем считать, что удаляем дугу (A, B) (рис. 10(а, б)).

Очевидно, что компоненты связности полученного орграфа будут удовлетворять условиям (i) и (ii) из описания процедуры «Ациклическая 5-раскраска». Применим эту процедуру к орграфу $K' - (A, B)$ или к его компонентам связности. Далее требуется докрасить только дугу (A, B) . Это можно сделать без предварительных перекрасок, за исключением случаев, когда $d(A) = 4$ или $d(A) = 5$. Рассмотрим случай $d(A) = 5$. При этом дальнейшие рассуждения будут применимы и в случае, когда при вершине A отсутствует какая-либо инцидентная дуга, т. е. если $d(A) = 4$. Возникают следующие нетривиальные случаи, когда невозможно окрасить (A, B) ни в один из пяти цветов (в остальных случаях докраска производится без предварительных перекрасок).

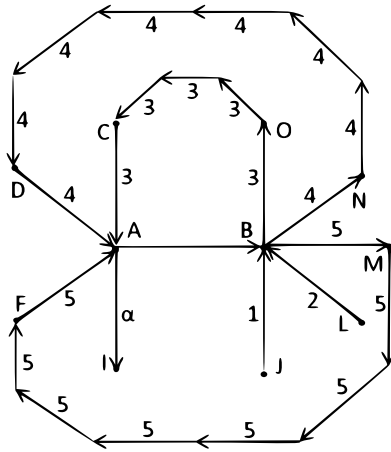
Подслучай A2.1: $d^-(A) = 2, d^+(A) = 3$. Так как для A есть только одна окрашенная исходящая дуга, а для B есть только две окрашенные входящие дуги, цикловых цветов должно быть хотя бы два. С другой стороны, поскольку в A входит три окрашенные дуги, цикловых цветов может быть не больше трёх. Поэтому получаем следующие два случая.

A2.1.1: Цвета 1 и 2 входящие в B , цвета 3, 4 и 5 цикловые.

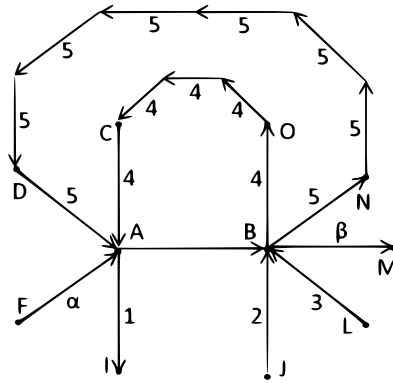
A2.1.2: Цвет 1 исходящий из A , цвета 2 и 3 входящие в B , цвета 4 и 5 цикловые.

Случай, аналогичный A2.1.1, когда имеется три цикловых цвета 3, 4 и 5, исходящая дуга из вершины A цвета 1 и входящая в B дуга цвета 2,

Случай, аналогичный A2.2.1, когда цвета 4 и 5 цикловые, имеются две исходящие из A дуги цветов 1 и 2 и входящая в B дуга цвета 3, также является подслучаем либо A2.2.1, либо A2.2.2. Действительно, если цвет второй исходящей из A дуги равен 1 или 2, то это случай A2.2.1, а если он совпадает с 4 или 5, то это подслучай случая A2.2.2.



Puc. 11. A2.1.1



Puc. 12. A2.1.2

A2.1.1. $\varphi(J, B) = 1$, $\varphi(L, B) = 2$, в орграфе K' есть цепи (B, O, \dots, C, A) , (B, N, \dots, D, A) и (B, M, \dots, F, A) , окрашенные в цвета 3, 4 и 5 соответственно, $\varphi(A, I) = \alpha$, где $\alpha \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (рис. 11). Если $\alpha = 2$, то перекрасим дугу (J, B) в хороший для неё по отношению к вершине J цвет из множества $\{3, 4, 5\}$. Далее полагаем $\varphi(A, B) = 1$. Если $\alpha \neq 2$ и не имеет места ни одна из плохих ситуаций, описанных ниже, то осуществляем перекраску: $\varphi(L, B) := \beta$, где $\beta \in \{3, 4, 5\}$ — хороший цвет для

При попытке перекрасить дугу (L, B) могут возникнуть следующие плохие ситуации: $\alpha = i$, $\beta = i$, имеется цепь (I, \dots, L) цвета i , где $i \in \{3, 4, 5\}$, тогда невозможно осуществить перекраску дуги (L, B) в цвет $\beta = i$, так как после этого образуется цикл цвета i . В этом случае перекрасим дугу (J, B) в хороший для неё по отношению к вершине J цвет $\gamma \in \{3, 4, 5\}$. Затем полагаем $\varphi(A, B) := 1$.

[illegible]

Puc. 14. A2.2.2

A2.2.2. $\varphi(A, F) = 1$, $\varphi(A, I) = 2$, $\varphi(J, B) = 3$, $\varphi(L, B) = 4$, в K' есть цепь (B, O, \dots, C, A) , окрашенная в цвет 5, $\varphi(D, A) = \alpha$, $\varphi(B, N) = \beta$,

$\varphi(B, M) = \gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $\beta \neq \gamma$ (рис. 14). Заметим, что либо от F до D , либо от I до D нет цепи цвета α . Без потери общности будем считать, что нет цепи цвета α от F до D . Перекрасим дугу (A, F) в хороший для неё по отношению к вершине F цвет $\delta \in \{3, 4, 5\}$. Затем положим $\varphi(A, B) = 1$, за исключением случая, когда $\alpha = 1$ и имеется цепь цвета 1, соединяющая вершины B и D . Но тогда, с точностью до переобозначения цветов, получаем случай A2.2.1.

Трудоёмкость процедуры «Ациклическая 5-раскраска» составляет $O(n^2)$, так как требуется последовательно раскрасить $3n$ дуг орграфа K и на окрашивание каждой дуги затрачивается время $O(n)$, определяемое трудоёмкостью проверки на зацикливание для дуг каждого цвета.

5. Выравнивание частичных туров

В этом разделе описывается процедура перестроения частичных туров T'_1, T'_2, \dots, T'_5 , полученных в орграфе K процедурой «Ациклическая 5-раскраска(K)». Смысл перестроения состоит в том, чтобы обеспечить наличие в турах достаточно большого количества цепей и тем самым сделать возможным соединение частичных туров в рёберно непересекающиеся гамильтоновы циклы на последней фазе алгоритма. Преобразование туров осуществляется путём переноса некоторых дуг из туров с меньшим числом цепей в туры с большим числом цепей. В результате число цепей в турах в какой-то степени выравнивается, туры становятся ближе друг к другу по числу составляющих их дуг и цепей. Исходя из этого, представленная ниже процедура получила название «Выравнивание($T'_1 - T'_5$)».

При перестроении туров оказываются полезными следующие простые свойства, обеспечивающие возможность добавления рёбер в частичный тур или обмена рёбрами между турами. Пусть T — частичный тур в орграфе K . Дугу $e \in E(K) \setminus E(T)$ назовём *хорошей* для тура T , если при её добавлении к T получается частичный тур, и *плохой* иначе.

Лемма 1. Число плохих дуг для тура T в K не превосходит $5|T|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дуга является плохой для тура T , если она имеет общую начальную, либо общую конечную вершину с какой-то дугой из T , либо если дуга e ведёт из конца какой-то нетривиальной цепи тура T в её начало (в этом случае e — цикловая дуга). Так как орграф K является $(3, 3)$ -регулярным, каждая дуга тура T смежна с четырьмя нецикловыми плохими дугами в K , а число цикловых плохих дуг не превосходит числа нетривиальных цепей в T , которое, в свою очередь, не превосходит числа дуг тура T . Отсюда следует, что число всех плохих дуг не превосходит $4|T| + |T| = 5|T|$. Лемма 1 доказана.

Перенос дуги e из тура T'_i в тур T'_j назовём *улучшающим* для набора частичных туров T'_1, T'_2, \dots, T'_5 , если e является хорошей дугой для T'_j и до переноса выполняется неравенство $p(T'_j) - p(T'_i) > 1$. Тогда после переноса параметр $p(T'_i)$ увеличивается на 1, $p(T'_j)$ уменьшается на 1, а сумма всех попарных разностей вида $|p(T'_s) - p(T'_t)|$, где $s, t \in \{1, 2, \dots, 5\}$, строго уменьшается. Отсюда следует, что любая последовательность улучшающих переносов состоит не более чем из $O(n)$ переносов, при этом наборы частичных туров не повторяются.

Перейдём к описанию процедуры «Выравнивание($T'_1-T'_5$)». Эта процедура получает на входе пять частичных туров T'_1, T'_2, \dots, T'_5 , построенных в орграфе K процедурой «Ациклическая 5-раскраска(K)», где

$$p(T'_1) \leq p(T'_2) \leq \dots \leq p(T'_5),$$

и перестраивает их таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$p(T'_1) \leq p(T'_2) \leq \dots \leq p(T'_5), \quad p(T'_2) \geq \frac{n}{6}, \quad p(T'_3) \geq \frac{n}{4}.$$

(Предполагается, что перестроенные туры снова упорядочены по неубыванию числа цепей, но их порядок (нумерация) после преобразования может отличаться от первоначального.)

Выравнивание($T'_1-T'_5$). Без потери общности будем считать, что туру T'_i соответствует цвет i в процедуре ациклической 5-раскраски. Также можно предполагать, что $n \geq 5$, иначе неравенства $p(T'_2) \geq \frac{n}{6}$ и $p(T'_3) \geq \frac{n}{4}$ заведомо выполняются.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^5 |T'_i| = |E(K)| = 3n, \quad \sum_{i=1}^5 p(T'_i) = \sum_{i=1}^5 (n - |T'_i|) = 5n - 3n = 2n.$$

Предположим, что $p(T'_2) < \frac{n}{6}$. Тогда туры T'_1 и T'_2 содержат менее чем по $\frac{n}{6}$ цепей. Докажем, что до тех пор, пока это условие сохраняется, возможен улучшающий перенос дуги из одного из туров T'_1, T'_2, T'_3 в один из туров T'_3, T'_4, T'_5 .

Рассмотрим два случая в зависимости от числа цепей в туре T'_3 .

СЛУЧАЙ 1: $p(T'_3) < \frac{5n}{12}$. Докажем, что возможен улучшающий перенос из одного из туров T'_1, T'_2, T'_3 в тур T'_5 .

Из неравенств $p(T'_1) \leq p(T'_2) < \frac{n}{6}$ и $p(T'_3) < \frac{5n}{12}$ следует, что

$$|T'_1| > \frac{5n}{6}, \quad |T'_2| > \frac{5n}{6}, \quad |T'_3| > \frac{7n}{12},$$

$$p(T'_1) + p(T'_2) + p(T'_3) < 2 \cdot \frac{n}{6} + \frac{5n}{12} = \frac{3n}{4}.$$

Отсюда получаем

$$p(T'_4) + p(T'_5) = 2n - (p(T'_1) + p(T'_2) + p(T'_3)) > 2n - \frac{3n}{4} = \frac{5n}{4},$$

и так как $p(T'_5) \geq p(T'_4)$, то $p(T'_5) > \frac{5n}{8}$ и $|T'_5| < \frac{3n}{8}$.

Получаем, что $5|T'_5| < \frac{15n}{8}$, а суммарное число дуг в турах T'_1 , T'_2 и T'_3 превышает $2 \cdot \frac{5n}{6} + \frac{7n}{12} = \frac{9n}{4} > \frac{15n}{8} > 5|T'_5|$. Отсюда и из леммы 1 следует, что в одном из туров T'_1, T'_2, T'_3 найдётся дуга e , хорошая для тура T'_5 . Из неравенства $p(T'_5) - p(T'_3) > \frac{5n}{8} - \frac{5n}{12} = \frac{5n}{24}$ вытекает, что перенос дуги e является улучшающим для T'_1, T'_2, \dots, T'_5 , так как $\frac{5n}{24} > 1$ при $n \geq 5$.

СЛУЧАЙ 2: $p(T'_3) \geq \frac{5n}{12}$. Докажем, что возможен улучшающий перенос дуги из T'_1 или T'_2 в T'_3 , T'_4 или T'_5 . Сначала докажем, что в одном из туров T'_1 или T'_2 найдётся хорошая дуга для какого-то из туров T'_3 , T'_4 или T'_5 .

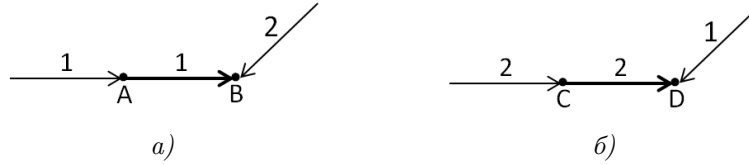


Рис. 15. Дуги-кандидаты (A, B) и (C, D)

Назовём *дугой-кандидатом* такую дугу (A, B) цвета $i \in \{1, 2\}$ (т. е. дугу из тура T'_i), что при вершине A имеется входящая дуга цвета i , а при вершине B — входящая дуга цвета $3 - i$ (рис. 15(а, б)). Докажем, что при $p(T'_2) < \frac{n}{6}$ в орграфе K найдутся две дуги-кандидата разных цветов, исходящие из одной вершины.

Заметим, что среди дуг тура T'_1 имеется как минимум $|T'_1| - p(T'_1) > \frac{5n}{6} - \frac{n}{6} = \frac{2n}{3}$ не являющихся начальными в своих цепях тура T'_1 . Для

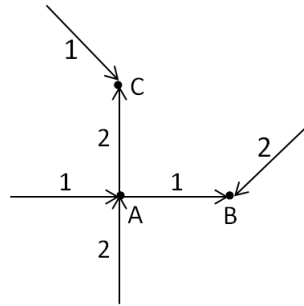
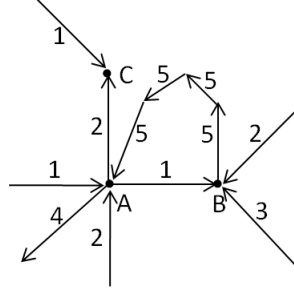
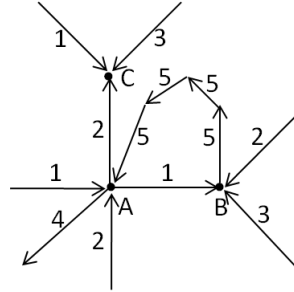


Рис. 16. Исходящие из одной вершины дуги-кандидаты (A, B) и (A, C)

Рис. 17. Раскраска смежных с (A, B) дугРис. 18. Удаётся перенести дугу (A, C) в тур T'_5

каждой такой дуги имеется входящая в её начало дуга цвета 1. Среди указанных дуг имеется не более чем $p(T'_2) < \frac{n}{6}$ таких, у которых концевая вершина является начальной для некоторой цепи тура T'_2 , а для всех остальных дуг тура T_1 есть входящие в их концевые вершины дуги цвета 2. Отсюда следует, что число дуг-кандидатов в туре T'_1 превосходит $\frac{2n}{3} - \frac{n}{6} = \frac{n}{2}$. Аналогично в туре T'_2 имеется более чем $\frac{n}{2}$ дуг-кандидатов. Следовательно, в орграфе K найдётся вершина A , являющаяся начальной для двух дуг-кандидатов (A, B) и (A, C) разных цветов, где $\varphi(A, B) = 1$, $\varphi(A, C) = 2$ (рис. 16).

Докажем теперь, что хотя бы одну из дуг (A, B) или (A, C) можно перенести в какой-либо из туров T'_3, T'_4, T'_5 . Предположим, что дугу (A, B) нельзя перенести ни в один из туров T'_3, T'_4, T'_5 . Так как при вершине A имеется только одна исходящая, а при вершине B — одна входящая дуга, не окрашенная в цвета 1 и 2, а каждый из цветов 3, 4, 5 является запрещённым для дуги (A, B) , без потери общности можно считать, что имеются входящая в B дуга цвета 3, исходящая из A дуга цвета 4, а цвет 5 является цикловым для (A, B) , т. е. в туре T'_5 имеется цепь P , начинающаяся в B и оканчивающаяся в A (рис. 17).

Если дуга (A, C) также является плохой для каждого из туров T'_3, T'_4, T'_5 , то для цветов смежных с ней дуг должны выполняться такие же ограничения, что и в случае с дугой (A, B) (рис. 18). Однако для дуги (A, C) указанная ситуация невозможна, так как в вершину A входит только одна дуга, не окрашенная в цвета 1 и 2, и эта дуга является концевой в цепи P тура T'_5 , ведущей из B в A . Таким образом, для дуги (A, C) ни один из цветов 3, 4, 5 не является цикловым, а значит, она будет хорошей для какого-то из туров T'_3, T'_4, T'_5 .

Докажем, что перенос хорошей дуги из T'_1 или T'_2 в один из туров T'_3, T'_4 или T'_5 является улучшающим преобразованием. Для этого достаточно заметить, что $p(T'_3) - p(T'_2) > \frac{5n}{12} - \frac{n}{6} = \frac{n}{4}$ и $\frac{n}{4} > 1$ при $n \geq 5$.

Таким образом можно переносить дуги из туров T'_1 и T'_2 в T'_3, T'_4 и T'_5 до тех пор, пока не выполнится условие $p(T'_2) \geq \frac{n}{6}$.

Предположим, что $p(T'_2) \geq \frac{n}{6}$, но при этом $p(T'_3) < \frac{n}{4}$, т. е. среди туров T'_1, T'_2, \dots, T'_5 первые три содержат менее чем по $\frac{n}{4}$ цепей и более чем по $\frac{3n}{4}$ рёбер. Докажем, что возможен улучшающий перенос дуги из T'_1, T'_2 или T'_3 в тур T'_5 . Аналогично случаю 1 справедливо неравенство

$$p(T'_1) + p(T'_2) + p(T'_3) < 3 \cdot \frac{n}{4} = \frac{3n}{4},$$

из которого следует, что

$$p(T'_4) + p(T'_5) > 2n - \frac{3n}{4} = \frac{5n}{4},$$

а значит, $p(T'_5) > \frac{5n}{8}$ и $|T'_5| < \frac{3n}{8}$. Поскольку $|T'_1| + |T'_2| + |T'_3| > \frac{9n}{4} > 5|T'_5|$, в силу леммы 1 в T'_1, T'_2 или T'_3 найдётся хорошая дуга для тура T'_5 . Из неравенств $p(T'_5) - p(T'_3) > \frac{5n}{8} - \frac{n}{4} = \frac{3n}{8} > 1$ следует, что перенос этой дуги является улучшающим преобразованием для туров T'_1, T'_2, \dots, T'_5 .

Таким образом, найдётся последовательность улучшающих переносов, после завершения которой выполняются оба неравенства $p(T'_2) \geq \frac{n}{6}$ и $p(T'_3) \geq \frac{n}{4}$.

Заметим, что трудоёмкость процедуры «Выравнивание(T'_1 – T'_5)» составляет $O(n^2)$, так как выполняется не более чем $O(n)$ улучшающих переносов, на поиск каждого из которых затрачивается время $O(n)$.

6. Замыкание частичных туров в гамильтоновы циклы

В этом разделе опишем финальную процедуру алгоритма $A_{3/5}$, которая получает на входе рёберно непересекающиеся частичные туры T_1, T_2, T_3 , построенные в фазе 2 алгоритма. Для этих туров выполняются условия $w(T_1) + w(T_2) + w(T_3) \geq \frac{3}{5}w^*$, $p(T_1) \leq p(T_2) \leq p(T_3)$, $p(T_2) \geq \frac{n}{6}$ и $p(T_3) \geq \frac{n}{4}$. Из последних двух неравенств и условия $n \geq 21$ следует, что $p(T_2) \geq 4$, $p(T_3) \geq 6$.

Описанная ниже процедура «Замыкание(T_1-T_3)» дополняет частичные туры T_1, T_2, T_3 до рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, H_3 в орграфе G . При этом выполняется оценка точности $w(H_1) + w(H_2) + w(H_3) \geq \frac{3}{5}w^*$.

Замыкание(T_1-T_3). Дополним тур T_1 до гамильтонова цикла H_1 , добавляя к нему любые подходящие дуги исходного орграфа G . Если при этом добавленные дуги принадлежали туру T_2 или T_3 , то перенесём их в H_1 . Затем с помощью процедуры, разработанной в [11], тур T_2 за время $O(n)$ замыкается в гамильтонов цикл H_2 без использования дуг, принадлежащих циклу H_1 . Условием корректной работы процедуры замыкания является наличие в туре T_2 не менее четырёх цепей, что выполняется в силу доказанных выше неравенств. Таким образом, имеем два гамильтоновых цикла H_1 и H_2 и частичный тур T_3 , который будем достраивать до гамильтонова цикла H_3 , не используя дуг из $H_1 \cup H_2$.

Если $p(T_3) > 6$, то будем добавлять к T_3 произвольные хорошие дуги из $E \setminus \{H_1 \cup H_2\}$ до тех пор, пока число цепей не станет равным шести. Пусть тур T_3 состоит из шести цепей P_1, P_2, \dots, P_6 , где $P_i = (s_i, \dots, t_i)$, $i = 1, \dots, 6$. Докажем, что эти шесть цепей можно соединить в одну гамильтонову цепь. К концу цепи P_i можно добавить любую из пяти оставшихся цепей кроме, возможно, двух, так как из концевой вершины P_i исходят две дуги, принадлежащие циклам H_1 и H_2 . Отсюда вытекает, что последовательно добавляя цепи к концу объединённой цепи, можно соединить четыре данные цепи в одну, т. е. построить цепь P' , составленную без потери общности из P_1, \dots, P_4 .

Для цепи P_5 существуют две входящие в её начало и две исходящие из её конца дуги, принадлежащие $H_1 \cup H_2$. Таким образом, имеется всего четыре дуги, которые нельзя использовать при соединении P_5 с другими цепями. С другой стороны, в объединённой цепи P' существует пять позиций, куда можно пытаться вставить цепь P_5 : в начало P' , в конец P' или между любыми двумя соседними подцепями. Следовательно, можно добавить цепь P_5 к P' . Аналогично удастся добавить к P' и цепь P_6 . В результате получаем одну гамильтонову цепь P . Без ограничения общности можем считать, что подцепи в P располагаются в порядке: P_1, P_2, \dots, P_6 .

Если дуга (t_6, s_1) не является запрещённой для P , т. е. она не принадлежит $H_1 \cup H_2$, то, добавляя её, получаем гамильтонов цикл H_3 . Пусть дуга (t_6, s_1) запрещённая. Будем перестраивать цепь P так, чтобы её удалось дополнить до гамильтонова цикла.

Пусть $2 \leq i \leq j \leq 5$. Назовём (P_i, P_j) -перестановкой следующую перестановку цепей в P : $(P_1, P_2, \dots, P_6) \rightarrow (P_i, P_{i+1}, \dots, P_j, P_1, \dots, P_{i-1},$

P_{j+1}, \dots, P_6). Будем называть перестановку *успешной*, если дуги (t_j, s_1) , (t_{i-1}, s_{j+1}) и (t_6, s_i) не являются запрещёнными, т. е. путём их добавления удаётся построить гамильтонов цикл H_3 . Рассмотрим (P_2, P_j) -перестановки, где $j = 2, 3, \dots, 5$. Покажем, что если дуга (t_6, s_2) не является запрещённой, то среди этих перестановок обязательно найдётся успешная. Для того чтобы (P_2, P_j) -перестановка была успешной, дуги (t_j, s_1) , (t_1, s_{j+1}) и (t_6, s_2) не должны быть запрещёнными. Так как дуга (t_6, s_1) запрещённая, не более чем для одного из четырёх значений индекса j дуга (t_j, s_1) будет запрещённой. Также не более чем две дуги из (t_1, s_{j+1}) , где $j = 2, \dots, 5$, являются запрещёнными. Следовательно, найдётся номер $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ такой, что дуги (t_j, s_1) , (t_1, s_{j+1}) не являются запрещёнными, а значит, (P_2, P_j) -перестановка не будет успешной, только если дуга (t_6, s_2) запрещённая. В последнем случае рассмотрим все (P_i, P_5) -перестановки, где $i = 2, \dots, 5$. Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что дуга (t_5, s_1) запрещённая.

Рассмотрим (P_3, P_3) -, (P_3, P_4) - и (P_4, P_4) -перестановки. Пусть среди них нет успешных, тогда дуги (t_2, s_4) , (t_2, s_5) , (t_3, s_5) запрещённые. Таким образом, имеем следующие запрещённые дуги: (t_6, s_1) , (t_6, s_2) , (t_5, s_1) , (t_2, s_4) , (t_2, s_5) , (t_3, s_5) . В этом случае удаётся построить цикл $P_3 \rightarrow P_4 \rightarrow P_1 \rightarrow P_5 \rightarrow P_6 \rightarrow P_3$, не включающий цепь P_2 . В полученном цикле найдутся две цепи, между которыми можно вставить цепь P_2 , так как среди пяти позиций для вставки P_2 максимум четыре нельзя использовать из-за инцидентных P_2 запрещённых дуг. В результате получаем искомым гамильтонов цикл H_3 .

Таким образом, описана процедура построения рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, H_3 , для которых выполняется оценка

$$w(H_1) + w(H_2) + w(H_3) \geq w(T_1) + w(T_2) + w(T_3) \geq \frac{3}{5}w(G_{3,3}) \geq \frac{3}{5}w^*.$$

Нетрудно убедиться, что процедура «Замыкание(T_1 – T_3)» выполняется за время $O(n)$. Сравнивая оценки трудоёмкости различных процедур, составляющих алгоритм $A_{3/5}$, которые были получены в разд. 2–6, убеждаемся, что все эти процедуры выполняются за время не более $O(n^2)$, за исключением процедуры нахождения 3-регулярного подграфа D_3 при помощи алгоритма Габова в фазе 1 алгоритма. Эта процедура выполняется за время $O(n^3)$. Таким образом, временная сложность всего алгоритма $A_{3/5}$ определяется временем работы алгоритма Габова и составляет $O(n^3)$. Этим завершаются анализ алгоритма $A_{3/5}$ и доказательство теоремы 1.

7. Заключительные замечания

Нетрудно убедиться, что обоснованная выше оценка точности алгоритма $A_{3/5}$ достижима. Действительно, если в графе G все рёбра, не принадлежащие гамильтоновым циклам H_1^*, H_2^*, H_3^* из оптимального решения задачи 3-APSP- \max , имеют нулевой вес, то найденный в фазе 1 подграф $G_{3,3}$ совпадает с объединением циклов H_1^*, H_2^*, H_3^* и имеет вес w^* . Далее возможна ситуация, когда процедуры «Ациклическая 5-раскраска(K)» и «Выравнивание ($T'_1-T'_5$)» разобьют этот подграф на пять частичных туров одинакового веса $w^*/5$, а процедура «Замыкание (T_1-T_3)» дополнит три из этих туров рёбрами нулевого веса до гамильтоновых циклов H_1, H_2, H_3 , суммарный вес которых равен $\frac{3}{5}w^*$.

С другой стороны, очевидно, что полученная оценка точности $3/5$ не является наилучшей для задачи 3-APSP- \max . Целью ближайшего исследования должны стать построение для этой задачи полиномиального алгоритма с гарантированной оценкой точности $2/3$ и обобщение этого алгоритма на случай произвольного числа коммивояжёров, т. е. на случай задачи m -APSP- \max . Не менее актуальным является построение полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности для различных версий задачи m -APSP в случае, когда в гамильтоновых циклах не допускаются встречные дуги, и в случае, когда для каждого гамильтонова цикла H_i используется своя весовая функция w_i .

Авторы благодарны анонимному рецензенту за внимательное прочтение статьи и сделанные ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой $3/4$ для нахождения двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 11–20.
2. Агеев А. А., Пяткин А. В. Приближённый алгоритм решения метрической задачи о двух коммивояжёрах с оценкой точности 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 4. С. 3–20.
3. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х. Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m -PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 12–24.
4. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М. Приближённые алгоритмы для нахождения двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2004. Т. 11, № 1. С. 11–25.

5. Гимади Э. Х. Асимптотически точный алгоритм отыскания одного и двух рёберно непересекающихся маршрутов коммивояжёра максимального веса в евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 23–32.
6. Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Глебов А. Н. Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, № 2. С. 41–61.
7. Гимади Э. Х., Иволина Е. В. Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2012. Т. 19, № 1. С. 17–32.
8. Глебов А. Н., Гордеева А. В., Замбалаева Д. Ж. Алгоритм с оценкой $7/5$ для задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 296–309.
9. Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности $7/9$ для задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 4. С. 17–48.
10. Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж. Приближённый алгоритм решения задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 5. С. 11–37.
11. Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж., Скретнева А. А. $2/3$ -Приближённый алгоритм для несимметричной задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 6. С. 11–20.
12. Сердюков А. И. Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжёра на максимум // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 25. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. С. 80–86.
13. De Brey M. J. D., Volgenant A. Well-solved cases of the 2-Peripatetic Salesman Problem // Optimization. 1997. Vol. 39, No. 3. P. 275–293.
14. De Kort J. B. J. M. Lower bounds for symmetric K -PSP // Optimization. 1991. Vol. 22, No. 1. P. 113–122.
15. De Kort J. B. J. M. Upper bounds for the symmetric 2-PSP // Optimization. 1992. Vol. 23, No. 4. P. 357–367.
16. De Kort J. B. J. M. A branch and bound algorithm for symmetric 2-PSP // Eur. J. Oper. Res. 1993. Vol. 70. P. 229–243.
17. Dudycz S., Marcinkowski J., Paluch K., Rybicki B. A. $4/5$ -Approximation algorithm for the maximum Traveling Salesman Problem // Integer Programming and Combinatorial Optimization. Proc. 19th Int. Conf. IPCO 2017 (Waterloo, ON, Canada, June 26–28, 2017). Springer, 2017. P. 173–185. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 10328).
18. Gabow H. N. An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th Annu. ACM Symp. Theory Comput. (Boston, April 25–27, 1983). New York: ACM, 1983. P. 448–456.

19. **Gimadi E. Kh.** Approximation efficient algorithms with performance guarantees for some hard routing problems // Proc. 2nd Int. Conf. Optimization and Applications, OPTIMA-2011 (Petrovac, Montenegro, September 25 — October 2, 2011). Moscow: VC RAN, 2011. P. 98–101.
20. **Glebov A. N., Gordeeva A. V.** An algorithm with approximation ratio $5/6$ for the metric maximum m -PSP // Discrete Optimization and Operations Research. Proc. 9th Int. Conf. DOOR (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 159–170. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).
21. **Gutin G., Punnen A. P.** (eds.) The Traveling Salesman Problem and its variations // Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002.
22. **Hassin R., Rubinstein S.** Better approximations for max TSP // Inf. Process. Lett. 2000. Vol. 75, No. 4. P. 181–186.
23. **Hopcroft J. E., Karp R. M.** An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs // SIAM J. Comput. 1973. Vol. 2, No. 4. P. 225–231.
24. **Kaplan H., Lewenstein M., Shafrir N., Sviridenko M.** Approximation algorithms for asymmetric TSP by decomposing directed regular multi-graphs // JACM. 2005. Vol. 52, No. 4. P. 602–626.
25. **Krarp J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications. Proc. NATO Adv. Study Inst. (Versailles, France, 1974). Dordrecht: Reidel, 1975. P. 173–178. (NATO Adv. Study Inst. Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci.; Vol. 19.).
26. **Paluch K., Mucha M., Madry A.** A $7/9$ -approximation algorithm for the maximum Traveling Salesman Problem // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization: Algorithms and Techniques. Proc. 12th Int. Workshop APPROX 2009 and 13th Int. Workshop RANDOM 2009 (Berkeley, CA, USA, August 21–23, 2009). Heidelberg: Springer, 2009. P. 298–311. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 5687).
27. **Wolfter Calvo R., Cordone R.** A heuristic approach to the overnight security service problem // Comput. Oper. Res. 2003. Vol. 30. P. 1269–1287.

Глебов Алексей Николаевич
Токтохоева Сурэна Гармажаповна

Статья поступила
6 июня 2018 г.
После доработки —
27 ноября 2018 г.
Принята к публикации
28 ноября 2018 г.

A POLYNOMIAL 3/5-APPROXIMATE ALGORITHM FOR THE ASYMMETRIC MAXIMIZATION VERSION OF 3-PSP

A. N. Glebov^{1,2,a} and S. G. Toktokhoeva^{2,b}

¹Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: ^aangle@math.nsc.ru, ^bs.toktokhoeva@ya.ru

Abstract. We present a first polynomial algorithm with guaranteed approximation ratio for the asymmetric maximization version of the asymmetric 3-Peripatetic Salesman Problem (3-APSP). This problem consists in finding the three edge-disjoint Hamiltonian circuits of maximal total weight in a complete weighted digraph. We prove that the algorithm has guaranteed approximation ratio 3/5 and cubic running-time. Illustr. 18, bibliogr. 27.

Keywords: Hamiltonian cycle, traveling salesman problem, m -peripatetic salesman problem, approximation algorithm, guaranteed approximation ratio.

REFERENCES

1. A. A. Ageev, A. E. Baburin, and E. Kh. Gimadi, A 3/4 approximation algorithm for finding two disjoint Hamiltonian cycles of maximum weight, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, **13**, No. 2, 11–20, 2006 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **1**, No. 2, 142–147, 2007.
2. A. A. Ageev and A. V. Pyatkin, A 2-approximation algorithm for the metric 2-Peripatetic Salesman Problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **16**, No. 4, 3–20, 2009 [Russian].
3. A. E. Baburin and E. Kh. Gimadi, On the asymptotic optimality of an algorithm for solving the maximum m -PSP in a multidimensional Euclidean space, *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, **16**, No. 3, 12–24, 2010 [Russian]. Translated in *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**, Suppl. 1, S1–S13, 2011.
4. A. E. Baburin, E. Kh. Gimadi, and N. M. Korkishko, Approximation algorithms for finding two edge-disjoint Hamiltonian cycles of minimal total weight, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2*, **11**, No. 1, 11–25, 2004 [Russian].

5. **E. Kh. Gimadi**, Asymptotically optimal algorithm for finding one and two edge-disjoint traveling salesman routes of maximal weight in Euclidean space, *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, **14**, No. 2, 23–32, 2008 [Russian]. Translated in *Proc. Steklov Inst. Math.*, **263**, Suppl. 2, S57–S67, 2008.
6. **E. Kh. Gimadi**, **Yu. V. Glazkov**, and **A. N. Glebov**, Approximation algorithms for solving the 2-Peripatetic Salesman Problem on a complete graph with edge weights 1 and 2, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2*, **14**, No. 2, 41–61, 2007 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **3**, No. 1, 46–60, 2009.
7. **E. Kh. Gimadi** and **E. V. Ivonina**, Approximation algorithms for the maximum 2-Peripatetic Salesman Problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2*, **19**, No. 1, 17–32, 2012 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **6**, No. 3, 295–305, 2012.
8. **A. N. Glebov**, **A. V. Gordeeva**, and **D. Zh. Zambalaeva**, An algorithm with approximation ratio $7/5$ for the minimum 2-Peripatetic Salesmen Problem with different weight functions, *Sib. Electron. Math. Izv.*, **8**, 296–309, 2011 [Russian].
9. **A. N. Glebov** and **D. Zh. Zambalaeva**, A polynomial algorithm with approximation ratio $7/9$ for the maximum 2-Peripatetic Salesmen Problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **18**, No. 4, 17–48, 2011 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **6**, No. 1, 69–89, 2012.
10. **A. N. Glebov** and **D. Zh. Zambalaeva**, An approximation algorithm for the minimum 2-Peripatetic Salesmen Problem with different weight functions, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **18**, No. 5, 11–37, 2011 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **6**, No. 2, 167–183, 2012.
11. **A. N. Glebov**, **D. Zh. Zambalaeva**, and **A. A. Skretneva**, A $2/3$ -approximation algorithm for the maximum asymmetric 2-Peripatetic Salesmen Problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **21**, No. 6, 11–20, 2014 [Russian].
12. **A. I. Serdyukov**, An algorithm with an estimate for the Traveling Salesman Problem of the maximum, *Upravlyaemye Sistemy*, Vol. 25, pp. 80–86, Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1984 [Russian].
13. **M. J. D. De Brey** and **A. Volgenant**, Well-solved cases of the 2-Peripatetic Salesman Problem, *Optimization*, **39**, No. 3, 275–293, 1997.
14. **J. B. J. M. De Kort**, Lower bounds for symmetric K -PSP, *Optimization*, **22**, No. 1, 113–122, 1991.
15. **J. B. J. M. De Kort**, Upper bounds for the symmetric 2-PSP, *Optimization*, **23**, No. 4, 357–367, 1992.
16. **J. B. J. M. De Kort**, A branch and bound algorithm for symmetric 2-PSP, *Eur. J. Oper. Res.*, **70**, 229–243, 1993.
17. **S. Dudycz**, **J. Marcinkowski**, **K. Paluch**, and **B. A. Rybicki**, $4/5$ -Approximation algorithm for the maximum Traveling Salesman Problem, in *Integer Programming and Combinatorial Optimization* (Proc. 19th Int. Conf., Waterloo, ON, Canada, June 26–28, 2017), pp. 173–185, Springer, 2017 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 10328).

18. **H. N. Gabow**, An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems, in *Proc. 15th Annu. ACM Symp. Theory Comput., Boston, USA, Apr. 25–27, 1983*, pp. 448–456, ACM, New York, 1983.
19. **E. Kh. Gimadi**, Approximation efficient algorithms with performance guarantees for some hard routing problems, in *Proc. II Int. Conf. “Optimization and Applications”, Petrovac, Montenegro, Sept. 25 – Oct. 2, 2011*, pp. 98–101, VTs RAN, Moscow, 2011.
20. **A. N. Glebov** and **A. V. Gordeeva**, An algorithm with approximation ratio $5/6$ for the metric maximum m -PSP, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016), pp. 159–170, Springer, Cham, 2016 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
21. **G. Gutin** and **A. P. Punnen**, eds., *The Traveling Salesman Problem and Its Variations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
22. **R. Hassin** and **S. Rubinstein**, Better approximations for max TSP, *Inf. Process. Lett.*, **75**, No. 4, 181–186, 2000.
23. **J. E. Hopcroft** and **R. M. Karp**, An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs, *SIAM J. Comput.*, **2**, No. 4, 225–231, 1973.
24. **H. Kaplan**, **M. Lewenstein**, **N. Shafrir**, and **M. Sviridenko**, Approximation algorithms for asymmetric TSP by decomposing directed regular multi-graphs, *J. ACM*, **52**, No. 4, 602–626, 2005.
25. **J. Krarup**, The peripatetic salesman and some related unsolved problems, in *Combinatorial Programming: Methods and Applications*, (Proc. NATO Adv. Study Inst., Versailles, France, Sept. 2–13, 1974), pp. 173–178, Reidel, Dordrecht, 1975 (NATO Adv. Study Inst. Ser., Vol. 19).
26. **K. Paluch**, **M. Mucha**, and **A. Madry**, A $7/9$ -approximation algorithm for the maximum Traveling Salesman Problem, in *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization: Algorithms and Techniques* (Proc. 12th Int. Workshop and 13th Int. Workshop, Berkeley, CA, USA, Aug. 21–23, 2009), pp. 298–311, Springer, Heidelberg, 2009 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 5687).
27. **R. Wolfter Calvo** and **R. Cordone**, A heuristic approach to the overnight security service problem, *Comput. Oper. Res.*, **30**, 1269–1287, 2003.

Alexey N. Glebov
Surena G. Toktokhoeva

Received June 6, 2018
Revised November 27, 2018
Accepted November 28, 2018