АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ ОТСЕЧЕНИЙ
ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
В КОНКУРЕНТНОЙ БОРЬБЕ НА РЫНКЕ*)

В. Л. Береснев^{1,2,a}, А. А. Мельников^{1,2,b}

¹Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: ^aberesnev@math.nsc.ru, ^bmelnikov@math.nsc.ru

Аннотация. Исследуется математическая модель конкурентной борьбы на рынке между двумя соперничающими сторонами. Стороны последовательно предлагают рынку свою продукцию и стремятся получить максимальную прибыль. Модель построена на основе игры Штакельберга и записывается в виде задачи двухуровневого целочисленного программирования. Эта задача сводится к задаче конкурентного размещения предприятий (CompFLP) с предписанным выбором поставщиков, относящейся к семейству двухуровневых моделей, обобщающих классическую задачу размещения предприятий. Для задачи CompFLP с предписанным выбором поставщиков предлагается алгоритм поиска пессимистического оптимального решения, представляющий собой итеративную процедуру последовательного усиления оценочных задач дополнительными ограничениями. Оценочная задача даёт верхнюю границу для целевой функции задачи CompFLP и получается из двухуровневой модели исключением «внутренней» целевой функции. Для усиления оценочных задач предлагается новая система дополнительных ограничений. Приводятся результаты вычислительных экспериментов на тестовых примерах задачи CompFLP с предписанным выбором поставщиков, демонстрирующие вычислительные возможности предложенного алгоритма. Табл. 2, библиогр. 17.

Ключевые слова: конкуренция на рынке, игра Штакельберга, двухуровневое программирование, оценочная задача.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01021).

Введение

В [4] предложена математическая модель принятия наилучших решений конкурирующими сторонами, стремящимися завоевать долю на рынке продукции некоторых видов. Модель построена на основе игры Штакельберга [16], где соперничающие стороны последовательно принимают решения, стремясь достичь каждая своей цели. На первом этапе фирма-лидер решает, какие виды продукции и по каким ценам предложить рынку, зная, что аналогичную продукцию может предложить рынку конкурирующая сторона. На втором этапе фирма-последователь, зная решение, принятое фирмой-лидером, делает свой выбор, стремясь предложить рынку более привлекательные виды продукции по, возможно, более низким ценам. Наконец, на третьем этапе каждый потребитель, исходя из своих собственных целей (предпочтений), выбирает на рынке наиболее привлекательный для него вид продукции и приносит доход либо фирме-лидеру, либо фирме-последователю. Задача фирмы-лидера в рассматриваемом соперничестве состоит в выборе такого решения, которое даёт наибольшую прибыль при условии, что фирма-последователь, принимая решение, будет также стремиться к получению наибольшей прибыли. Основная особенность модели состоит в предположении дискретности цен, назначаемых сторонами на свою продукцию. Это предположение позволяет сформулировать задачу принятия решений при конкурентной борьбе на рынке как задачу конкурентного размещения предприятий (CompFLP) с предписанным выбором поставщиков [2, 6]. В случае предписанного выбора поставщиков сторона, захватившая потребителя, назначает для его обслуживания наиболее предпочтительное для этого потребителя предприятие.

Задача CompFLP с предписанным выбором поставщиков относится к семейству моделей конкурентного размещения предприятий [1, 2, 7, 8], в которых задачи конкурирующих сторон (Лидера и Последователя) представляют собой классическую задачу размещения предприятий с предпочтениями [10, 13, 17]. Для задач этого семейства, как и для многих других двухуровневых моделей, понятие оптимального решения требует уточнения в силу возможной неединственности оптимального решения задачи Последователя. Общепринятым подходом в такой ситуации является рассмотрение оптимистической и пессимистической формулировок двухуровневой задачи [11]. В оптимистической постановке предполагается, что Последователь выбирает наиболее выгодное для Лидера оптимальное решение, а в пессимистическом варианте — наихудшее оптимальное решение. Для исследуемой модели конкурентной борьбы на рынке ставится задача поиска пессимистического оптимального решения.

Задача CompFLP с предписанным выбором поставщиков рассматривалась в [2]. Для этой задачи разработан алгоритм ветвей и границ, позволяющий находить пессимистические оптимальные решения в случае, когда доход Последователя, получаемый от потребителя, монотонно возрастает относительно предпочтений данного потребителя. Это условие означает, что наилучший выбор потребителя будет наилучшим и для Последователя, и является существенным при построении оценочных задач, используемых в алгоритме для вычисления верхних границ. В случае задачи конкурентной борьбы на рынке указанное условие монотонности дохода Последователя не выполняется, поэтому для построения алгоритма решения этой задачи требуются новые подходы к построению оценочных задач.

Содержательная интерпретация модели CompFLP с предписанным выбором поставщиков как модели соперничества на рынке даётся также в работе [14]. Авторы не рассматривают возможность выбора цен на продукцию и исследуют задачу поиска оптимистического оптимального решения. Предложенный подход состоит в переформулировке двухуровневой задачи в виде одноуровневой. Полученная переформулировка далее служит основой для построения метода генерации отсечений.

В настоящей работе предлагается алгоритм для решения задачи поиска пессимистического оптимального решения модели CompFLP с предписанным выбором поставщиков в общем случае. Алгоритм представляет собой итерационный процесс, на каждом шаге которого оценочная задача «усиливается» новыми ограничениями, отсекающими оптимальное решение данной задачи. Идея алгоритма, а также описание его реализации применительно к задаче CompFLP со свободным выбором поставщиков изложены в [3, 9]. Эффективность алгоритма достигается с использованием нового способа построения оценочных задач в форме задач смешанно-целочисленного линейного программирования (MIP) для модели CompFLP. Основой для этих задач является задача НРР (от англ. high-point problem) [15], получаемая из исходной двухуровневой модели снятием условия оптимальности переменных задачи нижнего уровня. Предложенный способ построения дополнительных ограничений, названных *s*- и *f*-отсечениями, существенно обобщает подход, изложенный в [1] при построении оценочных задач.

Основное достижение настоящей работы — модификация *s*-отсечений применительно к особенностям исследуемой задачи CompFLP с предписанным выбором поставщиков. Модифицированные *s*- и *f*-отсечения позволяют построить эффективную итеративную процедуру последовательного пополнения задачи НРР дополнительными ограничениями, которые стимулируют переменные задачи Последователя принимать оптимальные значения. Процедура завершается за конечное число шагов

построением пессимистического оптимального решения исследуемой задачи CompFLP с предписанным выбором поставщиков.

Статья состоит из пяти разделов. В разд. 1 приводится формулировка задачи CompFLP с предписанным выбором поставщиков в виде задачи двухуровневого целочисленного программирования. Кроме того, даётся определение пессимистического допустимого решения исследуемой задачи. Разд. 2 посвящён построению семейства s -отсечений для усиления оценочных задач в случае исследуемой модели CompFLP. В разд. 3 даётся общая схема алгоритма генерации отсечений и рассматриваются процедуры построения s - и f -отсечений в процессе его работы. В разд. 4 описана математическая модель конкурентной борьбы на рынке и даётся формулировка задачи выбора наилучших решений конкурирующих сторон в виде задачи CompFLP с предписанным выбором поставщиков. Разд. 5 посвящён численным экспериментам с использованием разработанного алгоритма генерации отсечений и тестовых примеров задачи CompFLP с предписанным выбором поставщиков.

1. Формулировка задачи

Для записи математической модели CompFLP с предписанным выбором поставщиков нам потребуются следующие обозначения. Через $I = \{1, \dots, m\}$ будем обозначать множество всех мест возможного размещения предприятий, или, для краткости, множество предприятий. Множество потребителей обозначим через $J = \{1, \dots, n\}$. Величины p_{ij} и q_{ij} , где $i \in I$, $j \in J$, выражают величину дохода от обслуживания потребителя j предприятием i , принадлежащим Лидеру и Последователю соответственно.

Предполагается, что потребители обладают предпочтениями в выборе обслуживающего предприятия, представленными отношением линейного порядка на множестве I . Данное отношение для заданного потребителя $j \in J$ будем обозначать через $\succeq_j$. Для $i_1, i_2 \in I$ запись $i_1 \succeq_j i_2$ отражает тот факт, что потребитель j предпочитает предприятие i_1 предприятию i_2 , либо $i_1 = i_2$. Отношение $i_1 \succ_j i_2$ эквивалентно тому, что $i_1 \succeq_j i_2$ и $i_1 \neq i_2$.

Аналогично классической задаче размещения предприятий в модели CompFLP используются переменные размещения x_i и z_i , $i \in I$, равные единице в случае, если Лидер либо соответственно Последователь открывает предприятие $i \in I$, и нулю в противном случае. Переменные назначения x_{ij} и z_{ij} , $i \in I$, $j \in J$, равны единице в случае, если предприятие $i \in I$, открытое Лидером либо соответственно Последователем, назначается на обслуживание потребителя $j \in J$, и нулю иначе.

С использованием введённых обозначений модель CompFLP с предписанным выбором поставщиков записывается как следующая задача двухуровневого целочисленного программирования:

$$\max_{(x_i), (x_{ij})} \left(- \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right), \quad (1)$$

$$x_i + \tilde{z}_i + \sum_{k \in I | i >_j k} x_{kj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \quad (2)$$

$$x_i \geq x_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \quad (3)$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J; \quad (4)$$

$$((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij})) \text{ — оптимальное решение задачи} \quad (5)$$

$$\max_{(z_i), (z_{ij})} \left(- \sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} q_{ij} z_{ij} \right), \quad (6)$$

$$x_i + z_i + \sum_{k \in I | i >_j k} z_{kj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \quad (7)$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \quad (8)$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J. \quad (9)$$

Обозначим задачу верхнего уровня (1)–(5) (задачу Лидера) через $\mathcal{L}$, а задачу нижнего уровня (6)–(9) (задачу Последователя) через $\mathcal{F}$. Задачу (1)–(9) в целом обозначим через $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Целевая функция (1) выражает прибыль, получаемую Лидером, которая вычисляется как сумма начальных затрат на открытие предприятий со знаком минус и доходов от обслуживания захваченных Лидером потребителей. Из ограничений (2) следует, что предприятие Лидера, обслуживающее потребителя, должно быть более предпочтительным, чем любое предприятие, открытое Последователем. Кроме того, ограничение (2) реализует правило предписанного выбора Лидером предприятия для обслуживания потребителя. Неравенства (3) гарантируют, что только открытые предприятия Лидера назначаются для обслуживания потребителей.

Задача Последователя имеет аналогичный вид. Заметим лишь, что ограничения (7) помимо прочего запрещают Последователю открывать предприятия в местах, занятых предприятиями Лидера.

Для краткости далее будем использовать следующие обозначения. Векторы $(x_i), (z_i) \in \{0, 1\}^m$, определяющие размещение предприятий Лидера и Последователя, обозначим через x и z соответственно. Пару $((x_i), (x_{ij}))$, образующую допустимое решение задачи $\mathcal{L}$, обозначим через X , а пару $((z_i), (z_{ij}))$, являющуюся допустимым решением задачи $\mathcal{F}$, — через Z . Для заданного $x \in \{0, 1\}^m$ задачу $\mathcal{F}$, в которой в ограничении (7) присутствуют величины $x_i, i \in I$, в случаях, когда это необходимо, будем обозначать через $\mathcal{F}(x)$. Аналогично при заданном $z \in \{0, 1\}^m$ задачу $\mathcal{L}$ с величинами $z_i, i \in I$, в ограничении (2) будем обозначать через $\mathcal{L}(z)$.

В соответствии со спецификой рассматриваемой двухуровневой модели $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ уточним понятие её допустимого и оптимального решений. Последовательность вычисления допустимых значений переменных модели $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ можно представить следующим образом. Пусть $x \in \{0, 1\}^m$ задаёт значения переменных размещения предприятий Лидера. Тогда решается задача $\mathcal{F}(x)$ и вычисляются оптимальные значения $\tilde{z}_i$, $i \in I$, и $\tilde{z}_{ij}$, $i \in I$, $j \in J$, переменных размещения и назначений предприятий Последователя. Наконец, при заданных x и $\tilde{z}$ определяются значения x_{ij} , $i \in I$, $j \in J$, переменных назначения предприятий Лидера.

Пару $(X, \tilde{Z})$, $X = ((x_i), (x_{ij}))$, $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$, где X — допустимое решение задачи $\mathcal{L}(\tilde{z})$, а $\tilde{Z}$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{F}(x)$, назовём *допустимым решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, порождённым вектором x .

Пусть $L(X, Z)$ есть значение целевой функции модели $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на допустимых решениях X и Z . Допустимое решение $(X, \tilde{Z})$, порождённое вектором x , назовём *пессимистическим допустимым решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если $L(X, \tilde{Z}) \leq L(X', \tilde{Z}')$ для любого допустимого решения $(X', \tilde{Z}')$, порождённого вектором x . Пессимистическое допустимое решение $(X^*, \tilde{Z}^*)$ будет *пессимистическим оптимальным решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если $L(X^*, \tilde{Z}^*) \geq L(X, \tilde{Z})$ для любого пессимистического допустимого решения $(X, \tilde{Z})$.

В [2] показано, что для любого $x \in \{0, 1\}^m$ пессимистическое допустимое решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, порождённое вектором x , может быть построено в результате вычисления оптимального решения задачи $\mathcal{F}(x)$, а затем вспомогательной задачи МПР той же размерности, что и задача $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

2. Дополнительные ограничения

Рассмотрим задачу НРР для задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, получаемую заменой требования оптимальности решения задачи $\mathcal{F}$ условием

$$\sum_{j \in J} q_{ij} z_{ij} \geq g_i z_i, \quad i \in I, \quad (10)$$

необходимым для оптимальности этого решения.

Полученная задача записывается как следующая задача МПР:

$$\max_{(x_i), (x_{ij}), (z_i), (z_{ij})} \left(- \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \right)$$

при ограничениях (2)–(4), (7)–(10).

Данная задача является, очевидно, оценочной для задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, поскольку оптимальное значение её целевой функции даёт тривиальную верхнюю границу для значений целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Наша цель состоит в построении дополнительных ограничений к ограничениям (2)–(4), (7)–(10) задачи НРР, которые выполняются для любых пессимистических допустимых решений задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ и стимулируют переменные нижнего уровня принимать оптимальные значения. В результате будет построена задача МПР, которая останется оценочной для задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Такую задачу будем называть *усиленной оценочной задачей* (SEP).

Для записи упомянутых ограничений нам потребуется ряд вспомогательных обозначений. Для заданных $j \in J$ и непустого $I' \subseteq I$ через $\alpha_j(I')$ обозначим максимальный элемент множества I' относительно порядка $\succeq_j$. Другими словами, $\alpha_j(I') = i' \in I'$, где $i' \succeq_j k$ для всех $k \in I'$. Для $x \in \{0, 1\}^m$, $x \neq 0$, положим $\alpha_j(x) = \alpha_j(\{i \in I \mid x_i = 1\})$. Пользуясь указанными обозначениями для непустого $J' \subseteq J$, будем полагать $\alpha_{J'}(I') = \{\alpha_j(I') \mid j \in J'\}$ и соответственно $\alpha_{J'}(x) = \{\alpha_j(x) \mid j \in J'\}$.

Важным элементом наших построений будет множество предприятий Последователя, которые могут захватить потребителя j при заданном множестве предприятий I' , открытых Лидером. Обозначим это множество через $N_j(I') = \{i \in I \mid i \succ_j \alpha_j(I')\}$. Для непустого $J' \subseteq J$ положим $N_{J'}(I') = \bigcup_{j \in J'} N_j(I')$.

Рассмотрим непустое подмножество $I' \subseteq I$. Пусть допустимое решение $(X, \tilde{Z})$, $X = ((x_i), (x_{ij}))$, задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ таково, что $x_i = 1$ для всех $i \in I'$. Тогда предприятие Последователя k гарантированно не может обслуживать потребителей, не относящихся к множеству $J_k(I') = \{j \in J \mid k \succ_j \alpha_j(I')\}$. В таком случае доход данного предприятия можно оценить сверху величиной $Q_k(I') = \sum_{j \in J_k(I')} q_{kj}$. Из оптимальности решения $\tilde{Z}$ следует, что $\tilde{z}_k = 0$ в случае, если $g_k > Q_k(I')$. Обозначим через $M(I') = \{k \in I \mid g_k > Q_k(I')\}$ множество предприятий Последователя, которые не могут быть открыты в его оптимальном решении.

Лемма 1. Пусть $I' \subseteq I$ — непустое подмножество. Для любого допустимого решения $(X, \tilde{Z})$, $X = ((x_i), (x_{ij}))$, $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$, задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ такого, что $x_i = 1$ для всех $i \in I'$, выполняется $\tilde{z}_i = 0$ для каждого $i \in M(I')$.

Доказательство. Предположим, что $\tilde{z}_k = 1$ для некоторого $k \in M(I')$. Пусть $J_k = \{j \in J \mid \tilde{z}_{kj} = 1\}$. Понятно, что $J_k \subseteq J_k(I')$. Рассмотрим модифицированное решение $Z' = ((z'_i), (z'_{ij}))$ задачи $\mathcal{F}$ такое, что $z'_k = 0$ и $z'_{kj} = 0$ для всех $j \in J$. Тогда для целевой функции Последователя имеем

$$F(Z') - F(\tilde{Z}) \geq g_k - Q_k(I') > 0,$$

что противоречит оптимальности решения $\tilde{Z}$. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим непустые подмножества $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J$. Сформулируем достаточные условия того, что для пессимистического допустимого решения $(X, \tilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ такого, что $x_i = 1$ для всех $i \in I'$ и $\alpha_{J'}(x) = \alpha_{J'}(I')$, среди величин $\tilde{z}_i$, $i \in N_{J'}(I') \cup E(I', J')$, есть ненулевые. Здесь $E(I', J')$ — некоторое подмножество, которое мы определим далее. Для этого предположим, что при рассматриваемом решении $(X, \tilde{Z})$ не только Лидер, но и Последователь не открыли ни одного предприятия из множества $N_{J'}(I')$. При этом предположении оценим снизу величину дохода, который может получить Последователь, открыв предприятие $k \in N_{J'}(I')$ в дополнение к предприятиям, открытым в решении $(X, \tilde{Z})$.

При фиксированных множествах I' и J' рассмотрим множество потребителей $S_k = \{j \in J \mid k \succ_j \alpha_j(I')\}$, которые могут быть захвачены Последователем при открытии предприятия $k \in N_{J'}(I')$. В этом множестве выделим множество потребителей

$$G_k = \{j \in S_k \mid \forall i \in I \text{ если } i \succ_j k, \text{ то } i \in N_{J'}(I') \cup M(I')\},$$

которые гарантированно будут обслуживаться предприятием k , открытым Последователем. Отметим, что множество G_k содержит подмножество

$$J_k(I', J') = \{j \in G_k \mid \forall i \in I \text{ если } i \succ_j \alpha_j(I'), \text{ то } i \in N_{J'}(I') \cup M(I')\},$$

включающее потребителей, которые при решении $(X, \tilde{Z})$ захвачены Лидером. Это множество непусто, поскольку $J' \cap J_k(I', J') \neq \emptyset$.

Доход Лидера $P_k(I', J')$ от обслуживания потребителей из множества $J_k(I', J')$ определяется величиной $P_k(I', J') = \sum_{j \in J_k(I', J')} p_{\alpha_j(x)j}$.

Для вычисления гарантированного дохода Последователя при открытии предприятия $k \in N_{J'}(I')$ для всякого $j \in S_k$ рассмотрим множество $E_k(j)$ предприятий Последователя, которые могут быть открытыми в решении $(X, \tilde{Z})$ и перестают быть поставщиками потребителя j в случае открытия предприятия k ,

$$E_k(j) = \{i \in I \mid i \notin N_J(I') \cup M(I'), k \succ_j i \succ_j \alpha_j(I')\}.$$

Тогда величина гарантированного дохода Последователя от обслуживания потребителя $j \in G_k$ равна $q_{kj} - \max_{i \in E_k(j)} q_{ij}$ и может быть как положительной, так и отрицательной. В случае $j \in S_k \setminus G_k$ нельзя утверждать, что предприятие k будет назначено поставщиком для потребителя j , поскольку в решении $(X, \tilde{Z})$ может найтись предприятие i , открытое либо Лидером, либо Последователем, такое, что $i \succ_j k$. Поэтому гарантированная величина дохода от потребителя $j \in S_k \setminus G_k$ не может быть

положительной и равна $\min\{0, q_{kj} - \max_{i \in E_k(j)} q_{ij}\}$. Таким образом, гарантированная величина $Q_k(I', J', E_k)$ дополнительного дохода Последователя от открытия предприятия $k \in N_{J'}(I')$ при условии, что предприятия Последователя из множества E_k , $E_k \subset E_k(S_k) = \bigcup_{j \in S_k} E_k(j)$, в решении $(X, \tilde{Z})$ не открыты, вычисляется по формуле

$$Q_k(I', J', E_k) = \sum_{j \in G_k} (q_{kj} - \max_{i \in E_k(j) \setminus E_k} q_{ij}) + \sum_{j \in S_k \setminus G_k} \min\{0, q_{kj} - \max_{i \in E_k(j) \setminus E_k} q_{ij}\}.$$

Для подмножества $J' \subset J$, $J' \neq \emptyset$, обозначим через $\mathcal{I}_{J'}$ семейство подмножеств $I' \subseteq I$, $I' \neq \emptyset$, таких, что существуют $k \in N_{J'}(I')$ и множество E_k , для которых $Q_k(I', J', E_k) \geq g_k$ и $P_k(I', J') > 0$. Если $I' \in \mathcal{I}_{J'}$, то через $E(I', J')$ будем обозначать множество E_k для некоторого $k \in N_{J'}(I')$, удовлетворяющего требуемым условиям.

Утверждение 1. Пусть $J' \subseteq J$, $J' \neq \emptyset$, и $I' \in \mathcal{I}_{J'}$. Если $(X, \tilde{Z})$, $X = ((x_i), (x_{ij}))$, $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$, — пессимистическое допустимое решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ такое, что $x_i = 1$, $i \in I'$, и $\alpha_{J'}(x) = \alpha_{J'}(I')$, то

$$\sum_{i \in N_{J'}(I')} \tilde{z}_i + \sum_{i \in E(I', J')} \tilde{z}_i \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\tilde{z}_i = 0$ для всех $i \in N_{J'}(I') \cup E(I', J')$. Поскольку $I' \in \mathcal{I}_{J'}$, для некоторого $k \in N_{J'}(I')$ и множества E_k справедливо неравенство $Q_k(I', J', E_k) \geq g_k$.

Модифицируем решение $\tilde{Z}$ задачи $\mathcal{F}(x)$ и рассмотрим допустимое решение Z' , где $z'_i = \tilde{z}_i$, если $i \neq k$, и $z'_k = 1$. Пусть $J'_k = \{j \in J \mid z'_{kj} = 1\}$. Понятно, что $G_k \subseteq J'_k$ и $J'_k \subseteq S_k$. Для разности значений целевой функции задачи $\mathcal{F}(x)$ на решениях Z' и $\tilde{Z}$ справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F(Z') - F(\tilde{Z}) &= -g_k + \sum_{j \in J'_k} q_{kj} - \sum_{j \in J'_k} \sum_{i \in I} q_{ij} \tilde{z}_{ij} \geq -g_k + \sum_{j \in J'_k} (q_{kj} - \max_{i \in E_k(j) \setminus E_k} q_{ij}) \\ &\geq -g_k + \sum_{j \in G_k} (q_{kj} - \max_{i \in E_k(j) \setminus E_k} q_{ij}) + \sum_{j \in J'_k \setminus G_k} \min\{0, q_{kj} - \max_{i \in E_k(j) \setminus E_k} q_{ij}\} \\ &\geq -g_k + \sum_{j \in G_k} (q_{kj} - \max_{i \in E_k(j) \setminus E_k} q_{ij}) + \sum_{j \in S_k \setminus G_k} \min\{0, q_{kj} - \max_{i \in E_k(j) \setminus E_k} q_{ij}\} \\ &= -g_k + Q_k(I', J', E_k) \geq 0. \end{aligned}$$

Если последнее неравенство строгое, то получаем противоречие с тем, что $\tilde{Z}$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$. Если имеет место равенство, то Z' — оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$. Обозначим через (X', Z') допустимое решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, порождённое вектором $x = (x_i)$. Поскольку $P_k(I', J') > 0$ и при решении (X', Z') Последователь захватывает потребителей $j \in J_k(I', J')$, то $L(X', Z') < L(X, \tilde{Z})$, что противоречит тому, что $(X, \tilde{Z})$ — пессимистическое допустимое решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Утверждение 1 доказано.

Лемма 2. Пусть $J' \subseteq J$, $I' \in \mathcal{I}_{J'}$. Тогда для любого пессимистического допустимого решения $(X, \tilde{Z})$, $X = ((x_i), (x_{ij}))$, $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$, задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ справедливо неравенство

$$\sum_{i \in N_{J'}(I')} \tilde{z}_i + \sum_{i \in E(I', J')} \tilde{z}_i \geq 1 + \sum_{j \in J'} (x_{\alpha_j(I')} - \sum_{i \succ_j \alpha_j(I')} x_i - 1) + \sum_{i \in I'} (x_i - 1). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что рассматриваемое неравенство является существенным, если его правая часть равна единице. Такое возможно, только если, во-первых, $x_i = 1$ для всякого $i \in I'$ и, во-вторых, для всякого $j \in J'$ имеем $x_i = 0$ для любого $i \succ_j \alpha_j(I')$, т. е. $\alpha_{J'}(x) = \alpha_{J'}(I')$. Но тогда согласно утверждению 1 левая часть неравенства не меньше единицы. Лемма 2 доказана.

Пусть $J' \subseteq J$, $I' \in \mathcal{I}_{J'}$. Неравенство (11) будем называть *s-отсечением*, сгенерированным парой (I', J') . Будем говорить, что неравенство (11) есть *s-отсечение решения* (X, Z) , если это решение нарушает указанное неравенство. Лемма 2 утверждает, что неравенство вида (11) выполняется на любом пессимистическом допустимом решении задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Это означает, что добавление *s-отсечений*, сгенерированных парами подмножеств (I', J') , к задаче НРР сохраняет свойство данной задачи быть оценочной и приводит к получению усиленной оценочной задачи.

3. Алгоритм генерации отсечений

Ограничения (11), аппроксимирующие множество допустимых решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, могут быть использованы для построения задач SEP, дающих эффективные верхние границы для целевой функции (1). Эти ограничения позволяют также организовать процедуру вычисления пессимистического оптимального решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ как итеративный процесс последовательного пополнения задачи SEP новыми ограничениями. Этот процесс представим состоящим из начального шага и некоторого числа основных шагов. На начальном шаге для задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ строится задача НРР, усиленная *s-отсечениями*, порождёнными парами (I', J') одноэлементных подмножеств. Целью каждого основного шага

является построение с-отсечения оптимального решения текущей задачи SEP. К сожалению, достижение этой цели не всегда возможно, поэтому для усиления текущей задачи SEP используются также f-отсечения. Для построения такого отсечения по оптимальному решению текущей задачи SEP вычисляется пессимистическое допустимое решение исходной задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, а f-отсечения реализуют правило «если переменные задачи Лидера принимают значения, полученные на текущем шаге, то переменные задачи Последователя должны принять значения, найденные при построении пессимистического допустимого решения». Использование этих ограничений позволяет сделать рассматриваемую процедуру конечной. Она завершается на шаге, когда оптимальное значение целевой функции задачи SEP (верхняя граница) равно значению целевой функции исходной задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на лучшем найденном к данному шагу пессимистическом допустимом решении (нижняя граница).

3.1. Генерация с-отсечений. На начальном шаге рассматриваемой процедуры вычисления пессимистического оптимального решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ формируется задача НРР и строится стартовая задача SEP. Для этого задача НРР дополняется всевозможными с-отсечениями, сгенерированными парами (I', J') такими, что $|I'| = |J'| = 1$. Эти неравенства записываются следующим образом:

$$\sum_{k \in N_j(\{i\})} z_k + \sum_{k \in E(\{i\}, \{j\})} z_k \geq 2x_i - \sum_{k \succ_j i} x_k - 1, \quad i \in I, j \in J, \{i\} \in \mathcal{I}_{\{j\}}.$$

На основном шаге строится с-отсечение оптимального решения текущей задачи SEP. Пусть (X', Z') , $X' = ((x'_i), (x'_{ij}))$, $Z' = ((z'_i), (z'_{ij}))$, — оптимальное решение задачи SEP. При построении пары (I', J') , генерирующей с-отсечение решения (X', Z') , будем исходить из следующего. Пусть $x' = (x'_i)$, $z' = (z'_i)$. Заметим прежде всего, что если $j \in J'$ и $\alpha_j(z') \succ_j \alpha_j(x')$, то для любого $I' \subset I$ ограничение (11), порождённое парой (I', J') , выполняется для рассматриваемых x' и z' . Действительно, если $\alpha_j(x') \succeq_j \alpha_j(I')$, то поскольку $\sum_{k \in N_j(I')} z'_k \geq 0$, левая часть неравенства (11) будет положительной. Если же $\alpha_j(I') \succ_j \alpha_j(x')$, то поскольку $x'_{\alpha_j(I')} = 0$, правая часть неравенства не больше нуля. В силу этого подмножество J' будем искать только среди подмножеств множества $J_L = \{j \in J \mid \alpha_j(x') \succ_j \alpha_j(z')\}$. Заметим далее, что неравенство (11) будет существенным, если его правая часть положительна. Но это возможно, только если $\alpha_{J'}(I') = \alpha_{J'}(x')$ и $I' \subseteq I^1(x')$. Поэтому при заданном подмножестве J' в качестве подмножества I' будем рассматривать множество $I'(J') = \alpha_{J'}(x')$. Заметим, наконец, что если $E(I', J') \cap I^1(z') \neq \emptyset$, то неравенство (11) будет выполняться на решении (X', Z') . Поэтому

при исследовании пары $(I'(J'), J')$ будем рассматривать только подмножества E_k , $k \in N_{J'}(I')$, которые не содержат элементов множества $I^1(z')$.

Организуем процесс поиска пары $(I'(J'), J')$, генерирующей с-отсечение решения (X', Z') , следующим образом. Поскольку все пары одноэлементных множеств, генерирующие с-отсечения, уже добавлены в множество ограничений задачи SEP на начальном шаге, на основных шагах исследуются подмножества J' , $|J'| > 1$, которые строятся по следующей рекурсии. Сначала строится семейство подмножеств $\mathcal{J}^1$, состоящее из одноэлементных подмножеств $J' = \{j\}$ таких, что $j \in J_L$ и $I'(J') \notin \mathcal{I}_{J'}$. Подмножества из этого семейства будут исходным материалом для построения подмножеств J' , $|J'| > 1$. Пусть построены семейства подмножеств $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^r$, $r = 1, \dots, n-1$. Рассмотрим все подмножества $J' = J_1 \cup J_2$ такие, что $J_1 \in \mathcal{J}^1$, $J_2 \in \mathcal{J}^r$ и $|J_1 \cup J_2| = r + 1$. Если $I'(J') \in \mathcal{I}_{J'}$ и при этом $E(I'(J'), J') \cap I^1(z) = \emptyset$, то с-отсечение, сгенерированное парой $(I'(J'), J')$, добавляется к ограничениям задачи SEP и начинается следующий шаг. В противном случае добавляем множество J' в семейство подмножеств

$$\mathcal{J}^{r+1} = \{J' = J_1 \cup J_2 \mid J_1 \in \mathcal{J}^1, J_2 \in \mathcal{J}^r, |J_1 \cup J_2| = r + 1, I'(J') \notin \mathcal{I}_{J'}\}$$

и продолжаем поиск пары $(I'(J'), J')$, генерирующей с-отсечение решения (X', Z') . Если такой пары подмножеств найти не удаётся, то переходим к исследованию пар подмножеств $(I'(J'), J')$, где $|J'| = r + 2$. Разумеется поиск подходящего подмножества J' с большим числом элементов может оказаться трудоёмким и в целом нецелесообразным. Чтобы уменьшить трудоёмкость процедуры построения SEP, введём параметр R_1 , ограничивающий мощность исследуемых подмножеств J' .

Если пару $(I'(J'), J')$, генерирующую с-отсечение и такую, что $|J'| \leq R_1$, найти не удаётся, то процедура построения последовательности задач SEP и, следовательно, итоговой задачи SEP завершается.

3.2. Построение множества $E(I', J')$. Уточним правила выбора множества $E(I', J')$ на основном шаге процедуры построения пары (I', J') , генерирующей с-отсечение решения (X', Z') .

Для $k \in N_{J'}(I')$ рассмотрим процедуру построения подмножества $E_k \subset E_k(S_k)$, $E_k \cap I^1(z') = \emptyset$, с целью получения величины $Q_k(I', J', E_k)$, не меньшей чем g_k . Процедура состоит из некоторого числа однотипных шагов последовательного пополнения множества E_k новым элементом, начиная с $E_k = \emptyset$. Число шагов процедуры считаем ограниченным значением параметра R_2 , $R_2 \leq |E_k(S_k) \setminus I^1(z')|$.

Пусть на очередном шаге имеется множество E_k , $E_k \cap I^1(z') = \emptyset$. Если для множества E_k требуемое неравенство выполняется либо не выполняется и ресурс числа шагов исчерпан, то процедура построения

множества E_k завершается с положительным либо отрицательным исходом соответственно. В противном случае дополним множество E_k элементом $i \in (E_k(S_k) \setminus I^1(z')) \setminus E_k$, максимально увеличивающим величину $Q_k(I', J', E_k)$, и перейдём к следующему шагу.

Если процедура построения множества E_k для рассматриваемой пары (I', J') завершается с положительным исходом для нескольких элементов $k \in N_{J'}(I')$, то в качестве множества $E(I', J')$ выбирается множество E_k с наименьшим числом элементов.

3.3. Генерация f-отсечений. Пусть (X', Z') , где $X' = ((x'_i), (x'_{ij}))$, — оптимальное решение задачи SEP, и пусть с-отсечение решения (X', Z') построить не удаётся. Вычислим пессимистическое допустимое решение $(X, \tilde{Z})$, $X = ((x'_i), (x_{ij}))$, $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$, задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, порождённое вектором $x' = (x'_i)$. Пусть значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на наилучшем найденном пессимистическом допустимом решении (нижняя граница) не совпадает с оптимальным значением целевой функции текущей задачи SEP (верхняя граница). Введём тогда дополнительные ограничения задачи SEP, принуждающие переменные z_i , $i \in I$, задачи $\mathcal{F}$ принимать значения $\tilde{z}_i$, $i \in I$, когда переменные x_i , $i \in I$, задачи $\mathcal{L}$ имеют значения x'_i , $i \in I$. Это условие может быть записано в виде следующей серии неравенств:

$$\sum_{i|x'_i=0} x_i + \sum_{i|x'_i=1} (1 - x_i) \geq 1 - z_k, \quad k \in I, \quad \tilde{z}_k = 1. \quad (12)$$

Отметим, что неравенства (12) становятся существенными, только когда их левая часть равна нулю. Поэтому для всякого пессимистического допустимого решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, порождённого вектором $x \neq x'$, эти неравенства выполняются. Для рассматриваемого пессимистического допустимого решения $(X, \tilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, порождённого вектором x' , неравенства (12), очевидно, выполняются, но могут нарушаться на других пессимистических допустимых решениях, порождённых вектором x' . Однако значения целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ и, следовательно, целевой функции задачи SEP на всех пессимистических допустимых решениях, порождённых вектором x' , совпадают. Поэтому задача SEP, усиленная ограничением (12), остаётся оценочной для задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, и оптимальное значение её целевой функции есть верхняя граница для значений целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

3.4. Общая схема алгоритма генерации отсечений. Общая схема алгоритма генерации отсечений для вычисления пессимистического оптимального решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ выглядит следующим образом.

1. **НАЧАЛЬНЫЙ ШАГ.** Для задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ формируем соответствующую задачу НРР и строим стартовую задачу SEP, пополняя задачу НРР

всевозможными s -отсечениями, порождённые парами (I', J') такими, что $|J'| = |I'| = 1$, $I' \in \mathcal{I}_{J'}$.

2. ОСНОВНОЙ ШАГ.

2.1. ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА. Вычисляем оптимальное решение (X', Z') задачи SEP. Полагаем $UB = L(X', Z')$. Строим пару $(I'(J'), J')$, порождающую s -отсечение решения (X', Z') . Если такая пара построена, то дополняем задачу SEP найденным s -отсечением и переходим на следующий ОСНОВНОЙ ШАГ.

2.2. НИЖНЯЯ ГРАНИЦА. Вычисляем пессимистическое допустимое решение $(X, \tilde{Z})$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, порождённое вектором x' . Полагаем $LB = \max(LB, L(X, \tilde{Z}))$. Если $LB = UB$, то оптимальное пессимистическое решение построено: этим решением является пессимистическое допустимое решение $(X^o, \tilde{Z}^o)$, для которого выполняется равенство $L(X^o, \tilde{Z}^o) = LB$. Алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае дополняем задачу SEP f -отсечением, сгенерированным вектором x' , и переходим на следующий ОСНОВНОЙ ШАГ.

Теорема 1. *Алгоритм генерации отсечений заканчивает работу за конечное число шагов. Результатом его работы является пессимистическое оптимальное решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что если на некотором шаге рассматривается задача SEP, среди ограничений которой содержится f -отсечение, сгенерированное вектором $x' = (x'_i)$, и при этом (X', Z') , $X' = ((x'_i), (x_{ij}))$, есть оптимальное решение задачи SEP, то алгоритм заканчивает работу на данном шаге. Действительно, в этом случае $UB = LB$ и (X', Z') есть оптимальное пессимистическое решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Следовательно, число шагов алгоритма, на которых строятся f -отсечения, конечно. Общее число шагов, которые заканчиваются построением s -отсечений, также конечно, поскольку на каждом таком шаге отсекается оптимальное решение текущей задачи SEP.

Таким образом, рассматриваемый алгоритм через конечное число шагов завершает работу по крайней мере на шаге, когда оптимальное решение задачи SEP является пессимистическим допустимым решением задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Теорема 1 доказана.

4. Математическая модель конкурентной борьбы на рынке

В основе рассмотренной в [4] математической модели конкурентной борьбы на рынке продукции некоторых видов лежит процесс последовательного принятия решений участниками рынка (фирмой-лидером, фирмой-последователем и потребителями), каждый из которых преследует свои цели.

Задача фирмы-лидера в рассматриваемой ситуации состоит в принятии такого решения, которое принесёт максимальную прибыль при условии, что фирма-последователь будет принимать решение, стремясь «захватить» потребителей, приносящих ей наибольшую прибыль, а каждый потребитель будет выбирать на рынке наиболее предпочтительный для него вид продукции. При этом предполагается, что фирма-лидер при принятии решения имеет информацию о видах продукции, которые может предложить рынку фирма-последователь, и о возможных ценах на продукцию этих видов. Предполагается также, что обе конкурирующие стороны знают предпочтения потребителей, сформированных с учётом цен на продукцию. Считается также, что среди своих наилучших решений фирма-последователь выбирает то, которое позволяет захватить максимальную долю рынка и тем самым минимизировать прибыль фирмы-лидера.

Для формальной записи задачи выбора наилучших решений сторонами в рассматриваемом игровом взаимодействии используем следующие дополнительные предположения и обозначения. Считаем, что прибыль фирмы от продукции того или иного вида складывается из доходов от реализации потребителям продукции данного вида за вычетом фиксированных затрат, связанных с организацией производства (поставок) этой продукции, размещением рекламы и т. д. Доход от реализации продукции зависит от цены, назначенной на продукцию данного вида. Предполагается, что спектр цен, назначаемых фирмой-лидером для своей продукции, ограничен конечным набором значений, например, низкой, средней и высокой ценой. Это предположение позволяет не включать в модель цены как независимые переменные, а рассматривать цену как дополнительный параметр вида продукции. Таким образом, в модели рассматривается расширенное множество видов продукции, которые могут быть предложены потребителям. В этом списке один и тот же вид продукции представлен несколькими элементами, каждому из которых отвечает определённое значение цены на указанный вид.

Обозначим через $I = \{1, \dots, m\}$ расширенное множество видов продукции, которое могут предложить рынку конкурирующие стороны. Каждый номер $i \in I$ соответствует конкретному виду продукции с назначенной для него ценой. Обозначим через I_L и I_F подмножества видов продукции, предлагаемые рынку соответственно фирмой-лидером и фирмой-последователем. Считаем, что $I_L \cup I_F = I$ и $I_L \cap I_F = \emptyset$. Для $i \in I$ обозначим через c_i цену, назначенную на продукцию вида i , а через $I(i)$ подмножество множества I , включающее виды продукции, аналогичные по потребительским свойствам продукции вида i , но отличающиеся ценой. Обозначим через f_i и g_i фиксированные затраты,

связанные с реализацией на рынке продукции вида $i \in I$ фирмой-лидером и фирмой-последователем соответственно. Считаем, что $f_i = +\infty$, если $i \notin I_L$, и $g_i = +\infty$, если $i \notin I_F$.

Обозначим через $J = \{1, \dots, n\}$ множество потребителей продукции, реализуемой на рынке. Для $i \in I$, $j \in J$ через p_{ij} и q_{ij} обозначим доход, получаемый от реализации потребителю j продукции вида i фирмой-лидером и фирмой-последователем соответственно. Для всякого $j \in J$ считаем, что $p_{ij} = 0$, если $i \notin I_L$, и $q_{ij} = 0$, если $i \notin I_F$.

Предполагается, что потребитель $j \in J$ выбирает на рынке продукцию, исходя из собственных предпочтений, основанных на величине затрат на удовлетворения своей потребности. Эти предпочтения задаются линейным порядком $\succ_j$ на множестве I . Естественно предполагать, что если $i_2 \in I(i_1)$ и $c_{i_1} < c_{i_2}$, то $i_1 \succ_j i_2$ для всякого $j \in J$.

Задачу выбора сторонами наилучших решений в условиях конкурентной борьбы на рынке запишем как задачу выбора пессимистического оптимального решения для модели CompFLP с предписанным выбором поставщиков.

В этой задаче переменная $x_i(z_i)$ принимает значение 1, если фирма-лидер (фирма-последователь) предлагает рынку продукцию вида $i \in I$, и равна 0 в противном случае. Аналогично переменная $x_{ij}(z_{ij})$ принимает значение 1, если продукция вида $i \in I$ фирмы-лидера (фирмы-последователя) присутствует на рынке и является наиболее предпочтительной для потребителя $j \in J$, и равна 0 в противном случае.

Целевая функция (1) выражает прибыль фирмы-лидера, вычисляемую как сумма доходов от потребителей минус сумма фиксированных затрат на реализуемые на рынке виды продукции. Ограничение (2) означает, что потребитель выбирает на рынке наиболее предпочтительную для него продукцию. Ограничение (3) гарантирует, что потребитель выбирает только те виды продукции фирмы-лидера, которые есть на рынке. Целевая функция (6) и ограничения (7), (8) имеют аналогичный смысл.

Отметим, что запись рассматриваемой задачи в виде задачи CompFLP с предписанным выбором поставщиков корректна, поскольку для оптимального решения $(X^*, \tilde{Z}^*)$ этой задачи можно считать, что при любом $k \in I$ число ненулевых компонент векторов $x^* = (x_i^*)$ и $\tilde{z}^* = (\tilde{z}_i^*)$ с номерами из множества $I(k)$ не больше единицы. Действительно, пусть $k \in I_L$ и $x_{i_1}^* = x_{i_2}^* = 1$ для $i_1, i_2 \in I(k)$, $i_1 \neq i_2$. Поскольку либо $c_{i_1} > c_{i_2}$, либо $c_{i_2} > c_{i_1}$, в силу предпочтений потребителей ($\succ_j$), $j \in J$, продукция одного из видов, скажем i_2 , не приносит фирме-лидеру дохода. Если $f_{i_2} > 0$, то получаем противоречие с оптимальностью решения $(X^*, \tilde{Z}^*)$. Иначе, полагая $x_{i_2}^* = 0$, получим пессимистическое оптимальное решение задачи CompFLP, которое обладает требуемым свойством. Аналогичный результат получается и в случае, когда $k \in I_F$.

Таким образом, для поиска наилучших решений сторон в рассматриваемой задаче конкурентной борьбы на рынке может быть применён предложенный выше алгоритм решения задачи CompFLP с предписанным выбором поставщиков.

5. Численные эксперименты

В данном разделе сравним производительность предлагаемого метода CG с алгоритмом CPA, предложенным в [14], а также проанализируем некоторые рабочие показатели метода на различных классах искусственно сгенерированных тестовых примеров.

Метод CG реализован на языке программирования C# и использует пакет Gurobi 8.0 [12] для решения возникающих задач МПР. Вычисления проведены на рабочей станции, оснащённой двумя шестиядерными процессорами Intel Xeon X5675 3.07 ГГц и 32 Гб оперативной памяти. Приведённые в [14] данные о производительности CPA получены с использованием компьютера с четырьмя вычислительными ядрами, поэтому при сравнении с CPA используются четыре рабочих потока, другие вычисления производятся в двенадцати потоках. Использовались значения управляющих параметров $R_1 = 3$, $R_2 = 5$.

В [14] рассматривается «конкурентная задача о покрытии множества с назначенными приоритетами», аналогичная модели CompFLP, но отличающаяся в двух аспектах. Указанная задача дополнительно содержит бюджетное ограничение на суммарную стоимость открытых предприятий Лидера. В ней также полагается, что доход от обслуживания потребителя делится между соперничающими сторонами в заданной пропорции, если наиболее предпочтительное для данного потребителя предприятие открыто обеими сторонами. Предлагаемый нами подход может быть применён к указанной формулировке: для учёта бюджетных ограничений Лидера необходимо лишь внести их в НРР и далее в SEP, решаемые в ходе работы алгоритма CG. Альтернативная модель поведения потребителей может быть учтена путём модификации процедуры генерации с-отсечений. При сравнении с методом CPA, предложенным в [14], учтём бюджетное ограничение, сформулированное в виде $\sum_{i \in I} f_i x_i \leq B$, где B — объём бюджета Лидера. Моделировать поведение потребителей, как и ранее, будем с использованием правила предписанного выбора поставщиков.

В табл. 1 представлены результаты сравнения скорости работы алгоритмов CG и CPA. По правилам, описанным в [14], были сгенерированы серии примеров различной размерности, по 10 примеров в каждой серии. Примеры разделены на два класса — Facility location и Product introduction. Отличие двух классов состоит в структуре матриц доходов

Таблица 1

Сравнение с алгоритмом СРА

Facility location, $ J = 15$			Product introduction, $ J = 10$		
$ I $	СРА	CG	$ I $	СРА	CG
9	2	0,10			
10	3,4	0,09	10	4,9	0,16
11	5,2	0,12	11	8,2	0,29
12	14,8	0,16	12	26,7	0,30
13	27,7	0,24	13	77,4	0,62
14	53,5	0,49	14	75,7	0,98
15	88,8	0,46	15	157,1	0,94
16	183,6	0,36			

(p_{ij}) и (q_{ij}) . Для примеров класса Facility location для каждого потребителя $j \in J$ величины дохода p_{ij} и q_{ij} равны некоторому значению b_j для нескольких наиболее предпочтительных предприятий $i \in I$ и нулю для всех остальных i . В примерах класса Product introduction значения p_{ij} и q_{ij} равны и выбираются случайным образом для каждого $i \in I$. В столбце «СРА» приведены опубликованные в [14] значения времени работы в секундах алгоритма СРА, усреднённые по десяти тестовым примерам для каждой размерности. Аналогичные показатели для алгоритма CG, полученные в численных экспериментах, приведены в столбце «CG».

Ещё раз оговоримся о том, что алгоритмы работают с несколько разными моделями: в них отличаются правила поведения потребителей. Указанное отличие на данном этапе не выглядит существенным, однако влияние выбора правила поведения на время поиска оптимального решения требует дополнительных исследований. Как можно видеть из приведённых данных, CG значительно превосходит не использующий специфику задачи алгоритм СРА на рассматриваемых примерах. Все примеры рассмотренных в [14] размерностей в среднем требуют от алгоритма CG менее секунды для нахождения точного решения, что в некоторых случаях на два порядка меньше времени, затрачиваемого СРА.

Последующие численные эксперименты с алгоритмом CG будем проводить с использованием входных данных, построенных на базе примеров из библиотеки «Дискретные задачи размещения» [5]. Указанные примеры основаны на сетях с различной структурой связей между вершинами. Множество потребителей, а также множество возможных мест размещения предприятий совпадает с множеством вершин сети. Предпочтения потребителей задаются кратчайшими расстояниями между вершинами: чем ближе вершина, тем более предпочтительным является предприятие в ней располагающееся.

Таблица 2

**Усреднённые показатели работы
схемы генерации отсечений**

Класс	δ	c_1	c_2	c_3	f	T_c	T_f	T	L	F
Grid(5,4)	0,0	307,1	31,5	0,5	99,2	4,8	1,4	131,7	19,6	59,2
Grid(5,4)	0,1	298,1	73,2	1,2	120,1	7,1	2,2	229,9	18,7	68,3
Grid(5,4)	0,2	288,3	111,3	2,4	126,9	7,5	3,0	214,5	19,5	67,6
Plane20	0,0	236,5	38,5	0,4	37,4	5,7	0,8	74,7	13,4	27,8
Plane20	0,1	226,2	57,0	0,5	40,6	6,5	0,9	76,1	13,1	24,3
Plane20	0,2	221,1	67,7	0,5	35,2	4,8	0,9	70,3	14,9	33,2
Tree20	0,0	330,0	4,0	0,1	3,3	0,5	0,1	5,9	50,9	13,6
Tree20	0,1	324,4	7,3	0,2	4,2	0,5	0,1	8,0	52,3	11,6
Tree20	0,2	318,7	12,0	0,1	5,3	0,9	0,1	10,8	48,6	12,8
Tree30	0,0	821,0	1,4	0,0	10,2	2,7	0,1	41,7	35,0	71,5
Tree30	0,1	815,2	7,9	0,3	12,4	3,1	0,1	64,1	33,0	80,0
Tree30	0,2	810,3	12,8	1,6	12,9	4,6	0,2	81,9	36,0	87,3

Нами рассмотрены три семейства примеров, именуемых Grid, Plane и Tree. В основе примеров семейства Grid лежат графы квадратной решётки. Для класса Grid(5,4) указанная решётка имеет размер 5×4 и содержит соответственно 20 вершин. Семейство Plane основано на полносвязных графах, в которых вершинами являются случайно выбранные точки единичного квадрата. Наконец, примеры семейства Tree получены путем генерации случайных графов-деревьев. При этом классы Plane20 и Tree20 основаны на графах с 20 вершинами, тогда как для класса Tree30 число вершин равно 30. Длины рёбер в графах семейств Grid и Tree генерируются случайным образом, а для семейства Plane вычисляются как евклидовы расстояния между точками, представляющими концы ребра.

В примерах указанных семейств матрицы доходов сторон сгенерированы по правилу, аналогичному тому, что использовалось при порождении примеров класса Facility location. Следует заметить, что порождённые таким образом матрицы монотонны относительно предпочтений, т.е. для любых $i_1, i_2 \in I$ и $j \in J$ из $i_1 \succeq_j i_2$ следует, что $p_{i_1j} \geq p_{i_2j}$. В такой ситуации правила предписанного и свободного [1] выбора поставщиков оказываются эквивалентными. Возникает интерес в исследовании эффектов, вносимых немонотонностью матриц доходов. Для этого в исходные монотонные матрицы (p_{ij}^0) , (q_{ij}^0) доходов внесём случайные возмущения различной амплитуды. Оставляя все иные значения входных данных без изменений, для любых $i \in I$ и $j \in J$ положим

$$p_{ij} = \lceil p_{ij}^0(1 + \delta\xi_{ij}) \rceil, \quad q_{ij} = \lceil q_{ij}^0(1 + \delta\zeta_{ij}) \rceil,$$

где ξ_{ij} и ζ_{ij} — реализации случайной величины, равномерно распределённой на отрезке $[-1, 1]$, а δ — параметр, характеризующий амплитуду возмущений.

В каждом из рассматриваемых классов были взяты первые десять примеров, на основе которых построены возмущённые примеры с различными значениями амплитуды возмущения δ . В табл. 2 представлены усреднённые по десяти примерам класса показатели работы схемы генерации отсечений:

c_r , $r \leq R_1 = 3$, — общее число сгенерированных с-отсечений с $|J'| = r$;

f — общее число сгенерированных f-отсечений;

T_c — общее время, затраченное на генерацию с-отсечений, в секундах;

T_f — общее время, затраченное на генерацию f-отсечений, в секундах;

T — общее время работы алгоритма в секундах;

L — значение целевой функции Лидера;

F — значение целевой функции Последователя.

Обратим внимание на ключевые зависимости, прослеживающиеся в полученных экспериментальных данных. Сравнивая значения общего времени работы T для различных классов примеров, можно сделать вывод об относительной простоте примеров семейства Tree и повышенной сложности примеров из семейства Grid. Семейство Plane занимает промежуточное положение по данному показателю. Указанное влияние структуры предпочтений потребителей на время поиска оптимального решения согласуется с результатами, полученными ранее для родственных моделей конкурентного размещения.

В качестве ключевого наблюдения выделим динамику изменения числа генерируемых отсечений, наблюдаемую с ростом δ . Как видим из данных табл. 2, для всех рассмотренных классов примеров при усилении вносимых в матрицы доходов возмущений снижается значение величины c_1 и возрастают значения c_2 и c_3 . Другими словами, число с-отсечений, порождаемых на начальном шаге с использованием одноточечных множеств I' и J' , снижается с усилением немонотонности матриц доходов. При этом происходит значительный рост числа с-отсечений, порождаемых на основных шагах.

Для величины f числа порождаемых f-отсечений однозначные выводы из представленных данных сделать не удаётся: для всех классов, кроме Plane20, наблюдается рост числа отсечений. Это косвенно свидетельствует об увеличении числа производимых вычислений нижней границы. Однако для класса Plane20 мы наблюдаем противоположную картину, демонстрирующую, что в некоторых ситуациях дополнительные с-отсечения ускоряют сходимость верхней и нижней границ друг к другу, что отражается в сокращении числа вычислений последней.

Сравнивая величины T , T_f и T_c , можно заключить, что на порождение отсечений затрачивается порядка 5% вычислительного времени, причём основная часть данных затрат производится при генерации c -отсечений. Наконец, значения L и F показывают, что целевая функция Лидера ведёт себя более устойчиво при случайном возмущении матриц доходов в сравнении с целевой функцией Последователя. Это обстоятельство требует дальнейшего исследования, выходящего за рамки настоящей статьи.

6. Заключение

В данной работе изучена оптимизационная модель принятия решений в конкурентной борьбе на рынке. Указанная модель может быть рассмотрена как задача конкурентного размещения предприятий с предписанным выбором поставщиков и записана в виде задачи двухуровневого программирования. Для нахождения пессимистического оптимального решения этой задачи разработана схема генерации отсечений, в рамках которой релаксация двухуровневой задачи, именуемая *high-point problem*, или НРР, последовательно пополняется усиливающими её ограничениями. Была разработана и обоснована процедура генерации нетривиальных c -отсечений, позволяющих отсекалть оптимальные решения усиленной оценочной задачи SEP, не являющиеся пессимистическими допустимыми решениями исходной двухуровневой задачи. Добавление неравенств семейства f -отсечений позволяет гарантировать нахождение пессимистического оптимального решения двухуровневой задачи за конечное число шагов.

В рамках вычислительного эксперимента установлено, что разработанный метод существенно опережает единственный известный нам на сегодняшний день точный метод для решения рассматриваемых двухуровневых задач, представленный в [14]. Исследование рабочих показателей метода генерации отсечений с использованием случайных входных данных с различной структурой предпочтений потребителей выявило тенденцию возрастания числа порождаемых отсечений с ростом немонотонности матриц доходов конкурирующих сторон.

Целью наших дальнейших исследований станет обобщение предлагаемого подхода и распространение его на другие модели конкурентного размещения. Следует также отметить потребность в разработке альтернативных процедур порождения отсечений с целью повышения их эффективности. В этом направлении перспективными выглядят подходы, связанные с формулировкой вспомогательных оптимизационных задач, решения которых позволили бы отыскивать требуемое отсечение. Разработка новых семейств отсечений также представляется важным направлением исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Береснев В. Л.** О задаче конкурентного размещения предприятий со свободным выбором поставщиков // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 94–105.
2. **Береснев В. Л., Мельников А. А.** Алгоритм ветвей и границ для задачи конкурентного размещения предприятий с предписанным выбором поставщиков // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 2. С. 3–23.
3. **Береснев В. Л., Мельников А. А.** Алгоритм генерации отсечений для дискретной задачи конкурентного размещения предприятий // Докл. АН. 2018. Т. 80, № 5. С. 515–518.
4. **Береснев В. Л., Суслов В. И.** Математическая модель конкурентной борьбы на рынке // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 1. С. 11–24.
5. Библиотека тестовых примеров «Дискретные задачи размещения». <http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/index.html>.
6. **Мельников А. А.** Рандомизированный локальный поиск для дискретной задачи конкурентного размещения предприятий // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 134–152.
7. **Beresnev V. L.** Branch-and-bound algorithm for a competitive facility location problem // Comput. Oper. Res. 2013. Vol. 40, No. 8. P. 2062–2070.
8. **Beresnev V. L., Melnikov A. A.** Exact method for the capacitated competitive facility location problem // Comput. Oper. Res. 2018. Vol. 95. P. 73–82.
9. **Beresnev V. L., Melnikov A. A.** Approximation of the competitive facility location problem with MIPs // Comput. Oper. Res. 2019. Vol. 104. P. 139–148.
10. **Cánovas L., García S., Labbé M., Marín A.** A strengthened formulation for the simple plant location problem with order // Oper. Res. Lett. 2007. Vol. 35, No. 2. P. 141–150.
11. **Dempe S.** Foundations of bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 332 p.
12. Gurobi optimizer reference manual. Gurobi Optimization, 2018. <http://www.gurobi.com>.
13. **Hanjoul P., Peeters D.** A facility location problem with clients' preference orderings // Reg. Sci. Urban Econ. 1987. Vol. 17, No. 3. P. 451–473.
14. **Hemmati M., Smith J. C.** A mixed-integer bilevel programming approach for a competitive prioritized set covering problem // Discrete Optim. 2016. Vol. 20. P. 105–134.
15. **Moore J. T., Bard J. F.** The mixed integer linear bilevel programming problem // Oper. Res. 1990. Vol. 38, No. 5. P. 911–921.
16. **Von Stackelberg H.** The theory of the market economy. Oxford: Oxford Univ. Press, 1952. 289 p.

-
17. **Vasilyev I., Klimentova X., Voccia M.** Polyhedral study of simple plant location problem with order // *Oper. Res. Lett.* 2013. Vol. 41, No. 2. P. 153–158.

Береснев Владимир Леонидович
Мельников Андрей Андреевич

Статья поступила
17 декабря 2018 г.
После доработки —
11 января 2019 г.
Принята к публикации
27 февраля 2019 г.

A CUT GENERATION ALGORITHM OF FINDING
AN OPTIMAL SOLUTION IN A MARKET COMPETITIONV. L. Beresnev^{1,2,a} and A. A. Melnikov^{1,2,b}¹Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptuyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia²Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia*E-mail:* ^aberesnev@math.nsc.ru, ^bmelnikov@math.nsc.ru

Abstract. We consider a mathematical model of market competition between two parties. The parties sequentially bring their products to the market while aiming to maximize profit. The model is based on the Stackelberg game and formulated as a bilevel integer mathematical program. The problem can be reduced to the competitive facility location problem (CompFLP) with a prescribed choice of suppliers which belongs to a family of bilevel models generalizing the classical facility location problem. For the CompFLP with a prescribed choice of suppliers, we suggest an algorithm of finding a pessimistic optimal solution. The algorithm is an iterative procedure that successively strengthens an estimating problem with additional constraints. The estimating problem provides an upper bound for the objective function of the CompFLP and is resulted from the bilevel model by excluding the lower-level objective function. To strengthen the estimating problem, we suggest a new family of constraints. Numerical experiments with randomly generated instances of the CompFLP with prescribed choice of suppliers demonstrate the effectiveness of the algorithm. Tab. 2, bibliogr. 17.

Keywords: market competition, Stackelberg game, bilevel programming, estimating problem.

REFERENCES

1. V. L. Beresnev, On the competitive facility location problem with a free choice of suppliers, *Avtom. Telemekh.*, No. 4, 94–105, 2014 [Russian]. Translated in *Autom. Remote Control*, **75**, No. 4, 668–676, 2014.

2. **V. L. Beresnev** and **A. A. Melnikov**, The branch-and-bound algorithm for a competitive facility location problem with the prescribed choice of suppliers, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.*, **21**, No. 2, 3–23, 2014 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **8**, No. 2, 177–189, 2014.
3. **V. L. Beresnev** and **A. A. Melnikov**, Cut generation algorithm for the discrete competitive facility location problem, *Dokl. Acad. Nauk*, **80**, No. 5, 515–518, 2018 [Russian]. Translated in *Dokl. Math.*, **97**, No. 3, 254–257, 2018.
4. **V. L. Beresnev** and **V. I. Suslov**, A mathematical model of market competition, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **12**, No. 1, 11–24, 2009 [Russian]. Translated in *J. Appl. Ind. Math.*, **4**, No. 2, 147–157, 2010.
5. *Benchmark Library “Discrete Location Problems”*, Available at <http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/english.html> (accessed Feb. 11, 2019).
6. **A. A. Melnikov**, Randomized local search for the discrete competitive facility location problem, *Autom. Telemekh.*, No. 4, 134–152, 2014 [Russian]. Translated in *Autom. Remote Control*, **75**, No. 4, 700–714, 2014.
7. **V. L. Beresnev**, Branch-and-bound algorithm for a competitive facility location problem, *Comput. Oper. Res.*, **40**, No. 8, 2062–2070, 2013.
8. **V. L. Beresnev** and **A. A. Melnikov**, Exact method for the capacitated competitive facility location problem, *Comput. Oper. Res.*, **95**, 73–82, 2018.
9. **V. L. Beresnev** and **A. A. Melnikov**, Approximation of the competitive facility location problem with MIPs, *Comput. Oper. Res.*, **104**, 139–148, 2019.
10. **L. Cánovas**, **A. García**, **M. Labbé**, and **A. Marín**, A strengthened formulation for the simple plant location problem with order, *Oper. Res. Lett.*, **35**, No. 2, 141–150, 2007.
11. **S. Dempe**, *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
12. *Gurobi Optimizer Reference Manual*, Gurobi Optimization, 2018. Available at <https://www.gurobi.com/documentation/8.1/refman.pdf> (accessed Feb. 11, 2019).
13. **P. Hanjoul** and **D. Peeters**, A facility location problem with clients’ preference orderings, *Reg. Sci. Urban Econ.*, **17**, No. 3, 451–473, 1987.
14. **M. Hemmati** and **J. C. Smith**, A mixed-integer bilevel programming approach for a competitive prioritized set covering problem, *Discrete Optim.*, **20**, 105–134, 2016.
15. **J. T. Moore** and **J. F. Bard**, The mixed integer linear bilevel programming problem, *Oper. Res.*, **38**, No. 5, 911–921, 1990.
16. **H. von Stackelberg**, *The Theory of the Market Economy*, Oxf. Univ. Press, Oxford, 1952.
17. **I. Vasilyev**, **X. Klimentova**, and **M. Boccia**, Polyhedral study of simple plant location problem with order, *Oper. Res. Lett.*, **41**, No. 2, 153–158, 2013.

Vladimir L. Beresnev
Andrey A. Melnikov

Received December 17, 2018

Revised January 11, 2019

Accepted February 27, 2019