ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2019. Т. 26, № 3. С. 5–26

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2019.26.641

2-ФАКТОРЫ БЕЗ БЛИЗКИХ РЁБЕР В n-МЕРНОМ КУБЕ

И. С. Быков

Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: `patrick.no10@gmail.com`

Аннотация. Назовём два ребра гиперкуба *близкими*, если их концы образуют подкуб размерности 2. Рассматривается задача построения 2-фактора, не содержащего близких рёбер, в графе гиперкуба. Для решения данной задачи используется новая конструкция построения 2-факторов, которая обобщает известную ранее потоковую конструкцию гамильтоновых циклов в гиперкубе. С помощью этой конструкции удалось построить семейство 2-факторов без близких рёбер в кубах всех размерностей, начиная с 10, при этом длины циклов в полученных 2-факторах увеличиваются с ростом размерности. Табл. 5, библиогр. 12.

Ключевые слова: n-мерный гиперкуб, совершенное паросочетание, 2-фактор.

Введение

Граф гиперкуба является одним из центральных объектов в теории графов и теории кодирования. Интерес к изучению таких графов возрастает в связи с использованием графов этого вида при проектировании компьютерных сетей. Изучение свойств совершенных паросочетаний в этих графах является важным аспектом исследования гиперкубов.

В данной работе будут рассматриваться паросочетания, не содержащие близких рёбер. Такие паросочетания в 4-мерном кубе хорошо известны. Несложно обобщить способ построения паросочетаний с этим свойством для гиперкубов всех размерностей, больших 4. Вариации данной задачи рассматривались ранее. В [3] приводятся паросочетания, в которых все рёбра находятся на расстоянии 3. В работе [5] рассматривались паросочетания, не содержащие совершенных паросочетаний в подкубах всех размерностей от 2 до $n-1$.

В продолжение данного исследования возникает задача нахождения двух непересекающихся совершенных паросочетаний, не имеющих в совокупности близких рёбер. Как известно, объединение двух непересекающихся совершенных паросочетаний образует 2-фактор. Основным направлением исследований в данной области является возможность дополнения произвольного паросочетания до гамильтонова цикла [6]. Результат Финка [7] разрешает эту проблему. Новое доказательство гамильтоновости графа средних слоёв гиперкуба [9] состоит в объединении 2-фактора в единый цикл.

Таким образом, задача нахождения двух паросочетаний, не имеющих в совокупности близких рёбер, может быть сформулирована как задача построения 2-фактора без близких рёбер в гиперкубе. Эта задача рассматривается в данной работе.

Рассматриваемая задача является смежной с известной проблемой «змея в ящике», впервые описанной в [10]: требуется построить цикл наибольшей длины без хорд в графе гиперкуба, что можно интерпретировать как максимальный цикл без близких вершин. Для задачи «змея в ящике» получено большое количество результатов, среди которых можно выделить [2,12]. В [11] решалась задача построения 2-фактора, состоящего из таких «змей».

1. Предварительные сведения

Двоичным словом длины n будем называть последовательность символов

$$v = \mathtt{x}_0\mathtt{x}_1\mathtt{x}_2\ldots\mathtt{x}_{\mathtt{n}-1},$$

где $\mathtt{x}_\mathtt{i} \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$. *Весом* двоичного слова v будем называть число его ненулевых символов. Через $W(v)$ будем обозначать чётность веса вершины v: $W(v) = 0$ для вершин чётного веса, $W(v) = 1$ для вершин нечётного веса. Будем придерживаться следующих соглашений: все слова будут обозначаться строчными буквами (v,u,w,...), позиции в слове нумеруются с нуля.

Расстоянием Хэмминга между двумя двоичными словами v и u длины n называется количество позиций, в которых отличаются эти два слова. Будем обозначать расстояние Хэмминга между словами v и u через $D(v, u)$.

n-Мерным кубом (*n-мерным гиперкубом*, *n-кубом*) называется граф, вершинами которого являются все двоичные слова длины n. Две вершины смежны, если расстояние Хэмминга между соответствующими словами равно 1. Будем говорить, что *ребро* (v_1, v_2) *имеет i-е направление*, если слова v_1 и v_2 отличаются в i-й позиции. Граф n-мерного куба будет обозначаться через Q_n, а его множества вершин и рёбер — через $V(Q_n)$

и $E(Q_n)$ соответственно. Одним из главных свойств графа гиперкуба является его двудольность: долями графа являются множества $V_0(Q_n)$ и $V_1(Q_n)$ — множества вершин чётного и нечётного весов соответственно. Для рёбер гиперкуба введём функцию чётности веса $W'(e)$ и расстояния $D'(e_1, e_2)$.

Пусть ребро e образовано словами v_1 и v_2, которые отличаются в i-й позиции. Тогда $W'(e) = W(v)$, где v — та из вершин v_1 и v_2, которая имеет $\mathtt{0}$ в i-й позиции. Далее также будем пользоваться записью $W'(v_1, v_2)$ для двух вершин, образующих ребро гиперкуба.

Для двух рёбер $e_1 = (v_1, v_2)$ и $e_2 = (u_1, u_2)$ одного направления i в Q_n определим расстояние между рёбрами D':

$$D'(e_1, e_2) = D(v, u),$$

где $v \in \{v_1, v_2\}$, $u \in \{u_1, u_2\}$ и при этом v и u имеют $\mathtt{0}$ в i-й позиции. Пару рёбер e_1 и e_2 одного направления будем называть *близкими*, если $D'(e_1, e_2) = 1$. Легко видеть, что два ребра близки тогда и только тогда, когда концевые вершины этих двух рёбер образуют подкуб размерности 2.

Путём длины l в Q_n будем называть последовательность $P = v_0, v_1, \dots, v_l$ вершин из $V(Q_n)$, в которой любые две последовательные вершины v_i и v_{i+1} смежны в Q_n. Пути будут обозначаться заглавными буквами $(P, R, \dots)$, нумерация вершин в пути начинается с 0, через $P(i)$ будем обозначать i-ю вершину в пути P. Вершина $P(0)$ называется *начальной* вершиной пути P, а вершина $P(l)$ — *конечной*. Если все вершины $P(0), P(1), \dots, P(l)$ в пути попарно различны, то такой путь называется *простой цепью*. Каждому пути P в Q_n длины l можно сопоставить его *переходную последовательность* $t_0, t_1, \dots t_{l-1}$, где t_i — направление ребра $(P(i), P(i+1))$.

Остовный 2-регулярный подграф называется 2-*фактором*. Таким образом, 2-фактор представляет собой набор попарно вершинно непересекающихся циклов, покрывающих все вершины графа.

2. Разбиения на цепи

Впоследствии понадобится ещё несколько определений, оперирующих базовыми объектами теории графов. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_t$ — пути в Q_n. Будем называть $\mathcal{H} = \{P_1, P_2, \dots, P_t\}$ *набором путей* в Q_n. Множество начальных вершин всех путей, входящих в $\mathcal{H}$, будем обозначать через $S(\mathcal{H})$, множество конечных вершин — через $F(\mathcal{H})$, совокупность всех рёбер, принадлежащих путям из $\mathcal{H}$, — через $E(\mathcal{H})$.

Набор путей $\mathcal{H} = \{P_1, P_2, \dots, P_t\}$ будем называть *разделимым*, если для него выполнено

$$|S(\mathcal{H})| = |F(\mathcal{H})| = t.$$

Разделимый набор путей $\mathcal{H}$ естественным образом определяет взаимно однозначное отображение $\alpha_{\mathcal{H}} : S(\mathcal{H}) \to F(\mathcal{H})$, переводящее начальную вершину пути в конечную вершину этого же пути.

Далее определим операцию соединения для путей и наборов путей. Пусть $P = v_0, v_1, \ldots, v_l$ и $R = u_0, u_1, \ldots, u_m$, при этом $v_l = u_0$. Тогда *соединение* ($\circ$) *путей* P и R — это путь

$$P \circ R = v_0, v_1, \ldots, v_l, u_1, u_2, \ldots, u_m.$$

Пусть $\mathcal{H} = \{P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_t\}$ и $\mathcal{I} = \{R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_t\}$ — два разделимых набора путей, при этом $F(\mathcal{H}) = S(\mathcal{I})$. Без ограничения общности полагаем, что конец пути P_i совпадает с началом пути R_i (в противном случае пути внутри наборов можно перенумеровать), тогда для них можно определить операцию соединения:

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{I} = \{P_1 \circ R_1, P_2 \circ R_2, \ldots, P_t \circ R_t\}.$$

Также для вершин, путей и наборов путей определим операцию *конкатенации с вершиной.* Пусть v — вершина Q_n, а u — вершина Q_k. Через vu будем обозначать вершину Q_{n+k}, соответствующую результату конкатенации двоичного слова v длины n и двоичного слова u длины k. Пусть $P = u_0, u_1, \ldots, u_l$ — путь в Q_k. Тогда результатом конкатенации v и P будет путь

$$vP = vu_0, vu_1, \ldots, vu_l$$

в Q_{n+k}. Результатом конкатенации v и набора путей $\mathcal{H} = \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$ в Q_k будет набор путей

$$v\mathcal{H} = \{vP_1, vP_2, \ldots, vP_t\}$$

в Q_{n+k}.

Набор путей $\mathcal{H}$ будем называть *разбиением* Q_n *на цепи* (или просто *разбиением*), если каждая вершина из Q_n встречается ровно один раз в списке всех вершин всех путей из $\mathcal{H}$ (т. е. покрывается всей совокупностью путей из набора ровно один раз). Очевидно, что любое разбиение разделимо, а все пути в этом наборе являются простыми цепями.

Пример 1. Набор путей $\mathcal{H} = \{P_1, P_2, P_3\}$, где

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathtt{000}, \mathtt{001}, \mathtt{101}, \mathtt{111}, \\ P_2 &= \mathtt{010}, \mathtt{011}, \\ P_3 &= \mathtt{110}, \mathtt{100}, \end{aligned}$$

является разбиением Q_3, для которого $S(\mathcal{H}) = \{\mathtt{000}, \mathtt{010}, \mathtt{110}\}$, а $F(\mathcal{H}) = \{\mathtt{111}, \mathtt{011}, \mathtt{100}\}$.

Пример 2. Любое совершенное паросочетание, в котором дополнительно для каждого из рёбер определена ориентация, задаёт разбиение. Так, набор путей $\mathcal{H} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, где

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathtt{000}, \mathtt{001}, \\ P_2 &= \mathtt{010}, \mathtt{011}, \\ P_3 &= \mathtt{110}, \mathtt{100}, \\ P_4 &= \mathtt{101}, \mathtt{111}, \end{aligned}$$

является разбиением Q_3 мощности 4.

Разбиение $\mathcal{H}$ будем называть *замкнутым разбиением Q_n на цепи* (или просто *замкнутым разбиением*), если существует взаимно однозначное отображение $\beta : F(\mathcal{H}) \to S(\mathcal{H})$ такое, что для любой вершины $v \in F(\mathcal{H})$ пара вершин v и $\beta(v)$ образует ребро в Q_n. Такое отображение β будем называть *замыканием* разбиения $\mathcal{H}$. В общем случае для замкнутого разбиения может существовать больше одного замыкания. Нетрудно видеть, что отображение $(\alpha_{\mathcal{H}} \circ \beta)$ является перестановкой на множестве $S(\mathcal{H})$.

Пример 3. Набор путей $\mathcal{H} = \{P_1, P_2, P_3\}$, где

$$\begin{aligned} P_1 &= \mathtt{111}, \mathtt{101}, \mathtt{001}, \mathtt{000}, \\ P_2 &= \mathtt{100}, \mathtt{110}, \\ P_3 &= \mathtt{010}, \mathtt{011}, \end{aligned}$$

является замкнутым разбиением Q_3, например, с таким замыканием:

$$\begin{aligned} \mathtt{011} &\longrightarrow \mathtt{111}, \\ \mathtt{000} &\longrightarrow \mathtt{100}, \\ \mathtt{110} &\longrightarrow \mathtt{010}. \end{aligned}$$

Как известно, каждая перестановка может быть разложена в произведение независимых циклов. Эти циклы будем называть *орбитами* данной перестановки.

Рассмотрим замкнутое разбиение $\mathcal{H} = \{P_1, P_2, \ldots P_t\}$ с замыканием β, где путь P_i имеет длину l_i. Пусть $[P_{i_1}(0), P_{i_2}(0), \ldots, P_{i_r}(0)]$ — одна из орбит перестановки $(\alpha_{\mathcal{H}} \circ \beta)$. Тогда нетрудно видеть, что путь

$$\begin{gathered} P_{i_1}(0), P_{i_1}(1), \ldots, P_{i_1}(l_{i_1}), \\ P_{i_2}(0), P_{i_2}(1), \ldots, P_{i_2}(l_{i_2}), \\ \ldots, \\ P_{i_r}(0), P_{i_r}(1), \ldots, P_{i_r}(l_{i_r}) \end{gathered}$$

является простым циклом. Ясно, что совокупность таких простых циклов для всех орбит перестановки $(\alpha_{\mathcal{H}} \circ \beta)$ образует 2-фактор. Будем говорить, что этот 2-фактор *порождается* замкнутым разбиением $\mathcal{H}$ (с замыканием β). Говоря неформально, речь идёт о наборе циклов, возникающем при «соединении» всех концов путей замкнутого разбиения с соответствующими (относительно замыкания β) им началами путей этого замкнутого разбиения.

Пример 4. Для замкнутого разбиения $\mathcal{H}$ из примера 3 имеем следующий порождённый 2-фактор:

$$\mathtt{111}, \mathtt{101}, \mathtt{001}, \mathtt{000}, \mathtt{100}, \mathtt{110}, \mathtt{010}, \mathtt{011},$$

который является гамильтоновым циклом в Q_3 в силу единственности орбиты $(\alpha_{\mathcal{H}} \circ \beta)$.

Определим специальный класс наборов путей. Пусть v_1, v_2 — смежные вершины Q_n и $U \subseteq V(Q_k)$. Тогда определим следующий набор путей в Q_{n+k}:

$$\mathcal{E}(v_1, v_2, U) = \{v_1 u, v_2 u \mid u \in U\}.$$

Таким образом, $\mathcal{E}(v_1, v_2, U)$ — это набор путей в Q_{n+k}, каждый путь в котором является путём длины 1 (ребром). Очевидно, что $\mathcal{E}(v_1, v_2, U)$ является разделимым набором путей.

3. Постановка задачи

Утвердительный ответ на вопрос о существовании совершенного паросочетания без близких рёбер даётся в работе [3], где были представлены паросочетания M_1, M_2, M_3, M_4 в Q_4, в которых рёбра одного направления находятся на расстоянии 3 (табл. 1). С их помощью достаточно просто построить совершенные паросочетания без близких рёбер в Q_n для всех $n \geqslant 4$.

Как продолжение исследования свойств совершенных паросочетаний возникает вопрос, существуют ли два непересекающихся совершенных паросочетания, не имеющих в совокупности близких рёбер. Так как объединение двух непересекающихся совершенных паросочетаний образует 2-фактор, данная задача может быть сформулирована как задача построения 2-фактора в Q_n без близких рёбер.

В личной беседе Д. С. Кротов привёл тривиальный способ построения таких 2-факторов для любого $n \geqslant 8$. Пусть

$$E_1 = \{vM_1 \mid W(v) = 0,\ v \in Q_{n-4}\} \cup \{vM_2 \mid W(v) = 1,\ v \in Q_{n-4}\},$$

$$E_2 = \{M_1 v \mid W(v) = 0,\ v \in Q_{n-4}\} \cup \{M_2 v \mid W(v) = 1,\ v \in Q_{n-4}\}.$$

Таблица 1

Паросочетания M_1, M_2, M_3, M_4

$M_1 = \{(0000, 0001),$ $(0011, 1011),$ $(0101, 0111),$ $(0110, 0010),$ $(1001, 1101),$ $(1010, 1000),$ $(1100, 0100),$ $(1111, 1110)\}$	$M_3 = \{(0000, 0100),$ $(0011, 0001),$ $(0101, 1101),$ $(0110, 0111),$ $(1001, 1000),$ $(1010, 0010),$ $(1100, 1110),$ $(1111, 1011)\}$
$M_2 = \{(0000, 0010),$ $(0011, 0111),$ $(0101, 0100),$ $(0110, 1110),$ $(1001, 0001),$ $(1010, 1011),$ $(1100, 1000),$ $(1111, 1101)\}$	$M_4 = \{(0000, 1000),$ $(0011, 0010),$ $(0101, 0001),$ $(0110, 0100),$ $(1001, 1011),$ $(1010, 1110),$ $(1100, 1101),$ $(1111, 0111)\}$

Тогда нетрудно видеть, что паросочетания E_1 и E_2 не пересекаются, а множество $E_1 \cup E_2$ не содержит близких рёбер. Для любого $n \geqslant 8$ получающийся таким образом 2-фактор состоит из циклов длины 16. Далее в работе приведём способ построения 2-фактора, длины циклов в котором увеличиваются с ростом размерности гиперкуба.

В некотором смысле 2-фактор, не содержащий близких рёбер, является оптимальным, так как имеет место

Лемма 1. *В Q_n не существует 2-фактора, в котором любые два ребра одного направления находятся на расстоянии, превосходящем 2.*

Доказательство. Пусть искомый 2-фактор $\mathfrak{F}$ существует.

Любой 2-фактор в Q_n содержит 2^n рёбер, поэтому очевидно, что найдётся направление i такое, что число рёбер этого направления в 2-факторе не меньше чем $\lceil \frac{2^n}{n} \rceil$. Обозначим через E_i множество рёбер i-го направления в Q_n. Для каждого ребра e направления i определим множество $B_e = \{e' \in E_i \mid D'(e, e') \leqslant 1\}$. Ясно, что $|B_e| = n$ для любого ребра e. Так как все рёбра одного направления в $\mathfrak{F}$ находятся на расстоянии как минимум 3, для двух различных рёбер этого 2-фактора e_1 и e_2 имеем $B_{e_1} \cap B_{e_2} = \varnothing$, откуда

$$\sum_{e \in E(\mathfrak{F}) \cap E_i} |B_e| \geqslant n \left\lceil \frac{2^n}{n} \right\rceil \geqslant 2^n.$$

С другой стороны, всего имеется 2^{n-1} рёбер i-го направления в Q_n. Получаем неравенство

$$\sum_{e \in E(\mathfrak{F}) \cap E_i} |B_e| \leqslant 2^{n-1};$$

противоречие. Лемма 1 доказана.

4. Потоковая конструкция

Одним из способов построения 2-факторов в гиперкубе является *потоковая конструкция*, которая применялась в [1, 8] для построения гамильтоновых, а в [4] — для построения длинных циклов в гиперкубе, обладающих свойством равномерности переходной последовательности. Приведём эту конструкцию на языке разбиений.

Пусть $C = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2^n-1}$ — гамильтонов цикл в Q_n, а $E_0, E_1, \ldots, E_{2^n-1}$ — совершенные паросочетания в Q_k. Обозначим через $\mathcal{E}_i$ разбиение, состоящее из рёбер E_i, в котором

$$S(\mathcal{E}_i) = \begin{cases} V_0(Q_k), & \text{если } i \text{ чётно}, \\ V_1(Q_k), & \text{если } i \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Тогда набор путей

$$\begin{aligned} \mathcal{E}' = v_0\mathcal{E}_0 &\circ \mathcal{E}(v_0, v_1, V_1(Q_k)) \\ &\circ v_1\mathcal{E}_1 \circ \mathcal{E}(v_1, v_2, V_0(Q_k)) \circ \cdots \circ v_i\mathcal{E}_i \circ \mathcal{E}(v_i, v_{i+1}, V_1(Q_k)) \\ &\circ \cdots \circ v_{2^n-2}\mathcal{E}_{2^n-2} \circ \mathcal{E}(v_{2^n-2}, v_{2^n-1}, V_1(Q_k)) \circ v_{2^n-1}\mathcal{E}_{2^n-1} \end{aligned}$$

является замкнутым разбиением Q_{n+k}. Результат работы [8] можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Разбиение $\mathcal{E}'$ является замкнутым разбиением на цепи в Q_{n+k} с замыканием β:*

$$v_{2^n-1}u \longrightarrow v_0u$$

для всех $u \in V_0(Q_k)$. Если при этом $(\alpha_{\mathcal{E}'} \circ \beta)$ имеет единственную орбиту, то $\mathcal{E}'$ порождает гамильтонов цикл в Q_{n+k}.

Пример 5. Приведём пример построения 2-фактора в Q_5 с помощью потоковой конструкции. Пусть $C = \mathtt{00}, \mathtt{01}, \mathtt{11}, \mathtt{10}$ — гамильтонов цикл в Q_2, а E_0, E_1, E_2, E_3 — совершенные паросочетания в Q_3:

$$\begin{aligned} E_0 &= \{(\mathtt{000}, \mathtt{001}), (\mathtt{011}, \mathtt{010}), (\mathtt{110}, \mathtt{100}), (\mathtt{101}, \mathtt{111})\}, \\ E_1 &= \{(\mathtt{001}, \mathtt{011}), (\mathtt{010}, \mathtt{000}), (\mathtt{100}, \mathtt{101}), (\mathtt{111}, \mathtt{110})\}, \\ E_2 &= \{(\mathtt{000}, \mathtt{100}), (\mathtt{011}, \mathtt{001}), (\mathtt{110}, \mathtt{111}), (\mathtt{101}, \mathtt{010})\}, \\ E_3 &= \{(\mathtt{001}, \mathtt{101}), (\mathtt{010}, \mathtt{110}), (\mathtt{100}, \mathtt{000}), (\mathtt{111}, \mathtt{011})\}. \end{aligned}$$

Для наглядности будем пользоваться табл. 2. В первом столбце таблицы приведены вершины гамильтонова цикла C. Остальные столбцы содержат совершенные паросочетания E_0, E_1, E_2, E_3 следующим образом: в i-й строке (напротив вершины v_i из C) находится паросочетание E_i; его рёбра идут в таком порядке, чтобы ребро из E_i с начальной вершиной u располагалось под ребром из E_{i-1} с конечной вершиной u.

Таблица 2

Потоковая конструкция (пример 5)

Q_2	Q_3			
00	000	011	110	101
	001	010	100	111
01	001	010	100	111
	011	000	101	110
11	011	000	101	110
	001	100	010	111
10	001	100	010	111
	101	000	110	011

Используя табл. 2, удобно строить 2-фактор, получаемый с помощью потоковой конструкции. Выбираем произвольный столбец из Q_3. Двигаясь по этому столбцу вниз, выписываем конкатенацию текущей вершины и соответствующей вершины первого столбца. Так, для второго столбца получим

$$\mathtt{00000}, \mathtt{00001}, \mathtt{01001}, \mathtt{01011}, \mathtt{11011}, \mathtt{11001}, \mathtt{10001}, \mathtt{10101}.$$

Дойдя до конца столбца, переходим к началу столбца, первая вершина которого совпадает с последней вершиной текущего, и продолжаем те же действия. Если новый столбец уже «посещался», то цикл закончен и начинаем строить новый цикл 2-фактора со следующего «непосещённого» столбца. Таким образом для данного примера получаем 2-фактор, состоящий из двух циклов:

$$\begin{aligned} C_1 = {} & \mathtt{00000}, \mathtt{00001}, \mathtt{01001}, \mathtt{01011}, \mathtt{11011}, \mathtt{11001}, \mathtt{10001}, \mathtt{10101}, \\ & \mathtt{00101}, \mathtt{00111}, \mathtt{01111}, \mathtt{01110}, \mathtt{11110}, \mathtt{11111}, \mathtt{10111}, \mathtt{10011}, \\ & \mathtt{00011}, \mathtt{00010}, \mathtt{01010}, \mathtt{01000}, \mathtt{11000}, \mathtt{11100}, \mathtt{10100}, \mathtt{10000}, \\ C_2 = {} & \mathtt{00110}, \mathtt{00100}, \mathtt{01100}, \mathtt{01101}, \mathtt{11101}, \mathtt{11010}, \mathtt{10010}, \mathtt{10110}. \end{aligned}$$

5. Обобщённая потоковая конструкция

Далее определим обобщение потоковой конструкции, которое будет использоваться для построения 2-факторов без близких рёбер в n-мерном кубе. Эта новая конструкция естественным образом обобщает потоковую конструкцию: вместо разбиений $\mathcal{E}_i$, состоящих из путей длины 1, в обобщении используются разбиения, состоящие из путей произвольной длины.

Пусть, вновь $C = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2^n-1}$ — гамильтонов цикл в Q_n. Пусть $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_{2^n-1}$ — разбиения Q_k с условиями

$$F(\mathcal{H}_i) = S(\mathcal{H}_{i+1}) \quad \forall i \in \{0, \dots, 2^n - 2\},$$
$$F(\mathcal{H}_{2^n-1}) = S(\mathcal{H}_0).$$

Совокупность разбиений $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_{2^n-1}$, удовлетворяющих указанным выше условиям, будем называть *согласованным набором разбиений в* Q_k для C. Рассмотрим набор путей

$$\begin{aligned}\mathcal{H}' = v_0\mathcal{H}_0 &\circ \mathcal{E}(v_0, v_1, F(\mathcal{H}_0)) \\ &\circ v_1\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{E}(v_1, v_2, F(\mathcal{H}_1)) \circ \dots \circ v_i\mathcal{H}_i \circ \mathcal{E}(v_i, v_{i+1}, F(\mathcal{H}_i)) \\ &\quad \circ \dots \circ v_{2^n-2}\mathcal{H}_{2^n-2} \circ \mathcal{E}(v_{2^n-2}, v_{2^n-1}, F(\mathcal{H}_{2^n-2})) \circ v_{2^n-1}\mathcal{H}_{2^n-1}.\end{aligned}$$

Докажем два утверждения относительно $\mathcal{H}'$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_{2^n-1}$ — согласованный набор разбиений в Q_k для C, где $C = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2^n-1}$ — гамильтонов цикл в Q_n. Набор путей $\mathcal{H}'$ определён корректно и является набором путей в Q_{n+k}.*

Доказательство. Поскольку любое разбиение является разделимым набором путей, $v_i\mathcal{H}_i$ также разделимый набор путей.

Нетрудно видеть, что множество $\{v_iu \mid u \in F(\mathcal{H}_i)\}$ одновременно является множеством конечных вершин для набора путей $v_i\mathcal{H}_i$ и множеством начальных вершин для набора путей $\mathcal{E}(v_i, v_{i+1}, F(\mathcal{H}_i))$, поэтому все соединения $v_i\mathcal{H}_i \circ \mathcal{E}(v_i, v_{i+1}, F(\mathcal{H}_i))$ корректны.

В силу того, что $F(\mathcal{H}_{i-1}) = S(\mathcal{H}_i)$, множество вершин $\{v_iu \mid u \in F(\mathcal{H}_{i-1})\}$ одновременно является множеством конечных вершин для набора путей $\mathcal{E}(v_{i-1}, v_i, F(\mathcal{H}_i))$ и множеством начальных вершин для набора путей $v_i\mathcal{H}_i$. Отсюда следует, что все соединения $\mathcal{E}(v_{i-1}, v_i, F(\mathcal{H}_{i-1})) \circ v_i\mathcal{H}_i$ корректны.

Все операции соединения применены корректно, значит, $\mathcal{H}'$ действительно является набором путей в Q_{n+k}. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_{2^n-1}$ — согласованный набор разбиений в Q_k для C, где $C = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{2^n-1}$ — гамильтонов цикл в Q_n. Набор путей $\mathcal{H}'$ является замкнутым разбиением в Q_{n+k} с замыканием β:*

$$v_{2^n-1}u \longrightarrow v_0u$$

для всех $u \in F(\mathcal{H}_{2^n-1})$.

Доказательство. Заметим, что любая вершина vu ровно один раз содержится ровно в одном наборе цепей из $v_0\mathcal{H}_0$, $v_1\mathcal{H}_1$, …, $v_{2^n-1}\mathcal{H}_{2^n-1}$. Отсюда следует, что $\mathcal{H}'$ — разбиение Q_{n+k}. Легко понять, что указанное отображение β является замыканием этого разбиения. Значит, $\mathcal{H}'$ — замкнутое разбиение. Лемма 3 доказана.

Так как $\mathcal{H}'$ — замкнутое разбиение в Q_{n+k}, оно порождает 2-фактор в Q_{n+k}. Будем говорить, что этот 2-фактор построен с помощью *обобщённой потоковой конструкции* из гамильтонова цикла C в Q_n и согласованного набора разбиений $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, …, $\mathcal{H}_{2^n-1}$. Количество циклов в получившемся 2-факторе, очевидно, зависит от замкнутого разбиения $\mathcal{H}'$ и его замыкания β.

Следствие 1. *Количество циклов в 2-факторе, построенном с помощью обобщённой потоковой конструкции, равно количеству орбит перестановки* $(\alpha_{\mathcal{H}'} \circ \beta)$.

Следствие 2. *Если перестановка* $(\alpha_{\mathcal{H}'} \circ \beta)$ *имеет единственную орбиту, то обобщённая потоковая конструкция строит гамильтонов цикл в* Q_{n+k}.

Таблица 3

Обобщение потоковой конструкции (пример 6)

Q_2	Q_3		Q_2	Q_3	
00	000	010	11	101	001
	001	110		111	000
	101	111		110	010
	100	011		100	011
01	100	011	10	100	011
	110	010		101	111
	111	000		001	110
	101	001		000	010

Пример 6. Вновь рассмотрим гамильтонов цикл $C = 00, 01, 11, 10$ в Q_2 и $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ — согласованный набор разбиений в Q_3 для C:

$$\mathcal{H}_0 = \{(000, 001, 101, 100), (010, 110, 111, 011)\},$$
$$\mathcal{H}_1 = \{(100, 110, 111, 101), (011, 010, 000, 001)\},$$
$$\mathcal{H}_2 = \{(101, 111, 110, 100), (001, 000, 010, 011)\},$$
$$\mathcal{H}_3 = \{(100, 101, 001, 000), (011, 111, 110, 010)\}.$$

Теперь построим табл. 3, аналогичную таблице из примера 5.

Теперь построим табл. 3, аналогичную таблице из примера 5. В данном примере обобщённая потоковая конструкция строит 2-фактор в Q_5 состоящий из двух циклов:

$$\begin{aligned} C_1 = {} & \texttt{00000}, \texttt{00001}, \texttt{00101}, \texttt{00100}, \texttt{01100}, \texttt{01110}, \texttt{01111}, \texttt{01101}, \\ & \texttt{11101}, \texttt{11111}, \texttt{11110}, \texttt{11100}, \texttt{10100}, \texttt{10101}, \texttt{10001}, \texttt{10000}, \\ C_2 = {} & \texttt{00010}, \texttt{00110}, \texttt{00111}, \texttt{00011}, \texttt{01011}, \texttt{01010}, \texttt{01000}, \texttt{01001}, \\ & \texttt{11001}, \texttt{11000}, \texttt{11010}, \texttt{11011}, \texttt{10011}, \texttt{10111}, \texttt{10110}, \texttt{10010}. \end{aligned}$$

6. Построение 2-фактора без близких рёбер

Для того чтобы 2-фактор без близких рёбер мог быть построен с помощью обобщённой потоковой конструкции, согласованный набор разбиений $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{2^n-1}$ должен удовлетворять ряду условий. Достаточные условия устанавливает

Теорема 2. *Пусть $C = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2^n-1}$ — гамильтонов цикл в Q_n, а $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{2^n-1}$ — согласованный набор разбиений в Q_k для C. Пусть для любых $i, j \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, $i \neq j$, выполнены следующие условия:*
(i) $F(\mathcal{H}_i) \cap F(\mathcal{H}_j) = \varnothing$,
(ii) $D(u, w) > 1$ $\forall u, w \in F(\mathcal{H}_i)$,
(iii) *если* $D(v_i, v_j) = 1$, *то* $E(\mathcal{H}_i) \cap E(\mathcal{H}_j) = \varnothing$,
(iv) $E(\mathcal{H}_i)$ *не содержит близких рёбер.*
Тогда обобщённая потоковая конструкция строит 2-фактор без близких рёбер.

Доказательство. Пусть в получившемся 2-факторе существует пара близких рёбер $e_1 = (v_{i_1}u_1, v_{i_2}u_2)$ и $e_2 = (v_{i_3}u_3, v_{i_4}u_4)$. Возможны следующие четыре случая.

• $D(v_{i_1}, v_{i_2}) = 1$, $D(v_{i_1}, v_{i_3}) = 1$. Тогда рёбра имеют вид $e_1 = (v_{i_1}u, v_{i_2}u)$ и $e_2 = (v_{i_3}u, v_{i_4}u)$. Ребро $(v_{i_1}u, v_{i_2}u)$ может принадлежать 2-фактору, только если $u \in F(\mathcal{H}_{i_1})$ (или $u \in F(\mathcal{H}_{i_2})$), а ребро $(v_{i_3}u, v_{i_4}u)$ — только если $u \in F(\mathcal{H}_{i_3})$ (или $u \in F(\mathcal{H}_{i_4})$). Очевидно, что вершины $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, v_{i_4}$ попарно различны: в противном случае e_1 и e_2 не могут оказаться близкими. Но вершина u может принадлежать не более чем одному из множеств $F(\mathcal{H}_{i_1}), F(\mathcal{H}_{i_2}), F(\mathcal{H}_{i_3}), F(\mathcal{H}_{i_4})$ согласно (i); противоречие.

• $D(v_{i_1}, v_{i_2}) = 1$, $D(u_1, u_3) = 1$. Тогда рёбра имеют вид $e_1 = (v_{i_1}u_1, v_{i_2}u_1)$ и $e_2 = (v_{i_1}u_3, v_{i_2}u_3)$. Без ограничения общности положим $i_2 = i_1+1$. Ребро $(v_{i_1}u_1, v_{i_2}u_1)$ может принадлежать итоговому 2-фактору, только если $u_1 \in F(\mathcal{H}_{i_1})$, а ребро $(v_{i_1}u_3, v_{i_2}u_3)$ — только если $u_3 \in F(\mathcal{H}_{i_1})$. Но в силу (ii) в $F(\mathcal{H}_{i_1})$ не может оказаться вершин, находящихся на расстоянии 1; противоречие.

• $D(v_{i_1}, v_{i_3}) = 1$, $D(u_1, u_2) = 1$. Тогда рёбра имеют вид $e_1 = (v_{i_1}u_1, v_{i_1}u_2)$ и $e_2 = (v_{i_3}u_1, v_{i_3}u_2)$. Заметим, что ребро (u_1, u_2) принадлежит и $E(\mathcal{H}_{i_1})$, и $E(\mathcal{H}_{i_3})$. Однако согласно (iii) множества $E(\mathcal{H}_{i_1})$ и $E(\mathcal{H}_{i_3})$ не могут содержать одинаковых рёбер, так как $D(v_{i_1}, v_{i_3}) = 1$; противоречие.

• $D(u_1, u_2) = 1$, $D(u_1, u_3) = 1$. Тогда рёбра имеют вид $e_1 = (v_{i_1}u_1, v_{i_1}u_2)$ и $e_2 = (v_{i_1}u_3, v_{i_1}u_4)$. В этом случае рёбра (u_1, u_2) и (u_3, u_4) являются близкими в Q_k, при этом (u_1, u_2), $(u_3, u_4) \in E(\mathcal{H}_{i_1})$. Однако ввиду (iv) множество $E(\mathcal{H}_{i_1})$ не может содержать близких рёбер; противоречие.

Таким образом, при существовании пары близких рёбер в каждом из четырёх возможных вариантов получается противоречие с одним из условий. Значит, одновременное выполнение всех четырёх условий теоремы является достаточным для того, чтобы построенный 2-фактор не имел близких рёбер. Теорема 2 доказана.

Теперь необходимо установить совместность условий, установленных теоремой 2, т. е. убедиться в том, что такие согласованные наборы разбиений действительно существуют для гамильтоновых циклов, по крайней мере, в гиперкубах некоторых размерностей. Далее приведём способ построения таких наборов.

7. Смежные перестановки

Базовым элементом при построении разбиения куба Q_k будут смежные перестановки. *Смежной перестановкой* называется такая перестановка φ на множестве $V(Q_k)$, что $(v, \varphi(v)) \in E(Q_k)$ для любой вершины v гиперкуба Q_k. Приведём примеры смежных перестановок.

Пример 7. Пусть $C = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2^k-1}$ — гамильтонов цикл в Q_k. Тогда перестановка σ_C, сдвигающая вершины по циклу, является смежной перестановкой вершин Q_k:

$$\sigma_C(v_i) = \begin{cases} v_{i+1}, & i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^k - 2\}, \\ v_0, & i = 2^k - 1. \end{cases}$$

Пример 8. Пусть M — совершенное паросочетание в Q_k. Тогда перестановка μ, переводящая вершину в смежную с ней в M, является смежной перестановкой вершин Q_k:

$$\mu(v) = u, \quad \text{если } (v, u) \in M.$$

Нетрудно видеть, что поочерёдное применение последовательности смежных перестановок $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ к некоторой вершине v задаёт путь $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_l$ в Q_k, где

$$v_0 = v, \quad v_1 = \varphi_1(v_0), \quad v_2 = \varphi_2(v_1), \quad \ldots, \quad v_l = \varphi_l(v_{l-1}).$$

Такой путь будем обозначать через $P_v(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l)$. Полезное свойство путей, построенных таким образом, устанавливает

Утверждение 1. *Пусть* $P_v(\varphi_1, \ldots, \varphi_l) = v_0, \ldots, v_l$ *и* $P_{v'}(\varphi_1, \ldots, \varphi_l) = v'_0, \ldots, v'_l$ *для двух различных вершин* v *и* v' *гиперкуба* Q_k. *Тогда* $v_i \neq v'_i$ *для любого* $i \in \{0, \ldots, l\}$.

Доказательство. Пусть i — такое минимальное число, что $v_i \neq v'_i$. Поскольку $v \neq v'$, то $i > 0$. Значит, существуют v_{i-1} и v'_{i-1} такие, что

$$v_i = \varphi_i(v_{i-1}), \quad v'_i = \varphi_i(v'_{i-1}).$$

Так как φ_i — перестановка на множестве $V(Q_n)$, из $v_i = v'_i$ следует, что $v_{i-1} = v'_{i-1}$; противоречие с минимальностью i. Утверждение 1 доказано.

Для построения разбиений, удовлетворяющих условию теоремы 2, будем использовать смежные перестановки, задаваемые совершенными паросочетаниями M_1, M_2, M_3, M_4 из [3] (эти паросочетания были приведены в разд. 3). Смежную перестановку, определяемую совершенным паросочетанием M_i, будем обозначать через μ_i.

8. Построение согласованного набора разбиений

Пусть $C = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2^n-1}$ — гамильтонов цикл в Q_n при $n \geqslant 2$. Будем строить согласованный набор разбиений в Q_k для C, где $k = 4(n+a)$ при $a \geqslant 0$. Число $n + a$ будем обозначать через b.

Любую вершину u из Q_k можно представить в виде $u = q_0 q_1 q_2 \ldots q_{b-1}$ (здесь и далее всюду символом q_i обозначаем вершину Q_4). Определим отображение f, сопоставляющее каждой вершине u из Q_k вершину из Q_b по следующему правилу:

$$f(u) = W(q_0) W(q_1) \ldots W(q_{b-1}).$$

Имеем $V(Q_k) = \bigsqcup\limits_{w \in V(Q_b)} X_w$, где $X_w = \{u \in V(Q_k) \mid f(u) = w\}$. Ясно, что мощность множества X_w для любого $w \in V(Q_b)$ равна 2^{3b}.

Будем строить согласованный набор $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{2^n-1}$ разбиений в Q_k для гамильтонова цикла C. Приведём метод построения разбиения $\mathcal{H}_i$ для $i \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$.

Вершину гиперкуба Q_b вида $v_i\mathtt{00}\ldots\mathtt{00}$ будем обозначать через v'_i. Возьмём произвольную гамильтонову цепь R в Q_b, ведущую из вершины v'_i в вершину v'_{i+1}. Пусть $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{2^b-2}$ — переходная последовательность этой гамильтоновой цепи. Для произвольной вершины $u = q_0 q_1 \ldots q_{b-1}$ из Q_k определим смежную перестановку φ^j_r, где $j \in \{0, \ldots, b-1\}$, а $r \in \{1, 2, 3, 4\}$, следующим образом:

$$\varphi^j_r(u) = q_0 q_1 \ldots q_{j-1}\ \mu_r(q_j)\ q_{j+1} \ldots q_{b-1}.$$

Для вершины u из $V(Q_k)$ введём обозначение

$$P_u(R) = P_u\big(\varphi_{r_0}^{t_0}, \varphi_{r_1}^{t_1}, \varphi_{r_2}^{t_2}, \dots, \varphi_{r_{2^b-3}}^{t_{2^b-3}}, \varphi_{r_{2^b-2}}^{t_{2^b-2}}\big) = u_0, u_1, u_2, \dots u_{2^b-2}, u_{2^b-1}.$$

Далее рассмотрим набор путей $\{P_u(R) \mid u \in X_{v'_i}\}$ мощности 2^{3b}.

Лемма 4. *Построенный набор путей $\{P_u(R) \mid u \in X_{v'_i}\}$, где $R = w_0$, $w_1, w_2, \dots, w_{2^b-1}$, является разбиением Q_k при любых значениях $r_s \in \{1, 2, 3, 4\}$. При этом вершины, стоящие в путях на s-м месте, образуют множество X_{w_s}.*

Доказательство. Из построения следует, что начальные вершины всех путей из набора образуют множество $X_{v'}$, т. е. X_{w_0}.

Нетрудно видеть, что $\varphi_{r_0}^{t_0}(u_s) \in X_{w_{s+1}}$ для любого $u_s \in X_{w_s}$. В силу утверждения 1 все вершины, стоящие на s-м месте в путях набора $\{P_u(R) \mid u \in X_{v'_i}\}$, различны. Так как мощность всех X_{w_s} одинакова, получаем, что совокупность всех вершин, стоящих на s-м месте в путях, образует в точности множества X_{w_s} для всех $s \in \{0, \dots, 2^b - 1\}$.

Поскольку множества X_{w_s} разбивают множество $V(Q_k)$, набор путей $\{P_u(R) \mid u \in X_{v'_i}\}$ является разбиением вне зависимости от значений r_s. Лемма 4 доказана.

Искомое разбиение $\mathcal{H}_i$ — это разбиение $\{P_u(R) \mid u \in X_{v'_i}\}$ при следующих значениях r_s:

$$r_s = \begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ — чётное и } W'(f(u_s), f(u_{s+1})) = 0, \\ 2, & \text{если } i \text{ — чётное и } W'(f(u_s), f(u_{s+1})) = 1, \\ 3, & \text{если } i \text{ — нечётное и } W'(f(u_s), f(u_{s+1})) = 0, \\ 4, & \text{если } i \text{ — нечётное и } W'(f(u_s), f(u_{s+1})) = 1. \end{cases}$$

Значение r_s определено корректно, поскольку $f(u_s)$ не зависит от выбора пути из набора (так как $u_s \in X_{w_s}$ по предыдущей лемме).

Лемма 5. *Набор разбиений $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{2^a-1}$ является согласованным набором разбиений для цикла C.*

Доказательство. Для каждого разбиения из $\mathcal{H}_i$ имеем $S(\mathcal{H}_i) = X_{v'_i}, S(\mathcal{H}_i) = X_{v'_{i+1}}$. Отсюда следует, что указанный набор разбиений является согласованным. Лемма 5 доказана.

Теорема 3. *Согласованный набор разбиений $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_{2^a-1}$ удовлетворяет всем условиям теоремы* 2.

Доказательство. Последовательно докажем, что полученный согласованный набор разбиений удовлетворяет каждому из условий теоремы 2.

(i) Так как $X_{v_i'} \cap X_{v_j'} = \varnothing$ для разных $v_i, v_j \in V(Q_n)$, то $F(\mathcal{H}_i) \cap F(\mathcal{H}_j) = \varnothing$.

(ii) Очевидно, что внутри одного множества $X_{v'}$ могут находиться только вершины одной чётности. Тем самым расстояние Хэмминга между любыми двумя вершинами из $F(\mathcal{H}_i)$ не меньше 2.

(iii) Пусть v_i и v_j таковы, что $D(v_i, v_j) = 1$. Значит, i и j разной чётности. Предположим, что существуют совпадающие рёбра $e_1 = \big(u_{l_1}, \varphi_{r_{l_1}}^{t_{l_1}}(u_1)\big) \in E(\mathcal{H}_i)$ и $e_2 = \big(u_{l_2}, \varphi_{r_{l_2}}^{t_{l_2}}(u_2)\big) \in E(\mathcal{H}_j)$. В этом случае необходимо, чтобы $r_{l_1} = r_{l_2}$, а $t_{l_1} = t_{l_2}$, что невозможно в силу определения r_s, так как i и j разной чётности; противоречие.

(iv) Предположим, что $e_1 = \big(u_{l_1}, \varphi_{r_{l_1}}^{t_{l_1}}(u_1)\big)$ и $e_2 = \big(u_{l_2}, \varphi_{r_{l_2}}^{t_{l_2}}(u_2)\big)$ — пара близких рёбер из $E(\mathcal{H}_i)$. Чтобы эти рёбра оказались близкими, нужно, чтобы $r_{l_1} = r_{l_2}$, $t_{l_1} = t_{l_2}$. Но для близких рёбер e_1 и e_2 имеем $W'(e_1) \neq W'(e_2)$, значит, $r_{l_1} \neq r_{l_2}$; противоречие. Теорема 3 доказана.

Таким образом, для любого гамильтонова цикла в Q_n можно построить согласованный набор разбиений в $Q_{4(n+a)}$, удовлетворяющий условиям теоремы 2. Это позволяет построить 2-фактор без близких рёбер в Q_{5n+4a} с помощью обобщённой потоковой конструкции.

Минимальная размерность, для которой удаётся построить 2-фактор без близких рёбер с помощью обобщённой потоковой конструкции, равна $N = 10$. В этом случае параметры принимают следующие значения: $n = 2$, $k = 8$, $b = 2$, $a = 0$. Приведём часть этого построения.

Пусть $C = \texttt{00}, \texttt{10}, \texttt{11}, \texttt{01}$ — гамильтонов цикл в Q_2. Согласованный набор разбиений $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ для C будет задаваться четырьмя гамильтоновыми цепями:

- R_0 — гамильтонова цепь в Q_2 из `00` в `10`, её переходная последовательность — $1, 0, 1$;
- R_1 — гамильтонова цепь в Q_2 из `10` в `11`, её переходная последовательность — $0, 1, 0$;
- R_2 — гамильтонова цепь в Q_2 из `11` в `01`, её переходная последовательность — $1, 0, 1$;
- R_3 — гамильтонова цепь в Q_2 из `01` в `00`, её переходная последовательность — $0, 1, 0$.

Для примера рассмотрим пути из $\mathcal{H}_0$, начальные вершины которых начинаются на `0000`. Всего таких путей восемь, все они имеют длину 4 (см. табл. 4). На первом шаге вторая четвёрка позиций вершины в каждом пути меняется в соответствии с паросочетанием M_1. На втором шаге первая четвёрка позиций вершины в каждом пути меняется в соответствии с паросочетанием M_1. На третьем шаге вторая четвёрка позиций вершины в каждом пути меняется в соответствии с паросочетанием M_2.

Таблица 4

Пути из разбиения $\mathcal{H}_0$

Q_8			
00000000	00001100	00000110	00000011
00000001	00000100	00000010	00001011
00010001	00010100	00010010	00011011
00011001	00010101	00010000	00011010
Q_8			
00001010	00001001	00000101	00001111
00001000	00001101	00000111	00001110
00011000	00011101	00010111	00011110
00011100	00011111	00010011	00010110

9. Анализ полученного решения

9.1. Количество циклов. По следствию 1 количество циклов в 2-факторе, полученном с помощью обобщённой потоковой конструкции, равно количеству орбит перестановки $\alpha_{\mathcal{H}'}$, являющейся суперпозицией перестановок $\alpha_{\mathcal{H}_0}, \alpha_{\mathcal{H}_1}, \ldots, \alpha_{\mathcal{H}_{2^n-1}}$.

Рассмотрим действие перестановки $\alpha_{\mathcal{H}'}$ на вершину $u = q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{b-1}$ гиперкуба Q_{4b}. Нетрудно видеть, что

$$\alpha_{\mathcal{H}'}(u) = \gamma_0(q_0), \gamma_1(q_1), \gamma_2(q_2), \ldots, \gamma_{n+a-1}(q_{b-1}),$$

где каждое из γ_i — это суперпозиция чётного числа перестановок из μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, являющаяся перестановкой всех вершин одной чётности из $V(Q_4)$. Отсюда получаем, что длина орбиты $\alpha_{\mathcal{H}'}$ равна наименьшему общему кратному длин орбит γ_i. Из симметричности перестановок μ_i следует, что каждая из γ_i имеет орбиты одинаковой длины. Значит, возможная длина орбит γ_i равна 1, 2, 4 или 8. Таким образом, максимально возможная длина циклов в полученном 2-факторе равна $8 \cdot 2^b \cdot 2^n = 2^{2n+a+3}$. В этом случае их количество равно $2^{3n+3a-3}$.

9.2. Покрываемые размерности. Применяя указанный выше способ построения, в Q_{5n+4a} можно получить 2-фактор с желаемым свойством для $n \geqslant 2$ и $a \geqslant 0$. Значит, минимальная размерность N гиперкуба, для которой можно применить построение, равна $N = 10$.

Теперь необходимо узнать, начиная с какого N любое число может быть представлено в виде $5n + 4a$, где $n \geqslant 2$, а $a \geqslant 0$. Для этого воспользуемся решением задачи Фробениуса для двух чисел. Напомним, что задача Фробениуса состоит в нахождении максимального целого числа N

такого, что уравнение

$$N = ax + by$$

не имеет решения в целых неотрицательных числах относительно x и y при фиксированных значениях a и b. Решение этой задачи было найдено ещё Сильвестром в 1882 г.: $N = ab - a - b$.

Отсюда легко получаем, что $N = 21$ — самое большое целое число, которое не может быть представлено в виде $5n+4a$, где $n \geqslant 2$, $a \geqslant 0$. Следовательно, приведённая конструкция строит 2-факторы в гиперкубах всех размерностей $N \geqslant 22$ при подходящих значениях n и a. Табл. 5 демонстрирует, какие значения размерности N покрываются конструкцией при соответствующих n и a в интервале от 10 до 22 (жирным выделены непокрытые значения).

Таблица 5

Покрываемые размерности

N	10	**11**	**12**	**13**	14	15	**16**	**17**	18	19	20	**21**	22
n	2				2	3			2	3	4		2
a	0				1	0			2	1	0		3

Заметим, что построенный таким образом 2-фактор без близких рёбер в Q_N может быть «расширен» до 2-фактора без близких рёбер в Q_{N+1}. Пусть C — гамильтонов цикл в Q_n, а $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{2^n-1}$ — согласованный набор разбиений в Q_k для C, построенный способом, приведённым в разд. 8.

Пусть $\mathfrak{F}_1$ — 2-фактор в Q_{n+k}, построенный с помощью обобщённой потоковой конструкции из C и согласованного набора разбиений $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $\ldots$, $\mathcal{H}_{2^n-1}$, а $\mathfrak{F}_2$ — 2-фактор в Q_{n+k}, построенный с помощью обобщённой потоковой конструкции из C и согласованного набора разбиений $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\ldots$, $\mathcal{H}_{2^n-1}$, $\mathcal{H}_0$. Ясно, что $\mathfrak{F}_2$ также не содержит близких рёбер.

Лемма 6. *Два множества рёбер $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ не пересекаются.*

Доказательство. Пусть существует ребро $e = (v_{i_1}u_{j_1}, v_{i_2}u_{j_2})$, принадлежащее обоим 2-факторам.

Если $i_1 = i_2$, то $(u_{j_1}, u_{j_2}) \in E(\mathcal{H}_{i_1})$ из $\mathfrak{F}_1$, а $(u_{j_1}, u_{j_2}) \in E(\mathcal{H}_{i_1+1})$ из $\mathfrak{F}_2$. Однако согласованный набор разбиений $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, $\ldots$, $\mathcal{H}_{2^n-1}$ удовлетворяет условию (iii) теоремы 2; противоречие.

Если $u_{j_1} = u_{j_2}$, то v_{i_1} и v_{i_2} — две соседние вершины в C. Без ограничения общности полагаем $i_2 = i_1 + 1$. Тогда $u_{j_1} \in F(\mathcal{H}_{i_1})$ из $\mathfrak{F}_1$, а $u_{j_1} \in F(\mathcal{H}_{i_1+1})$ из $\mathfrak{F}_2$. Но согласованный набор разбиений $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{2^n-1}$ удовлетворяет условию (i) теоремы 2; противоречие. Лемма 6 доказана.

Значит, в $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ содержатся различные рёбра. Поместив теперь каждый из этих 2-факторов в подкуб Q_{n+k+1} размерности $n+k$, получим 2-фактор в Q_{n+k+1}. Этот 2-фактор не будет содержать близких рёбер по лемме 6 и в силу того, что каждый из $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ не содержит близких рёбер.

Очевидно, что такой подход можно обобщить для построения 2-факторов при увеличении размерности на произвольное число, размещая в «чётных» подкубах $\mathfrak{F}_1$, а в «нечётных» — $\mathfrak{F}_2$. Справедлива

Теорема 4. *Для любого $N \geqslant 10$ существует 2-фактор без близких рёбер в Q_N.*

Заключение

В работе приводится обобщение потоковой конструкции, ранее использовавшейся только для построения гамильтоновых циклов. С помощью приведённого обобщения удалось получить способ построения нетривиальных 2-факторов, не содержащих близких рёбер. Конструкция напрямую способна строить такие 2-факторы во всех Q_N, начиная с $N = 22$. Для всех размерностей с $N = 11$ до $N = 21$ задача может быть решена «расширением» 2-фактора, построенного с помощью потоковой конструкции в Q_{10}.

Остаётся открытым вопрос существования гамильтоновых циклов Q_n без близких рёбер. Эта задача может являться одним из предметов дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Быков И. С.** О локально равномерных кодах Грея // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 1. С. 51–64.
2. **Евдокимов А. А.** О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе // Мат. заметки. 1969. Т. 4, Вып. 3. С. 309–319.
3. **Кротов Д. С.** Индуктивные конструкции совершенных троичных равновесных кодов с расстоянием 3 // Пробл. передачи информации. 2001. Т. 37, № 1. С. 3–11.
4. **Пережогин А. Л.** О локально изометрическом кодировании натуральных чисел // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3, № 4. С. 69–76.
5. **Пережогин А. Л.** О специальных совершенных паросочетаниях в булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2005. Т. 12, № 4. С. 51–59.
6. **Пережогин А. Л., Потапов В. Н.** О числе гамильтоновых циклов в булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 2. С. 52–62.
7. **Fink J.** Perfect matchings extend to Hamilton cycles in hypercubes // J. Comb. Theory, Ser. B. 2007. Vol. 97, No. 6. P. 1074–1076.
8. **Goddyn L., Gvozdjak P.** Binary Gray codes with long bit runs // Electron. J. Comb. 2003. No. 10.

9. **Gregor P., Mutze T., Nummenpalo J.** A short proof of the middle levels theorem // Discrete Anal. 2018. Published online at `http://dx.doi.org/10.19086/da.3659`.
10. **Kautz W. H.** Unit-distance error-checking codes // IRE Trans. Electron. Comput. 1958. Vol. EC-7, No. 2. P. 179–180.
11. **Van Zanten A. J., Haryanto L.** Sets of disjoint snakes based on a Reed-Muller code and covering the hypercube // Des. Codes Cryptogr. 2008. Vol. 48, No. 3. P. 207–229.
12. **Zemor G.** An upper bound on the size of the snake-in-the-box // Combinatorica. 1997. Vol. 17, No. 2. P. 287–298.

Быков Игорь Сергеевич

Статья поступила
23 ноября 2018 г.
После доработки —
29 марта 2019 г.
Принята к публикации
5 июня 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2019. Vol. 26, No. 3. P. 5–26

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2019.26.641

2-FACTORS WITHOUT CLOSE EDGES IN THE n-DIMENSIONAL CUBE

I. S. Bykov

Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: patrick.no10@gmail.com

Abstract. We say that two edges in the hypercube are *close* if their endpoints form a 2-dimensional subcube. We consider the problem of constructing a 2-factor not containing close edges in the hypercube graph. For solving this problem, we use the new construction for building 2-factors which generalizes the previously known stream construction for Hamiltonian cycles in a hypercube. Owing to this construction, we create a family of 2-factors without close edges in cubes of all dimensions starting from 10, where the length of the cycles in the obtained 2-factors grows together with the dimension. Tab. 5, bibliogr. 12.

Keywords: n-dimensional hypercube, perfect matching, 2-factor.

REFERENCES

1. **I. S. Bykov,** On locally balanced Gray codes, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **23** (1), 51–64 (2016) [Russian] [*J. Appl. Indust. Math.* **10** (1), 78–85 (2016)].
2. **A. A. Evdokimov,** Chain of maximal length in a unitary n-dimensional cube, *Mat. Zametki* **6**, 309–319 (1969) [Russian] [*Math. Notes* **6**, 642–648 (1969)].
3. **D. S. Krotov,** Inductive construction of perfect ternary constant-weight codes with distance 3, *Problemy Peredachi Inform.* **37** (1), 3–11 (2001) [Russian] [*Problems Inform. Transmission* **37** (1), 1–9 (2001)].
4. **A. L. Perezhogin,** On locally isometric coding of natural numbers, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **3** (4), 69–76 (1996) [Russian].
5. **A. L. Perezhogin,** On special perfect matchings in a Boolean cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **12** (4), 51–59 (2005) [Russian].
6. **A. L. Perezhogin** and **V. N. Potapov,** On the number of Hamiltonian cycles in a Boolean cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **8** (2), 52–62 (2001) [Russian].
7. **J. Fink,** Perfect matchings extend to Hamilton cycles in hypercubes, *J. Combin. Theory, Ser. B,* **97** (6), 1074–1076 (2007).

8. **L. Goddyn** and **P. Gvozdjak,** Binary Gray codes with long bit runs, *Electron. J. Combin.* **10** (2003).
9. **P. Gregor, T. Mutze,** and **J. Nummenpalo,** A short proof of the middle levels theorem, *Discrete Analysis* (2018). Published online at `http://dx.doi.org/10.19086/da.3659`.
10. **W. H. Kautz,** Unit-distance error-checking codes, *IRE Trans. Electronic Computers* **EC-7**, 179–180 (1958).
11. **A. J. van Zanten** and **L. Haryanto,** Sets of disjoint snakes based on a Reed-Muller code and covering the hypercube, *Des. Codes Cryptogr.* **48** (3), 207–229 (2008).
12. **G. Zemor,** An upper bound on the size of the snake-in-the-box, *Combinatorica* **17** (2), 287–298 (1997).

Igor S. Bykov

Received November 23, 2018
Revised March 29, 2019
Accepted June 5, 2019