ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2019. Т. 26, № 3. С. 27–45

УДК 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2019.26.638

# ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СПРОСА*)

*А. В. Кононов*[1,2,a], *А. А. Панин*[1,2,b], *А. В. Плясунов*[1,2,c]

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

[2]Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: [a]`alvenko@math.nsc.ru`, [b]`arteam1897@gmail.com`,
[c]`apljas@math.nsc.ru`

**Аннотация.** Рассматривается двухуровневая задача конкурентного размещения предприятий и ценообразования, которая формулируется в терминах игры Штакельберга. В ней участвуют два производителя: Лидер и Конкурент. Они последовательно размещают свои предприятия и назначают цены. Выбор цен основывается на модели ценовой конкуренции Бертрана и возможности раздела спроса потребителей, если это выгодно обоим игрокам. При этом спрос делится между игроками в заданной пропорции.

Исследуется сложность нахождения оптимального решения задачи и её частных случаев. Показано, что задача является $\Sigma_2^P$-трудной. Однако при определённых условиях на входные параметры сложность нахождения оптимального решения значительно уменьшается и в некоторых случаях задача становится полиномиально разрешимой. Ил. 3, библиогр. 25.

**Ключевые слова:** двухуровневая задача, игра Штакельберга, размещение предприятий, ценообразование, модель Бертрана, неравномерный раздел спроса, сложность, полиномиальная иерархия.

## Введение

Исследование конкурентных задач размещения были начаты в [1], где рассматривалась проблема размещения предприятий на конечном отрезке с равномерным распределением покупателей и выбора цен двумя конкурирующими фирмами. К настоящему моменту в этой области

*)Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17–11–01021).

рассмотрено множество актуальных проблем и получен ряд интересных результатов [2–5]. В [6] приводится обзор конкурентных моделей размещения, их классификация и описание широко известных стратегий ценообразования. В данной работе рассматривается модель, которая является в некотором смысле развитием моделей конкурентного размещения и ценообразования, описанных в [6]. Чтобы не повторяться, далее опишем саму проблему, её новизну и отличия от предыдущих моделей.

Рассмотрим игру Штакельберга двух игроков, в которой решения принимаются последовательно: сперва ходит первый игрок (Лидер), затем, зная решение первого игрока, делает свой ход второй игрок (Конкурент). Предприятии Лидера и Конкурента производят однородный продукт. Игроки последовательно размещают свои предприятия в конечном множестве возможных мест и на каждом из них назначают цену за единицу продукта. При этом используется дискриминационная стратегия ценообразования, когда производитель назначает свою цену для каждого потребителя в каждом предприятии. Для распределения клиентов по предприятиям и выбора цен применяется известная модель Бертрана [6]. В ней клиент обслуживается на том предприятии, на котором достигается минимум себестоимости обслуживания. В отличие от классической модели Бертрана в данной работе предполагается, что конкуренты могут разделить спрос потребителей между собой, когда им это выгодно. Очевидно, что если производитель для некоторого клиента назначит на своём предприятии цену, не превосходящую минимальной себестоимости обслуживания на предприятиях конкурента, то клиент, рациональный в своём поведении, будет обслуживаться на его предприятии, так как конкурент не может предложить меньшую цену. С другой стороны, производители могут договориться между собой и установить цены на уровне максимальной покупательной способности клиента, тем самым некоторым образом поделив спрос клиента между собой. Мы рассматриваем кооперативную стратегию поведения игроков: среди всех оптимальных решений Конкурент выберет то, при котором достигается максимальный доход Лидера.

В [7] рассматривалась модель, в которой Лидер и Конкурент поровну делят спрос с каждого общего клиента. Это значит, что в половине случаев клиент будет совершать покупки на предприятии Лидера, в половине — на предприятии Конкурента. В отличие от [7] в настоящем исследовании предполагается, что в $q \in (0,1)$ случаях клиент будет обслуживаться на предприятии Лидера и в $1-q$ случаях — на предприятии Конкурента, где $q$ — входной параметр задачи. Такая постановка является обобщением постановки из [7]. Для исходной модели с $q = 1/2$ была исследована вычислительная сложность. К сожалению, разработанная методика не переносится на случай произвольного $q$. Поэтому для определения положения новой модели конкурентного размещения производства и ценообразования в полиномиальной иерархии сложностных классов получены новые методики, с помощью которых установлена сложность нахождения оптимальных решений самой задачи и её частных случаев.

Статья состоит из следующих разделов. В разд. 1 приводится содержательная постановка задачи, а разд. 2 содержит результаты о её вычислительной сложности. В разд. 3 рассматриваются частные случаи задачи, их сложность и алгоритмы решения.

## 1. Математическая постановка

Введём следующие обозначения:

$I = \{1, \ldots, m\}$ — множество пунктов размещения предприятий Лидера и Конкурента,

$J = \{1, \ldots, n\}$ — множество клиентов (потребителей),

$p$ — число предприятий Лидера,

$r$ — число предприятий Конкурента,

$t_i$ — себестоимость производства единицы товара в пункте $i$,

$b_j$ — бюджет потребителя $j$,

$d_j$ — спрос потребителя $j$,

$c_{ij}$ — удельные затраты на транспортировку продукции из пункта $i$ к потребителю $j$,

$q \in (0, 1)$ — доля Лидера от полного спроса в случае его раздела.

Введём переменные задачи, соответствующие выбору размещения предприятий:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если Лидер разместил предприятие} \\ & \text{в пункте } i, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если Конкурент разместил} \\ & \text{предприятие в пункте } i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычислим для каждого клиента и каждого предприятия себестоимость обслуживания. Пусть известны булевы векторы $x$ и $y$ размещения предприятий Лидера и Конкурента соответственно. Величина

$$c_j(x) = \min\{d_j(t_i + c_{ij}) \mid x_i = 1\}$$

определяет минимальную себестоимость обслуживания клиента $j$ на предприятиях Лидера, а

$$c_j(y) = \min\{d_j(t_i + c_{ij}) \mid y_i = 1\}$$

— на предприятиях Конкурента. В нашей модели после размещения предприятий конкурирующими игроками процесс ценообразования (выбора цены товара для каждого клиента) основывается на модели ценовой конкуренции Бертрана. Компании устанавливают цены одновременно, после чего каждый клиент выбирает ту компанию, которая предлагает наименьшую для него стоимость обслуживания [6, 8, 9]. При этом в стоимость обслуживания клиента помимо себестоимости производства товара входят и затраты на его транспортировку. Считается, что в случае одинаковой стоимости обслуживания клиент предпочтёт предприятие Лидера.

Пусть $x_i = 1$, $c_j(x) = d_j(t_i + c_{ij})$ и $y_k = 1$, $c_j(y) = d_j(t_k + c_{kj})$. Предположим, что $c_j(x) \leqslant c_j(y)$, т. е. Лидер выиграл борьбу за клиента $j$. Заметим, что Лидер может установить цену, равную минимальной цене обслуживания (себестоимости обслуживания) на предприятиях Конкурента. Обозначим такую цену через $u^1_{ijk}$. С учётом того, что $d_j(u^1_{ijk} + c_{ij}) = d_j(t_k + c_{kj})$, получим

$$u^1_{ijk} = t_k + c_{kj} - c_{ij}$$

для клиента $j$. Назовём цену $u^1_{ijk}$ *монопольной*. Следовательно, доход Лидера от клиента $j$ в пункте обслуживания $i$ равен $w^1_{ijk} = d_j\big(u^1_{ijk} - t_i\big)$.

С другой стороны, доход в $i$-м пункте обслуживания от $j$-го клиента не превышает $b_j - d_j(t_i + c_{ij})$. Этот факт приводит к ещё одному способу определения цены, исходя из бюджетного ограничения клиентов. Обозначим эту цену через $u^2_{ij}$. Положим $b_j - d_j\big(c_{ij} + u^2_{ij}\big) = 0$. Тогда

$$u^2_{ij} = \frac{b_j}{d_j} - c_{ij}.$$

Следовательно, доход Лидера в этом случае равен $w^2_{ij} = d_j\big(u^2_{ij} - t_i\big) = b_j - d_j(t_i + c_{ij})$, кроме того,

$$w^1_{ijk} - w^2_{ij} = d_j\big(u^1_{ijk} - u^2_{ij}\big) = d_j(t_k + c_{kj}) - b_j.$$

Пусть $w^3_{ij} = (qd_j)\big(u^2_{ij} - t_i\big)$ — доход Лидера от раздела спроса между игроками.

Проанализируем эти цены и доходы Лидера.

1. Пусть $u^2_{ij} \geqslant u^1_{ijk}$ и $w^1_{ijk} \leqslant w^3_{ij}$, т. е. доход Лидера от монополизации меньше дохода от раздела спроса клиента между игроками. Следовательно, в этом случае Лидер предпочтёт разделить спрос с Конкурентом и его доход будет равен $w^3_{ij}$.

2. Если $u^2_{ij} \geqslant u^1_{ijk}$ и $w^1_{ijk} > w^3_{ij}$, то Лидер получит больший доход, когда установит монопольную цену $u^1_{ijk}$.

3. Если $u^2_{ij} < u^1_{ijk}$, то Лидер заберёт максимально возможный доход, т. е. доход, равный $w^2_{ij} = d_j\big(u^2_{ij} - t_i\big) = b_j - d_j(t_i + c_{ij})$, установив цену $u^2_{ij}$.

Случай $c_j(x) > c_j(y)$ анализируется аналогично.

Как и в [6], заменим переменные цен $u^1_{ijk}, u^2_{ij}$ булевыми переменными выбора ценообразования:

$$z^{Lc}_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если потребитель } j \text{ обслуживается предприятием Лидера в пункте } i \text{ при условии, что ближайшее (в смысле себестоимости производства и транспортных затрат) предприятие Конкурента расположено в пункте } k \text{ и назначена монопольная цена,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$z^{Lb}_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если потребитель } j \text{ обслуживается предприятием Лидера с ценой } u^2 \text{ в пункте } i \text{ при условии, что ближайшее предприятие Конкурента расположено в пункте } k, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$z^{Fc}_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если потребитель } j \text{ обслуживается предприятием Конкурента в } k\text{-м пункте при условии, что ближайшее предприятие Лидера расположено в пункте } i \text{ и назначена монопольная цена,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$z^{Fb}_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если потребитель } j \text{ обслуживается предприятием Конкурента в } k\text{-м пункте при условии, что ближайшее предприятие Лидера расположено в пункте } i, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$z_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если потребитель } j \text{ обслуживается Лидером из пункта } i \text{ и Конкурентом из пункта } k \text{ одновременно,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Также определим множество $I_j(x)$, состоящее из возможных мест размещения предприятий, которые может использовать Конкурент для перехвата клиента $j$:

$$I_j(x) = \{i \in I \mid c_{ij} + t_i < \min_{k \in I | x_k = 1} (c_{kj} + t_k)\}.$$

В этих обозначениях задача конкурентного размещения и ценообразования (задача Лидера) выглядит следующим образом:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in I}\big(d_j(c_{kj}+t_k-c_{ij}-t_i)z^{Lc}_{ijk}+(b_j-d_j(c_{ij}+t_i))z^{Lb}_{ijk}$$
$$+q(b_j-d_j(c_{ij}+t_i))z_{ijk}\big)\to\max_{x,y,z^{Lc},z^{Lb},z^{Fc},z^{Fb},z} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I} x_i = p, \quad (2)$$
$$(y,z^{Lc},z^{Lb},z^{Fc},z^{Fb},z)\in\mathcal{F}^*(x), \quad (3)$$
$$x_i\in\{0,1\},\quad i\in I. \quad (4)$$

В целевой функции (1) максимизируется суммарный доход от обслуживания клиентов. Здесь первое слагаемое соответствует случаю, когда Лидер захватывает клиента, уменьшая свою цену до уровня себестоимости обслуживания на предприятиях Конкурента, т. е. в терминах цен и доходов это соответствует случаю, когда $u^2_{ij}\geqslant u^1_{ijk}$ и $w^1_{ijk}>w^3_{ij}$. Если цена $u^2_{ij}$, определяемая бюджетом, меньше монопольной цены $u^1_{ijk}$, то используется второе слагаемое, регулирующее цену до уровня бюджета. В третьем слагаемом Лидер и Конкурент делят спрос клиента между собой, т. е. случай, когда доход при монополизации меньше, чем доход от раздела спроса. Ограничение (2) говорит о том, что Лидер размещает ровно $p$ предприятий, а ограничение (3) указывает на оптимальный ответ Конкурента и тем самым делает задачу двухуровневой.

Задача Конкурента:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in I}\big(d_j(c_{ij}+t_i-c_{kj}-t_k)z^{Fc}_{ijk}+(b_j-d_j(c_{kj}+t_k))z^{Fb}_{ijk}$$
$$+(1-q)(b_j-d_j(c_{kj}+t_k))z_{ijk}\big)\to\max_{y,z^{Lc},z^{Lb},z^{Fc},z^{Fb},z} \quad (5)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{i\in I} y_i = r, \quad (6)$$
$$\sum_{i,k\in I}(z^{Fc}_{ijk}+z^{Fb}_{ijk})\leqslant\sum_{i\in I_j(x)} y_i,\quad j\in J, \quad (7)$$
$$x_i+y_i\leqslant 1,\quad i\in I, \quad (8)$$
$$\sum_{i,k\in I}\big(z^{Lc}_{ijk}+z^{Lb}_{ijk}+z^{Fc}_{ijk}+z^{Fb}_{ijk}+z_{ijk}\big)\leqslant 1,\quad j\in J, \quad (9)$$
$$\sum_{k\in I}\big(z^{Lc}_{ijk}+z^{Lb}_{ijk}+z^{Fc}_{ijk}+z^{Fb}_{ijk}+z_{ijk}\big)\leqslant x_i,\quad i\in I,\ j\in J, \quad (10)$$

$$\sum_{i\in I}\big(z_{ijk}^{Lc}+z_{ijk}^{Lb}+z_{ijk}^{Fc}+z_{ijk}^{Fb}+z_{ijk}\big)\leqslant y_k,\quad k\in I,\ j\in J, \tag{11}$$

$$(c_{ij}+t_i)\big(z_{ijk}^{Lc}+z_{ijk}^{Lb}+z_{ijk}^{Fc}+z_{ijk}^{Fb}+z_{ijk}\big)\leqslant(c_{i'j}+t_{i'})x_{i'}+(1-x_{i'})\overline{C},$$
$$i,i',k\in I,\ \ j\in J, \tag{12}$$

$$(c_{kj}+t_k)\big(z_{ijk}^{Lc}+z_{ijk}^{Lb}+z_{ijk}^{Fc}+z_{ijk}^{Fb}+z_{ijk}\big)\leqslant(c_{k'j}+t_{k'})y_{k'}+(1-y_{k'})\overline{C},$$
$$i,k,k'\in I,\ \ j\in J, \tag{13}$$

$$d_j(c_{kj}+t_k-c_{ij}-t_i)\leqslant q(b_j-d_j(c_{ij}+t_i))z_{ijk}+(1-z_{ijk})\overline{C},$$
$$i,k\in I,\ \ j\in J, \tag{14}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in I}(d_j(c_{kj}+t_k)-b_j)z_{ijk}^{Lc}\leqslant 0,\quad j\in J, \tag{15}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in I}(d_j(c_{ij}+t_i)-b_j)z_{ijk}^{Fc}\leqslant 0,\quad j\in J, \tag{16}$$

$$z_{ijk}^{Lc},z_{ijk}^{Lb},z_{ijk}^{Fc},z_{ijk}^{Fb},z_{ijk},y_i\in\{0,1\},\quad i,k\in I,\ j\in J. \tag{17}$$

Целевая функция (5) определяет доход Конкурента. Слагаемые в целевой функции обозначают то же самое, что и слагаемые в целевой функции Лидера (1). Ограничение (6) гарантирует, что Конкурент откроет ровно $r$ предприятий. Ограничениями (7) и (9) осуществляется раздел клиентов между игроками. Если $I_j(x)=\varnothing$, то Лидер монополизирует клиента, поскольку имеет минимальную стоимость обслуживания. В противном случае клиент может отойти к Конкуренту, если последний откроет предприятие в одном из пунктов обслуживания $I_j(x)$. Ограничение (8) запрещает Лидеру и Конкуренту открывать предприятия в одном и том же месте. Из ограничений (10) и (11) следует, что ни один клиент не может быть обслужен в месте, где не размещено ни одного предприятия. Выполнение ограничений (9), (12) и (13) гарантирует то, что для каждого клиента $j$ будет выбрана уникальная пара открытых предприятий, одно предприятие Лидера ($i$) и одно предприятие Конкурента ($k$), при этом на выбранном предприятии Лидера будет достигаться наименьшая стоимость обслуживания клиента. Аналогично наименьшая стоимость обслуживания клиента на предприятиях Конкурента будет достигаться на выбранном предприятии Конкурента. Ранее мы рассмотрели случай, когда клиент может быть монополизирован Лидером, и для него определили оптимальные цены. Если цены $u_{ijk}^1$ и $u_{ij}^2$ строго больше нуля, то из ограничения (9) следует, что одна из переменных $z_{ijk}^{Lc}$, $z_{ijk}^{Lb}$ или $z_{ijk}$ примет значение 1. Пусть $d_j(t_k+c_{kj})-b_j\leqslant 0$ и $w_{ijk}^1\leqslant w_{ij}^3=(qd_j)\big(u_{ij}^2-t_i\big)$, т. е. имеем первый случай. Тогда доход от монополизации не превосходит дохода от раздела спроса. Отсюда получается, что $z_{ijk} = 1$, и ограничение (14) выполнено. Предположим, что $d_j(t_k + c_{kj}) - b_j \leqslant 0$ и $w^1_{ijk} > w^3_{ij}$, а максимальный доход Лидера достигается при монопольной цене $u^1_{ijk}$. Тогда $z^{Lc}_{ijk} = 1$ и ограничение (15) выполнено. Если же $d_j(t_k+c_{kj})-b_j > 0$, то максимальный доход Лидера равен $w^2_{ij} = d_j\bigl(u^2_{ij} - t_i\bigr) = b_j - d_j(t_i + c_{ij})$ и достигается при цене $u^2_{ij}$. Ограничения (14) и (16) интерпретируются похожим образом в случае, когда клиент $j$ монополизируется Конкурентом.

## 2. Вычислительная сложность

Напомним определения первого уровня полиномиальной иерархии классов сложности задач распознавания. Первый уровень состоит из классов P, NP и co-NP. К классу P относятся языки (задачи), для которых существуют детерминированные алгоритмы (машины Тьюринга), распознающие их за полиномиальное время. Задачи из класса NP распознаются недетерминированными алгоритмами за полиномиальное время. С помощью этих классов определяется первый уровень аппроксимационной иерархии классов сложности оптимизационных задач, который включает в себя классы PO и NPO. Напомним понятие стандартной задачи распознавания, соответствующей оптимизационной проблеме. Сопоставим произвольной оптимизационной задаче $L$ задачу распознавания $D(L)$, в которой входом является вход задачи $L$ и произвольное рациональное число $k$. В задаче $D(L)$ надо решить, существует или нет допустимое решение со значением целевой функции, большим или равным $k$. Тогда $D(L)$ — стандартная задача распознавания, соответствующая оптимизационной задаче $L$ (задаче максимизации целевой функции). Исходя из этого, класс PO можно определить как класс оптимизационных задач, стандартные задачи распознавания которых лежат в классе P, а NPO — в классе NP. Также напомним определения второго уровня полиномиальной и аппроксимационной иерархий, а именно, классов $\Delta^P_2$, $\Sigma^P_2$, $\Delta^P_2 O$ и $\Sigma^P_2 O$. Говорят, что задача распознавания принадлежит классу $\Delta^P_2$, если существует детерминированная оракульная машина Тьюринга [10], которая распознает её за полиномиальное время, используя в качестве оракула некоторый язык из класса NP. Задачи из класса $\Sigma^P_2$ распознаются недетерминированными оракульными машинами, использующими в качестве оракула язык из класса NP. По аналогии с PO и NPO через стандартную задачу распознавания определяются и классы $\Delta^P_2 O$ и $\Sigma^P_2 O$.

NP-трудные задачи из класса NPO относятся к труднорешаемым проблемам. Это означает, что на больших размерностях найти оптимальное решение за приемлемое время вряд ли удастся. Тогда актуальным становится вопрос полиномиально разрешимых частных случаев задачи. Для $\Sigma_2^P$-трудных задач ситуация ещё сложнее, ибо трудоёмкость поиска их оптимального решения на порядок выше трудоёмкости для задач из класса NPO. Частные случаи задач из $\Sigma_2^P O$ можно разделить на четыре категории: 1) $\Sigma_2^P$-трудные; 2) попадающие в $\Delta_2^P O$; 3) лежащие в NPO; 4) полиномиально разрешимые. В данной работе будем исследовать сложность задачи конкурентного размещения и ценообразования на основе этих категорий. Но сперва покажем, что задача лежит в классе $\Sigma_2^P O$ и является $\Sigma_2^P$-трудной.

Рассмотрим стандартную задачу распознавания, в которой спрашивается, найдётся ли решение задачи конкурентного размещения и ценообразования со значением целевой функции не меньше $k$. Решить такую задачу можно перебором всех размещений предприятий лидера и решением параметрической задачи конкурента. Очевидно, что стандартная задача распознавания для задачи конкурента лежит в классе NP. Её и возьмём в качестве NP-оракула. Тогда, используя двоичный поиск и NP-оракул, можно за полиномиальное число обращений к данному оракулу найти решение задачи конкурента. Тем самым имеем недетерминированный алгоритм решения стандартной задачи распознавания исследуемой проблемы с оракулом из класса NP. Значит, задача конкурентного размещения и ценообразования принадлежит классу $\Sigma_2^P O$. Развёрнутое доказательство этого факта можно найти в [7]. Докажем следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Задача конкурентного размещения и ценообразования для любого фиксированного коэффициента $q \in (0,1)$ является $\Sigma_2^P$-трудной.*

Доказательство. Сведём следующую $\Sigma_2^p$-полную задачу $\exists\forall 3,4$SAT [22] к исследуемой задаче.

**Задача 1** ($\exists\forall 3,4$SAT)**.** Вход: *заданы два вектора $x = (x_1, \ldots, x_p)$ и $y = (y_1, \ldots, y_r)$ булевых переменных и формула $\varphi(x, y)$ в дизъюнктивной нормальной форме. Каждая конъюнкция содержит ровно одну переменную из $x$ и две или три переменные из $y$.*

Вопрос: *существует ли такое означивание переменных $x$, что для всех означиваний $y$ формула $\varphi(x, y)$ выполнена?*

Рассмотрим произвольный пример задачи $\exists\forall 3,4$SAT. Пусть $k$ — число конъюнкций в $\varphi(x, y)$. Построим пример задачи конкурентного размещения и ценообразования следующим образом. Для каждой переменной $x_i$ ($y_i$) определим два прибыльных места размещения $x_i$ и $\overline{x}_i$ ($y_i$ и $\overline{y}_i$), соответствующих литералам $x_i$ и $\overline{x}_i$ ($y_i$ и $\overline{y}_i$). Между парами $x_i$ ($y_i$)

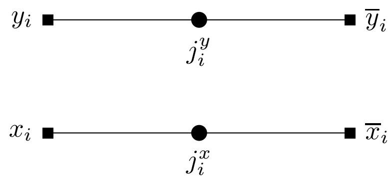


*Рис. 1.* Предприятия и прибыльные клиенты, соответствующие $x_i$ и $y_i$

и $\overline{x}_i$ ($\overline{y}_i$) разместим *прибыльного* клиента $j_i^x$ ($j_i^y$), который соединён дугами с обоими местами размещения, как показано на рис. 1. Длины дуг, соединяющих $j_i^x$ ($j_i^y$) с $x_i$ ($y_i$) и $\overline{x}_i$ ($\overline{y}_i$), равны $1/k^t$ (определим $t$ чуть позже), т. е. $d\big(x_i, j_i^x\big) = d\big(j_i^x, \overline{x}_i\big) = d\big(y_i, j_i^y\big) = d\big(j_i^y, \overline{y}_i\big) = 1/k^t$. Бюджет клиента $j_i^x$ равен $1+1/k^t$, а бюджет клиента $j_i^y$ равен $1-q+1/k^{t-1}+4/k^t$. Будем называть размещения $x_i$ и $\overline{x}_i$ ($y_i$ и $\overline{y}_i$) *альтернативными.*

Для каждой конъюнкции $\kappa_s$ введём места размещения предприятий $\mathrm{alt}_s$ и $\mathrm{sin}_s$ и четыре клиента $j_s^{\mathrm{con}}$, $j_s^{\mathrm{alt}}$, $j_s^{\mathrm{sin}}$ и $j_s^{\mathrm{ad}}$. Сведение $x_i \wedge y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge y_{i_3}$ изображено на рис. 2. Клиент $j_s^{\mathrm{con}}$ соединён дугами с пятью местами размещения $\mathrm{alt}_s$, $x_i$, $\overline{y}_{i_1}$, $\overline{y}_{i_2}$ и $\overline{y}_{i_3}$. Положим $d\big(j_s^{\mathrm{con}}, x_i\big) = 1 - 1/k^{t+1}$, $d\big(j_s^{\mathrm{con}}, \mathrm{alt}_s\big) = 1 - 1/k^t - 1/k^{t+1}$, $d\big(j_s^{\mathrm{con}}, \overline{y}_i\big) = 1 - 1/k^t$ для любого $i$. Бюджет $j_s^{\mathrm{con}}$ равен 1. Будем называть клиента $j_s^{\mathrm{con}}$ *спорным.* Клиент $j_s^{\mathrm{alt}}$ соединён дугами с двумя местами размещения предприятий $x_i$ и $\mathrm{alt}_s$, где $\mathrm{alt}_s$ расположен между $j_s^{\mathrm{alt}}$ и $j_s^{\mathrm{con}}$. Положим $d\big(\mathrm{alt}_s, j_s^{\mathrm{alt}}\big) = q-1/k^{t-1}-2/k^t$ и $d\big(x_i, j_s^{\mathrm{alt}}\big) = 1-1/k^t$. Бюджет $j_s^{\mathrm{alt}}$ возьмём равным 1. Клиент $j_s^{\mathrm{ad}}$ расположен на расстоянии 0 от места размещения $\overline{x}_i$ и его бюджет равен $1/k^t$.

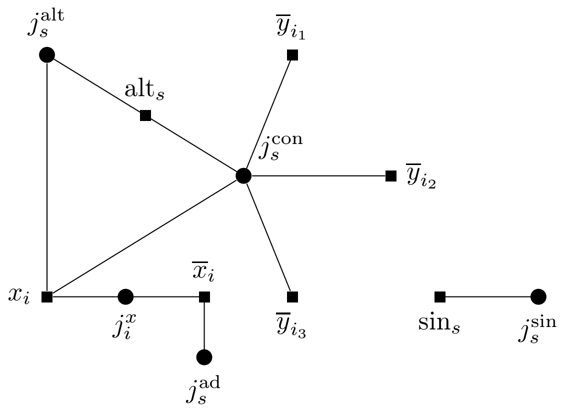


*Рис. 2.* Представление $x_i \wedge y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge y_{i_3}$

Клиент $j_s^{\sin}$ и место размещения предприятий $\sin_s$ удалены на существенно большое расстояние от других вершин и $d\big(\sin_s, j_s^{\sin}\big) = 0$. Бюджет $j_s^{\sin}$ равен $1 - q + 1/k^{t-1} + 2/k^t + 1/k^{t+2}$. Затраты на транспортировку между парой вершин определяются длиной кратчайшего пути. Для примера на рис. 3 изображена формула $\varphi(x, y) = (\overline{x}_1 \wedge y_1 \wedge \overline{y}_2 \wedge y_3) \vee (x_2 \wedge y_2 \wedge \overline{y}_3)$. Число предприятий лидера $p$ совпадает с числом переменных $x$, а число предприятий Конкурента равно $r = l + k$, где $l$ — число булевых переменных $y$.

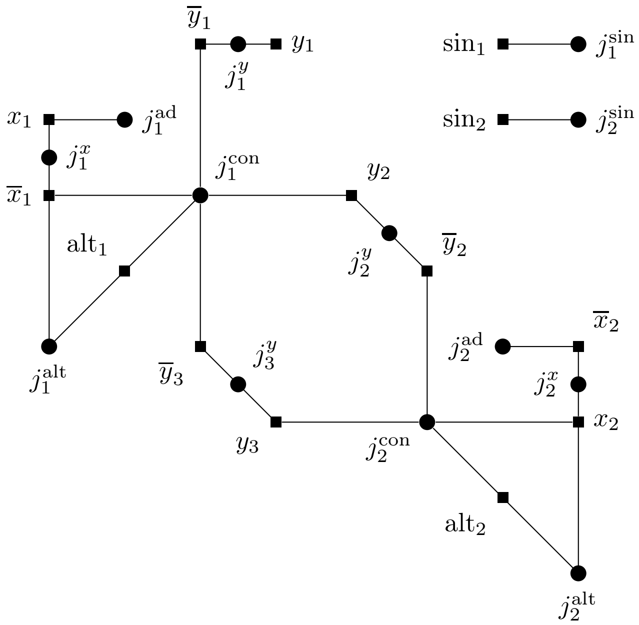


*Рис. 3.* Пример сети $\varphi(x, y) = (\overline{x}_1 \wedge y_1 \wedge \overline{y}_2 \wedge y_3) \vee (x_2 \wedge y_2 \wedge \overline{y}_3)$

Теперь определим доходы игроков в зависимости от выбора размещения предприятий. Пусть $\kappa_s = x_i \wedge y_{i_1} \wedge y_{i_2} \wedge y_{i_3}$ и Лидер размещает одно из своих предприятий в $x_i$ или $\overline{x}_i$. Если Конкурент не размещает своё предприятие в альтернативном месте, то Лидер получит доход от клиента $j_i^x$, равный 1. В противном случае игроки поделят между собой доход в следующих пропорциях: Лидер получит $q$, а Конкурент — $1 - q$. Заметим, что возможный дополнительный доход в $x_i$ и $\overline{x}_i$ от клиентов $j_s^{\mathrm{con}}$, $j_s^{\mathrm{alt}}$, $j_s^{\mathrm{ad}}$, $s = 1, \ldots, k$, не превышает $1/k^{t-1} + 1/k^t$. Таким образом, если оба игрока займут $x_i$ и $\overline{x}_i$, то доход Конкурента не превысит $(1-q)(1+1/k^{t-1}+1/k^t)$. Максимальный доход в $y_i$, $\overline{y}_i$, $i \in \{i_1, i_2, i_3\}$, $\mathrm{alt}_s$ или $\sin_s$ не превышает $1-q+2/k^{t-1}+3/k^t$, а минимальный доход не меньше $1-q+1/k^{t-1}+1/k^t$.

Возьмём $t$ настолько большим, что $1-q+2/k^{t-1}+3/k^t < 1$. Тогда из выведенных выше максимальных и минимальных доходов следует, что Лидер разместит свои предприятия в $x_i$ и $\overline{x}_i$, по одному предприятию в каждой паре $(x_i,\, \overline{x}_i)$, так как он знает, что в этом случае Конкурент будет размещать свои предприятия в $y_i$, $\overline{y}_i$, $\mathrm{alt}_s$ или $\mathrm{sin}_s$.

Предположим, что Лидер забрал себе все места размещения с прибыльными клиентами $j_i^x$. Если Конкурент разместил предприятие в $y_i$ или $\overline{y}_i$, то он получит доход $1 - q + 1/k^{t-1} + 3/k^t$ от клиента $j_i^y$. Возможный доход от каждого из мест размещения $\mathrm{alt}_s$ и $\mathrm{sin}_s$ не превышает $1 - q + 1/k^{t-1} + 3/k^t$. Таким образом, Конкуренту выгоднее всего разместить $r$ предприятий в $y_i$ и $\overline{y}_i$, по одному предприятию в каждой паре $(y_i, \overline{y}_i)$. Оставшиеся предприятия Конкурент разместит в $\mathrm{alt}_s$ и $\mathrm{sin}_s$. Нетрудно показать, что он должен разместить по одному предприятию в $\mathrm{alt}_s$ или $\mathrm{sin}_s$ для каждого $s = 1, \ldots, k$ и его выбор будет зависеть от размещения предприятий Лидера. Отметим, что доход Конкурента в $\mathrm{sin}_s$ не зависит от размещения предприятий Лидера и равен $1-q+1/k^{t-1}+2/k^t+1/k^{t+2}$. Пусть Лидер открыл предприятие $x_i$. Тогда доход Конкурента в $\mathrm{alt}_s$ не будет превышать

$$1 - \frac{1}{k^t} - q + \frac{1}{k^{t-1}} + \frac{2}{k^t} + 1 - \frac{1}{k^{t+1}} - 1 + \frac{1}{k^t} + \frac{1}{k^{t+1}} = 1 - q + \frac{1}{k^{t-1}} + \frac{2}{k^t},$$

и он предпочтёт открыть предприятие в $\mathrm{sin}_s$. Следовательно, Лидер получит клиента $j_s^{\mathrm{alt}}$, который принесёт доход $1/k^t$. Пусть Лидер открыл предприятие в $\overline{x}_i$. В этом случае он не захватит клиента $j_s^{\mathrm{alt}}$, но получит клиента $j_s^{\mathrm{ad}}$ с доходом $1/k^t$. Следовательно, доход Лидера со всех клиентов за исключением спорных равен $p + 1/k^{t-1}$ независимо от выбора размещений предприятий в $x_i$ или $\overline{x}_i$. Теперь рассмотрим случай, когда Конкурент предпочитает $\mathrm{alt}_s$. Доход Конкурента от клиента $j_s^{\mathrm{alt}}$ в $\mathrm{alt}_s$ равен $1 - q + 1/k^{t-1} + 2/k^t$, и он может получить дополнительный доход $1/k^{t+1}$ от клиента $j_s^{\mathrm{con}}$. Следовательно, выбор размещения предприятий в $\mathrm{alt}_s$ и $\mathrm{sin}_s$, $s = 1, \ldots, k$, полностью определяется по размещению Лидера и не зависит от способа обслуживания прибыльных клиентов предприятиями Конкурента. Тогда суммарный доход обоих игроков определяется распределением спорных клиентов. Если Лидер открывает предприятие в $\overline{x}_i$, то клиент $j_s^{\mathrm{con}}$ будет обслужен Конкурентом. Допустим, что Лидер открыл предприятие в $x_i$. Конкурент заберёт клиента $j_s^{\mathrm{con}}$ тогда и только тогда, когда откроет предприятие в $\overline{y}_{i_1}$, $\overline{y}_{i_2}$ или $\overline{y}_{i_3}$. Таким образом, Лидер обслужит хотя бы одного спорного клиента тогда и только тогда, когда найдётся означивание $x$ такое, что для всех означиваний $y$ формула $\varphi(x, y)$ выполнена. Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** *Утверждение теоремы* 1 *остаётся верным даже в случае некооперативного поведения игроков, т. е. при условии, что среди всех оптимальных решений Конкурент выберет то, при котором достигается минимальный доход Лидера.*

## 3. Частные случаи

В дополнение к проблеме $\exists\forall 3, 4$SAT рассмотрим задачу $\exists\forall 1, 2$SAT. В этой задаче каждая конъюнкция состоит из одной переменной $x$ и не более одной переменной $y$. Очевидно, что задача полиномиально разрешима. В теореме 1 мы построили пример задачи конкурентного размещения и ценообразования, который соответствует проблеме $\exists\forall 3, 4$SAT. По аналогии построим множество примеров, соответствующих $\exists\forall 1, 2$SAT. Назовём эти примеры задачей CLP2SAT. Вопрос: является ли задача CLP2SAT полиномиально разрешимой? Чтобы ответить на него, рассмотрим задачу maxmin-1,2-Sat. Как и в проблеме $\exists\forall 1, 2$SAT, заданы два вектора $x = (x_1, \ldots, x_p)$ и $y = (y_1, \ldots, y_r)$ булевых переменных и формула $\varphi(x, y)$ в дизъюнктивной нормальной форме. Каждая конъюнкция состоит из одной переменной $x$ и не более одной переменной $y$. Требуется найти $x$, при котором общее число выполненных конъюнкций максимально при любом $y$. Очевидно, что задача CLP2SAT эквивалентна проблеме maxmin-1,2-SAT.

**Теорема 2.** *Задача* maxmin-1,2-SAT NP-*трудна.*

Доказательство. Рассмотрим NP-трудную задачу о точном покрытии 3-множествами (EC3SET).

**Задача 2** (EC3SET)**.** Вход: *множество* $X$, *где* $|X| = 3q$, *и набор* $C$ *трёхэлементных подмножеств* $X$.

Вопрос: *существует ли подмножество* $\widetilde{C}$ *набора* $C$, *в котором каждый элемент из* $X$ *встречается только в одном элементе* $\widetilde{C}$?

Возьмём пример EC3SET. Пусть $k$ — размер набора $C$. Построим следующий пример maxmin-1,2-SAT. Для каждого подмножества $C_r = (X_i, X_j, X_l)$ определим булевы переменные $x_r$, $y_i$, $y_j$, $y_l$ и конъюнкции $(x_r \wedge y_i)$, $(x_r \wedge y_j)$, $(x_r \wedge y_l)$. Также введём $3q$ конъюнкций $(x_0 \wedge \overline{y}_i)$, $i = 1, \ldots, 3q$, $k$ конъюнкций $(\overline{x}_r \wedge y_0)$, $r = 1, \ldots, k$, и $k$ идентичных конъюнкций $(x_0 \wedge \overline{y}_0)$. Покажем, что точное покрытие $X$ существует тогда и только тогда, когда общее число выполненных конъюнкций равно $2q + k$.

Нетрудно заметить, что необходимо просмотреть только те случаи, в которых $x_0$ и $y_0$ равны 1. Пусть $H$ — общее число выполненных конъюнкций, а $h$ — число переменных $x_r$ таких, что $x_r = 1$. Если $h < q$, то

$$H \leqslant 3h + k - h = 2h + k < 2q + k.$$

Если же $h > q$, то

$$H \leqslant 3q + k - h = 2q + k - (h - q) < 2q + k.$$

Пусть $h = q$. Тогда

$$H = 3q - s + (k - q) = 2q + k - s,$$

где $s$ — число повторений переменных $y$ для истинных означиваний $x$. Следовательно, точное покрытие $X$ существует в том и только том случае, когда оптимум равен $2q + k$. Теорема 2 доказана.

**Следствие 2.** *Задача* CLP2SAT NP-*трудна.*

Далее рассмотрим частные случаи, когда предприятия Лидера и Конкурента уже размещены. В этих случаях каждому клиенту требуется определить предприятие, на котором он будет обслуживаться. Это можно сделать за время $O(mn^2)$. Следовательно, задача полиномиально разрешима, т. е. лежит в классе PO.

Заметим, что задача конкурентного размещения и ценообразования может быть решена за время $O\big(C_p^n * C_r^{n-p} * mn^2\big) = O(mn^{p+r+2})$ перебором всех возможных размещений. Рассмотрим следующие частные случаи: 1) $p = \text{const}$; 2) $r = \text{const}$; 3) $p, r = \text{const}$. В первом случае число различных размещений Лидера равно $C_p^n = \text{Poly}(n)$. Следовательно, задача конкурентного размещения и ценообразования лежит в классе $\Delta_2^P O$. Во втором случае задача Конкурента полиномиально разрешима, так как $C_r^{n-p} = \text{Poly}(n, p)$. Тогда задача Лидера лежит в NPO. В третьем случае задача, очевидно, разрешима за полиномиальное время, т. е. принадлежит классу PO.

В конце рассмотрим случаи, когда $p = 0$ или $r = 0$. В этих случаях задача эквивалентна известной задаче о $p$-медиане, которая NP-трудна в сильном смысле. Следовательно, эти частные случаи также NP-трудны в сильном смысле.

## Заключение

В данной работе исследована новая модель конкурентного размещения и ценообразования. Установлена связь модели с полиномиальной иерархией классов сложности задач распознавания, а также положение некоторых частных случаев. Установлена NP-трудность задачи maxmin-1,2-SAT.

Результаты по сложности рассмотренных проблем приводят нас к следующим интересным направлениям дальнейшего исследования моделей конкурентного размещения и ценообразования: разработка точных алгоритмов решения, разработка приближённых алгоритмов, основанных на локальном поиске и метаэвристиках, а также уточнение положения в полиномиальной и аппроксимационной иерархиях сложностных классов. В первом варианте можно использовать методы и подходы из [11–13]. В [14] теоретически установлена экспоненциальная трудоёмкость локального поиска. Несмотря на это, опыт применения методов, основанных на локальных улучшениях, говорит об их практической эффективности [15–21]. При исследовании вычислительной сложности можно также воспользоваться подходами из [22–25] для задач двухуровневого программирования.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Hotelling H.** Stability in competition // Econ. J. 1929. Vol. 39, No. 153. P. 41–57.
2. **Eiselt H. A., Laporte G., Thisse J.-F.** Competitive location models: a framework and bibliography // Transp. Sci. 1993. Vol. 27, No. 1. P. 44–54.
3. **Eiselt H. A., Laporte G.** Sequential location problems // Eur. J. Oper. Res. 1996. Vol. 96, No. 2. P. 217–242.
4. **Hamacher H. W., Nickel S.** Classification of location models // Loc. Sci. 1998. Vol. 6, No. 1. P. 229–242.
5. **Plastria F.** Static competitive facility location: an overview of optimisation approaches // Eur. J. Oper. Res. 2001. Vol. 129, No. 3. P. 461–470.
6. **Панин А. А., Пащенко М. Г., Плясунов А. В.** Двухуровневые модели конкурентного размещения производства и ценообразования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 153–169.
7. **Kononov A., Panin A., Plyasunov A.** A new model of competitive location and pricing with the uniform split of the demand // Optimization problems and their applications. Cham: Springer, 2018. (Commun. Comput. Inform. Sci.; Vol. 871).
8. **Garcia M. D., Fernandez P., Pelegrin B.** On price competition in location-price models with spatially separated markets // TOP. 2004. Vol. 12, P. 351–374.
9. **Pelegrin B., Fernandez P., Garcia M. D., Cano S.** On the location of new facilities for chain expansion under delivered pricing // Omega. 2012. Vol. 40, No. 2. P. 149–158.
10. **Ausiello G., Crescenzi P., Gambosi G., Kann V., Marchetti-Spaccamela A., Protasi M.** Complexity and approximation: combinatorial optimization problems and their approximability properties. Berlin: Springer-Verl., 1999. 524 p.
11. **Alekseeva E., Kochetov Yu.** Metaheuristics and exact methods for the discrete $(r \mid p)$-centroid problem // Metaheuristics for bi-level optimization. Berlin: Springer-Verl., 2013. P. 189–219. (Stud. Comput. Intell.; Vol. 482).
12. **Alekseeva E., Kochetov Yu., Plyasunov A.** An exact method for the discrete $(r \mid p)$-centroid problem // J. Global Optim. 2015. Vol. 63, No. 3. P. 445–460.

**13. Береснев В. Л., Мельников А. А.** Алгоритм генерации отсечений для задачи выбора оптимальных решений в конкурентной борьбе на рынке // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26, № 2. С. 5–29.

**14. Alekseeva E., Kochetov Yu., Plyasunov A.** Complexity of local search for the $p$-median problem // Eur. J. Oper. Res. 2008. Vol. 191, No. 3. P. 736–752.

**15. Davydov I., Kochetov Y., Dempe S.** Local search approach for the competitive facility location problem in mobile networks // Int. J. Artif. Intell. 2018. Vol. 16, No. 1. P. 130–143.

**16. Davydov I. A., Kochetov Y. A., Carrizosa E.** A local search heuristic for the $(r \mid p)$-centroid problem in the plane // Comput. Oper. Res. 2014. Vol. 52. P. 334–340.

**17. Лавлинский С. М., Панин А. А., Плясунов А. В.** Сравнение моделей планирования государственно-частного партнёрства // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 3. С. 35–60.

**18. Кочетов Ю. А., Панин А. А., Плясунов А. В.** Сравнение метаэвристик для решения двухуровневой задачи размещения предприятий и фабричного ценообразования // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 3. С. 36–54.

**19. Diakova Z., Kochetov Yu.** A double VNS heuristic for the facility location and pricing problem // Electron. Notes Discrete Math. 2012. Vol. 39, No. 1. P. 29–34.

**20. Давыдов И. А., Кочетов Ю. А., Младенович Н., Уросевич Д.** Быстрые метаэвристики для дискретной задачи о $(r \mid p)$-центроиде // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 106–119.

**21. Alekseeva E., Kochetov Y., Talbi E.-G.** A metaheuristic for the discrete bilevel problem with multiple objectives at the lower level // Int. Trans. Oper. Res. 2017. Vol. 24, No. 5. P. 959–981.

**22. Davydov I., Kochetov Yu., Plyasunov A.** On the complexity of the $(r \mid p)$-centroid problem in the plane // TOP. 2014. Vol. 22, No. 2. P. 614–623.

**23. Iellamo S., Alekseeva E., Chen L., Coupechoux M., Kochetov Yu.** Competitive location in cognitive radio networks // 4OR. 2015. Vol. 13, No. 1. P. 81–110.

**24. Панин А. А., Плясунов А. В.** О сложности двухуровневых задач размещения и ценообразования // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 5. С. 54–66.

**25. Плясунов А. В., Панин А. А.** Задача ценообразования. Ч. 2. Вычислительная сложность // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 6. С. 56–71.



*Кононов Александр Вениаминович*
*Панин Артём Александрович*
*Плясунов Александр Владимирович*



Статья поступила
22 ноября 2018 г.

После доработки —
2 апреля 2019 г.

Принята к публикации
5 июня 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2019. Vol. 26, No. 3. P. 27–45

UDC 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2019.26.638

# A BILEVEL COMPETITIVE LOCATION AND PRICING MODEL WITH NONUNIFORM SPLIT OF DEMAND*)

*A. V. Kononov*[1,2,a], *A. A. Panin*[1,2,b], and *A. V. Plyasunov*[1,2,c]

[1]Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

[2]Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: [a]`alvenko@math.nsc.ru`, [b]`arteam1897@gmail.com`,
[c]`apljas@math.nsc.ru`

**Abstract.** Under study is the bilevel competitive facility location and pricing problem which is formulated in terms of the Stackelberg game. The problem involves the two producers: the Leader and the Competitor. They consistently place their facilities and set prices. The choice of prices is based on the Bertrand model of price competition and the possibility of dividing a client's demand if this will be profitable for both players. In this case, the demand is divided between the players in a given proportion.

The complexity is investigated of finding the optimal solution of the problem and its particular cases. It is shown that the problem is $\Sigma_2^P$-hard. However, under certain conditions on the input parameters, the complexity decreases significantly and in some cases the problem becomes polynomially solvable. Illustr. 3, bibliogr. 25.

**Keywords:** bilevel problem, Stackelberg game, facility location, pricing, Bertrand model, nonuniform split of demand, complexity, polynomial hierarchy.

## REFERENCES

1. **H. Hotelling,** Stability in competition, *Econom. J.* **39** (153), 41–57 (1929).
2. **H. A. Eiselt, G. Laporte,** and **J.-F. Thisse,** Competitive location models: A framework and bibliography, *Transport. Sci.* **27** (1), 44–54 (1993).
3. **H. A. Eiselt** and **G. Laporte,** Sequential location problems, *Europ. J. Oper. Res.* **96** (2), 217–242 (1996).

*)This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 17–11–01021).

4. **H. W. Hamacher** and **S. Nickel,** Classification of location models, *Locat. Sci.* **6** (1), 229–242 (1998).
5. **F. Plastria,** Static competitive facility location: An overview of optimization approaches, *Europ. J. Oper. Res.* **129** (3), 461–470 (2001).
6. **A. A. Panin, M. G. Pashchenko,** and **A. V. Plyasunov,** Bilevel competitive facility location and pricing problems, *Automat. Remote Control* **75** (4), 715–727 (2014).
7. **A. Kononov, A. Panin,** and **A. Plyasunov,** A new model of competitive location and pricing with the uniform split of the demand, in *Optimization Problems and Their Applications. OPTA 2018*, Ser. *Communications in Computer and Information Science*, Vol. 871 (Springer, Cham, 2018), pp. 16–28.
8. **M. D. Garcia, P. Fernandez,** and **B. Pelegrin,** On price competition in location-price models with spatially separated markets, *TOP* **12**, 351–374 (2004).
9. **B. Pelegrin, P. Fernandez, M. D. Garcia,** and **S. Cano,** On the location of new facilities for chain expansion under delivered pricing, *Omega* **40** (2), 149–158 (2012).
10. **G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela,** and **M. Protasi,** *Complexity and Approximation: Combinatorial Optimization Problems and Their Approximability Properties* (Springer, Berlin, 1999).
11. **E. Alekseeva** and **Yu. Kochetov,** Metaheuristics and exact methods for the discrete $(r \mid p)$-centroid problem, in *Studies in Computational Intelligence*, Vol. 482: *Metaheuristics for Bilevel Optimization*, (Springer, Berlin, 2013), pp. 189–219.
12. **E. Alekseeva, Yu. Kochetov,** and **A. Plyasunov,** An exact method for the discrete $(r \mid p)$-centroid problem, *J. Global Optim.* **63** (3), 445–460 (2015).
13. **V. L. Beresnev** and **A. A. Melnikov,** A cut generation algorithm to find an optimal solution in a market competition, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **26** (2), 5–29 (2019) [Russian] [*J. Appl. Indust. Math.* **13** (2), 351–367 (2019)].
14. **E. Alekseeva, Yu. Kochetov,** and **A. Plyasunov,** Complexity of local search for the $p$-median problem, *Europ. J. Oper. Res.* **191** (3), 736–752 (2008).
15. **I. Davydov, Yu. Kochetov,** and **S. Dempe,** Local search approach for the competitive facility location problem in mobile networks, *Internat. J. Artif. Intell.* **16** (1), 130–143 (2018).
16. **I. A. Davydov, Yu. A. Kochetov,** and **E. Carrizosa,** A local search heuristic for the $(r \mid p)$-centroid problem in the plane, *Comput. Oper. Res.* **52**, 334–340 (2014).
17. **S. M. Lavlinskii, A. A. Panin,** and **A. V. Plyasunov,** Comparison of models of planning public-private partnership, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **23** (3), 35–60 (2016) [Russian] [*J. Appl. Indust. Math.* **10** (3), 356–369 (2016)].
18. **Yu. A. Kochetov, A. A. Panin,** and **A. V. Plyasunov,** Comparison of metaheuristics for the bilevel facility location and mill pricing problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (3), 36–54 (2015) [Russian] [*J. Appl. Indust. Math.* **9** (3), 392–401 (2015)].

19. **Z. Diakova** and **Yu. Kochetov,** A double VNS heuristic for the facility location and pricing problem, *Electron. Notes Discrete Math.* **39** (1), 29–34 (2012).
20. **I. A. Davydov, Yu. A. Kochetov, N. Mladenovic,** and **D. Urosevic,** Fast metaheuristics for the discrete $(r \mid p)$-centroid problem, *Automat. Remote Control.* **75** (4, 677–687, 2014.
21. **E. Alekseeva, Yu. Kochetov,** and **E.-G. Talbi,** A metaheuristic for the discrete bilevel problem with multiple objectives at the lower level, *Intern. Trans. Oper. Res.* **24** (5), 959–981 (2017).
22. **I. A. Davydov, Yu. A. Kochetov,** and **A. V. Plyasunov,** On the complexity of the $(r \mid p)$-centroid problem in the plane, *TOP* **22** (2), 614–623 (2014).
23. **S. Iellamo, E. Alekseeva, L. Chen, M. Coupechoux,** and **Yu. Kochetov,** Competitive location in cognitive radio networks, *4OR* **13** (1), 81–110 (2015).
24. **A. A. Panin** and **A. V. Plyasunov,** On complexity of the bilevel location and pricing problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **21**, No. 5, 54–66 (2014) [Russian] [*J. Appl. Indust. Math.* **8** (4), 574–581 (2014)].
25. **A. V. Plyasunov** and **A. A. Panin,** The pricing problem. II: Computational complexity, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **19** (6), 56–71 (2012) [Russian] [*J. Appl. Indust. Math.* **7** (3), 420–430 (2013)].

*Aleksandr A. Kononov*
*Artem A. Panin*
*Aleksandr V. Plyasunov*

Received November 22, 2018
Revised April 2, 2019
Accepted June 5, 2019