ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2019. Т. 26, № 3. С. 115–140

УДК 519.714.7 DOI 10.33048/daio.2019.26.640

О МИНИМИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ АДДИТИВНЫХ МЕР СЛОЖНОСТИ

И. П. Чухров

Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, 123056, Москва, Россия

E-mail: chip@icad.org.ru

Аннотация. Задача минимизации булевых функций для аддитивных мер сложности в геометрической интерпретации, как покрытие гранями подмножества вершин в единичном кубе, является специальным видом комбинаторной постановки взвешенной задачи о минимальном покрытии множества. Специфика определяется семейством покрывающих подмножеств, которые являются гранями в единичном кубе и содержатся в множестве единичных вершин функции, и мерой сложности граней, которая задаёт вес граней при вычислении сложности покрытия. Для меры сложности требуется неотрицательность, монотонность по включению граней и равенство для изоморфных граней. Для аддитивных мер сложности вводится классификация по порядку роста сложности граней в зависимости от размерности куба и исследуются характеристики сложности минимизации почти всех булевых функций. Библиогр. 11.

Ключевые слова: грань единичного куба, комплекс граней, булева функция, мера сложности, минимальный комплекс граней.

Введение

Гранью единичного куба B^n *ранга* k и *размерности* $n-k$ называется подмножество всех вершин куба, у которых k координат имеют одинаковые значения либо 0, либо 1. Любая вершина является гранью ранга n и размерности 0. В геометрической модели представления булевых функций рассматриваются подмножества вершин, грани и комплексы граней в n-мерном единичном кубе. В аналитической модели для представления булевых функций используются понятия булева функция, импликанта и дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), зависящие от n переменных. Набору переменных ДНФ соответствуют номера координат единичного куба.

ДНФ называются *изоморфными*, если одна ДНФ может быть получена из другой подстановкой переменных без отождествления. Элементарные конъюнкции *изоморфны*, если в них одинаково число переменных без отрицания и с отрицанием. Комплексы граней называются *изоморфными*, если один комплекс может быть получен из другого перестановкой координат. Грани изоморфны только тогда, когда содержат одинаковое число нулевых и единичных координат.

Мерой сложности на множестве ДНФ (комплексов граней) является функционал, который удовлетворяет аксиомам неотрицательности, монотонности, выпуклости и инвариантности относительно изоморфизма (см. [8, разд. 5.1], а также [5]).

Мера сложности $\mathcal{L}$ называется *аддитивной*, если $\mathcal{L}(M) = \sum\limits_{g \in M} \mathcal{L}(g)$, т. е. сложность комплекса граней M равна сумме сложностей граней комплекса (выпуклость), и для любой грани g выполняются следующие свойства: $\mathcal{L}(g) \geqslant 0$ (неотрицательность), $\mathcal{L}(g') \leqslant \mathcal{L}(g)$ для любой грани $g' \supset g$ (монотонность) и $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(\pi(g))$ для любой перестановки координат π.

Множество аддитивных мер сложности обозначим через Λ_+.

Аддитивными мерами сложности являются следующие функционалы: $l(g) = 1$ — длина и $L(g) = L_0(g) + L_1(g)$ — сложность или ранг грани, где $L_\sigma(g)$ — число направлений грани, равных σ для $\sigma \in \{0, 1\}$.

Линейной сложностью называется мера сложности, которая соответствует функционалу

$$L_{a,b}(M) = a \sum_{g \in M} (L(g) - 1) + b(l(M) - 1),$$

где $a + b > 0$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $L(g) - 1$ — число конъюнкций в импликанте, соответствующей грани $g \in M$, и $l(M) - 1$ — число дизъюнкций в ДНФ, соответствующей комплексу M.

Описание других классов мер сложности и пример неаддитивной меры сложности приведены в [5].

В единичном кубе B^n введём следующие обозначения:

B^n_m — слой куба с номером m, т. е. множество вершин, в которых число единичных координат равно m, где $0 \leqslant m \leqslant n$;

$S^n_{m-h,m}$ — пояс куба, т. е. множество вершин слоёв куба с номерами $m - h, \ldots, m$, где $0 \leqslant h \leqslant m \leqslant n$;

I^n_h — множество индексов $\left\{i \in \mathbb{Z}^+_0 \mid 0 \leqslant \frac{n}{2} - h \leqslant i \leqslant \frac{n}{2} + h \leqslant n\right\}$;

H^n_h — пояс куба, который содержит слои куба B^n_i для $i \in I^n_h$;

G^n — множество различных граней;

$G^n_{m-h,m}$ — множество граней размерности h в поясе куба $S^n_{m-h,m}$;

$N_M = \{\widetilde{\alpha} \in B^n \mid \widetilde{\alpha} \in g \in M\}$ — множество вершин комплекса граней $M \subseteq G^n$;

$N_f = \{\widetilde{\alpha} \in B^n \mid f(\widetilde{\alpha}) = 1\}$ — множество единичных вершин функции $f \in P_n$.

Две грани куба называются *изоморфными*, если одна грань может быть получена из другой некоторой перестановкой координат. Грани изоморфны в кубе B^n тогда и только тогда, когда принадлежат множеству $G^n_{m-h,m}$ для некоторых h и m, где $0 \leqslant h \leqslant m \leqslant n$.

Грань $g \subseteq N_f$ называется *гранью функции* f. Она называется *максимальной гранью функции* f, если любая грань $g' \supset g$ не содержится в множестве N_f. Комплекс граней $M \subseteq G^n$ называется *комплексом функции* $f \in P_n$, если $N_M = N_f$. Множества всех граней и максимальных граней функции f обозначим через G_f и S_f соответственно. Множество максимальных граней функции f, которые содержат вершину $\widetilde{\alpha} \in N_f$, обозначим через $S_f(\widetilde{\alpha})$.

Вершина куба называется *собственной* для комплекса граней функции, если только одна грань комплекса содержит эту вершину.

Для булевой функции f введём следующие обозначения:

$l(f)$ и $\mathcal{L}(f)$ — длина кратчайшего и сложность $\mathcal{L}$-минимального комплексов граней;

$l_{\mathcal{L}}(f)$ — максимальная длина $\mathcal{L}$-минимального комплекса функции f;

$\mathcal{M}_l(f)$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ —множества кратчайших и $\mathcal{L}$-минимальных комплексов.

Используемые, но не определяемые здесь понятия можно найти в работах [1, 4, 5].

Целую часть и верхнюю целую часть числа x будем обозначать через $\lfloor x \rfloor$ и $\lceil x \rceil$ соответственно. Под log всюду понимается логарифм по основанию 2. Через $o(1)$ всюду обозначаем величину, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$, а через $\Theta(\varphi(n))$ для функции $\varphi(n) > 0$ всюду обозначаем произвольную функцию $\psi(n) > 0$, для которой существуют такие константы $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что $c_1\varphi(n) \leqslant \psi(n) \leqslant c_2\varphi(n)$ при $n \to \infty$.

Обозначим через $\widetilde{P_n}$ подмножество функций из P_n, которое содержит почти все функции n переменных [1, 4] и имеет следующие свойства k-мерных граней и комплексов граней.

(i) Число допустимых граней при $k \leqslant k_0 = \lceil \log n \rceil$ и $k_2 = \lfloor \log\log n \rfloor$ оценивается следующим образом:

$$g_k(f) \sim \bar{g}_k(n) = \binom{n}{k} 2^{n-k-2^k},$$

$$g(f) \sim \bar{g}_{k_2}(n) + \bar{g}_{k_2+1}(n) = 2^n n^{\log\log n(1+o(1))}$$

и $g_k(f) = 0$ при $k > k_0$. Следовательно, $|N_f| = g_0(f) \sim \bar{g}_0(n) = 2^{n-1}$ и число вершин функции, которые содержатся в гранях функции размерности больше $k_1 = \lceil \log\log n + \log\log\log n \rceil$, не превосходит $2^n n^{-\log\log n \cdot (1-o(1))}$.

(ii) Число максимальных граней при $k \leqslant k_0$ удовлетворяет соотношениям

$$s_k(f) \sim \bar{s}_k(n) = \binom{n}{k} 2^{n-k-2^k} \left(1 - 2^{-2^k}\right)^{n-k},$$
$$s(f) \sim \bar{s}_{k_2}(n) + \bar{s}_{k_2+1}(n) = 2^n n^{\log\log n(1+o(1))}.$$

Следовательно, почти все максимальные грани функции имеют размерность k_2 или k_2+1 и почти все k-мерные грани функции являются максимальными при $k > k_2$, так как $g_k(f) \sim s_k(f)$.

(iii) Для минимальных и кратчайших комплексов граней асимптотически равны длины и сложности: $l_L(f) \sim l(f) \sim \bar{l}_n$ и $L(f) \sim nl(f)$, где $\bar{l}_n \sim \bar{c}_n 2^n/(\log n \log\log n)$ — среднее значение длины кратчайшего комплекса граней функции и $1 \leqslant \bar{c}_n \leqslant \Theta(1)$. В [10] получена верхняя оценка $\bar{c}_n \leqslant \omega(n)$, где функция $\omega(n)$ колеблется между 1,38826... и 1,54169... в зависимости от дробной части $\log\log n + \log\log\log n$.

При поиске решения задачи минимизации булевой функции локальные методы, которые имеют приемлемую трудоёмкость, позволяют только сократить вычислительные затраты. Специальные оптимизационные задачи для нахождения минимальной ДНФ или минимальной сложности преобразований для упрощения ДНФ в общем случае сводятся к задачам оптимизации из второго уровня полиномиальной иерархии [9, 11].

Соотношения между множествами минимальных комплексов граней (ДНФ) и отношение сложности комплексов булевой функции, минимальных относительно различных мер сложности, исследовались для мер сложности l, L и $L_{a,b}$ [2, 4]. Множества кратчайших и минимальных комплексов могут совпадать, пересекаться и не пересекаться при $n > 5$. Множества L- и $L_{a,b}$-минимальных комплексов могут не пересекаться при $n \geqslant 7$. Максимум отношения сложности для кратчайших комплексов и для минимальных и кратчайших комплексов булевой функции может быть асимптотически равен $\frac{n}{2}$ при $n \to \infty$. При этом для почти всех функций сложности и длины минимальных и кратчайших комплексов асимптотически равны. Отношение сложности комплексов функции для линейной меры сложности на множестве кратчайших комплексов может быть равно $\Theta(n)$, а на множестве комплексов минимальных относительно другой линейной меры сложности — $\Theta(1)$.

В [6] построен класс функций n переменных, который имеет дважды экспоненциальную мощность и единственный кратчайший комплекс, не принадлежащий множеству экспоненциальной мощности комплексов, минимальных относительно мер сложности, которые представляются полиномами с положительными коэффициентами. Для квазициклических функций n переменных [7] получены экспоненциальные нижние оценки характеристик, определяющих неприменимость локальных методов сокращения вычислительных затрат при минимизации, и дважды экспоненциальные нижние оценки числа структурно различных минимальных комплексов граней.

1. Свойства аддитивных мер сложности

Множества неотрицательных вещественных и целых чисел обозначим через $\mathbb{R}_0^+$ и $\mathbb{Z}_0^+$ соответственно.

Множество функций $\varphi\colon \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, которые удовлетворяют условиям неотрицательности и монотонности: $\varphi(i,j) \geqslant 0$, $\varphi(i+1,j) \geqslant \varphi(i,j)$ и $\varphi(i,j+1) \geqslant \varphi(i,j)$, обозначим через Φ.

Лемма 1. *Мера сложности $\mathcal{L}$ принадлежит Λ_+ тогда и только тогда, когда есть функция $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi$ такая, что $\mathcal{L}(g) = \varphi_{\mathcal{L}}(L_0(g), L_1(g))$ для любой грани g .*

Так как число различных пар $(i,j) \in \mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$, где $0 \leqslant i+j \leqslant n$, равно $\binom{n+1}{2}$, из леммы 1 следует, что для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_+$ грани ранга не более n принимают не более чем $\binom{n+1}{2}$ различных значений сложности.

Отличие взвешенной задачи нахождения минимального покрытия от задачи нахождения кратчайшего покрытия заключается в том, что любое неприводимое покрытие может быть единственным минимальным покрытием при определённых значениях сложности покрывающих подмножеств. Например, если сложность неприводимого покрытия меньше, чем сложность любого множества, не входящего в неприводимое покрытие. Задача минимизации булевых функций является задачей о минимальном покрытии с ограничением на число различных значений сложности покрывающих множеств. Число функций n переменных, которые имеют $\Theta(n^2)$ максимальных граней различной сложности, не превосходит $\binom{3^n}{\Theta(n^2)} \leqslant 2^{\Theta(n^3)}$. Остальные функции имеют не более чем $\binom{n+1}{2}$ подмножеств максимальных граней одинаковой сложности.

Для типичных функций максимальные грани имеют размерность не более k_0 и почти все единичные вершины содержатся в поясе куба H_h^n, где $h/\sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому почти все единичные вершины содержатся в максимальных гранях, для которых число различных значений сложности не превышает $2hk_0 \leqslant \Theta(\sqrt{n}\log^2 n)$.

Для функции $\varphi \in \Phi$ значения $\max\limits_{0 \leqslant i+j \leqslant n} \varphi(i,j)$, $\min\limits_{i,j \in I_h^n} \varphi(i,j)$ и $\max\limits_{i,j \in I_h^n} \varphi(i,j)$ обозначим через $\varphi(n)$, $\underline{\varphi}(n,h)$ и $\overline{\varphi}(n,h)$ соответственно.

Максимальная сложность $\mathcal{L}$ грани в кубе B^n совпадает с максимальной сложностью грани ранга n, т. е. $\varphi_{\mathcal{L}}(n) = \max\limits_{i=0,\ldots,n} \varphi_{\mathcal{L}}(i, n-i)$.

Из монотонности функции φ следуют равенства $\underline{\varphi}(n,h)=\varphi(i_{\min},i_{\min})$ и $\overline{\varphi}(n,h)=\varphi(i_{\max},i_{\max})$, где $i_{\min}=\lceil\frac{n}{2}-h\rceil$ и $i_{\max}=\lfloor\frac{n}{2}+h\rfloor$.

Значения $\varphi(n)$ и $\partial\varphi(n)=\varphi(n,n)-\varphi(n-1,n-1)$ будем называть *порядком и скоростью роста функции* $\varphi\in\Phi$ при $n\to\infty$.

Определим подмножества функций Φ в зависимости от порядка роста функции φ при $n\to\infty$:

Φ^c — ограниченный рост, если $\varphi(n)\leqslant\Theta(1)$;

Φ^p — полиномиальный рост, если $\varphi(n)\leqslant n^{\Theta(1)}$ и $\varphi(n)\to\infty$;

Φ^e — экспоненциальный рост, если $\varphi(n)\leqslant e^{n^{\Theta(1)}}$ и $\ln\varphi(n)/\ln n\to\infty$.

Множества функций Φ^c, Φ^p и Φ^e определяют множества аддитивных мер сложности, которые обозначим через Λ_+^c, Λ_+^p и Λ_+^e соответственно.

Отметим, что так как $\varphi(n)\leqslant\varphi(n,n)\leqslant\varphi(2n)$, то $\varphi(n)$ не превосходит $\Theta(1)$, или $n^{\Theta(1)}$ и $\varphi(n)\to\infty$, или $e^{n^{\Theta(1)}}$ и $\ln\varphi(n)/\ln n\to\infty$ эквивалентно выполнению таких же условий для $\varphi(n,n)$.

Примеры функций из множеств Φ^c, Φ^p и Φ^e соответственно таковы:

(i) $\varphi(i,j)=\min\{c,ai+bj+1\}$, $\varphi(i,j)=c\bigl(1-\frac{1}{ai+bj+1}\bigr)$;

(ii) $\varphi(i,j)=ai^2+bj^2+cij$, $\varphi(i,j)=(i+j+1)^{c-1/(i+j+1)}$;

(iii) $\varphi(i,j)=(ai+bj+c)^{\ln\max(1,(ai+bj+c))}$, $\varphi(i,j)=ae^{i^2}+be^{j^2}+ce^{ij}$, где $a,b,c>0$.

Множество последовательностей $\{x_n\mid 0\leqslant x_n\leqslant x_{n+1},\,n\geqslant 1\}$ обозначим через $\mathbb{P}$. Множество последовательностей $\{x_n\}\in\mathbb{P}$, для которых $x_n\to c$, где $c\geqslant 0$, или $x_n\to\infty$ при $n\to\infty$, обозначим через $\mathbb{P}_c$ или $\mathbb{P}_\infty$ соответственно. Множество последовательностей $\{h_n\}\in\mathbb{P}$, для которых $0<h_n<\frac{n}{2}$ при $n\geqslant 1$, обозначим через $\mathbb{P}_h$. Множество последовательностей $\{\varepsilon_n\}$, для которых $0\leqslant\varepsilon_n<1$ при $n\geqslant 1$ и $\varepsilon_n=o(1)$ при $n\to\infty$, обозначим через $\mathbb{E}_o$.

Для последовательностей $\{a_n\}\in\mathbb{P}$ и $\{h_n\}\in\mathbb{P}_h$ множество функций $\varphi\in\Phi$, для которых выполняется условие: если $i_n,j_n\in I^n_{h_n}$ для $n\geqslant 1$, то $\varphi(i_n,j_n)\sim a_n$ при $n\to\infty$, обозначим через $\Phi(a_n,h_n)$.

Лемма 2. (i) *Для любой последовательности $\{a_n\}\in\mathbb{P}$ выполняется: или $\{a_n\}\in\mathbb{P}_\infty$, или $\{a_n\}\in\mathbb{P}_c$, и тогда $0\leqslant a_n\leqslant c$ для $n\geqslant 1$ и $a_n\sim c$ при $n\to\infty$. При этом $\mathbb{P}_0$ содержит только нулевую последовательность, т. е. $a_n=0$ для любого n.*

(ii) *Если $\{a_n\}\in\mathbb{P}_c$, $\{x_n\}\in\mathbb{P}$ и $x_n\sim a_n$ при $n\to\infty$, то $\{x_n\}\in\mathbb{P}_c$ и $x_n\leqslant c$ для любого n.*

(iii) *Если $\{a_n\}\in\mathbb{P}_c$, $\{\varepsilon_n\}\in\mathbb{E}_o$ и $\xi(t)\in\mathbb{M}$ — непрерывная функция, то $\xi(a_n(1\pm\varepsilon_n))\sim\xi(a_n)\sim\xi(c)$ при $n\to\infty$.*

(iv) *Если $\varphi\in\Phi^c$ и $\varphi\not\equiv 0$, то $\varphi\in\Phi(c_\varphi,h_n)$, где $c_\varphi>0$, для любой последовательности $\{h_n\}\in\mathbb{P}_h$ такой, что $h_n\to\infty$ при $n\to\infty$.*

Из леммы 2(ii) следует, что если $\{x_n\} \in \mathbb{P}$ и $x_n = o(1)$ при $n \to \infty$, то $x_n = 0$ для $n \geqslant 1$ и $\{x_n\} \in \mathbb{P}_0$. Отметим, что последовательность $\{x_n\} \in \mathbb{P}_0$ может быть получена при суперпозиции ненулевых функций $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{M}$. Если $\xi_1(t) = 0$ для $0 \leqslant t \leqslant C$ и $\xi_2(t) \leqslant C$ для любого $t \in \mathbb{R}_0^+$, то $\xi_1(\xi_2(t)) \equiv 0$ и выполняется $\{x_n = \xi_1(\xi_2(a_n))\} \in \mathbb{P}_0$ для любой последовательности $\{a_n\} \in \mathbb{P}$.

Из леммы 2(iv) вытекает, что если $\varphi \in \Phi^c$, то $\{\varphi(i_n, j_n)\} \in \mathbb{P}_{c_\varphi}$ для любых $i_n, j_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Подмножество функций $f \in P_n$, для которых $N_f \subseteq H_h^n$, где $0 \leqslant h \leqslant \frac{n}{2}$, обозначим через $P_{n,h}$.

В лемме 3 получены свойства функций из множества $\Phi(a_n, h_n)$ и соответствующих им мер сложности для $\{h_n\} \in \mathbb{P}_h$.

Лемма 3. (i) *Если $\varphi \in \Phi$ и $\varphi \not\equiv 0$, то $\varphi \in \Phi(a_n, h_n)$ для некоторых последовательностей $\{a_n\} \in \mathbb{P}$ и $\{h_n\} \in \mathbb{P}_h$ тогда и только тогда, когда $\underline{\varphi}(n, h_n)/\overline{\varphi}(n, h_n) \sim 1$ при $n \to \infty$.*

(ii) *Если $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi(a_n, h_n)$ и $\varphi_{\mathcal{L}} \not\equiv 0$ для меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_+$, то для любой функции f из множества P_{n,h_n} выполняется $\mathcal{L}(f) \sim a_n l(f)$ и $l_{\mathcal{L}}(f) \sim l(f)$ при $n \to \infty$.*

Обозначим через $\widetilde{\Phi}(h_n)$ подмножество функций $\varphi \in \Phi$ таких, что для последовательности $\{h_n\} \in \mathbb{P}_h$ и некоторой последовательности $\{a_n\} \in \mathbb{P}$ выполняется $\varphi \in \Phi(a_n, h_n)$.

Так как $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \in I_{h_n}^n$ для любой последовательности $\{h_n\} \in \mathbb{P}_h$, из леммы 3(i) следует, что $a_n \sim \varphi\bigl(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\bigr)$ при $n \to \infty$ для любой функции $\varphi \in \Phi(a_n, h_n)$. Поэтому $\varphi \in \Phi\bigl(\varphi\bigl(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\bigr), h_n\bigr)$ для любой функции $\varphi \in \widetilde{\Phi}(h_n)$.

Подмножество функций $\varphi \in \widetilde{\Phi}(h_n)$, которые содержатся в Φ^c, Φ^p или Φ^e, обозначим через $\widetilde{\Phi}^c(h_n)$, $\widetilde{\Phi}^p(h_n)$ или $\widetilde{\Phi}^e(h_n)$ соответственно.

Множество функций $\xi(t_1, \ldots, t_r)$, где $t_i \in \mathbb{R}_0^+$ для $i = 1, \ldots, r$ и $r \geqslant 1$ таких, что $\xi(t_1, \ldots, t_r) \geqslant 0$ и $\xi(t'_1, \ldots, t'_r) \geqslant \xi(t_1, \ldots, t_r)$, если $t'_i \geqslant t_i$ для $i = 1, \ldots, r$, т. е. функции неотрицательные и неубывающие, обозначим через $\mathbb{M}$.

Подмножество функций $\xi(t_1, \ldots, t_r) \in \mathbb{M}$ таких, что для любых последовательностей $\bigl\{x_n^{(k)}\bigr\}, \bigl\{a_n^{(k)}\bigr\} \in \mathbb{P}$ и $x_n^{(k)} \sim a_n^{(k)}$, где $k = 1, \ldots, r$ и $r \geqslant 1$, выполняется $\xi\bigl(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(r)}\bigr) \sim \xi\bigl(a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(r)}\bigr)$ при $n \to \infty$, обозначим через $\mathbb{M}^*$.

Замечание 1. Если последовательности $\bigl\{x_n^{(k)}\bigr\}, \bigl\{a_n^{(k)}\bigr\} \in \mathbb{P}$, а также $\bigl\{\varepsilon_n^{(k)}\bigr\} \in \mathbb{E}_o$ при $k = 1, \ldots, r$ таковы, что $x_n^{(k)} \sim a_n^{(k)}$ при $n \to \infty$ и

$$a_n^{(k)}\bigl(1 - \varepsilon_n^{(k)}\bigr) \leqslant x_n^{(k)} \leqslant a_n^{(k)}\bigl(1 + \varepsilon_n^{(k)}\bigr), \quad n \geqslant 1,$$

то для $\varepsilon_n = \max\limits_{k=1,\dots,r} \varepsilon_n^{(k)}$, $n \geqslant 1$, выполняется $\{\varepsilon_n\} \in \mathbb{E}_o$ и при $k = 1,\dots,r$

$$a_n^{(k)}(1-\varepsilon_n) \leqslant x_n^{(k)} \leqslant a_n^{(k)}(1+\varepsilon_n), \quad n \geqslant 1.$$

Для функции $\xi(t_1,\dots,t_r) \in \mathbb{M}$ и набора $\widetilde{\sigma} \in B^r$ определим меру сложности $\mathcal{L}_{\xi,\tilde\sigma} \in \Lambda_+$ соотношением $\mathcal{L}_{\xi,\tilde\sigma}(g) = \xi(L_{\sigma_1}(g),\dots,L_{\sigma_r}(g))$ для любой грани g. Мере сложности $\mathcal{L}_{\xi,\tilde\sigma}$ соответствует функция $\varphi_{\xi,\tilde\sigma}(i,j) \in \Phi$, которая получается из функции ξ заменой переменной t_k на переменную i, если $\sigma_k = 0$, и на переменную j, если $\sigma_k = 1$, для $k = 1,\dots,r$.

Подмножество функций Φ, которое для функции $\xi(t_1,\dots,t_r) \in \mathbb{M}$ содержит функции $\varphi_{\xi,\tilde\sigma}(i,j)$ для любого $\widetilde{\sigma} \in B^r$, обозначим через Φ_ξ. Для подмножества $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{M}$ множество функций $\bigcup\limits_{\xi\in\mathbb{Z}} \Phi_\xi \subseteq \Phi$ обозначим через $\Phi(\mathbb{Z})$.

Определим множество функций $\mathbb{M}_0 = \mathbb{M}_0^{(1)} \cup \mathbb{M}_0^{(2)} \subset \mathbb{M}$, где

$$\mathbb{M}_0^{(1)} = \{t+c,\ \max(0,t-c),\ ct,\ \max(0,\ln t),\ t^c\} \text{ для } c > 0,$$

$$\mathbb{M}_0^{(2)} = \{t_1+t_2,\ t_1t_2,\ \max(t_1,t_2),\ t_1(1-1/\max(1,t_2))\}.$$

Замыкание подмножества функций $\mathbb{M}' \subseteq \mathbb{M}$ относительно операции суперпозиции обозначим через $[\mathbb{M}']$.

Лемма 4. (i) *Множество функций $\mathbb{M}^*$ замкнуто относительно операции суперпозиции и $[\mathbb{M}_0] \subset \mathbb{M}^*$.*

(ii) *Если $\xi \in \mathbb{M}^*$, то $\varphi \in \widetilde{\Phi}(h_n)$ при $n \to \infty$ для $\varphi \in \Phi_\xi$ и $h_n = o(n)$.*

(iii) *Если $\psi \in \Phi([\mathbb{M}_0])$, то имеют место соотношения $\psi(n,n) \to \infty$, $\psi(n,n) \leqslant n^{\Theta(1)}$, $\partial\psi(n,n) \leqslant \psi(n,n)\Theta(n^{-1})$ при $n \to \infty$ и, следовательно, $\Phi([\mathbb{M}_0]) \subset \Phi^p$.*

Для функций множества $\mathbb{M}\backslash\mathbb{M}^*$ определим подмножество $\mathbb{M}^*(w_n,\varepsilon_n)$, где $\{w_n\} \in \mathbb{P}_\infty$ и $\{\varepsilon_n\} \in \mathbb{E}_o$, которое содержит функции $\xi(t_1,\dots,t_r) \in \mathbb{M}\setminus\mathbb{M}^*$, где $r \geqslant 1$, удовлетворяющие следующему условию: для любых $\{x_n^{(k)}\}, \{a_n^{(k)}\} \in \mathbb{P}$ таких, что $a_n^{(k)} \leqslant w_n$ и $a_n^{(k)}(1-\varepsilon_n) \leqslant x_n^{(k)} \leqslant a_n^{(k)}(1+\varepsilon_n)$ для $k = 1,\dots,r$, выполняется

$$\xi\bigl(x_n^{(1)},\dots,x_n^{(r)}\bigr) \sim \xi\bigl(a_n^{(1)},\dots,a_n^{(r)}\bigr) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Лемма 5. (i) *Для непрерывной и дифференцируемой при $t > 0$ функции $\xi(t) \in \mathbb{M}$ и последовательностей $\{a_n\} \in \mathbb{P}_\infty$, $\{\varepsilon_n\} \in \mathbb{E}_o$ при $n \to \infty$ имеем*

$$\xi(a_n(1-\varepsilon_n)) \sim \xi(a_n(1+\varepsilon_n)), \text{ если } a_n\varepsilon_n\bar{d}\xi(a_n,\varepsilon_n) = o(1),$$

$$\xi(a_n(1-\varepsilon_n))(1+\Theta(1)) \leqslant \xi(a_n(1+\varepsilon_n)), \text{ если } a_n\varepsilon_n\underline{d}\xi(a_n,\varepsilon_n) \geqslant \Theta(1),$$

где $\bar{d}\xi(a_n,\varepsilon_n)$ и $\underline{d}\xi(a_n,\varepsilon_n)$ — максимальное и минимальное значения функции $|(\ln\xi(t))'|$ для $t \in [a_n(1-\varepsilon_n), a_n(1+\varepsilon_n)]$.

(ii) *Если* $\xi(t) = t^{\ln^c \max(1,t)}$ *и* $c > 0$, *то* $\xi(t) \in \mathbb{M}^*(w_n, \varepsilon_n)$ *для* $w_n \leqslant n^{\ln n}$ *и* $\varepsilon_n = n^{-\delta}$, *где* $\delta > 0$.

(iii) *Если* $\xi(t) = e^{t^c}$ *и* $0 < c < 1$, *то* $\xi(t) \in \mathbb{M}^*(w_n, \varepsilon_n)$ *для* $w_n \leqslant \Theta(n)$ *и* $\varepsilon_n = o(n^{-c})$.

Множество граней функции $f \in P_n$, для которых мера сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_+$ не превосходит $c \geqslant 0$, обозначим через $G^n_{f,\mathcal{L}}(c)$.

В $\mathcal{L}$-минимальном комплексе каждая грань положительной сложности содержит собственную вершину. Следовательно, $l(f) \leqslant |N_f|$ и $l_{\mathcal{L}}(f) \leqslant |N_f| + |G^n_{f,\mathcal{L}}(0)|$.

Для граней булевых функций, которые имеют ограниченную сложность, справедлива

Лемма 6. *Если* $\mathcal{L} \in \Lambda_+$ *и* $\varphi_{\mathcal{L}} \not\equiv 0$, *то*

(i) *для функции* $f \in P_n$, *не имеющей граней размерности больше* k, *и при* $\varphi_{\mathcal{L}}(i_c, j_c) > c \geqslant 0$ *для* $n \geqslant n_c = i_c + j_c$ *верны соотношения*

$$G^n_{f,\mathcal{L}}(c) \subseteq G\big(S^n_{0,k+j_c-1} \cup S^n_{n-k-i_c+1,n}\big), \quad \big|G^n_{f,\mathcal{L}}(c)\big| < 2(2n)^{k+\max\{i_c,j_c\}}.$$

(ii) *для* $f \in \widetilde{P}_n$, $\varphi_{\mathcal{L}}(i_0, j_0) > 0$ *и* $k_0 = \lceil \log n \rceil$ *при* $n \to \infty$

$$G^n_{f,\mathcal{L}}(0) \subseteq G\big(S^n_{0,k_0+j_0-1} \cup S^n_{n-k_0-i_0+1,n}\big), \quad \big|G^n_{f,\mathcal{L}}(0)\big| \leqslant n^{\log n(1+o(1))}.$$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Если мера сложности* $\mathcal{L} \in \Lambda_+$ *такова, что* $\varphi_{\mathcal{L}} \in \widetilde{\Phi}(h_n)$ *и* $\varphi_{\mathcal{L}}(n) \leqslant e^{n^c}$, *где* $h_n = \lceil n^{2/3} \log^{-1} n \rceil$ *и* $c < \frac{1}{3}$, *то*

$$\mathcal{L}(f) \sim \varphi_{\mathcal{L}}\Big(\Big\lfloor \frac{n}{2} \Big\rfloor, \Big\lfloor \frac{n}{2} \Big\rfloor\Big) l(f), \quad l_{\mathcal{L}}(f) \sim l(f) \sim \bar{l}_n \tag{1}$$

для функции $f \in \widetilde{P}_n$ *при* $n \to \infty$, *где* $\bar{l}_n$ — *средняя длина кратчайшего комплекса функции множества* $\widetilde{P}_n$.

Теорема 2. *Для функции* $f \in \widetilde{P}_n$ *и меры сложности* $\mathcal{L} \in \Lambda_+$ *при* $n \to \infty$ *выполняется*

$$\mathcal{L}(f) \sim \varphi_{\mathcal{L}}\Big(\Big\lfloor \frac{n}{2} \Big\rfloor, \Big\lfloor \frac{n}{2} \Big\rfloor\Big) l(f), \quad l_{\mathcal{L}}(f) \sim l(f) \sim \bar{l}_n, \tag{2}$$

если (i) $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi^c$, *или* (ii) $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi([\mathbb{M}_0]) \subset \Phi^p$, *или* (iii) $\varphi_{\mathcal{L}} = \xi(\psi) \in \Phi^e$ *для* $\psi \in \Phi([\mathbb{M}_0]) \subset \Phi^p$ *и* $\xi(t) = e^{\ln^{c+1} \max(1,t)}$, *где* $c > 0$, *или* $\xi(t) = e^{t^c}$, *где* $0 < c < \frac{1}{3}$ *и* $\psi(n) \leqslant \Theta(n)$.

Для меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_+$, функции $f \in P_n$ и подмножества $A \subset B^n$ введём следующие обозначения:

$\mathcal{L}_\cap(f, A, M) = \sum\limits_{\substack{g \in M,\\ g \cap A \neq \varnothing}} \mathcal{L}(g)$ — сложность граней комплекса M функции f, которые пересекаются с множеством A;

$\mathcal{L}_\cap(f,A) = \min\limits_{M\in\mathcal{M}_\mathcal{L}(f)} \mathcal{L}_\cap(f,A,M)$ — минимальная сложность граней, которые пересекаются с множеством A и содержатся в одном минимальном комплексе функции f.

Полученные в теореме 2 результаты для функций $f \in \widetilde{P}_n$ основаны на выполнении соотношений

$$\mathcal{L}(f) \sim \mathcal{L}_\cap\bigl(f, H^n_{h_n}\bigr), \quad \mathcal{L}_\cap\bigl(f, B^n \setminus H^n_{h_n}\bigr) = o(\mathcal{L}(f))$$

при $n \to \infty$, если $h_n = n^{2/3}\log^{-1} n$ и мера сложности $\mathcal{L}$ определяется любой функцией $\varphi_\mathcal{L} \in \Phi^c \cup \Phi([\mathbb{M}_0])$ или некоторыми функциями $\varphi_\mathcal{L} \in \Phi^e$, для которых $\varphi_\mathcal{L}(n) \leqslant e^{\Theta(n^c)}$ и $0 < c < \frac{1}{3}$. Если мера сложности $\mathcal{L}$ определяется функцией $\varphi_\mathcal{L} \in \Phi^e$, для которой $\varphi_\mathcal{L}(n) = e^{\Theta(n^c)}$ и $c > 1$, то возможна качественно другая ситуация.

Теорема 3. *Есть меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda^e_+$ такие, что $\varphi_\mathcal{L}(n) = e^{\Theta(n^c)}$, где $c > 1$, и для почти всех булевых функций $f \in P_n$ при $n \to \infty$ выполняется*

$$\mathcal{L}\bigl(f, H^n_{h_n}\bigr) = o(\mathcal{L}(f)), \quad \mathcal{L}(f) \sim \mathcal{L}\bigl(f, B^n \setminus H^n_{h_n}\bigr), \quad \text{где } h_n = \left\lceil \frac{\varepsilon n}{2} \right\rceil.$$

При этом асимптотика сложности $\mathcal{L}$-минимального комплекса определяется гранями, которые содержат не более чем $\bigl|B^n \setminus H^n_{h_n}\bigr| \leqslant (1+\delta_\varepsilon)^n$ вершин, если константы ε и δ_ε удовлетворяют условиям $0 < \varepsilon < 2^{\frac{c-1}{c}} - 1 < 1$ и $0 < \delta_\varepsilon < 1 - (1+\varepsilon)/2^{\frac{c-1}{c}} < 1$.

Для аддитивных мер сложности свойства минимальных комплексов почти всех булевых функций зависят от порядка и скорости роста сложности граней. Однако для получения асимптотики сложности минимальных комплексов недостаточно только ограничения для порядка роста сложности граней. Характеристики различия сложности граней функции могут быть использованы для оценки методов минимизации булевых функций из специальных классов.

Отметим, что для функционалов сложности граней, определяемых произвольными функциями множества $\mathbb{M}$, возникает проблема оценки порядка и скорости роста при $n \to \infty$.

Пусть функция $\xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}}(t) \in \mathbb{M}$ определяется последовательностями чисел $\mathbb{T}$ и непрерывных функций $\mathbb{V}$ следующим образом:

$\mathbb{T} = \{t_n \in \mathbb{R}^+_0 \mid t_0 = 0,\ t_{n-1} < t_n,\ n \geqslant 1, \text{ и } t_n \to \infty \text{ при } n \to \infty\}$;

$\mathbb{V} = \{v_n(t) \in \mathbb{M},\ n \geqslant 1\}$ и $v_1(0) = 0$;

$\xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}}(0) = 0$;

$\xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}}(t) = \xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}}(t_{n-1}) + v_n(t) - v_n(t_{n-1})$ для $t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n$, $n \geqslant 1$.

Из этого определения следует, что $\xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}}(t_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i(t_i)$ для $n \geqslant 1$.

Очевидно, что $\xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}} \in \mathbb{M}$, так как все функции из множества $\mathbb{V}$ содержатся в $\mathbb{M}$, и $\xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}}$ непрерывна, поскольку непрерывны все функции из множества $\mathbb{V}$. При этом возникают вопросы об определении свойств функции $\xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}}$ таких, как

- принадлежность функции $\xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}}$ множеству $\mathbb{M}^*$, если функции из множества $\mathbb{V}$ содержатся в $\mathbb{M}^*$ или имеют одинаковый порядок роста и асимптотически различную скорость роста;
- порядок роста функции $\xi_{\mathbb{T},\mathbb{V}}$, если функции из множества $\mathbb{V}$ могут иметь различный, например, полиномиальный или экспоненциальный порядок роста.

3. Доказательства

Доказательство леммы 1. Грань куба B^n, в которой координаты с номерами $1,\dots,i$ равны 0, а координаты с номерами $i+1,\dots,i+j$ равны 1, и элементарную конъюнкцию $\bar{x}_1\dots\bar{x}_i x_{i+1}\dots x_{i+j}$ обозначим через $g^n_{i,j}$ и $K_{i,j}$ соответственно. Из эквивалентности аналитической и геометрической моделей следует, что $\mathcal{L}\big(g^n_{i,j}\big) = \mathcal{L}\big(K_{i,j}\big)$ для любой меры сложности $\mathcal{L}$. Любая элементарная конъюнкция K, в которой $i+j$ переменных, $L_0(K) = i$ и $L_1(K) = j$, изоморфна элементарной конъюнкции $K_{i,j}$. Любая грань $g \subset B^n$, для которой $i = L_0(g)$, $j = L_1(g)$ и ранг $i + j \leqslant n$, изоморфна грани $g^n_{i,j}$.

Для меры сложности $\mathcal{L}$ определим функцию $\varphi_{\mathcal{L}}\colon \mathbb{Z}^+_0 \times \mathbb{Z}^+_0 \to \mathbb{R}^+_0$ соотношением $\varphi_{\mathcal{L}}(i,j) = \mathcal{L}(K_{i,j})$, т. е. $\varphi_{\mathcal{L}}(i,j) = \mathcal{L}\big(g^n_{i,j}\big)$ для $n \geqslant i+j$. Из неотрицательности и монотонности меры сложности $\mathcal{L}$ следуют свойства неотрицательности и монотонности функции $\varphi_{\mathcal{L}}$. Тогда $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi$.

Для функции $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi$ определим аддитивный функционал $\mathcal{L}$ на множестве комплексов граней: $\mathcal{L}(g) = \varphi_{\mathcal{L}}(L_0(g), L_1(g))$ для любой грани g и сложность комплекса граней есть суммарная сложность граней. Для функционала $\mathcal{L}$ из свойств функции $\varphi_{\mathcal{L}}$ следует выполнение аксиом неотрицательности и монотонности, а выполнение аксиомы инвариантности следует из зависимости функционала $\varphi_{\mathcal{L}}$ только от значений $L_0(g)$ и $L_1(g)$ для любой грани g. Выполнение аксиомы выпуклости следует из аддитивности функционала $\mathcal{L}$ и неотрицательности функции $\varphi_{\mathcal{L}}$. Тогда $\mathcal{L} \in \Lambda_+$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. (i) Если $\{a_n\} \notin \mathbb{P}_\infty$, то $a_n \leqslant \Theta(1)$ при $n \to \infty$ и $\{a_n\}$ монотонно неубывающая. Тогда существует константа c такая, что $a_n \to c$ при $n \to \infty$, так как если $a_n > c$ для некоторого n, то $a_{n+t} \geqslant a_n > c$ для любого $t \geqslant 0$. Следовательно, $\{a_n\} \in \mathbb{P}_c$ и $a_n \leqslant c$ для $n \geqslant 1$.

(ii) Из того, что $\{a_n\} \in \mathbb{P}_c$ и $x_n \sim a_n$ при $n \to \infty$, следует, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Тогда $\{x_n\} \in \mathbb{P}_{\tilde{c}}$ для некоторой константы

$\tilde{c} \geqslant 0$. Если $\tilde{c} \neq c$, то $|x_n - a_n| \sim |\tilde{c} - c| > 0$, что противоречит условию $x_n \sim a_n$ при $n \to \infty$.

(iii) Для последовательностей $\{a_n\} \in \mathbb{P}_c$ и $\{\varepsilon_n\} \in \mathbb{E}_o$ из п.(ii) следует, что $a_n(1 \pm \varepsilon_n) \sim a_n \sim c$, и тогда для непрерывной функции $\xi(t)$ выполняется $\xi(a_n(1 \pm \varepsilon_n)) \sim \xi(a_n) \sim \xi(c)$ при $n \to \infty$.

(iv) Последовательность $\{a_n = \varphi(n,n)\}$ является монотонно неубывающей и ограниченной, следовательно, $\{\varphi(n,n)\} \in \mathbb{P}_{c_\varphi}$, где $c_\varphi > 0$. Покажем, что для любых последовательностей $\{i_n\}$ и $\{j_n\}$, где $i_n, j_n \in \mathbb{Z}_0^+$, $i_n < i_{n+1}$ и $j_n < j_{n+1}$ для $n \geqslant 1$, имеет место $\{\varphi(i_n, j_n)\} \in \mathbb{P}_{c_\varphi}$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ есть возрастающие последовательности $\{i_k^*\}$ и $\{j_k^*\}$ такие, что $i_k^* \in \{i_n\}$, $i_k^* < i_{k+1}^*$ и $j_k^* \in \{j_n\}$, $j_k^* < j_{k+1}^*$ для $k \geqslant 1$ т. е. $i_k^* \to \infty$ и $j_k^* \to \infty$ при $k \to \infty$, для которых $\varphi(i_k^*, j_k^*) \leqslant c_\varphi - \varepsilon$. Так как $\varphi(n,n) \sim c_\varphi$, имеем $\varphi(n_\varepsilon, n_\varepsilon) > c_\varphi - \varepsilon$ для некоторого n_ε. Тогда найдётся такое значение k_ε, что $i_k^* > n_\varepsilon$ и $j_k^* > n_\varepsilon$ для $k > k_\varepsilon$, следовательно, $\varphi(i_k^*, j_k^*) \geqslant \varphi(n_\varepsilon, n_\varepsilon) > c_\varphi - \varepsilon$ для $k > k_\varepsilon$; противоречие. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. (i) Для функции $\varphi \in \Phi$ и любых неотрицательных целых $i, j \in I_{h_n}^n$ выполняется $\underline{\varphi}(n, h_n) \leqslant \varphi(i,j) \leqslant \overline{\varphi}(n, h_n)$. Тогда если $\varphi \in \Phi(a_n, h_n)$, то $\varphi(i_n, j_n) \sim a_n$ для любых $i_n, j_n \in I_{h_n}^n$, т. е.

$$\underline{\varphi}(n, h_n) \sim \overline{\varphi}(n, h_n) \sim a_n, \quad \underline{\varphi}(n, h_n)/\overline{\varphi}(n, h_n) \sim 1;$$

если $\underline{\varphi}(n, h_n)/\overline{\varphi}(n, h_n) \sim 1$, то $\underline{\varphi}(n, h_n) \leqslant \varphi(i_n, j_n) \leqslant \overline{\varphi}(n, h_n)$ для любых $i_n, j_n \in I_{h_n}^n$, т. е.

$$\underline{\varphi}(n, h_n) \sim \varphi(i_n, j_n) \sim \overline{\varphi}(n, h_n) \sim a_n.$$

(ii) Из условия леммы следует, что для любой грани $g \in G(f)$ любой функции $f \in P_{n,h_n}$ выполняется $\mathcal{L}(g) \sim a_n \geqslant c > 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$l(M) \geqslant l(f), \quad \mathcal{L}(M) \geqslant l(M) a_n (1 - o(1)) \geqslant l(f) a_n (1 - o(1))$$

для любого комплекса граней M функции $f \in P_{n,h_n}$, т. е.

$$\mathcal{L}(f) \geqslant l(f) a_n (1 - o(1)).$$

Так как $l(M) = l(f)$ и $\mathcal{L}(M) \sim l(f) a_n$ для любого кратчайшего комплекса $M \in \mathcal{M}_l(f)$, нижняя оценка для $\mathcal{L}(f)$ асимптотически достижима и $\mathcal{L}(f) \sim a_n l(f)$.

Предположение, что $l_{\mathcal{L}}(f) \geqslant l(f)(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, означает, что для некоторого комплекса $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ выполняется $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(f)$ и $l(M) \geqslant l(f)(1+\varepsilon)$. Тогда

$$\mathcal{L}(M) \sim l(M) a_n \geqslant l(f)(1+\varepsilon) a_n \sim \mathcal{L}(f)(1+\varepsilon),$$

т. е. $M \notin \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$; противоречие. Следовательно, $l_{\mathcal{L}}(f) \sim l(f)$. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. (i) Пусть для $r \geqslant 1$ и $k = 1, \ldots, r$ функции $\xi(t_1, \ldots, t_r)$, $\xi_k\bigl(t_1^{(k)}, \ldots, t_{s_k}^{(k)}\bigr)$ содержатся в $\mathbb{M}^*$ и два набора последовательностей $\bigl\{x_n^{(k,j)}\bigr\}, \bigl\{a_n^{(k,j)}\bigr\} \in \mathbb{P}$, $j = 1, \ldots, s_k$, таковы, что $x_n^{(k,j)} \sim a_n^{(k,j)}$ при $n \to \infty$. Для $k = 1, \ldots, r$ обозначим через $\bigl\{y_n^{(k)}\bigr\}$ и $\bigl\{b_n^{(k)}\bigr\}$ последовательности

$$y_n^{(k)} = \xi_k\bigl(x_n^{(k,1)}, \ldots, x_n^{(k,s_k)}\bigr), \quad b_n^{(k)} = \xi_k\bigl(a_n^{(k,1)}, \ldots, a_n^{(k,s_k)}\bigr), \quad n \geqslant 1.$$

Из соотношений $\bigl\{x_n^{(k,j)}\bigr\}, \bigl\{a_n^{(k,j)}\bigr\} \in \mathbb{P}$ и $\xi_k \in \mathbb{M}^*$ для $k = 1, \ldots, r$ следует, во-первых, неотрицательность и монотонность последовательностей $\bigl\{y_n^{(k)}\bigr\}$ и $\bigl\{b_n^{(k)}\bigr\}$, т. е. $\bigl\{y_n^{(k)}\bigr\}, \bigl\{b_n^{(k)}\bigr\} \in \mathbb{P}$, и, во-вторых, наличие эквивалентности $y_n^{(k)} \sim b_n^{(k)}$ при $n \to \infty$. Тогда для функции $\xi \in \mathbb{M}^*$ выполняется $\xi\bigl(y_n^{(1)}, \ldots, y_n^{(r)}\bigr) \sim \xi\bigl(b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(r)}\bigr)$ при $n \to \infty$ и $\xi(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{M}^*$.

Стало быть, множество функций $\mathbb{M}^*$ замкнуто относительно операции суперпозиции и для доказательства $[\mathbb{M}_0] \subset \mathbb{M}^*$ достаточно показать, что $\mathbb{M}_0 = \mathbb{M}_0^{(1)} \cup \mathbb{M}_0^{(2)} \subset \mathbb{M}^*$.

Для функции $\xi(t) \in \mathbb{M}_0^{(1)} \subset \mathbb{M}$ покажем, что если последовательности $\{a_n\} \in \mathbb{P}$ и $\{\varepsilon_n\} \in \mathbb{E}_o$ таковы, что $a_n(1-\varepsilon_n) \leqslant x_n \leqslant a_n(1+\varepsilon_n)$ при $n \geqslant 1$, то

$$\xi(a_n(1-\varepsilon_n)) \leqslant \xi(x_n) \leqslant \xi(a_n(1+\varepsilon_n)) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Для $\{a_n\} \in \mathbb{P}_c$ справедливость утверждения следует из леммы 2(iii). Для $\{a_n\} \in \mathbb{P}_\infty$, т. е. $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$, рассмотрим следующие случаи.

(a) Если $\xi(t) \in \{t + c, \max(0, t - c)\}$, где $c > 0$, то

$$\xi(a_n(1 \pm \varepsilon_n))/\xi(a_n) = (a_n(1 \pm \varepsilon_n) \pm c)/(a_n \pm c) \sim 1.$$

Если $\xi(t) = ct$, то $\xi(a_n(1 \pm \varepsilon_n))/\xi(a_n) = 1 \pm \varepsilon_n \sim 1$.

(b) Если $\xi(t) = \max(0, \ln t)$, то

$$|\xi(a_n(1 \pm \varepsilon_n)) - \xi(a_n)| = \left| \ln \frac{\max(1, a_n(1 \pm \varepsilon_n))}{\max(1, a_n)} \right| \leqslant |\ln(1 \pm \varepsilon_n)| = o(1).$$

(c) Если $\xi(t) = t^c$, где $c > 0$, то

$$\xi(a_n(1 \pm \varepsilon_n))/\xi(a_n) = (a_n(1 \pm \varepsilon_n))^c/(a_n)^c \sim 1.$$

Для функции $\xi(t_1, t_2) \in \mathbb{M}_0^{(2)} \subset \mathbb{M}$ рассмотрим два следующих случая.

(a) Если $\xi(t_1, t_2) \in \{t_1 + t_2,\, t_1 t_2,\, \max(t_1, t_2)\} \subset \mathbb{M}_0^{(2)} \subset \mathbb{M}$ и $z > 0$, то

$$\xi(zt_1, zt_2) = z^2 \xi(t_1, t_2) \quad \text{при } \xi(t_1, t_2) = t_1 t_2;$$
$$\xi(zt_1, zt_2) = z\xi(t_1, t_2) \quad \text{при } \xi(t_1, t_2) \in \{t_1 + t_2,\, \max(t_1, t_2)\}.$$

Для функции $\xi(t_1, t_2)$, последовательностей $\{a_n^{(i)}\}, \{x_n^{(i)}\} \in \mathbb{P}$, $i = 1, 2$, и $\{\varepsilon_n\} \in \mathbb{E}_o$ таких, что

$$a_n^{(i)} \sim x_n^{(i)}, \quad a_n^{(i)}(1-\varepsilon_n) \leqslant x_n^{(i)} \leqslant a_n^{(i)}(1+\varepsilon_n), \quad i = 1, 2$$

и $\varepsilon_n = o(1)$ (см. замечание 1), в силу неравенств

$$(1-\varepsilon_n)^2 \leqslant 1-\varepsilon_n \leqslant 1+\varepsilon_n \leqslant (1+\varepsilon_n)^2$$

выполняется

$$(1-\varepsilon_n)^2 \xi\big(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}\big) \leqslant \xi\big(a_n^{(1)}(1-\varepsilon_n), a_n^{(2)}(1-\varepsilon_n)\big) \leqslant \xi\big(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\big)$$
$$\leqslant \xi\big(a_n^{(1)}(1+\varepsilon_n), a_n^{(2)}(1+\varepsilon_n)\big) \leqslant (1+\varepsilon_n)^2 \xi\big(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}\big).$$

Тем самым $\xi\big(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\big) \sim \xi\big(a_n^{(1)}, a_n^{(2)}\big)$ при $n \to \infty$ и $\xi \in \mathbb{M}^*$.

(b) Если $\xi(t_1, t_2) = t_1(1 - 1/\max(1, t_2)) \in \mathbb{M}_0^{(2)}$,то $\xi(t_1, t_2) = \varphi(t_1, \psi(t_2))$, где $\varphi(t_1, t_2) = t_1 t_2 \in \mathbb{M}^*$ и $\psi(t) = 1 - 1/\max(1, t) \in \mathbb{M}$. Для функции $\psi(t) \in \mathbb{M}$ и любых последовательностей $\{\varepsilon_n\} \in \mathbb{E}_o$, $\{a_n\}, \{x_n\} \in \mathbb{P}$ таких, что $a_n(1-\varepsilon_n) \leqslant x_n \leqslant a_n(1+\varepsilon_n)$, при $n \to \infty$ выполняется

$$|\psi(a_n(1 \pm \varepsilon_n)) - \psi(a_n)| = \left| \frac{1}{a_n(1 \pm \varepsilon_n)} - \frac{1}{a_n} \right| = \frac{\varepsilon_n}{a_n(1 \pm \varepsilon_n)} = o(1).$$

Следовательно, $\psi \in \mathbb{M}^*$ и функция ξ, как суперпозиция функций из замкнутого множества $\mathbb{M}^*$, содержится в $\mathbb{M}^*$.

(ii) Функции $\varphi(t_1, \ldots, t_r) \in \Phi_\xi$ соответствует мера сложности $\mathcal{L}_\varphi \in \Lambda_+$ такая, что $\mathcal{L}_\varphi(g) = \xi(L_{\sigma_1}(g), \ldots, L_{\sigma_r}(g))$ для любой грани g, получаемая подстановкой $L_{\sigma_i}(g)$ вместо переменной t_i, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$ и $i = 1, \ldots, r$. Для любой грани $g \subset H_{h_h}^n$ справедливо $L_{\sigma_i}(g) \sim \frac{n}{2}$ для $i = 1, \ldots, r$ и $h_n = o(n)$ при $n \to \infty$. Следовательно, имеет место эквивалентность $\xi(L_{\sigma_1}(g), \ldots, L_{\sigma_r}(g)) \sim \xi\Big(\frac{n}{2}, \ldots, \frac{n}{2}\Big)$ для любой функции $\xi(t_1, \ldots, t_r) \in \mathbb{M}^*$ и $\varphi \in \widetilde{\Phi}(h_n)$ для $h_n = o(n)$ при $n \to \infty$.

(iii) Для доказательства утверждения используем метод математической индукции по уровню суперпозиции.

Базис индукции. Для $\xi \in \mathbb{M}_0$ функция $\psi \in \Phi(\mathbb{M}_0)$ получается подстановкой переменной i или j вместо переменной t_1, если $\xi = \xi(t_1)$, и подстановкой переменных $\{i, j\}$ или $\{j, i\}$ вместо переменных t_1 и t_2 соответственно, если $\xi = \xi(t_1, t_2)$. Следовательно,

$$\Phi(\mathbb{M}_0) = \{i + c, \max(0, i - c), ci, \ln i, i^c, j + c, \max(0, j - c), cj, \ln j, j^c\}$$
$$\cup \{i + j, ij, \max(i, j), i(1 - 1/j), j(1 - 1/i)\}.$$

Тогда для функции $\psi \in \Phi(\mathbb{M}_0)$ при $n \to \infty$ имеем

$$\psi(n,n) \in \{n+c, n-c, cn, \ln n, n^c, n(1-n^{-1})\},$$

$$\begin{aligned}\partial\psi(n,n)/\psi(n,n) \in \{&(n+c)^{-1}, (n-c)^{-1}, n^{-1},\\ &\ln(1+(n-1)^{-1})/\ln n, (1-(1-n^{-1})^c), (n-1)^{-1}\}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\psi(n,n) \to \infty$, $\psi(n,n) \leqslant n^{\Theta(1)}$ и $\partial\psi(n,n) \leqslant \psi(n,n)\Theta(n^{-1})$ при $n \to \infty$.

Индуктивный переход. Для $\xi \in \mathbb{M}_0$ функция $\psi \in \Phi(\mathbb{M}_0)$ получается подстановкой вместо переменной t_1 функции $\varphi_1(i,j)$ или вместо переменных t_1 и t_2 функций $\varphi_1(i,j)$ и $\varphi_2(i,j)$ соответственно. При этом выполняются соотношения для $k = 1, 2$ и $n \to \infty$:

$$\begin{gathered}\varphi_k(n,n) \leqslant n^{\Theta(1)}, \quad \varphi_k(n,n) \to \infty,\\ \partial\varphi_k(n,n) \leqslant \varphi_k(n,n)c_k n^{-1} = \varphi_k(n,n)\Theta(n^{-1}).\end{gathered} \tag{3}$$

Функция $\psi(i,j) = \xi(\varphi_1(i,j))$ или $\psi(i,j) = \xi(\varphi_1(i,j), \varphi_2(i,j))$ для функции $\xi \in \mathbb{M}_0$ может иметь один из следующих видов:

$$\begin{gathered}\varphi_1(i,j)+c,\ \max(\varphi_1(i,j)-c, 0),\ c\varphi_1(i,j),\ \ln\varphi_1(i,j),\ \varphi_1^c(i,j),\\ \varphi_1(i,j)+\varphi_2(i,j),\ \max(\varphi_1(i,j), \varphi_2(i,j)),\ \varphi_1(i,j)(1-1/\varphi_2(i,j)).\end{gathered}$$

Если $\xi \in \mathbb{M}_0^{(1)}$, то $\partial\psi(n,n) = \xi(\varphi_1(n,n)) - \xi(\varphi_1(n-1,n-1))$, выполняются соотношения (3) для $k = 1$ и при $n \to \infty$ имеем следующие случаи.

(a) Если $\psi(i,j) = \varphi_1(i,j) + c$ или $\psi(i,j) = \max(0, \varphi_1(i,j) - c)$, то

$$\begin{gathered}\psi(n,n) = \varphi_1(n,n) \pm c \leqslant n^{\Theta(1)}, \quad \psi(n,n) \to \infty,\\ \partial\psi(n,n) = \partial\varphi_1(n) \leqslant \varphi_1(n,n)\Theta(n^{-1}) = \xi(\varphi_1(n,n))\Theta(n^{-1}).\end{gathered}$$

(b) Если $\psi(i,j) = c\varphi_1(i,j)$, то

$$\begin{gathered}\psi(n,n) = c\varphi_1(n,n) \leqslant cn^{\Theta(1)} = n^{\Theta(1)},\\ \partial\psi(n,n) = c\partial\varphi_1(n) \leqslant c\varphi_1(n,n)\Theta(n^{-1}) = \xi(\varphi_1(n,n))\Theta(n^{-1}).\end{gathered}$$

(c) Если $\psi(i,j) = \ln\varphi_1(i,j)$, то из $\varphi_1(n,n) \sim \varphi_1(n-1,n-1)$ и неравенства $\ln(t+dt) - \ln t \leqslant t^{-1}dt$, где $t \geqslant 1$ и $dt > 0$, следует, что

$$\psi(n,n) = \ln\varphi_1(n,n) \leqslant \ln(n^{\Theta(1)}) \leqslant n^{\Theta(1)}, \quad \psi(n,n) \to \infty,$$

$$\begin{aligned}\partial\psi(n,n) &= \ln\varphi_1(n,n) - \ln\varphi_1(n-1,n-1)\\ &\leqslant (\varphi_1(n,n) - \varphi_1(n-1,n-1)){\varphi_1}^{-1}(n-1,n-1)\\ &\leqslant \Theta(n^{-1})\varphi_1(n,n){\varphi_1}^{-1}(n-1,n-1) \leqslant \Theta(n^{-1}) \leqslant \xi(\varphi_1(n,n))\Theta(n^{-1}).\end{aligned}$$

(d) Если $\psi(i,j) = {\varphi_1}^c(i,j)$, то из $\varphi_1(n,n) \sim \varphi_1(n-1,n-1)$ и неравенства $(t+dt)^c - t^c \leqslant c(t+dt)^c t^{-1}dt$, где $t \geqslant 1$ и $dt > 0$, вытекает, что

$$\psi(n,n) = \varphi_1^c(n,n) \leqslant n^{c\Theta(1)} = n^{\Theta(1)}, \quad \psi(n,n) \to \infty,$$

$$\begin{aligned}\partial\psi(n,n) &= {\varphi_1}^c(n,n) - {\varphi_1}^c(n-1,n-1)\\ &\leqslant c\xi(\varphi_1(n,n)){\varphi_1}^{-1}(n-1,n-1)(\varphi_1(n,n) - \varphi_1(n-1,n-1))\\ &\leqslant c\xi(\varphi_1(n,n)){\varphi_1}^{-1}(n-1,n-1)\varphi_1(n,n)\Theta(n^{-1}) = \xi(\varphi_1(n,n))\Theta(n^{-1}).\end{aligned}$$

Если $\xi \in \mathbb{M}_0^{(2)}$, очевидно, что $\psi(n,n) \leqslant n^{\Theta(1)}$, $\psi(n,n) \to \infty$ при $n \to \infty$, а также

$$\partial\psi(n,n) = \xi(\varphi_1(n,n), \varphi_2(n,n)) - \xi(\varphi_1(n-1,n-1), \varphi_2(n-1,n-1)),$$

где для φ_1 и φ_2 выполняются (3) при $k = 1, 2$.

Тогда при $n \to \infty$ получаем следующие соотношения.

(a) Для функции $\psi(i,j) = \varphi_1(i,j) + \varphi_2(i,j)$ выполняется

$$\begin{aligned}\partial\psi(n) &= \partial\varphi_1(n) + \partial\varphi_2(n) \leqslant \varphi_1(n,n)c_1n^{-1} + \varphi_2(n,n)c_2n^{-1}\\ &\leqslant (\varphi_1(n,n) + \varphi_2(n,n))(c_1 + c_2)n^{-1} = \psi(n,n)\Theta(n^{-1}).\end{aligned}$$

(b) Для функции $\psi(i,j) = \varphi_1(i,j)\varphi_2(i,j)$ имеем

$$\begin{aligned}\partial\psi(n) &= \partial\varphi_1(n)\varphi_2(n,n) + \partial\varphi_2(n)\varphi_1(n-1,n-1)\\ &\leqslant \varphi_1(n,n)c_1n^{-1}\varphi_2(n,n) + \varphi_2(n,n)c_2n^{-1}\varphi_1(n-1,n-1)\\ &\leqslant \varphi_1(n,n)\varphi_2(n,n)(c_1n^{-1} + c_2n^{-1}) = \psi(n,n)\Theta(n^{-1}),\end{aligned}$$

так как $\varphi_1(n-1,n-1) \leqslant \varphi_1(n,n)$.

(c) Для функции $\psi(i,j) = \max(\varphi_1(i,j), \varphi_2(i,j))$ выполняется

$$\partial\psi(n) = \max(\varphi_1(n,n), \varphi_2(n,n)) - \max(\varphi_1(n-1,n-1), \varphi_2(n-1,n-1)).$$

В случае $\varphi_2(n,n) \leqslant \varphi_1(n,n) = \psi(n,n)$ получаем $\partial\psi(n) = \partial\varphi_1(n)$, если $\varphi_1(n-1,n-1) \geqslant \varphi_2(n-1,n-1)$, и $\partial\psi(n) < \partial\varphi_1(n)$, если $\varphi_1(n-1,n-1) < \varphi_2(n-1,n-1)$, и, следовательно,

$$\partial\psi(n) = \partial\varphi_1(n) \leqslant \varphi_1(n,n)c_1n^{-1} = \psi(n,n)c_1n^{-1}.$$

В случае $\varphi_1(n,n) \leqslant \varphi_2(n,n) = \psi(n,n)$ аналогично получим

$$\partial\psi(n) \leqslant \psi(n,n)c_2n^{-1}.$$

Таким образом, $\partial\psi(n) \leqslant \psi(n,n)\max(c_1,c_2)n^{-1} = \psi(n,n)\Theta(n^{-1})$.

(d) Для функции $\psi(i,j) = \varphi_1(i,j)(1 - 1/\max\{1, \varphi_2(i,j)\})$ имеем при $\varphi_2(n,n) \to \infty$ и $n \to \infty$

$$\psi(n,n) = \varphi_1(n,n)(1 - {\varphi_2}^{-1}(n,n)),$$

$$\begin{aligned}\partial\psi(n) &= \psi(n,n)\Delta\psi(n,\varphi_1,\varphi_2)/(\varphi_1(n,n)(1 - {\varphi_2}^{-1}(n,n)))\\ &= (1 + o(1))\psi(n,n)\Delta\psi(n,\varphi_1,\varphi_2)/\varphi_1(n,n),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}&\Delta\psi(n,\varphi_1,\varphi_2) =\\ &= \varphi_1(n,n)(1 - {\varphi_2}^{-1}(n,n)) - \varphi_1(n-1,n-1)(1 - {\varphi_2}^{-1}(n-1,n-1))\\ &\leqslant \partial\varphi_1(n) + \frac{\varphi_1(n,n)\partial\varphi_2(n,n)}{\varphi_2(n-1,n-1)\varphi_2(n,n)} \leqslant \partial\varphi_1(n) + \frac{\varphi_1(n,n)\Theta(n^{-1})}{\varphi_2(n-1,n-1)},\end{aligned}$$

так как $\varphi_1(n-1,n-1) \leqslant \varphi_1(n,n)$ и $\partial\varphi_2(n) \leqslant \varphi_2(n,n)\Theta(n^{-1})$. Тогда

$$\Delta\psi(n,\varphi_1,\varphi_2)/\varphi_1(n,n) \leqslant \frac{\partial\varphi_1(n)}{\varphi_1(n,n)} + \frac{\Theta(n^{-1})}{\varphi_2(n-1,n-1)} \leqslant \Theta(n^{-1}).$$

Стало быть, $\partial\psi(n) \leqslant (1 + o(1))\psi(n,n)\Theta(n^{-1}) = \psi(n,n)\Theta(n^{-1})$. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. (i) Для непрерывной и дифференцируемой функции $\xi(t) \in \mathbb{M}$ и $0 < x < x + dx$ из теоремы Лагранжа о среднем (формулы конечных приращений) следует, что

$$dx \min_{x \leqslant t \leqslant x+dx} \xi'(t) \leqslant \xi(x + dx) - \xi(x) \leqslant dx \max_{x \leqslant t \leqslant x+dx} \xi'(t). \tag{4}$$

Так как $\xi'(t) = \xi(t)(\ln\xi(t))'$ и $0 \leqslant \xi(a_n(1 - \varepsilon_n)) \leqslant \xi(t) \leqslant \xi(a_n(1 + \varepsilon_n))$, то для $t \in [a_n(1 - \varepsilon_n), a_n(1 + \varepsilon_n)]$ имеем

$$\xi(a_n(1 - \varepsilon_n))\underline{d}\xi(a_n,\varepsilon_n) \leqslant \xi'(t) \leqslant \xi(a_n(1 + \varepsilon_n))\bar{d}\xi(a_n,\varepsilon_n),$$

и тогда

$$\begin{aligned}0 \leqslant 2a_n\varepsilon_n\xi(a_n(1 - \varepsilon_n))\underline{d}\xi(a_n,\varepsilon_n) &\leqslant \xi(a_n(1 + \varepsilon_n)) - \xi(a_n(1 - \varepsilon_n))\\ &\leqslant 2a_n\varepsilon_n\xi(a_n(1 + \varepsilon_n))\bar{d}\xi(a_n,\varepsilon_n).\end{aligned}$$

Таким образом, при $n \to \infty$ для $\{a_n\} \in \mathbb{P}_\infty$ получаем, что если имеет место $a_n\varepsilon_n\bar{d}\xi(a_n,\varepsilon_n) = o(1)$, то

$$0 \leqslant 1 - \xi(a_n(1 - \varepsilon_n))/\xi(a_n(1 + \varepsilon_n)) = o(1),$$
$$\xi(a_n(1 - \varepsilon_n)) \sim \xi(a_n(1 + \varepsilon_n));$$

если $a_n\varepsilon_n\underline{d}\xi(a_n,\varepsilon_n) \geqslant \Theta(1)$, то

$$\xi(a_n(1 + \varepsilon_n))/\xi(a_n(1 - \varepsilon_n)) - 1 \geqslant \Theta(1),$$
$$\xi(a_n(1 - \varepsilon_n))(1 + \Theta(1)) \leqslant \xi(a_n(1 + \varepsilon_n)).$$

(ii) Если $\xi(t) = t^{\ln^c \max(1,t)}$ и $\{a_n\} \in \mathbb{P}_\infty$, то $(\ln \xi(t))' = (c+1)t^{-1}\ln^c t$ при $t > 1$, $a_n(1-\varepsilon_n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\bar{d}\xi(a_n, \varepsilon_n) \leqslant (c+1)(a_n(1-\varepsilon_n))^{-1}\ln^c(a_n(1+\varepsilon_n)) \leqslant \Theta\big(a_n^{-1}\ln^c a_n\big),$$
$$\underline{d}\xi(a_n, \varepsilon_n) \geqslant (c+1)(a_n(1+\varepsilon_n))^{-1}\ln^c(a_n(1-\varepsilon_n)) \geqslant \Theta\big(a_n^{-1}\ln^c a_n\big).$$

Тогда для $a_n \leqslant w_n \leqslant n^{\ln n}$, $\varepsilon_n = n^{-\delta}$, любых $\delta > 0$ и $c > 0$ выполняется

$$a_n\varepsilon_n\bar{d}\xi(a_n, \varepsilon_n) \leqslant \Theta(\varepsilon_n \ln^c a_n) \leqslant \Theta(n^{-\delta}\ln^{2c} n) = o(1)$$

и $\xi(a_n(1-\varepsilon_n)) \sim \xi(a_n) \sim \xi(a_n(1+\varepsilon_n))$ при $n \to \infty$.

Если $a_n = n^\delta \leqslant n^{\ln n}$, $\varepsilon_n = \ln^{-c} n$ и $\delta, c > 0$, то

$$a_n\varepsilon_n\underline{d}\xi(a_n, \varepsilon_n) \geqslant \Theta(\varepsilon_n \ln^c a_n) = \Theta(\delta^c) = \Theta(1)$$

и $\xi(a_n(1+\varepsilon_n)) \geqslant \xi(a_n(1-\varepsilon_n))(1+\Theta(1))$ при $n \to \infty$.

Следовательно, $\xi \notin \mathbb{M}^*$ и $\xi(t) \in \mathbb{M}^*(w_n, \varepsilon_n)$ для $\varepsilon_n = n^{-\delta}$, где $\delta > 0$.

(iii) Если $\xi(t) = e^{t^c}$, где $0 < c < 1$, и $\{a_n\} \in \mathbb{P}_\infty$, то $(\ln \xi(t))' = ct^{c-1}$, $a_n(1-\varepsilon_n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\bar{d}\xi(a_n, \varepsilon_n) = c(a_n)^{c-1} \max((1-\varepsilon_n)^{c-1}, (1+\varepsilon_n)^{c-1}) \leqslant \Theta\big(a_n^{c-1}\big),$$
$$\underline{d}\xi(a_n, \varepsilon_n) = c(a_n)^{c-1} \min((1-\varepsilon_n)^{c-1}, (1+\varepsilon_n)^{c-1}) \geqslant \Theta\big(a_n^{c-1}\big).$$

Тогда для $a_n \leqslant w_n = \Theta(n)$ и $\varepsilon_n = o(n^{-c})$ имеем

$$a_n\varepsilon_n\bar{d}\xi(a_n, \varepsilon_n) \leqslant \varepsilon_n\Theta\big(a_n^c\big) \leqslant o(n^{-c})\Theta(n^c) = o(1)$$

и $\xi(a_n(1-\varepsilon_n)) \sim \xi(a_n(1+\varepsilon_n))$ при $n \to \infty$.

Если $a_n = \Theta(n)$ и $\varepsilon_n = \Theta(n^{-c})$, то

$$a_n\varepsilon_n\underline{d}\xi(a_n, \varepsilon_n) \geqslant \varepsilon_n\Theta\big(a_n^c\big) = \Theta(1)$$

и $\xi(a_n(1+\varepsilon_n)) \geqslant \xi(a_n(1-\varepsilon_n))(1+\Theta(1))$ при $n \to \infty$.

Стало быть, $\xi \notin \mathbb{M}^*$ и $\xi(t) \in \mathbb{M}^*(w_n, \varepsilon_n)$ для $\varepsilon_n = o(n^{-c})$. Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. (i) Если $\varphi_{\mathcal{L}}(i_c, j_c) > c \geqslant 0$, где i_c, j_c — конечные числа, то неравенство $0 \leqslant \varphi_{\mathcal{L}}(i, j) \leqslant c$ может выполняться, если $i < i_c$ или $j < j_c$. Поэтому $\mathcal{L}(g) \leqslant c$ для грани $g \subset B^n$, если либо $L_0(g) < i_c$, либо $L_1(g) < j_c$. Такие грани в кубе B^n, имеющие размерность меньше k, содержат вершины, в которых число единичных или нулевых координат меньше $k + j_c$ или $k + i_c$ соответственно. Следовательно, $g \subset S^n_{0,k+j_c-1} \cup S^n_{n-k-i_c+1,n}$ и число таких граней не превосходит

$$\sum_{0 \leqslant j < k+j_c} 2^j \binom{n}{j} + \sum_{0 \leqslant i < k+i_c} 2^{n-i} \binom{n}{n-i} \leqslant 2 \sum_{0 \leqslant t < k+\max\{i_c, j_c\}} 2^t \binom{n}{t},$$

т. е. меньше $2(2n)^{k+\max\{i_c,j_c\}}$.

(ii) Обозначим $i_0 = L_0(g)$ и $j_0 = L_1(g)$, где g — грань минимального ранга $n_0 = i_0 + j_0$, для которой $\mathcal{L}(g) = \varphi_{\mathcal{L}}(i_0, j_0) > 0$. Тогда для функции $f \in \widetilde{P}_n$, которая не имеет граней размерности больше $k_0 = \lceil \log n \rceil$, из п. (i) леммы следует, что при $n \to \infty$ имеем

$$G^n_{f,\mathcal{L}}(0) \subseteq G\big(S^n_{0,k_0+j_0-1} \cup S^n_{n-k_0-i_0+1,n}\big),$$
$$\big|G^n_{f,\mathcal{L}}(0)\big| \leqslant 2(2n)^{k_0+\max\{i_0,j_0\}} = 2(2n)^{k_0+\Theta(1)} = n^{\log n(1+o(1))}.$$

Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 1. Для произвольного комплекса граней M в кубе B^n рассмотрим комплексы граней

$$M_h = \big\{g \in M \mid g \subset H^n_h\big\}, \quad \widehat{M}_h = \big\{g \in M \mid g \cap \big(B^n \setminus H^n_h\big) \neq \varnothing\big\}.$$

Очевидно, что $M = M_h \cup \widehat{M}_h$ и $M_h \cap \widehat{M}_h = \varnothing$. Для функции $f \in P_n$ и комплекса $M = M_h \cup \widehat{M}_h \in \mathcal{M}(f)$ обозначим через f_h и $\hat{f}_h$ функции, для которых множество единичных вершин содержится в комплексах M_h и $\widehat{M}_h$ соответственно.

Для функции $f \in \widetilde{P}_n$ и $h_n = \lceil n^{2/3} \log^{-1} n \rceil$ единичные вершины функций f_{h_n} и $\hat{f}_{h_n}$ содержатся в множествах $H^n_{h_n}$ и $B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}$ соответственно.

Из леммы 6 следует, что $\big|G^n_{\hat{f}_{h_n},\mathcal{L}}(0)\big| \leqslant n^{\log n(1+o(1))}$ при $n \to \infty$.

Тогда для меры сложности $\mathcal{L} \in \tilde{\Lambda}_+$ и $a_n = \varphi_{\mathcal{L}}\big(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\big)$ при $n \to \infty$ из леммы 3(ii) следует, что

$$\mathcal{L}(f_{h_n}) \sim a_n l(f_{h_n}), \quad l_{\mathcal{L}}(f_{h_n}) \sim l(f_{h_n}),$$
$$l\big(\hat{f}_{h_n}\big) \leqslant l_{\mathcal{L}}\big(\hat{f}_{h_n}\big) \leqslant \big|B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}\big| + n^{\log n(1+o(1))}.$$

Докажем, что если $\varphi_{\mathcal{L}}(n) \leqslant e^{n^c}$ и $c < 1/3$ при $n \to \infty$, то

$$\varphi_{\mathcal{L}}(n)\big|B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}\big| \sim \varphi_{\mathcal{L}}(n)\big|B^n \setminus H^n_{h_n}\big| = o\big(\bar{l}_n\big).$$

Используем при $n \to \infty$, $x = o(n^{1/6})$ и $i_{n,x} = \frac{n}{2} + \frac{x\sqrt{n}}{2}$ соотношение $\sum\limits_{i > i_{n,x}} \binom{n}{i} \sim \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} 2^n$ [3, с. 280] для оценки

$$\big|B^n \setminus H^n_h\big| = 2 \sum_{i > \frac{n}{2} + h_n} \binom{n}{i}, \quad \big|B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}\big| = 2 \sum_{i > \frac{n}{2} + h_n - k_0} \binom{n}{i}.$$

Для $h_n = \frac{x_n\sqrt{n}}{2} = \lceil n^{2/3} \log^{-1} n \rceil$, т. е. $x_n = o(n^{1/6})$, и $k_0 = \lceil \log n \rceil$ выполняется

$$\frac{h_n - k_0}{\sqrt{n}} = \frac{h_n}{\sqrt{n}} - o(1), \quad \frac{(h_n - k_0)^2}{n} = \frac{{h_n}^2}{n} - \frac{2h_n k_0 - {k_0}^2}{n} = \frac{{h_n}^2}{n} - o(1).$$

Тогда

$$\left|B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}\right| \sim \frac{2^n\sqrt{n}}{(h_n-k_0)\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{2(h_n-k_0)^2}{n}} \sim \frac{2^n\sqrt{n}}{h_n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{2h_n{}^2}{n}} \sim \left|B^n \setminus H^n_{h_n}\right|,$$

$$\begin{aligned}\left|B^n \setminus H^n_{h_n}\right| &\sim \frac{\sqrt{n}}{h_n\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{2h_n{}^2}{n}}2^n = \Theta\Big(\bar{l}_n\frac{\sqrt{n}}{h_n}\log n \log\log n\Big)e^{-\frac{2h_n{}^2}{n}} \\ &= \Theta\big(\bar{l}_n n^{-1/6}\log^2 n \cdot \log\log n\big)e^{-2n^{1/3}\log^{-2}n} = o\big(\bar{l}_n e^{-2n^{1/3}\log^{-2}n}\big).\end{aligned}$$

Следовательно, для $c < \frac{1}{3}$ при $n \to \infty$ имеем

$$\varphi_{\mathcal{L}}(n)\left|B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}\right| \leqslant e^{n^c} o\big(\bar{l}_n e^{-2n^{1/3}\log^{-2}n}\big) = o\big(\bar{l}_n\big).$$

Используя леммы 3–6 и условия $h_n = \lceil n^{2/3}\log^{-1}n\rceil$, $\varphi_{\mathcal{L}}(n) \leqslant e^{n^c}$, где $c < \frac{1}{3}$, получим оценки длины и сложности для кратчайших и $\mathcal{L}$-минимальных комплексов функции $f \in \widetilde{P}_n$.

Для комплекса $M \in \mathcal{M}_l(f)$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(f) \leqslant \mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_{h_n}) + \mathcal{L}(\widehat{M}_{h_n}),\\ l(\widehat{M}_{h_n}) \leqslant \left|B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}\right| = o(\bar{l}_n),\\ \mathcal{L}(\widehat{M}_{h_n}) \leqslant l(\widehat{M}_{h_n})\varphi_{\mathcal{L}}(n) \leqslant \left|B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}\right|\varphi_{\mathcal{L}}(n) = o(\bar{l}_n),\\ \mathcal{L}(M) \sim (l(f) - l(\widehat{M}_{h_n}))a_n + o(\bar{l}_n) \sim \bar{l}_n a_n + o(\bar{l}_n) \sim \bar{l}_n a_n,\end{gathered}$$

а для комплекса $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ —

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_{h_n}) + \mathcal{L}(\widehat{M}_{h_n}),\\ l(\widehat{M}_{h_n}) \leqslant \left|B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}\right| + \left|G^n_{f,\mathcal{L}}(0)\right| = o(\bar{l}_n),\\ \mathcal{L}(\widehat{M}_{h_n}) \leqslant \varphi_{\mathcal{L}}(n)\left|B^n \setminus H^n_{h_n-k_0}\right| = o(\bar{l}_n),\\ \mathcal{L}(M_{h_n}) \sim l(M_{h_n})a_n.\end{gathered}$$

Тогда

$$\mathcal{L}(f) \sim l(M_{h_n})a_n + o(\bar{l}_n) \geqslant (l(f) - o(\bar{l}_n))a_n + o(\bar{l}_n) \sim \bar{l}_n a_n$$

и эта нижняя оценка асимптотически достигается для кратчайших комплексов граней. Следовательно, $\mathcal{L}(f) \sim \bar{l}_n a_n$.

Предположение, что $l_{\mathcal{L}}(f) \geqslant (1+\varepsilon)l(f)$, где $\varepsilon > 0$, приводит к противоречию. В этом случае есть комплекс $M \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$, для которого $l(M) \geqslant (1+\varepsilon)l(f)$, и тогда

$$\begin{gathered}l(M_{h_n}) = l(M) - l(\widehat{M}_{h_n}) \geqslant (1+\varepsilon)l(f) - o(\bar{l}_n) \sim (1+\varepsilon)l(f),\\ \mathcal{L}(M) \geqslant \mathcal{L}(M_{h_n}) \gtrsim l(M_{h_n})a_n \gtrsim (1+\varepsilon)l(f)a_n \sim (1+\varepsilon)\mathcal{L}(f).\end{gathered}$$

Тем самым $M \notin \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 1 следует, что если $\varphi_{\mathcal{L}} \in \widetilde{\Phi}(h_n)$ и $\varphi_{\mathcal{L}}(n) \leqslant e^{n^c}$, где $h_n = \lceil n^{2/3}\log^{-1}n \rceil$ и $0 < c < \frac{1}{3}$, то для почти всех функций имеет место (2) при $n \to \infty$.

(i) Для функции $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi^c$ из леммы 2(iv) получаем, что $\varphi_{\mathcal{L}} \in \widetilde{\Phi}^c(h_n)$, так как $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi(c_{\varphi_{\mathcal{L}}}, h_n)$ для $h_n \to \infty$, $h_n = o(n)$ и $c_{\varphi_{\mathcal{L}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{\mathcal{L}}\big(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\big)$.

(ii) Для функции $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi([\mathbb{M}_0])$ из леммы 4(i, ii) вытекает, что $\varphi_{\mathcal{L}} \in \widetilde{\Phi}^p(h_n)$ для $h_n = o(n)$ при $n \to \infty$, так как $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi^p$ и $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi_\xi$, где $\xi \in \mathbb{M}_0$, т. е. $\varphi_{\mathcal{L}}(i,j) = \xi(\psi_1(i,j))$ или $\varphi_{\mathcal{L}}(i,j) = \xi(\psi_1(i,j), \psi_2(i,j))$, и $\psi_1, \psi_2 \in [\mathbb{M}_0] \subset \mathbb{M}^*$.

(iii) Для $\psi \in \Phi([\mathbb{M}_0])$ и $h_n = o(n)$ при $n \to \infty$ выполняются следующие соотношения: $\psi \in \widetilde{\Phi}^p(h_n)$ в силу леммы 4(ii), $\underline{\psi}(n,h_n) \sim \overline{\psi}(n,h_n)$ по лемме 3(i) и $\partial\psi(i_n,i_n) \leqslant \psi(i_n,i_n)\Theta(i_n{}^{-1})$ для $i_n \in I^n_{h_n}$ ввиду леммы 4(iii). Тогда

$$\overline{\psi}(n,h_n) - \underline{\psi}(n,h_n) \leqslant \sum_{i \in I^n_{h_n}} \partial\psi(i,i) \leqslant 2h_n\overline{\psi}(n,h_n)\Theta(n^{-1}).$$

Для функции $\xi(t) \in \{e^{\ln^{c+1}t}, e^{t^c}\}$ из соотношения (4) леммы 5 при $n \to \infty$ следует, что

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \xi(\overline{\psi}(n,h_n)) - \xi(\underline{\psi}(n,h_n)) \\
&\leqslant (\overline{\psi}(n,h_n) - \underline{\psi}(n,h_n))\xi(\overline{\psi}(n,h_n)) \max_{\underline{\psi}(n,h_n) \leqslant t \leqslant \overline{\psi}(n,h_n)} (\ln\xi(t))' \\
&\leqslant \xi(\overline{\psi}(n,h_n))\Delta(\xi,\psi,n,h_n),
\end{aligned}$$

где

$$\Delta(\xi,\psi,n,h_n) = h_n\overline{\psi}(n,h_n)\Theta(n^{-1}) \max_{\underline{\psi}(n,h_n) \leqslant t \leqslant \overline{\psi}(n,h_n)} (\ln\xi(t))'.$$

Тогда достаточно показать, что $\Delta(\xi,\psi,n,h_n) = o(1)$ и, следовательно,

$$\xi(\underline{\psi}(n,h_n)) \sim \xi(\overline{\psi}(n,h_n)), \quad \varphi_{\mathcal{L}} = \xi(\psi) \in \widetilde{\Phi}(h_n) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Если $\xi(t) = e^{\ln^{c+1}\max(1,t)}$ и $c > 0$, то из леммы 5(ii) следует, что $\xi(t) \in \mathbb{M}^*(w_n, \varepsilon_n)$ для $w_n \leqslant n^{\ln n}$, $\varepsilon_n = n^{-\delta}$ и $\delta > 0$. Это означает, что если последовательности $\{a_n\}, \{x_n\} \in \mathbb{P}_\infty$ таковы, что

$$a_n \leqslant w_n \leqslant n^{\ln n}, \quad a_n(1-\varepsilon_n) \leqslant x_n \leqslant a_n(1+\varepsilon_n),$$

где $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant n^{-\delta}$ и $\delta > 0$, то

$$\xi(a_n(1-\varepsilon_n)) \sim \xi(a_n(1+\varepsilon_n)) \sim \xi(a_n), \quad \xi(x_n) \sim \xi(a_n) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Для функции $\psi \in \Phi([\mathbb{M}_0])$ и $h_n/n = \Theta(n^{-1/3}\log^{-1}n)$ из лемм 4(ii), 3(i) получаем $\underline{\psi}(n,h_n) \sim \overline{\psi}(n,h_n)$.

Так как

$$(\ln \xi(t))' = (\ln^{c+1} t)' = (c+1)t^{-1}\ln^c t,$$
$$\ln^c n^{\Theta(1)} = \Theta(\ln^c n), \quad \overline{\psi}(n, h_n) \leqslant n^{\Theta(1)}, \quad \underline{\psi}(n, h_n) \sim \overline{\psi}(n, h_n),$$

то

$$\Delta(\xi, \psi, n, h_n) \leqslant h_n \overline{\psi}(n, h_n)\Theta(n^{-1})(c+1)\frac{1}{\underline{\psi}(n, h_n)}\ln^c(\overline{\psi}(n, h_n))$$
$$\leqslant h_n \Theta(n^{-1})\Theta(\ln^c n) \leqslant \Theta(n^{-1/3}\ln^c n) = o(1).$$

Если $\xi(t) = e^{t^c}$ и $0 < c < 1/3$, то из леммы 5(iii) следует, что $\xi(t) \in \mathbb{M}^*(w_n, \varepsilon_n)$ для $w_n \leqslant \Theta(n)$ и $\varepsilon_n = n^{-c}$. Это означает, что если последовательности $\{a_n\}, \{x_n\} \in \mathbb{P}_\infty$ такие, что

$$a_n \leqslant w_n \leqslant \Theta(n), \quad a_n(1-\varepsilon_n) \leqslant x_n \leqslant a_n(1+\varepsilon_n),$$

где $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant n^{-c}$, то

$$\xi(a_n(1-\varepsilon_n)) \sim \xi(a_n(1+\varepsilon_n)) \sim \xi(a_n), \quad \xi(x_n) \sim \xi(a_n) \quad \text{при } n \to \infty.$$

Для функции $\psi \in \Phi([\mathbb{M}_0])$ и $h_n/n = \Theta(n^{-1/3}\log^{-1} n) < n^{-c}$ в случае $0 < c < 1/3$ из лемм 4(ii), 3(i) вытекает, что $\underline{\psi}(n, h_n) \sim \overline{\psi}(n, h_n)$.

Так как

$$(\ln \xi(t))' = (t^c)' = ct^{c-1}, \quad c\Theta(n)^{c-1} = \Theta(n^{c-1}),$$
$$\overline{\psi}(n, h_n) \leqslant \Theta(n), \quad \underline{\psi}(n, h_n) \sim \overline{\psi}(n, h_n),$$

то при $n \to \infty$ и $c < 1/3$ выполняется

$$\Delta(\xi, \psi, n, h_n) \leqslant h_n \overline{\psi}(n, h_n)\Theta(n^{-1})c\overline{\psi}(n, h_n)^{c-1} \leqslant h_n\Theta(n^{-1})\overline{\psi}(n, h_n)^c$$
$$= h_n\Theta(n^{-1})\Theta(n^c) = \Theta(n^{c-1/3}\log^{-1} n) = o(1)$$

и, следовательно, $\xi(\underline{\psi}(n, h_n)) \sim \xi(\overline{\psi}(n, h_n))$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Подмножество функций из $\widetilde{P}_n$, у которых есть единичная вершина в множестве $S^n_{0,1} \cup S^n_{n-1,n}$, обозначим через $\widetilde{P}^*_n$. Число функций $f \in P_n$, у которых в множестве $S^n_{0,1} \cup S^n_{n-1,n}$ нет единичных вершин, равно $2^{2^n - 2(n+1)} = o(|\widetilde{P}_n|)$ при $n \to \infty$. Тогда множество $\widetilde{P}^*_n$ содержит почти все булевы функции.

Рассмотрим меру сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_+$, для которой $\varphi_{\mathcal{L}}(i, j) = e^{i^c + j^c}$, где $c > 1$ и, следовательно, $\varphi_{\mathcal{L}} \in \Phi^e$ и $\varphi_{\mathcal{L}}(n) = e^{\Theta(n^c)}$ при $n \to \infty$.

(i) Оценка снизу $\mathcal{L}_\cap\bigl(f, B^n \setminus H^n_{h_n}\bigr)$ для $f \in \widetilde{P}^*_n$, $h_n = \lceil \varepsilon \frac{n}{2} \rceil$ и $0 < \varepsilon < 1$.

Для любой функции $f \in \widetilde{P}^*_n$ все грани имеют размерность не более $k_0 = \lceil \log n \rceil$ и есть грань, которая содержит единичную вершину функции из множества $S^n_{0,1} \cup S^n_{n-1,n}$. Тогда

$$g \subset S^n_{0,k_0+1} \cup S^n_{n-(k_0+1),n}, \quad \min\{L_0(g), L_1(g)\} \geqslant n - k_0 - 1$$
$$\mathcal{L}_\cap\bigl(f, B^n \setminus H^n_{h_n}\bigr) \geqslant \mathcal{L}(g) \geqslant \exp\{(n - k_0 - 1)^c\} = \exp\{n^c(1 - o(1))\}.$$

Так как $B^n \setminus H^n_{h_n} \subset S^n_{0,\lceil \frac{n}{2}(1-\varepsilon)\rceil} \cup S^n_{0,n-\lceil \frac{n}{2}(1-\varepsilon)\rceil}$, то, используя оценку $\sum\limits_{i=0}^{xn} \binom{n}{i} < 2^{nH(x)}$, где $H(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x)$ для $0 < x < 1$ [3, с. 280, 5.8], получаем $H(x) \leqslant 1 - \delta_\varepsilon < 1$, если $|x - 1/2| \geqslant \varepsilon$, и

$$\bigl|B^n \setminus H^n_{h_n}\bigr| < 2^{nH(\lceil \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\rceil)+1} \leqslant 2^{n(1-\delta_\varepsilon)+1} \quad \text{для } 0 < \delta_\varepsilon < 1.$$

(ii) Оценка сверху $\mathcal{L}_\cap\bigl(f, H^n_{h_n}\bigr)$ для $f \in \widetilde{P}^*_n$, $h_n = \lceil \varepsilon \frac{n}{2} \rceil$ и $0 < \varepsilon < 1$. Для любой грани g функции $f \in \widetilde{P}^*_n$ такой, что $g \cap H^n_{h_n} \neq \varnothing$, выполняется

$$\max\{L_0(g), L_1(g)\} \leqslant \frac{n}{2}(1+\varepsilon) + k_0, \quad \mathcal{L}(g) \leqslant \exp\left\{2\biggl(\frac{n}{2}(1+\varepsilon) + k_0\biggr)^c\right\}.$$

Так как $l_{\mathcal{L}}(f) \leqslant 2^n$, то

$$\mathcal{L}_\cap\bigl(f, H^n_{h_n}\bigr) \leqslant 2^n \exp\left\{n^c\biggl(\frac{1}{2}(1+\varepsilon) + \frac{k_0}{n}\biggr)^c\right\}.$$

Если $0 < \varepsilon < 2^{\frac{c-1}{c}} - 1$, где $c > 1$, то $(1+\varepsilon)/2^{\frac{c-1}{c}} < 1$ и для δ такого, что $0 < \delta < 1 - (1+\varepsilon)/2^{\frac{c-1}{c}}$, выполняется

$$2\biggl(\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\biggr)^c = \bigl((1+\varepsilon)/2^{\frac{c-1}{c}}\bigr)^c < (1+\varepsilon)/2^{\frac{c-1}{c}} < 1 - \delta.$$

Тогда $2\bigl(\frac{1}{2}(1+\varepsilon) + \frac{k_0}{n}\bigr)^c < 1 - \delta$ для $\frac{k_0}{n} = o(1)$ при $n \to \infty$ и

$$\mathcal{L}_\cap(f, H^n_{h_n}) \leqslant 2^n \exp\left\{n^c\biggl(\frac{1}{2}(1+\varepsilon) + \frac{k_0}{n}\biggr)^c\right\}$$
$$\leqslant 2^n \exp\{n^c(1-\delta)\} = o(\exp\{n^c(1 - o(1))\}).$$

Следовательно, $\mathcal{L}_\cap\bigl(f, H^n_{h_n}\bigr) = o\bigl(\mathcal{L}_\cap\bigl(f, B^n \setminus H^n_{h_n}\bigr)\bigr)$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.** Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискрет. математика и мат. вопросы кибернетики. Т. 1. М.: Наука, 1974. С. 99–148.
2. **Вебер К.** О различных понятиях минимальности дизъюнктивных нормальных форм // Проблемы кибернетики. 1979. Вып. 36. С. 129–158.

3. **Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.** Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2005. 416 с.
4. **Сапоженко А. А., Чухров И. П.** Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техн. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. 1987. Т. 25. С. 68–116.
5. **Чухров И. П.** О мерах сложности комплексов граней в единичном кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 6. С. 77–94.
6. **Чухров И. П.** О задаче минимизации для одного множества булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 3. С. 75–97.
7. **Чухров И. П.** О сложности минимизации квазициклических булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 25, № 3. С. 126–151.
8. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Высш. школа, 2003. 384 с.
9. **Coudert O., Sasao T.** Two-level logic minimization // Logic synthesis and verification. Norwell, MA: Kluwer Acad. Publ., 2001. P. 1–27. (Springer Int. Ser. Eng. Comp. Sci.; Vol. 654.)
10. **Pippenger N.** The shortest disjunctive normal form of a random Boolean function // Random Structures & Algorithms. 2003. V. 22, No. 2. P. 161–186.
11. **Umans C., Villa T., Sangiovanni-Vincentelli A. L.** Complexity of two-level logic minimization // IEEE Trans. CAD Integr. Circuits Syst. 2006. Vol. 25, No. 7. P. 1230–1246.

Чухров Игорь Петрович

Статья поступила
23 ноября 2018 г.
После доработки —
14 мая 2019 г.
Принята к публикации
5 июня 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2019. Vol. 26, No. 3. P. 115–140

UDC 519.714.7 DOI 10.33048/daio.2019.26.640

ON THE MINIMIZATION OF BOOLEAN FUNCTIONS FOR ADDITIVE COMPLEXITY MEASURES

I. P. Chukhrov

Institute of Computer Aided Design RAS,
19/18 Vtoraya Brestskaya Street, 123056 Moscow, Russia
E-mail: `chip@icad.org.ru`

Abstract. The problem of minimizing Boolean functions for additive complexity measures in a geometric interpretation, as covering a subset of vertices in the unit cube by faces, is a special type of a combinatorial statement of the weighted problem of a minimal covering of a set. Its specificity is determined by the family of covering subsets, the faces of the unit cube, that are contained in the set of the unit vertices of the function, as well as by the complexity measure of the faces, which determines the weight of the faces when calculating the complexity of the covering. To measure the complexity, we need nonnegativity, monotonicity in the inclusion of faces, and equality for isomorphic faces. For additive complexity measures, we introduce a classification in accordance with the order of the growth of the complexity of the faces depending on the dimension of the cube and study the characteristics of the complexity of the minimization of almost all Boolean functions. Bibliogr. 11.

Keywords: face of a Boolean cube, face complex, Boolean function, complexity measure, minimal face complex.

REFERENCES

1. **Yu. L. Vasil'ev** and **V. V. Glagolev,** Metric properties of disjunctive normal forms, *Discrete Mathematics and Mathematical Problems of Cybernetics,* Vol. 1 (Nauka, Moscow, 1974), 99–148 [Russian].
2. **K. Veber,** On various minimality notions of the disjunctive normal forms, *Problemy Kibernet.* **36**, 129–158 (1979) [Russian].
3. **G. P. Gavrilov** and **A. A. Sapozhenko,** *Tasks and Exercises in Discrete Mathematics* (Fizmatlit, Moscow, 2005) [Russian].

4. **A. A. Sapozhenko** and **I. P. Chukhrov,** Boolean function minimization in the class of disjunctive normal forms, *Itogi Nauki Tekh., Ser. Teor. Veroyatnost., Mat. Statist., Teor. Kibern.,* **25**, 68–116 (1987) [Russian] [J. Sov. Math. **46**, 2021–2052 (1989)].
5. **I. P. Chukhrov,** On complexity measures of complexes of faces in the unit cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **20** (6), 77–94 (2013) [Russian] [*J. Appl. Indust. Math.* **8**, 9–19 (2014)].
6. **I. P. Chukhrov,** On a minimization problem for a set of Boolean functions, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (3), 75–97 (2015) [Russian] [*J. Appl. Indust. Math.* **9**, 335–350 (2015)].
7. **I. P. Chukhrov,** On the complexity of minimizing quasicyclic Boolean functions, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **25** (3), 126–151 (2018) [Russian] [*J. Appl. Indust. Math.* **12**, 426–441 (2018)].
8. **S. V. Yablonskii,** *Introduction to Discrete Mathematics* (Vysshaya Shkola, Moscow, 2003) [Russian].
9. **O. Coudert** and **T. Sasao,** Two-level logic minimization, in *Logic Synthesis and Verification* (Kluwer Acad. Publ., Norwell, MA, 2002), pp. 1–27.
10. **N. Pippenger,** The shortest disjunctive normal form of a random Boolean function, *Random Structures & Algorithms* **22**, 161–186 (2003).
11. **C. Umans, T. Villa,** and **A. L. Sangiovanni-Vincentelli,** Complexity of two-level logic minimization, *IEEE Trans. CAD Integrated Circuits Systems* **25**, 1230–1246 (2006).

Igor P. Chukhrov

Received November 23, 2018
Revised May 14, 2019
Accepted June 5, 2019