ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2019. Т. 26, № 2. С. 79–97

УДК 519.8 DOI 10.33048/daio.2019.26.626

ОЦЕНКИ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БАЛАНСИРОВКИ СБОРОЧНОЙ ЛИНИИ

К. Г. Кузьмин[1,a], *В. Р. Харитонова*[2,b]

[1]Georgia State University,
1 Park Place, Atlanta, GA 30303

[2]Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь

E-mail: [a]kuzminkg@gmail.com, [b]haritonova.veronica@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача балансировки сборочной линии SALBP-E. Выделен класс задач с бесконечно большим радиусом устойчивости оптимального баланса. Для остальных задач найдены нижняя и верхние достижимые оценки радиуса устойчивости оптимальных балансов в случае независимого возмущения параметров задачи. Библиогр. 24.

Ключевые слова: анализ чувствительности, неопределённые длительности операций, сборочная линия, радиус устойчивости, оптимальный баланс.

Введение

Различные постановки проблемы устойчивости в задачах дискретной оптимизации порождают многочисленные направления исследований, среди которых основным и наиболее разработанным является конструктивный подход, предложенный ещё в 1970 гг. В. К. Леонтьевым и Э. Н. Гордеевым. В рамках этого подхода исследователи занимаются получением оценок допустимых изменений в исходных данных, сохраняющих предопределённые свойства для некоторого подмножества допустимых решений [1]. Радиус наибольшей из окрестностей, в каждой точке которой этот заданный набор свойств сохраняется, называется *радиусом устойчивости.*

В зависимости от набора свойств и подмножества решений получаются различные типы устойчивости (см., например, [2, 3, 5, 6, 13]). Так, например, если множество исходных оптимальных решений имеет непустое пересечение с множеством оптимальных решений возмущённой задачи, то возникает сильная устойчивость [3,12]. Если же существует хотя бы одно оптимальное решение, сохраняющее свою оптимальность, то это сильная квазиустойчивость [6]. В случае, когда все неоптимальные решения сохраняют свою неоптимальность (т. е. новые оптимальные решения не появляются), имеет место устойчивость [11, 17]. При условии, что все оптимальные решения сохраняют свою оптимальность, проявляется квазиустойчивость [13, 17]. И, наконец, если все решения — оптимальные и неоптимальные — остаются такими же в возмущённой задаче, то имеем стабильность [6]. Заметим, что пока нет единой терминологии для обозначения разных видов устойчивости. Например, в терминологии [4, 7, 9] перечисленные выше типы устойчивости носят названия T_1-, T_2-, T_3-, T_4- и T_5-устойчивости соответственно.

Заметим, что эти типы устойчивости не зависят от конкретных решений и потому являются типами устойчивости задачи. Если же некоторое выбранное наперёд оптимальное решение сохраняет свою оптимальность в возмущённой задаче, то возникает понятие устойчивости решения [7, 18]. Именно этот тип устойчивости и будет рассмотрен в данной статье для специальной задачи теории расписаний — задачи балансировки сборочной линии, традиционно (см., например, [21]) называемой SALBP-E (Simple Assembly Line Balancing Problem — Efficiency). Эта задача является одной из важных задач, возникающих при проектировании конвейерного производства, и заключается в определении структуры сборочной линии: количества рабочих станций и распределения элементарных операций между ними [15, 21].

Известно (см., например, [1, 7]), что вычислительная сложность является одним из основных препятствий к использованию результатов теории устойчивости на практике. Однако в ряде случаев, в частности, в рассматриваемой задаче SALBP-E, это препятствие не является существенным ограничением. Во-первых, если радиус устойчивости не равен нулю, он определяет решения не только исходной задачи, но и бесконечной серии задач с параметрами, находящимися в окрестности радиуса, равного радиусу устойчивости. Таким образом, знание радиуса устойчивости может избавить от необходимости решать задачу заново при определённом уровне изменений параметров. Параметры в задачах SALBP имеют тенденцию к постоянному небольшому изменению в связи с накоплением усталости работников, различием в их профессиональных навыках, мотивации и тому подобными факторами [10, 20]. В этой связи вычисление радиуса устойчивости, даже затрагивающее полный перебор множества допустимых решений, может быть оправдано. Во-вторых, для ряда частных случаев в этой задаче возможно построить алгоритм для нахождения радиусов устойчивости, использующий и продолжающий те же процедуры, которые были задействованы при решении задачи [18, 22], что фактически означает, что радиус будет вычислен вместе с нахождением оптимального решения задачи.

Исследования устойчивости задачи SALBP-E начались с её частных случаев — задачи SALBP-1 в [22] и задачи SALBP-2 в [18, 24]. Критерий устойчивости (т. е. равенства радиуса устойчивости нулю) оптимального решения SALBP-E получен в [15]. В [16] была найдена нижняя оценка радиуса устойчивости для обобщённой задачи SALBP-1. Исследования задачи SALBP-1 продолжились в [23], где были предложены алгоритмы для отыскания допустимых, оптимальных и устойчивых решений этой задачи.

В данной работе выделен класс задач SALBP-E с бесконечным радиусом устойчивости оптимального решения. Для остальных задач найдены достижимые нижние и верхние оценки этого радиуса. Результаты были анонсированы в [8]. Аналогичные оценки для радиуса устойчивости получены в недавно опубликованной работе [19].

1. Основные понятия и определения

Пусть $\mathbf{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ и $\mathcal{O} = \mathbf{N}_n$ — множество (номеров) *операций*, $n \geqslant 2$. Этому множеству поставлен в соответствие весовой вектор $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbf{R}^n_+$ времён выполнения операций, при этом операция p выполняется за время $t_p > 0$. Кроме того, на множестве $\mathcal{O}$ определён частичный порядок $\preceq$, который обычно задаётся с помощью ациклического ориентированного графа $G = (\mathcal{O}, A)$ с множествами вершин $\mathcal{O}$ и дуг A. При этом наличие дуги (p, q) в графе G равносильно соотношению $p \preceq q$.

Следуя [15, 18], *балансом* b будем называть упорядоченный набор множеств $(W_1, W_2, \dots, W_k)$, представляющий собой разбиение множества $\mathcal{O}$ на $k \geqslant 2$ непустых попарно не пересекающихся подмножеств, удовлетворяющих условию согласованности с порядком $\preceq$:

$$\forall i, j \in \mathbf{N}_k \ \forall p \in W_i \ \forall q \in W_j \ (p \preceq q \ \Rightarrow \ i \leqslant j).$$

Иными словами, если операция p назначена на рабочую станцию с номером i, то операция q может быть назначена либо на ту же станцию, либо на станцию с бóльшим номером.

Всякий элемент $W_i = W_i(b)$ набора b называется *рабочей станцией* или просто *станцией* (баланса b). Если $p \in W_i$, то говорят, что операция p *назначена на рабочую станцию* W_i. Ясно, что каждая операция может (и должна) быть назначена ровно на одну рабочую станцию. Однако это назначение не произвольно, а согласовано с порядком $\preceq$.

Заметим, что в такой постановке задачи число рабочих станций k может меняться от баланса к балансу, т. е. $k = k(b)$.

Каждой рабочей станции $W_i(b)$ поставим в соответствие характеристический булев вектор $w_i(b) = (w_{i1}(b), w_{i2}(b), \dots, w_{in}(b))^T$, указывающий, какие работы распределены на станцию $W_i(b)$ по следующему правилу:

$$w_{ip}(b) = \begin{cases} 1, & \text{если } p\text{-я операция назначена на } i\text{-ю станцию,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для заданного графа G множество всех допустимых балансов обозначим через $\mathcal{B}$. Для любого $\kappa \in \mathbf{N}_n$ положим $\mathcal{B}^\kappa = \{b \in \mathcal{B} \mid k(b) = \kappa\}$. Под *задачей балансировки сборочной линии* SALBP-E (simple assembly line balancing problem — line efficiency) будем понимать следующую задачу минимизации:

$$f(b,t) = k(b) \max_{i=1}^{k(b)} tw_i(b) \to \min_{b \in \mathcal{B}}.$$

Все допустимые балансы, доставляющие минимум функции $f(b,t)$, составляют множество $\mathcal{B}_O(t)$.

Далее будем считать, что множество операций $\mathcal{O}$ состоит из двух непересекающихся подмножеств:

- подмножества автоматических операций $\mathcal{A}$, время выполнения которых не изменяется в процессе работы сборочной линии;
- подмножества операций $\mathcal{M}$, выполняемых вручную. Их время выполнения может варьироваться по ряду причин, среди которых накопление усталости работников, различие в их профессиональных навыках, мотивации и тому подобные факторы [14].

При этом полагаем, что множество $\mathcal{M}$ всегда непусто, а множество $\mathcal{A}$ может быть и пустым.

Ясно, что $\mathcal{O} = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{M}$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ и $\mathcal{A} = \{m+1, m+2, \dots, n\}$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, т. е. изменения могут происходить лишь в первых m операциях.

Изменения времён выполнения операций будем моделировать, прибавляя *возмущающий вектор* $t' = (t'_1, t'_2, \dots, t'_m, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ к вектору t. Таким образом, вектор времён выполнения операций в каждый конкретный момент времени может быть записан в виде $t + t' = (t_1 + t'_1, t_2 + t'_2, \dots, t_m + t'_m, t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_n)$. Будем также считать, что $t_p + t'_p \geqslant 0$, $p \in \mathcal{O}$.

Для отыскания величины потенциальных возмущений вектора t введём чебышёвскую норму l_∞ в пространстве $\mathbf{R}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{p=1}^{n} |x_p|.$$

Также нам понадобится l_1-норма

$$\|x\|_1 = \sum_{p=1}^{n} |x_p|.$$

Оптимальный баланс $b^0 \in \mathcal{B}_O(t)$ называется *устойчивым*, если существует такая ε-окрестность вектора t, что для всякого вектора $t' \in \Omega(\varepsilon) := \{t' \in \mathbf{R}^n \mid t + t' \geqslant \mathbf{0} \ \& \ \|t'\| < \varepsilon\}$ баланс b^0 продолжает быть оптимальным, т. е. $b^0 \in \mathcal{B}_O(t + t')$. Другими словами, оптимальный баланс b^0 устойчив, если

$$\Xi(b^0, t) := \{\varepsilon > 0 \mid \forall t' \in \Omega(\varepsilon) \ (b^0 \in \mathcal{B}_O(t + t'))\} \neq \varnothing.$$

Радиусом устойчивости $\rho(b^0, t)$ оптимального баланса b^0 называется [18] максимальный уровень возмущений в норме l_∞, при которых баланс b^0 сохраняет свою оптимальность, т. е.

$$\rho(b^0, t) = \sup \Xi(b^0, t).$$

Здесь и далее полагаем $\sup \varnothing = 0$.

Свойство 1. *Пусть* $b = (W_1, W_2, \dots, W_{i-1}, W_i, W_{i+1}, W_{i+2}, \dots, W_k) \in \mathcal{B}$, $k = k(b) \geqslant 3$ *и* $i \in \mathbf{N}_{k-1}$. *Тогда*

$$b' = (W_1, W_2, \dots, W_{i-1}, W_i \cup W_{i+1}, W_{i+2}, \dots, W_k) \in \mathcal{B}.$$

Свойство 2. *Для любых операций* $p, q \in \mathcal{O}$ *и всякого* $\kappa \in \mathbf{N}_n$ *найдётся такой баланс* $b \in \mathcal{B}^\kappa$, *что* p *и* q *принадлежат разным рабочим станциям этого баланса.*

Для любых вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n_+$ и натурального числа $m \leqslant n$ введём операторы левой $|\cdot]_m$ и правой $[\cdot|_{n-m}$ срезок по следующим правилам:

$$|y]_m = (0, 0, \dots, 0, y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n,$$
$$[y|_{n-m} = (y_1, y_2, \dots, y_m, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n.$$

Будем также использовать обозначение

$$\varphi_i(b, t) = k(b) t w_i(b).$$

Очевидно, что

$$f(b, t) = \max_{i=1}^{k(b)} \varphi_i(b, t).$$

2. Бесконечный радиус устойчивости

Для любых $b^0 \in \mathcal{B}_O(t)$, $b \in \mathcal{B}\backslash\{b^0\}$, $i \in \mathbf{N}_{k(b^0)}$ и $j \in \mathbf{N}_{k(b)}$ введём множество

$$\mathcal{P}(b^0, b, i, j) = \Big\{ p \in W_i(b^0) \cap W_j(b) \ \mid \ \frac{f(b, |t]_m) - \varphi_j(b, |t]_m)}{k(b)} \leqslant \frac{f(b, |t]_m) - \varphi_i(b^0, |t]_m)}{k(b^0)} \Big\}.$$

Теорема 1. *Радиус устойчивости $\rho(b^0, t)$ оптимального баланса b^0 бесконечен тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия:*

(i) $k(b^0) = 2$;
(ii) $b^0 \in \mathcal{B}_O(|t]_m)$;
(iii) $\forall i \in \mathbf{N}_2 \ (|W_i(b^0) \cap \mathcal{M}| \leqslant 1)$;
(iv) $\forall b \in \mathcal{B}\backslash\{b^0\} \ \forall p \in \mathcal{M} \ \exists i \in \mathbf{N}_2 \ \exists j \in \mathbf{N}_{k(b)} \ (p \in \mathcal{P}(b^0, b, i, j))$.

Доказательство. Сначала докажем необходимость этих условий. Пусть, напротив, некоторые из условий (i)–(iv) не выполняются, а $\rho(b^0, t) = \infty$. Очевидно, что это не может быть условие (ii), так как в этом случае $\rho(b^0, t) \leqslant \|[t|_{n-m}\| < \infty$. Далее рассмотрим оставшиеся три возможных случая.

Случай 1: $k(b^0) \neq 2$. Согласно свойству 1 найдётся баланс b, удовлетворяющий неравенству $k(b) < k(b^0)$. Пусть $p^* \in \mathcal{M} \neq \varnothing$. Зададим возмущающий вектор t' с компонентами t'_p, $p \in \mathbf{N}_n$, по следующему правилу:

$$t'_p = \begin{cases} M, & \text{если } p = p^*, \\ 0, & \text{если } p \neq p^*, \end{cases}$$

где M — достаточно большое число. Тогда верны неравенства

$$f(b^0, t + t') > k(b^0)M > f(b, t + t'),$$

свидетельствующие о том, что $b^0 \notin \mathcal{B}_O(t + t')$. Следовательно, $\rho(b^0, t) < \infty$, что противоречит предположению.

Случай 2: $k(b^0) = 2$ и $\exists i \in \mathbf{N}_2 \ (|W_i(b^0) \cap \mathcal{M}| \geqslant 2)$. Пусть $p', p'' \in W_i(b^0) \cap \mathcal{M}$, причём $p' \neq p''$. На основании свойства 2 существует баланс $b \in \mathcal{B}^2$, для которого p' и p'' принадлежат разным рабочим станциям. Зададим возмущающий вектор t' с компонентами t'_p, $p \in \mathbf{N}_n$, по следующему правилу:

$$t'_p = \begin{cases} M, & \text{если } p = p' \text{ или } p = p'', \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где M — достаточно большое число. Тогда имеют место неравенства

$$f(b^0, t + t') > 2M > f(b, t + t'),$$

свидетельствующие о том, что $b^0 \notin \mathcal{B}_O(t + t')$. Итак, и во втором случае $\rho(b^0, t) < \infty$, что противоречит предположению.

Случай 3. Пусть выполняются условия (i)–(iii), а условие (iv) не выполняется. Это означает, что найдутся баланс $b \in \mathcal{B} \backslash \{b^0\}$ и индекс $p^* \in \mathcal{M}$ такие, что для любых $i \in \mathbf{N}_2, j \in \mathbf{N}_{k(b)}$ таких, что $p^* \in W_i(b^0) \cap W_j(b)$, верно неравенство

$$\frac{f(b, |t]_m) - \varphi_j(b, |t]_m)}{k(b)} > \frac{f(b, |t]_m) - \varphi_i(b^0, |t]_m)}{k(b^0)}. \tag{1}$$

Зададим возмущающий вектор t' с компонентами t'_p, $p \in \mathbf{N}_n$, по следующему правилу:

$$t'_p = \begin{cases} M, & \text{если } p = p^*, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где

$$\frac{f(b, |t]_m) - \varphi_i(b^0, |t]_m)}{k(b^0)} < M < \frac{f(b, |t]_m) - \varphi_j(b, |t]_m)}{k(b)}.$$

Поэтому выводим

$$\varphi_j(b, |t]_m + t') = \varphi_j(b, |t]_m) + Mk(b) < f(b, |t]_m).$$

Поскольку для каждого индекса $l \in \mathbf{N}_{k(b)} \setminus \{j\}$ верны соотношения

$$\varphi_l(b, |t]_m + t') = \varphi_l(b, |t]_m) \leqslant f(b, |t]_m),$$

то

$$f(b, |t]_m + t') = f(b, |t]_m).$$

Аналогичным образом доказывается, что

$$\varphi_i(b^0, |t]_m + t') > f(b, |t]_m) = f(b, |t]_m + t').$$

Таким образом, $f(b^0, t{+}t') > f(b, t{+}t')$, т. е. $b^0 \notin \mathcal{B}_O(t{+}t')$. Следовательно, $\rho(b^0, t) < \infty$, что противоречит предположению.

Теперь докажем достаточность условий (i)–(iv). Пусть они выполнены. Тогда в силу (iii) существует рабочая станция $W_i(b^0)$ баланса b^0 такая, что на ней есть ровно одна операция из $\mathcal{M}$. Пусть $b \in \mathcal{B} \backslash \{b^0\}$ и $W_j(b)$ — рабочая станция баланса b с условием $p \in W_j(b)$. Сначала докажем, что для любого числа $\varepsilon > 0$, вектора $t' \in \Omega(\varepsilon)$ и индекса $l \in \mathbf{N}_2 = \{i, i'\}$ выполняется неравенство

$$\varphi_l(b^0, |t]_m + t') \leqslant f(b, |t]_m + t'). \tag{2}$$

В зависимости от величины числа ε возможны следующие два случая.

Случай 1: $\varepsilon k(b^0) \leqslant f(b, |t]_m) - \varphi_i(b^0, |t]_m)$. С учётом (iii) выводим

$$\varphi_i(b^0, |t]_m + t') \leqslant \varphi_i(b^0, |t]_m) + k(b^0)\varepsilon \leqslant f(b, |t]_m) \leqslant f(b, |t]_m + t').$$

Случай 2: $\varepsilon k(b^0) > f(b, |t]_m) - \varphi_i(b^0, |t]_m)$. С учётом (i) и (iv) получаем

$$\varphi_i(b^0, |t]_m + t') \leqslant \varphi_j(b, |t]_m + t') \leqslant f(b, |t]_m + t').$$

Итак, неравенство (2) доказано для $l = i$. Далее покажем его справедливость при $l = i'$.

Если на второй станции $W_{i'}$ баланса b^0 есть операция из $\mathcal{M}$, то неравенство (2) доказывается аналогично. Если на станции $W_{i'}$ нет операции из $\mathcal{M}$, то ввиду (ii) находим

$$\varphi_{i'}(b^0, |t]_m + t') = \varphi_{i'}(b^0, |t]_m) \leqslant f(b, |t]_m) \leqslant f(b, |t]_m + t').$$

Следовательно, неравенство (2) верно и для $l = i'$. Таким образом,

$$f(b^0, |t]_m + t') = \max\left\{\varphi_i(b^0, |t]_m + t'), \varphi_{i'}(b^0, |t]_m + t')\right\} \leqslant f(b, |t]_m + t').$$

Резюмируя, заключаем, что для всякого баланса $b \in \mathcal{B} \backslash \{b^0\}$ и любых числа $\varepsilon > 0$ и вектора $t' \in \Omega(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$f(b^0, t + t') \leqslant f(b, t + t').$$

Следовательно, $\rho(b^0, t) = \infty$. Теорема 1 доказана.

3. Нижняя оценка

Для любых двух балансов $b, b^0 \in \mathcal{B}$ положим

$$\mathcal{N}_{ji} = (W_j(b) \setminus W_i(b^0)) \cap \mathcal{M}, \quad \mathcal{W}_j(b) = W_j(b) \cap \mathcal{M},$$
$$\mathcal{W}_{ji} = \mathcal{W}_j(b) \cap \mathcal{W}_i(b^0).$$

Пусть $n_1 = |\mathcal{N}_{ji}|, n_2 = |\mathcal{W}_j(b)|$,

$$N = \begin{cases} n_1, & \text{если } k(b) \leqslant k(b^0), \\ n_2, & \text{если } k(b) > k(b^0). \end{cases}$$

Если $N \neq 0$, упорядочим числа t_p по неубыванию: $0 < t_{p_1} \leqslant t_{p_2} \leqslant \ldots \leqslant t_{p_N}$. Обозначим через $\widetilde{w}_j^r$ вектор w_j, в котором первые r элементов $w_{p_1}, w_{p_2}, \ldots, w_{p_r}$ равны нулю.

Введём следующее обозначение:

$$\Delta(i, b^0, j, b) = \max_{r=0}^{N} \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^r(b^0)}{\left\|\left[k(b)\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^r(b^0)\right|_{n-m}\right\|_1}$$
$$= \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)}{\left\|\left[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)\right|_{n-m}\right\|_1}. \quad (3)$$

Утверждение 1. *Если* $r \leqslant r^*$, *то* $t_{p_r} \leqslant \Delta(i, b^0, j, b)$, *а если* $r > r^*$, *то* $t_{p_r} \geqslant \Delta(i, b^0, j, b)$.

Доказательство. Пусть сначала $r \leqslant r^*$. Так как на r^* достигается максимум в (3), то

$$\frac{k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)}{\big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1} \leqslant \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)}{\big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1}. \qquad (4)$$

Заметив, что

$$\frac{k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)}{\big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1} = \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0) - \chi t_{p_{r^*}}}{\big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1 - \chi},$$

где

$$\chi = \begin{cases} k(b), & \text{если } p_{r^*} \in \mathcal{N}_{ji}, \\ k(b) - k(b^0) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

с учётом (4) выводим

$$\begin{aligned} &\big(k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)\big) \\ &\qquad \times \big(\big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1 - \chi\big) \\ &\qquad \leqslant \big(k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0) - \chi t_{p_{r^*}}\big) \\ &\qquad\qquad \times \big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &-\chi\big(k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)\big) \\ &\qquad \leqslant -\chi t_{p_{r^*}} \big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1, \end{aligned}$$

откуда находим

$$t_{p_{r^*}} \leqslant \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)}{\big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*-1}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*-1}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1} \leqslant \Delta(i, b^0, j, b).$$

Так как $t_{p_1} \leqslant t_{p_2} \leqslant \ldots \leqslant t_{p_{r^*}}$, неравенство $t_{p_r} \leqslant \Delta(i, b^0, j, b)$ верно и для всякого $r \leqslant r^*$.

Доказательство при $r > r^*$ аналогично с учётом неравенств $t_{p_{r^*+1}} \leqslant \ldots \leqslant t_{p_N}$ и равенства

$$\frac{k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*+1}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*+1}(b^0)}{\big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*+1}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*+1}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1} = \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^{r^*}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0) - \chi t_{p_{r^*+1}}}{\big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^{r^*}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1 - \chi}.$$

Утверждение 1 доказано.

Теорема 2. *Для радиуса устойчивости оптимального баланса $b^0 \in \mathcal{B}_O(t)$ задачи балансировки сборочной линии* SALBP-E *справедлива нижняя оценка*

$$\rho(b^0, t) \geqslant \min_{b \in \mathcal{B}\setminus\{b^0\}} \min_{i=1}^{k(b^0)} \max_{j=1}^{k(b)} \max_{r=0}^{N} \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^r(b^0)}{\big\| \big[k(b)\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^r(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1}. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим через ψ правую часть (5), и пусть $\Delta = \max_{j=1}^{k(b)} \Delta(i, b^0, j, b) = \Delta(i, b^0, j^*, b)$. Сначала докажем, что для каждого баланса $b \in \mathcal{B} \setminus \{b^0\}$ и станции $W_i(b^0)$ при $t' \in \Omega(\varepsilon)$, где $\varepsilon < \Delta$, найдётся индекс $j \in \mathbf{N}_{k(b)}$ с условием $\varphi_j(b) > \varphi_i(b^0)$. Заметим, что справедливы равенства

$$\varphi_{j^*}(b, t + t') = k(b)tw_{j^*}(b) + k(b) \sum_{p \in W_{j^*}} t'_p, \tag{6}$$

$$\varphi_i(b^0, t + t') = k(b^0)tw_i(b^0) + k(b^0) \sum_{p \in W_i} t'_p. \tag{7}$$

Используя утверждение 1, оценим разность $\varphi_{j^*}(b, t + t')$ и $\varphi_i(b^0, t + t')$. При этом возможны следующие два случая.

Случай 1: $k(b) \leqslant k(b^0)$. С учётом (6) и (7) получаем

$$\varphi_{j^*}(b, t + t') - \varphi_i(b^0, t + t') = k(b)tw_{j^*}(b) - k(b^0)tw_i(b^0) - (k(b^0) - k(b)) \sum_{p \in \mathcal{W}_{j^*i}} t'_p + k(b) \sum_{p \in \mathcal{N}_{j^*i}} t'_p - k(b^0) \sum_{p \in \mathcal{N}_{ij^*}} t'_p.$$

Из условия $t' \in \Omega(\varepsilon)$ при $\varepsilon < \Delta$ вытекает неравенство $-\min\{t_p, \Delta\} \leqslant t'_p < \Delta$ при любом $p \in \mathcal{O}$. Отсюда получаем

$$\varphi_{j^*}(b, t + t') - \varphi_i(b^0, t + t') > k(b)tw_{j^*}(b) - k(b^0)tw_i(b^0) - (k(b^0) - k(b)) \sum_{p \in \mathcal{W}_{j^*i}} \Delta - k(b) \sum_{p \in \mathcal{N}_{j^*i}} \min\{t_p, \Delta\} - k(b^0) \sum_{p \in \mathcal{N}_{ij^*}} \Delta.$$

Далее, пользуясь утверждением 1 и вынося Δ за скобки, находим

$$\varphi_{j^*}(b,t+t') - \varphi_i(b^0,t+t') > k(b)t\widetilde{w}_{j^*}^{r^*}(b) - k(b^0)tw_i(b^0)$$
$$- \Delta(k(b)(|\mathcal{N}_{j^*i}| - r^*) + (k(b^0) - k(b))|\mathcal{W}_{j^*i}| + k(b^0)|\mathcal{N}_{ij^*}|)$$
$$= k(b)t\widetilde{w}_{j^*}^{r^*}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0) - \Delta(k(b)(|\mathcal{N}_{j^*i}| - r^*)$$
$$+ (k(b^0) - k(b))|\mathcal{W}_{j^*i}| + k(b^0)|\mathcal{N}_{ij^*}|) = k(b)t\widetilde{w}_{j^*}^{r^*}(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)$$
$$- \Delta\big\|\big[k(b)\widetilde{w}_{j^*}^{r^*}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1 = 0.$$

Случай 2: $k(b) > k(b^0)$. Вновь учитывая (6) и (7), аналогично первому случаю выводим

$$\varphi_{j^*}(b,t+t') - \varphi_i(b^0,t+t') = k(b)tw_{j^*}(b) - k(b^0)tw_i(b^0)$$
$$+ (k(b) - k(b^0)) \sum_{p\in\mathcal{W}_{j^*i}} t'_p + k(b) \sum_{p\in\mathcal{N}_{j^*i}} t'_p - k(b^0) \sum_{p\in\mathcal{N}_{ij^*}} t'_p$$
$$> k(b)tw_{j^*}(b) - k(b^0)tw_i(b^0) + (k(b) - k(b^0)) \sum_{p\in\mathcal{W}_{j^*i}} (-\min\{t_p,\Delta\})$$
$$+ k(b) \sum_{p\in\mathcal{N}_{j^*i}} (-\min\{t_p,\Delta\}) - k(b^0) \sum_{p\in\mathcal{N}_{ij^*}} \Delta = k(b)t\widetilde{w}_{j^*}^{r^*}(b)$$
$$- k(b^0)t\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0) - \Delta\big\|\big[k(b)\widetilde{w}_{j^*}^{r^*}(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^{r^*}(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1 = 0.$$

Таким образом, при $t' \in \Omega(\varepsilon)$ имеет место неравенство $\varphi_{j^*}(b,t+t') > \varphi_i(b^0,t+t')$. Итак, если $\varepsilon < \min\limits_{i=1}^{k(b^0)} \Delta(i,b^0,b)$, то для всякого $i \in \mathbf{N}_{k(b^0)}$ существует $j \in \mathbf{N}_{k(b)}$ такой, что $\varphi_j(b,t+t') > \varphi_i(b^0,t+t')$, а значит, верно неравенство $f(b^0,t+t') < f(b,t+t')$. Резюмируя, заключаем, что $f(b^0,t+t') < f(b,t+t')$ для любого баланса $b \in \mathcal{B} \setminus \{b^0\}$ и возмущающего вектора $t' \in \Omega(\varepsilon)$ при $\varepsilon < \psi$. Это означает, что $b^0 \in \mathcal{B}_O(t+t')$ при $\varepsilon < \psi$. Следовательно, $\rho(b^0,t) \geqslant \psi$. Теорема 2 доказана.

4. Верхние оценки

Для любых $b^0, b \in \mathcal{B}$ и $i \in \mathbf{N}_{k(b^0)}$, $j \in \mathbf{N}_{k(b)}$ положим

$$\sigma_{ij}(b^0,b) = k(b^0)|\mathcal{W}_i(b^0)| - k(b)|\mathcal{W}_{ji}|.$$

Для каждого $i \in \mathbf{N}_{k(b^0)}$ введём множество

$$\mathcal{B}'_i = \{b \in \mathcal{B} \mid \forall j \in \mathbf{N}_{k(b)}\ (\sigma_{ij}(b^0,b) \geqslant 0)\}.$$

Отметим, что множество $\mathcal{B}'_i$ непусто при любом $i \in \mathbf{N}_{k(b^0)}$.

Теорема 3. *Для радиуса устойчивости оптимального баланса* $b^0 \in \mathcal{B}_O(t)$ *задачи балансировки сборочной линии* SALBP-E *справедлива верхняя оценка*

$$\rho(b^0, t) \leqslant \min_{i \in \mathbf{N}_{k(b^0)}} \min_{b \in \mathcal{B}'_i} \max_{j \in \mathbf{N}_{k(b)}} \frac{k(b)tw_j(b) - k(b^0)tw_i(b^0)}{\sigma_{ij}(b^0, b)}. \tag{8}$$

Доказательство. Для краткости обозначим правую часть (8) через ψ. Выберем рабочую станцию $W_i(b^0)$ и баланс $b \in \mathcal{B}'_i$ такие, что

$$\psi = \max_{j \in \mathbf{N}_{k(b)}} \frac{k(b)tw_j(b) - k(b^0)tw_i(b^0)}{\sigma_{ij}(b^0, b)}.$$

Заметим, что при каждом $j \in \mathbf{N}_{k(b)}$ для всякого действительного числа δ неравенство

$$\varphi_j(b, t) + \delta k(b)|\mathcal{W}_{ji}| \leqslant \varphi_i(b^0, t) + \delta k(b^0)|\mathcal{W}_i(b^0)|$$

эквивалентно неравенству

$$\delta \geqslant \frac{k(b)tw_j(b) - k(b^0)tw_i(b^0)}{\sigma_{ij}(b^0, b)}. \tag{9}$$

Возмущающий вектор t' с компонентами t'_p, $p \in \mathbf{N}_n$, зададим по следующему правилу:

$$t'_p = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } p \in W_i(b^0), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

причём в качестве ε выберем число, большее чем δ, которое (в силу (9)) не меньше чем ψ. Тогда с учётом (9) для любого $j \in \mathbf{N}_{k(b)}$ будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_j(b, t + t') = \varphi_j(b, t) + \varepsilon k(b)|\mathcal{W}_{ji}| \\ < \varphi_i(b^0, t) + \varepsilon k(b^0)|\mathcal{W}_i(b^0)| = \varphi_i(b^0, t + t'). \end{aligned}$$

Это означает, что найдётся индекс $j^* \in \mathbf{N}_{k(b)}$, на котором достигается равенство $f(b, t + t') = \varphi_{j^*}(b, t + t')$, поэтому

$$f(b, t + t') = \varphi_{j^*}(b, t + t') < \varphi_i(b^0, t + t') \leqslant f(b^0, t + t').$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > \psi$ существует такой возмущающий вектор $t' \in \Omega(\varepsilon)$, что баланс $b^0 \notin \mathcal{B}_O(t + t')$. Итак, $\rho(b^0, t) \leqslant \psi$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Для радиуса устойчивости оптимального баланса* $b^0 \in \mathcal{B}_O(t)$ *задачи балансировки сборочной линии* SALBP-E *справедлива верхняя оценка*

$$\rho(b^0,t) \leqslant \min_{b\in\mathcal{B}^*(b^0)\setminus\{b^0\}} \min_{i=1}^{k(b^0)} \max_{j=1}^{k(b)} \max_{r=0}^{N} \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^r(b^0)}{\big\|\big[k(b)\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^r(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1}, \quad (10)$$

где $\mathcal{B}^*(b^0) = \{b \in \mathcal{B} \mid k(b^0) \geqslant k(b)\}$.

Доказательство. Обозначим правую часть (10) через ψ. Зафиксируем рабочую станцию $W_i(b^0)$ и баланс $b \in \mathcal{B}^*(b^0)\setminus\{b^0\}$ такие, что

$$\psi = \max_{j=1}^{k(b)} \max_{r=0}^{N} \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^r(b^0)}{\big\|\big[k(b)\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^r(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1}.$$

Возмущающий вектор t' с компонентами t'_p, $p \in \mathbf{N}_n$, зададим по правилу

$$t'_p = \begin{cases} \delta, & \text{если } p \in \mathcal{W}_i(b^0), \\ -\min\{\delta, |t_p|\}, & \text{если } p \in \mathcal{M}\setminus W_i(b^0), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\delta > 0$. При заданных возмущениях справедливы соотношения

$$\varphi_i(b^0, t+t') = k(b^0)tw_i(b^0) + \delta k(b^0)|\mathcal{W}_i(b^0)|,$$
$$\varphi_j(b, t+t') = k(b)tw_j(b) + \delta k(b)|\mathcal{W}_{ji}| - k(b)\sum_{p\in\mathcal{N}_{ji}} \min\{\delta, |t_p|\}.$$

Предположим, что неравенство $|t_p| < \delta$ выполнено для r элементов из $\mathcal{N}_{ji}$. Тогда $\varphi_j(b, t+t')$ и $\varphi_i(b^0, t+t')$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\varphi_j(b, t+t') = k(b)t\widetilde{w}_j^r(b) + \delta k(b)|\mathcal{W}_{ji}| - \delta k(b)(N-r), \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\varphi_i(b^0, t+t') &= k(b^0)tw_i(b^0) + \delta k(b^0)|\mathcal{W}_i(b^0)| \\ &= k(b)t\widetilde{w}_i^r(b^0) + \delta k(b^0)|\mathcal{W}_i(b^0)|. \quad (12)\end{aligned}$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} &k(b^0)|\mathcal{W}_i(b^0)| - k(b)|\mathcal{W}_{ji}| + k(b)(N-r) \\ &\quad = k(b^0)|\mathcal{N}_{ij}| + k(b^0)|\mathcal{W}_{ji}| - k(b)|\mathcal{W}_{ji}| + |-k(b)(N-r)| \\ &= \big\|\big[k(b^0)w_i(b^0) - k(b)\widetilde{w}_j^r(b)\big|_{n-m}\big\|_1 = \big\|\big[k(b^0)\widetilde{w}_i^r(b^0) - k(b)\widetilde{w}_j^r(b)\big|_{n-m}\big\|_1 \\ &\qquad = \big\|\big[k(b)\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^r(b^0)\big|_{n-m}\big\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом (11) и (12) приходим к выводу, что следующие два неравенства эквивалентны:

$$\varphi_j(b,t+t') < \varphi_i(b^0,t+t'), \quad \delta > \frac{k(b)t\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)t\widetilde{w}_i^r(b^0)}{\left\| \left[k(b)\widetilde{w}_j^r(b) - k(b^0)\widetilde{w}_i^r(b^0)\right|_{n-m} \right\|_1}.$$

Тем самым при $\delta > \psi$ для всякого $j \in \mathbf{N}_{k(b)}$ верно неравенство $\varphi_j(b,t+t') < \varphi_i(b^0,t+t')$, откуда заключаем, что $f(b,t+t') < f(b^0,t+t')$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > \psi$ найдётся возмущающий вектор $t' \in \Omega(\varepsilon)$ такой, что баланс $b^0 \notin \mathcal{B}_O(t+t')$. Итак, $\rho(b^0,t) \leqslant \psi$. Теорема 4 доказана.

Из теорем 2 и 4 в частном случае, когда коэффициент k не зависит от b, вытекает следующий результат, полученный в [18].

Следствие 1. *Для радиуса устойчивости оптимального баланса* $b^0 \in B_O(t)$ *задачи балансировки сборочной линии* SALBP-2 *справедлива формула*

$$\rho(b^0,t) = \min_{b\in B\setminus\{b^0\}} \min_{i=1}^{k} \max_{j=1}^{k} \max_{r=0}^{N} \frac{t\widetilde{w}_j^r(b) - t\widetilde{w}_i^r(b^0)}{\left\| \left[\widetilde{w}_j^r(b) - \widetilde{w}_i^r(b^0)\right|_{n-m} \right\|_1}.$$

Авторы благодарят анонимного рецензента за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гордеев Э. Н.** Сравнение трёх подходов к исследованию устойчивости решений задач дискретной оптимизации и вычислительной геометрии // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 3. С. 18–35.
2. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования // Дискрет. математика. 2007. Т. 19, № 3. С. 79–83.
3. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Об одном типе устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования в случае монотонной нормы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 5. С. 45–51.
4. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Критерии устойчивости векторных комбинаторных задач на «узкие места» в терминах бинарных отношений // Кибернетика и систем. анализ. 2008. № 3. С. 103–111.
5. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Анализ устойчивости эффективного решения векторной задачи о максимальном разрезе графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 4. С. 27–35.
6. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 47–69.

7. **Кузьмин К. Г.** Единый подход к получению количественных характеристик устойчивости задачи о максимальном разрезе графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 5. С. 30–51.
8. **Кузьмин К. Г., Харитонова В. Р.** Мера устойчивости решений задачи балансировки сборочной линии SALBP-E // Дискретные модели в теории управляющих систем: Тр. X Междунар. конф. (Москва, Россия, 23–25 мая 2018 г.). Москва: МАКС Пресс, 2018. С. 175–178.
9. **Сергиенко И. В., Шило В. П.** Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев: Наукова думка, 2003. 258 с.
10. **Chica M., Gordon O., Damas S., Bautista J.** A robustness information and visualization model for time and space assembly line balancing under uncertain demand // Int. J. Prod. Econ. 2013. Vol. 145. P. 761–772.
11. **Emelichev V. A., Nikulin Yu. V.** Aspects of stability for multicriteria quadratic problems of Boolean programming // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat. 2018. No. 2. P. 30–40.
12. **Emelichev V. A., Nikulin Yu. V.** Strong stability measures for multicriteria quadratic integer programming problem of finding extremum solutions // Comput. Sci. J. Mold. 2018. Vol. 26, No. 2. P. 115–125.
13. **Emelichev V. A., Podkopaev D. P.** Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optim. 2010. Vol. 7, No. 1–2. P. 48–63.
14. **Gamberini R., Grassi A., Rimini B.** A new multiobjective heuristic algorithm for solving the stochastic assembly line rebalancing problem // Int. J. Prod. Econ. 2006. Vol. 102. P. 226–243.
15. **Gurevsky E. E., Battaïa O., Dolgui A. B.** Balancing of simple assembly lines under variations of task processing times // Ann. Oper. Res. 2012. Vol. 201. P. 265–286.
16. **Gurevsky E. E., Battaïa O., Dolgui A. B.** Stability measure for a generalized assembly line balancing problem // Discrete Appl. Math. 2013. Vol. 161. P. 377–394.
17. **Kuzmin K. G., Nikulin Yu. V., Mäkelä M.** On necessary and sufficient conditions for stability and quasistability in combinatorial multicriteria optimization // Control Cybern. 2017. Vol. 46, No. 4. P. 361–382.
18. **Lai T.-C., Sotskov Yu. N., Dolgui A. B., Zatsiupa A.** Stability radii of optimal assembly line balances with a fixed workstation set // Int. J. Prod. Econ. 2016. Vol. 182. P. 356–371.
19. **Lai T.-C., Sotskov Yu. N., Dolgui A. B.** The stability radius of an optimal line balance with maximum efficiency for a simple assembly line // Eur. J. Oper. Res. 2019. Vol. 274. P. 466–481.
20. **Otto A., Otto C., Scholl A.** Systematic data generation and test design for solution algorithms on the example of SALBPGen for assembly line balancing // Eur. J. Oper. Res. 2013. Vol. 228. P. 33–45.
21. **Scholl A.** Balancing and sequencing of assembly lines. Heidelberg: Physica-Verl., 1999. 318 p.

22. **Sotskov Yu. N., Dolgui A. B., Portmann M.-C.** Stability analysis of optimal balance for assembly line with fixed cycle time // Eur. J. Oper. Res. 2006. Vol. 168, No. 3. P. 783–797.
23. **Sotskov Yu. N., Dolgui A. B., Lai T.-C., Zatsiupa A.** Enumerations and stability analysis of feasible and optimal line balances for simple assembly lines // Comput. Ind. Eng. 2015. Vol. 90. P. 241–258.
24. **Sotskov Yu. N., Dolgui A. B., Sotskova N. Yu., Werner F.** Stability of optimal line balance with given station set // Supply chain optimization. New York: Springer, 2005. P. 135–149. (Appl. Optim. Book Ser.; Vol. 94.).

Кузьмин Кирилл Геннадьевич
Харитонова Вероника Ренальдовна

Статья поступила
6 августа 2018 г.
После доработки —
25 февраля 2019 г.
Принята к публикации
27 февраля 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2019. Vol. 26, No. 2. P. 79–97

UDC 519.8 DOI 10.33048/daio.2019.26.626

ESTIMATING THE STABILITY RADIUS OF AN OPTIMAL SOLUTION TO THE SIMPLE ASSEMBLY LINE BALANCING PROBLEM

K. G. Kuzmin[1,a] and *V. R. Haritonova*[2,b]

[1]Georgia State University,
1 Park Place, Atlanta, GA 30303

[2]Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Avenue, 220030 Minsk, Belarus

E-mail: [a]`kuzminkg@gmail.com`, [b]`haritonova.veronica@gmail.com`

Abstract. The simple assembly line balancing problem (SALBP) is considered. We describe the special class of problems with an infinitely large stability radius of the optimal balance. For other tasks we received the lower and the upper reachable estimates of the stability radius of optimal balances in the case of an independent perturbation of the parameters of the problem. Bibliogr. 24.

Keywords: sensitivity analysis, uncertain operation duration, assembly line, stability radius, optimal balance.

REFERENCES

1. **E. N. Gordeev,** Comparison of three approaches to studying stability of solutions to problems of discrete optimization and computational geometry, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 3, 18–35, 2015. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **9**, No. 3, 358–366, 2015.
2. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** A general approach to studying the stability of a Pareto optimal solution of a vector integer linear programming problem, *Diskretn. Mat.,* **19**, No. 3, 79–83, 2007. Translated in *Discrete Math. Appl.,* **17**, No. 4, 349–354, 2007.
3. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** On a type of stability of a milticriteria integer linear programming problem in the case of a monotone norm, *Izv. RAN, Teor. Sist. Upravl.,* No. 5, 45–51, 2007. Translated in *J. Comput. Syst. Sci. Int.,* **46**, No. 5, 714–720, 2007.
4. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** Stability criteria in vector combinatorial bottleneck problems in terms of binary relations, *Kibern. Sist. Anal.,* No. 3, 103–111, 2008. Translated in *Cybern. Syst. Anal.,* **44**, No. 3, 397–404, 2008.

5. **V. A. Emelichev** and **K. G. Kuzmin,** Stability analysis of the efficient solution to a vector problem of a maximum cut, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **20**, No. 4, 27–35, 2013.
6. **V. A. Emelichev** and **D. P. Podkopaev,** Stability and regularization of vector integer linear programming problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **8**, No. 1, 47–69, 2001.
7. **K. G. Kuzmin,** A general approach to the calculation of stability radii for the max-cut problem with multiple criteria, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.,* **22**, No. 5, 30–51, 2015. Translated in *J. Appl. Ind. Math.,* **9**, No. 4, 527–539, 2015.
8. **K. G. Kuzmin** and **V. R. Haritonova,** The measure of stability for solutions to a simple assembling linear balancing problem SALBP-E, in *Tr. X Mezhdunar. konf. "Diskretnye modeli v teorii upravlyayushchikh sistem"* (Proc. 10th Int. Conf. "Discrete Models in the Theory of Control Systems"), *Moscow, Russia, May 23–25, 2018,* pp. 175–178, MAKS Press, Moscow, 2018.
9. **I. V. Sergienko** and **V. P. Shilo,** *Discrete Optimization Problems: Problems, Solution Methods, Research,* Naukova dumka, Kiev, 2003.
10. **M. Chica, O. Gordon, S. Damas,** and **J. Bautista,** A robustness information and visualization model for time and space assembly line balancing under uncertain demand, *Int. J. Prod. Econ.,* **145**, 761–772, 2013.
11. **V. A. Emelichev** and **Yu. V. Nikulin,** Aspects of stability for multicriteria quadratic problems of Boolean programming, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat.,* No. 2, 30–40, 2018.
12. **V. A. Emelichev** and **Yu. V. Nikulin,** Strong stability measures for multicriteria quadratic integer programming problem of finding extremum solutions, *Comput. Sci. J. Mold.,* **26**, No. 2, 115–125, 2018.
13. **V. A. Emelichev** and **D. P. Podkopaev,** Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming, *Discrete Optim.,* **7**, No. 1–2, 48–63, 2010.
14. **R. Gamberini, A. Grassi,** and **B. Rimini,** A new multiobjective heuristic algorithm for solving the stochastic assembly line rebalancing problem, *Int. J. Prod. Econ.,* **102**, 226–243, 2006.
15. **E. E. Gurevsky, O. Battaïa,** and **A. B. Dolgui,** Balancing of simple assembly lines under variations of task processing times, *Ann. Oper. Res.,* **201**, 265–286, 2012.
16. **E. E. Gurevsky, O. Battaïa,** and **A. B. Dolgui,** Stability measure for a generalized assembly line balancing problem, *Discrete Appl. Math.,* **161**, 377–394, 2013.
17. **K. G. Kuzmin, Yu. V. Nikulin,** and **M. Mäkelä,** On necessary and sufficient conditions for stability and quasistability in combinatorial multicriteria optimization, *Control Cybern.,* **46**, No. 4, 361–382, 2017.
18. **T.-S. Lai, Yu. N. Sotskov, A. B. Dolgui,** and **A. Zatsiupa,** Stability radii of optimal assembly line balances with a fixed workstation set, *Int. J. Prod. Econ.,* **182**, 356–371, 2016.
19. **T.-S. Lai, Yu. N. Sotskov,** and **A. B. Dolgui,** The stability radius of an optimal line balance with maximum efficiency for a simple assembly line, *Eur. J. Oper. Res.,* **274**, 466–481, 2019.

20. A. Otto, C. Otto, and **A. Scholl,** Systematic data generation and test design for solution algorithms on the example of SALBPGen for assembly line balancing, *Eur. J. Oper. Res.,* **228**, 33–45, 2013.

21. A. Scholl, *Balancing and Sequencing of Assembly Lines,* Physica-Verl., Heidelberg, 1999.

22. Yu. N. Sotskov, A. B. Dolgui, and **M.-C. Portmann,** Stability analysis of optimal balance for assembly line with fixed cycle time, *Eur. J. Oper. Res.,* **168**, No. 3, 783–797, 2006.

23. Yu. N. Sotskov, A. B. Dolgui, T.-S. Lai, and **A. Zatsiupa,** Enumerations and stability analysis of feasible and optimal line balances for simple assembly lines, *Comput. Ind. Eng.,* **90**, 241–258, 2015.

24. Yu. N. Sotskov, A. B. Dolgui, N. Yu. Sotskova, and **F. Werner,** Stability of optimal line balance with given station set, in *Supply Chain Optimization,* pp. 135–149, Springer, New York, 2005 (Appl. Optim., Vol. 94).

Kirill G. Kuzmin
Veronica R. Haritonova

Received August 6, 2018
Revised February 25, 2019
Accepted February 27, 2019