ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2019. Т. 26, № 3. С. 46–59

УДК 519.7 DOI 10.33048/daio.2019.26.647

ОБ m-ЮНКТИВНЫХ ПРЕДИКАТАХ НА КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ*)

С. Н. Селезнева

Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия
E-mail: `selezn@cs.msu.ru`

Аннотация. Рассматриваются предикаты на конечных множествах. Предикаты, инвариантные относительно некоторой $(m+1)$-местной функции почти единогласия, названы m-юнктивными. Предлагается представление предикатов на конечном множестве в виде обобщённых конъюнктивных нормальных форм (ОКНФ). Получены свойства ОКНФ для m-юнктивных предикатов. Показано, что каждый m-юнктивный предикат может быть представлен полностью согласованной ОКНФ, в которой каждый конъюнкт содержит не более m переменных. Такое представление m-юнктивного предиката названо приведённым. Предложен быстрый алгоритм нахождения приведённого представления m-юнктивного предиката. Показано, как полученные свойства ОКНФ для m-юнктивных предикатов можно применить для построения быстрого алгоритма задачи обобщённой S-выполнимости, в которой множество S содержит только предикаты, инвариантные относительно одной и той же функции почти единогласия. Библиогр. 15.

Ключевые слова: предикат на конечном множестве, функция на конечном множестве, функция почти единогласия, биюнктивный предикат, m-юнктивный предикат, конъюнктивная нормальная форма, задача обобщённой выполнимости.

Введение

Задача обобщённой выполнимости, или удовлетворения ограничениям, состоит в выяснении выполнимости системы отношений, каждое из которых принадлежит заранее известному конечному множеству S, но зависит от своего набора переменных. При этом полагается, что в S входят отношения (предикаты) на конечном множестве A, $|A| = k$. Одним

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17–01–00782-а).

из методов исследования этой задачи является алгебраический подход [1, 2]. Он состоит в рассмотрении функций на множестве A, сохраняющих все отношения из S. На основе этого подхода как итог ряда работ получена классификация вычислительной сложности задачи обобщённой выполнимости при заданном конечном k (см. [3–5] и ссылки в них). Ранее были найдены полные сложностные классификации этой задачи при $k = 2$ [6] и при $k = 3$ [7]. Некоторые полиномиальные классы этой задачи при произвольных конечных k были описаны в [1, 8–10]. В частности, в [8] показано, что задача обобщённой S-выполнимости с множеством S, которое содержит только предикаты, инвариантные относительно одной и той же функции почти единогласия, является полиномиальной.

В данной работе рассматриваются предикаты на конечных множествах, инвариантные относительно некоторой $(m + 1)$-местной функции почти единогласия. Они названы *m-юнктивными.* В [8] найдены свойства m-юнктивных предикатов. В [11,12] предложено представление предикатов на конечных множествах в виде обобщённых конъюнктивных нормальных форм (ОКНФ) и получены свойства таких представлений предикатов. В этой работе найдены свойства ОКНФ m-юнктивных предикатов. В частности, показано, что каждый m-юнктивный предикат может быть представлен полностью согласованной ОКНФ, в которой каждый конъюнкт содержит не более m переменных. Такое представление m-юнктивного предиката названо приведённым. Предложен быстрый алгоритм нахождения приведённого представления m-юнктивного предиката. Показано, как полученные свойства для ОКНФ m-юнктивных предикатов можно применить для построения быстрого алгоритма задачи обобщённой S-выполнимости, в которой множество S содержит только предикаты, инвариантные относительно одной и той же функции почти единогласия.

1. Основные определения

Пусть $k \geqslant 2$ — целое число, $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Алфавитное упорядочение наборов из E_k^n (в перечисленном порядке элементов из E_k) назовём *лексикографическим.* Если $\alpha \in E_k^n$, то $\alpha(i)$ обозначает значение i-го разряда набора α, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $R_k^{(n)} = \{g \mid g\colon E_k^n \to E_2\}$ — множество n-местных $(n \geqslant 0)$ и $R_k = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} R_k^{(n)}$ — множество всех предикатов на k-элементном множестве E_k. Если $g, h \in R_k$, то $\bar{g}$, $g\&h$, $g \vee h$ означают отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию соответствующих предикатов (при этом знак & будем заменять на $\cdot$ или вообще пропускать). Если $g \in R_k^{(n)}$, то $N_a(g) = \{\alpha \in E_k^n \mid g(\alpha) = a\}$, $a \in E_2$, — соответственно множества нулей и единиц предиката g. Пусть $P_k^{(n)} = \{f \mid f\colon E_k^n \to E_k\}$ — множество

n-местных ($n \geqslant 0$) и $P_k = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_k^{(n)}$ — множество всех функций (операций) на k-элементном множестве E_k. *Вектором значений* функции $f \in P_k^{(n)}$ назовём набор $(f(\alpha_0), \ldots, f(\alpha_{k^n-1})) \in E_k^{k^n}$, где $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k^n-1}$ — все наборы из E_k^n, перечисленные в лексикографическом упорядочении.

Распространим функции из P_k на наборы элементов из множества E_k: если $f \in P_k^{(m)}$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in E_k^n$, то $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \beta \in E_k^n$, где $\beta(i) = f(\alpha_1(i), \ldots, \alpha_m(i))$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Функция $f \in P_k^m$ сохраняет предикат $g \in R_k^{(n)}$, если $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in N_1(g)$ для произвольных наборов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in N_1(g)$. Если функция $f \in P_k$ сохраняет предикат $g \in R_k$, то предикат g называется *инвариантным относительно функции* f, а функция f называется *полиморфизмом предиката* g. Множество всех инвариантов функции $f \in P_k$ обозначается через $\mathrm{Inv}(f)$, множество всех полиморфизмов предиката $g \in R_k$ — через $\mathrm{Pol}(g)$.

2. Конъюнктивные формы для предикатов

В [11, 12] предложены обобщённые конъюнктивные нормальные формы (сокращённо ОКНФ) для предикатов из R_k и найдены их свойства. Напомним некоторые определения и утверждения из [11, 12], которые понадобятся в дальнейшем. Считаем, что элементы из E_k линейно упорядочены, как целые числа. Определим одноместные *ступенчатые* предикаты $s_a(x), \bar{s}_a(x) \in R_k$ при $a = 1, \ldots, k-1$:

$$s_a(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant a, \\ 0, & x < a. \end{cases}$$

Ступенчатые предикаты $s_a(x)$ будем называть *положительными*, а предикаты $\bar{s}_a(x)$ — *отрицательными*. Иногда будет удобно считать ступенчатыми предикатами $s_k(x)$, $\bar{s}_0(x)$, выражающие константу 0: $0 = s_k(x) = \bar{s}_0(x)$. Введём обозначение $s_a^\sigma(x)$, $\sigma \in E_2$: $s_a^\sigma(x) = s_a(x)$ при $\sigma = 1$ и $s_a^\sigma(x) = \bar{s}_a(x)$ при $\sigma = 0$. Выражение $s_a^\sigma(x)$ назовём *литералом* (переменной x). Литерал $L = s_a^\sigma(x)$ назовём *сужением* литерала $L' = s_b^\sigma(x)$, если $N_1(L) \subseteq N_1(L')$ (или $N_0(L') \subseteq N_0(L)$). Сужение назовём *собственным*, если литералы при этом не совпадают.

Обобщённой элементарной дизъюнкцией (*ОЭД*) *ранга* r при $r \geqslant 1$ назовём выражение (формулу) вида $\bigvee\limits_{j=1}^{r} (s_{a_j}(x_{i_j}) \vee \bar{s}_{b_j}(x_{i_j}))$, где $a_j \in E_k \cup \{k\}$, $b_j \in E_k$, $b_j < a_j$ и невозможен случай, когда $a_j = k$ и $b_j = 0$, $j = 1, \ldots, r$. *Обобщённой элементарной дизъюнкцией ранга* 0 назовём константу 0. Отметим, что любую дизъюнкцию ступенчатых предикатов применением тождеств алгебры логики можно привести либо к некоторой ОЭД,

либо к константе 1. Если D, D' — ОЭД, то D называется *сужением* D', если каждый литерал ОЭД D является сужением некоторого литерала ОЭД D'. Сужение называется *собственным*, если ОЭД при этом не совпадают. Отметим, что если ОЭД D — сужение ОЭД D', то из $D'(\alpha)$, где $\alpha \in E_k^n$, следует $D(\alpha) = 0$.

Обобщённой конъюнктивной нормальной формой (*ОКНФ*) *длины* l, $l \geqslant 1$, назовём конъюнкцию l различных ОЭД. Каждая ОКНФ над переменными $x_1, \ldots, x_n$ определяет некоторый предикат $g(x_1, \ldots, x_n) \in R_k$. Кроме того, каждый предикат $g(x_1, \ldots, x_n) \in R_k$ может быть представлен некоторой ОКНФ.

Назовём *импликентой* предиката $g \in R_k^{(n)}$ такую ОЭД D, что для любого набора $\alpha \in E_k^n$ из $D(\alpha) = 0$ следует $g(\alpha) = 0$. Если к тому же никакое собственное сужение D' импликенты D не является импликентой предиката g, то ОЭД D называется *простой импликентой* предиката g. Конъюнкция K_g всех простых импликент предиката $g \in R_k$ называется его *сокращённой ОКНФ*. Сокращённая ОКНФ K_g предиката $g \in R_k$ единственна и представляет этот предикат g [11].

В [13, 14] рассматривались понятия согласованности систем отношений, в [11] они аналогично определены для ОКНФ. Будем говорить, что набор $\alpha \in E_k^t$ переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$, $t \geqslant 0$, *не обнуляет* ОЭД D, если при подстановке в ОЭД D вместо каждой переменной x_{i_j} значения $\alpha(j)$, $j = 1, \ldots, t$, не получается константа 0. Например, набор $\alpha = (0, 1) \in E_5^2$ переменных x_1, x_3 не обнуляет ОЭД $D_1 = s_1(x_1) \vee \bar{s}_3(x_2)$ и обнуляет ОЭД $D_2 = s_2(x_3)$. Считаем, что пустой набор (т. е. при $t = 0$) обнуляет только ОЭД, являющуюся константой 0.

ОКНФ $K(x_1, \ldots, x_n)$ называется *полностью согласованной*, если для каждого $t \geqslant 0$ любого набора $\alpha \in E_k^t$ переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$, не обнуляющего ни одну ОЭД в ОКНФ K, для любой переменной $x_{i_{t+1}}$, не совпадающей ни с одной из переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$, можно подобрать такое $b \in E_k$, что набор $\beta = (\alpha(1), \ldots, \alpha(t), b) \in E_k^{t+1}$ переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, x_{i_{t+1}}$ не обнуляет ни одну ОЭД в ОКНФ K.

В [11] доказано, что любая сокращённая ОКНФ является полностью согласованной.

Теорема 1 [11]**.** *Пусть $k \geqslant 2$. Для каждого предиката $g \in R_k$ его сокращённая ОКНФ K_g является полностью согласованной.*

Если $g(x_1, \ldots, x_n) \in R_k$ и x_i — переменная, то положим

$$\exists x_i g = \bigvee_{a \in E_k} g(x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\exists x_i g = g$ иначе. Далее, при $m \geqslant 2$ по индукции примем

$$\exists x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m} g = \exists x_{i_1} \exists x_{i_2}, \ldots, x_{i_m} g.$$

Предикат $\exists x_1, \ldots, x_m g$ называется *проекцией* предиката g на переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ (или по переменным $x_1, \ldots, x_m$). Проекцию предиката $g(x_1, \ldots, x_n)$ на произвольные переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$, где $t \geqslant 1$, определяем аналогично. Проекция предиката $g(x_1, \ldots, x_n)$ на переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$ обозначается через $\pi_{\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\}}(g)$. Положим $\pi_{\{\varnothing\}}(g) = g$.

Теорема 2 [11]**.** *Пусть $k \geqslant 2$. Для любых предиката $g(x_1, \ldots, x_n) \in R_k$ и переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_t \leqslant n$, $t \geqslant 0$, конъюнкция всех простых имплицент предиката g, содержащих только переменные из множества $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\}$, является сокращённой ОКНФ предиката $\pi_{\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\}}(g)$.*

3. Предикаты, инвариантные относительно функции почти единогласия

Функция $f(y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}) \in P_k$, где $m \geqslant 2$, называется функцией *почти единогласия*, если

$$f(y, x, \ldots, x) = f(x, y, x, \ldots, x) = \ldots = f(x, \ldots, x, y) = x.$$

В [8] получены свойства предикатов, инвариантных относительно некоторой функции почти единогласия. В теореме 3 мы предлагаем критерий инвариантности предиката относительно некоторой $(m+1)$-местной функции почти единогласия в терминах ОКНФ.

Теорема 3. *Пусть $k \geqslant 2$. Предикат $g \in R_k^{(r)}$ инвариантен относительно некоторой $(m+1)$-местной функции почти единогласия из P_k тогда и только тогда, когда любой предикат $h(x_1, \ldots, x_n)$,*

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{l} g(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}), \tag{1}$$

где $1 \leqslant j_1, \ldots, j_r \leqslant n$, $j = 1, \ldots, l$, можно представить полностью согласованной ОКНФ, в которой каждая ОЭД содержит не более m переменных.

Доказательство. Необходимость. Если предикат $g \in R_k$ инвариантен относительно функции почти единогласия $f \in P_k^{(m+1)}$, то и любой предикат $h \in R_k$ вида (1) также инвариантен относительно этой же функции f (см., например, [15]). Докажем, что конъюнкция K_h всех простых имплицент предиката h, содержащих не более m переменных, является полностью согласованной ОКНФ, представляющей предикат h. Если $m \geqslant n$, то K_h является сокращённой ОКНФ предиката h и по теореме 1 она полностью согласована.

Пусть $n \geqslant m+1$. Сначала докажем, что ОКНФ K_h представляет предикат h. В [8] показано, что любой предикат h, инвариантный относительно $(m+1)$-местной функции почти единогласия, можно представить

конъюнкцией всех его проекций не более чем на m переменных. Другими словами, верно представление

$$h(x_1,\dots,x_n)=\prod_{j=1}^{m}\prod_{1\leqslant i_1<\ldots<i_j\leqslant n}\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_j}\}}(h). \tag{2}$$

По теореме 2 конъюнкция всех простых имплицент предиката h, содержащих только переменные $x_{i_1},\dots,x_{i_j}$, является ОКНФ, представляющей предикат $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_j}\}}(h)$. Следовательно, в силу (2) ОКНФ K_h задаёт предикат h.

Теперь покажем, что ОКНФ K_h является полностью согласованной. Пусть набор $\alpha\in E_k^t$, $t\geqslant 0$, переменных $x_{i_1},\dots,x_{i_t}$ не обнуляет ни одну ОЭД в ОКНФ K_h.

Пусть сначала $0\leqslant t\leqslant m$. По построению ОКНФ K_h в неё входят все простые имплиценты предиката h, содержащие только переменные $x_{i_1},\dots,x_{i_t}$. По теореме 2 конъюнкция всех таких простых имплицент предиката h является сокращённой ОКНФ предиката $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}}(h)$. Значит, набор $\alpha\in E_k^t$ не обнуляет ни одну ОЭД в сокращённой ОКНФ предиката $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}}(h)$. Другими словами, $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}}(h)(\alpha)=1$. Это означает, что найдётся такой набор $\gamma\in E_k^n$, что $\gamma(i_j)=\alpha(j)$ при всех $j=1,\dots,t$, для которого $h(\gamma)=1$. Значит, набор γ не обнуляет ни одну ОЭД из ОКНФ K. Но тогда для любой переменной $x_{i_{t+1}}$, не совпадающей ни с одной из переменных $x_{i_1},\dots,x_{i_t}$, можно подобрать $b=\gamma(i_{t+1})\in E_k$ так, что набор $\beta=(\alpha(1),\dots,\alpha(t),b)\in E_k^{t+1}$ переменных $x_{i_1},\dots,x_{i_t},x_{i_{t+1}}$ не обнуляет ни одну ОЭД в ОКНФ K_h.

Пусть теперь $t\geqslant m+1$. Предикат, являющийся проекцией предиката h на любые переменные, также инвариантен относительно функции f (см., например, [15]). Поэтому предикат $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}}(h)$ инвариантен относительно функции почти единогласия f. По теореме 2 конъюнкция всех простых имплицент предиката h, содержащих только переменные $x_{i_1},\dots,x_{i_t}$, является сокращённой ОКНФ предиката $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}}(h)$. Предикат $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}}(h)$ инвариантен относительно $(m+1)$-местной функции почти единогласия f, значит, его также можно представить конъюнкцией всех его проекций на не более чем m переменных [8]. Поэтому, применяя теорему 2, получаем, что конъюнкция всех простых имплицент предиката h, содержащих не более m переменных из переменных $x_{i_1},\dots,x_{i_t}$, задаёт предикат $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}}(h)$. Значит, набор $\alpha\in E_k^t$ не обнуляет ни одну ОЭД в некоторой ОКНФ предиката $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}}(h)$, т. е. $\pi_{\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}}(h)(\alpha)=1$. Дальнейшее доказательство аналогично случаю $1\leqslant t\leqslant m$.

Достаточность. Пусть любой предикат из R_k вида (1) представим полностью согласованной ОКНФ, в которой каждая ОЭД содержит не более m переменных. Построим по предикату $g \in R_k$ следующий предикат $h \in R_k$, зависящий от переменных x_j, $j \in E_k^n$, $n = k^{m+1}$ (считаем, что переменные x_j перечисляются в лексикографическом упорядочении наборов $j \in E_k^n$):

$$h = \prod_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\alpha_{m+1} \in N_1(g)} g\big(x_{(\alpha_1(1),\ldots,\alpha_m(1),\alpha_{m+1}(1))}, \ldots, x_{(\alpha_1(r),\ldots,\alpha_m(r),\alpha_{m+1}(r))}\big),$$

где индекс $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$ пробегает все возможные размещения с повторениями по $m+1$ наборов из множества $N_1(g)$. В [1] показано, что каков бы ни был предикат $g \in R_k$, для любого набора $\gamma \in E_k^n$ из $\gamma \in N_1(h)$ следует, что γ является вектором значений некоторой функции $f \in P_k^{(m+1)}$, сохраняющей предикат g, и, наоборот, вектор значений произвольной функции $f \in P_k^{(m+1)}$, сохраняющей предикат g, принадлежит множеству $N_1(h)$. В частности, получаем, что вектор значений функции

$$f_i(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}) = x_i$$

для каждого $i = 1, \ldots, m, m+1$ принадлежит множеству $N_1(h)$.

Из условия теоремы 3 вытекает, что предикат h можно представить полностью согласованной ОКНФ K_h, в которой каждая ОЭД содержит не более m переменных.

Пусть $E \subseteq E_k^{m+1}$ и множество E содержит все такие наборы, в которых не менее m разрядов совпадают. Рассмотрим набор $\alpha \in E_k^{|E|}$ переменных x_j, $j \in E$, в котором $\alpha(j) = a_j$, где a_j — значение, находящееся в m совпадающих разрядах набора j.

Сначала покажем, что набор α не обнуляет ни одну ОЭД в ОКНФ K_h. Действительно, в K_h входят только ОЭД, содержащие не более m переменных. Предположим, что набор α обнуляет ОЭД D, содержащую переменные $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$, $1 \leqslant t \leqslant m$, из ОКНФ K_h. Это означает, что $j_1, \ldots, j_t \in E$. Из этого вытекает, что найдётся такое i, $1 \leqslant i \leqslant m+1$, что $j_1(i) = \alpha(j_1)$, …, $j_t(i) = \alpha(j_t)$ (так как в наборах $j_1, \ldots, j_t \in E_k^{m+1}$ не менее m разрядов совпадают и $t \leqslant m$). Значит, вектор значений функции $f_i = x_i$ обнуляет ОЭД D, чего быть не может.

Итак, набор α не обнуляет ни одну ОЭД в ОКНФ K_h. В силу полной согласованности ОКНФ K_h набор α можно последовательно расширить до набора $\beta \in E_k^n$ переменных x_j, $j \in E_k^{m+1}$, не обнуляющего ни одну ОЭД ОКНФ K_h. Другими словами, $h(\beta) = 1$. Однако β является вектором значений некоторой функции $f \in P_k^{(m+1)}$, сохраняющей предикат g. По построению функция f является $(m+1)$-местной функцией почти единогласия. Теорема 3 доказана.

Из доказательства теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть $k \geqslant 2$, $f \in P_k^{(m+1)}$ — функция почти единогласия, $m \geqslant 2$, и предикат $g \in R_k$ инвариантен относительно функции f. Конъюнкция всех простых имплицент предиката g, содержащих не более m переменных, является полностью согласованной ОКНФ, представляющей предикат g.*

Предикат $g \in R_k$ назовём *m-юнктивным*, если он инвариантен относительно некоторой $(m+1)$-местной функции почти единогласия. Полностью согласованную ОКНФ m-юнктивного предиката $g \in R_k$, в которой любая ОЭД содержит не более m переменных, назовём *приведённым* представлением этого предиката g. По следствию 1 конъюнкция всех простых имплицент m-юнктивного предиката g, содержащих не более m переменных, является приведённым представлением этого предиката g. Конъюнкцию всех простых имплицент m-юнктивного предиката g, содержащих не более m переменных, назовём *полным приведённым* представлением предиката g.

4. Нахождение приведённых представлений m-юнктивных предикатов

Покажем, каким образом при некоторых условиях можно быстро находить приведённые представления m-юнктивных предикатов.

Далее будем рассматривать алгоритмы, на вход которых подаются ОКНФ, содержащие не более m переменных в каждом конъюнкте (где $m \geqslant 2$ — заранее известное целое число), и оценивать сложность таких алгоритмов. Под сложностью $L_A(n)$ такого алгоритма A будем понимать число *операций*, которое алгоритм выполнит в худшем случае до получения ответа для входных ОКНФ, содержащих n переменных. Под операцией понимаем действие с ОЭД ранга, не превосходящего m (например, сравнение двух заданных ОЭД, нахождения значения данной ОЭД на заданном наборе и т. д.).

Лемма 1. *Пусть $k \geqslant 2$ и $f \in P_k^{(m+1)}$ — функция почти единогласия, $m \geqslant 2$. Существует детерминированный алгоритм, который по любому приведённому представлению $K_1(x_1, \ldots, x_n)$ предиката $g \in \mathrm{Inv}(f)$ и любой ОКНФ $K_2(y_1, \ldots, y_m)$ предиката $h \in \mathrm{Inv}(f)$ находит полное приведённое представление $K(z_1, \ldots, z_m)$, где $\{z_1, \ldots, z_m\} = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_1, \ldots, y_m\}$, предиката $g \cdot h$ со сложностью $O(n^{2m})$.*

Доказательство. Для нахождения полного приведённого представления предиката $g \cdot h$ требуется получить все его простые имплиценты, содержащие не более m переменных.

Рассмотрим ОЭД

$$D(z_{i_1}, \dots, z_{i_t}) = \bigvee_{j=1}^{t} (s_{a_j}(z_{i_j}) \vee \bar{s}_{b_j}(z_{i_j})), \quad 0 \leqslant t \leqslant m.$$

Проверим, является ли она имплицентой предиката $g \cdot h$. Для этого переберём все возможные значения $a_1, \dots, a_t, b_1, \dots, b_m \in E_k$ такие, что $D(a_1, \dots, a_t) = 0$, $K_2(b_1, \dots, b_m) \neq 0$, и подставим их вместо переменных $z_{i_1}, \dots, z_{i_t}, y_1, \dots, y_m$ в ОКНФ K_1 (при этом $a_j = b_l$, если переменные z_{i_j} и y_l совпадают). ОКНФ K_1 является полностью согласованной, поэтому если эти значения не обнуляют ни одну ОЭД ОКНФ K_1, то ОЭД D не является имплицентой предиката $g \cdot h$.

Найдя все имплиценты ранга, не превосходящего m, предиката $g \cdot h$, отберём среди них все простые имплиценты. Конъюнкция всех этих простых имплицент является полным приведённым представлением предиката $g \cdot h$.

Подсчитаем сложность описанного алгоритма. Различных ОЭД D ранга, не превосходящего m, найдётся $O((n+m)^m)$. Подстановка заданных значений и обнаружение ОЭД, обращающейся в 0, требует просмотра ОКНФ K_1, т. е. $O(n^m)$ операций. Тем самым сложность алгоритма равна $O(n^{2m})$. Лемма 1 доказана.

Теорема 4. *Пусть $k \geqslant 2$ и $f \in P_k^{(m+1)}$ — функция почти единогласия, $m \geqslant 2$. Существует детерминированный алгоритм, который по полным приведённым представлениям K_j предикатов $g_j \in \mathrm{Inv}(f)$, $j = 1, \dots, l$, находит полное приведённое представление K предиката $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_l \in R_k$ со сложностью $O(n^{3m})$.*

Доказательство. Пусть в ОКНФ $K_1, \dots, K_l$ встречаются только переменные $x_1, \dots, x_n$. Опишем требуемый алгоритм. Положим $K_0 = K_1$ и далее будем действовать следующим образом. Выберем m переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$. Для каждого предиката g_j, $j = 2, \dots, l$, по теореме 2 найдём сокращённую ОКНФ предиката $\pi_{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}}(g_j)$ (выбирая в ОКНФ K_j все ОЭД только с переменными $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$). Для каждого $j = 2, \dots, l$ предикат $\pi_{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}}(g_j)$ инвариантен относительно функции f (как проекция предиката, инвариантного относительно функции f). Положим

$$g_{i_1, \dots, i_m}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = \prod_{j=2}^{l} \pi_{\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}}(g_j).$$

Предикат $g_{i_1, \dots, i_m}$ также инвариантен относительно функции f (как конъюнкция предикатов, инвариантных относительно функции f). Построим сокращённую ОКНФ $K_{i_1, \dots, i_m}$ предиката $g_{i_1, \dots, i_m}$ (например, отыскав

все простые имплиценты этого предиката). Применив лемму 1 к паре ОКНФ K_0 и ОКНФ $K_{i_1,\ldots,i_m}$, получим полное приведённое представление соответствующего предиката, которое обозначим также через K_0.

Затем рассмотрим другие m переменных и повторим рассуждения. Так будем действовать до тех пор, пока не рассмотрим все возможные выборки по m переменных из переменных $x_1, \ldots, x_n$. Полученная в итоге ОКНФ K_0 представляет предикат g (так как она равносильна конъюнкции всех ОЭД, входящих хотя бы в одну из ОКНФ $K_1, \ldots, K_l$) и является полным приведённым представлением K предиката g (по построению).

Оценим сложность описанного алгоритма. Из n переменных m переменных можно выбрать $O(n^m)$ способами. Рассмотрение каждых m переменных по лемме 1 требует $O(n^{2m})$ операций. Значит, сложность алгоритма равна $O(n^{3m})$. Теорема 4 доказана.

5. Проверка выполнимости конъюнкций предикатов

Пусть $S \subseteq R_k$ и S — конечное множество. Рассмотрим задачу обобщённой S-выполнимости (задача S-ВЫП), она называется также задачей удовлетворения ограничениям CSP(S) (от англ. constraint satisfaction problem) (см., например, [1]).

Задача S-ВЫП. *$S \subseteq R_k$, $k \geqslant 2$, и S конечно.*

Вход: *предикат* $g(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{j=1}^{l} g_j(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_j}}) \in R_k$, *где* $g_j \in S$, $1 \leqslant j_1, \ldots, j_{n_j} \leqslant n$, $j = 1, \ldots, l$.

Вопрос: *является ли предикат g выполнимым, т. е. найдётся ли такой набор $\alpha \in E_k^n$, что $g(\alpha) = 1$?*

Известно, что если в множество S входят только предикаты, инвариантные относительно некоторой функции почти единогласия $f \in P_k$, то задача S-ВЫП полиномиальна [8]. Полиномиальные алгоритмы для такой задачи S-ВЫП опираются на свойство согласованности систем предикатов (см. [13,14]). Мы предлагаем в случае такого множества S представлять предикаты из множества S в виде полных приведённых представлений. Другими словами, изначально для каждого предиката $g_i \in S$ находим его полное приведённое представление K_i, $i = 1, \ldots, |S|$. Пусть задан вход

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{l} g_j(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_j}})$$

такой задачи S-ВЫП. Тогда можно, пользуясь алгоритмом из теоремы 4, быстро получить полное приведённое представление K предиката g, записанного в виде $K_1 \cdot \ldots \cdot K_l$. Затем в зависимости от вида ОКНФ K

можно ответить на вопрос о выполнимости предиката g, а именно, предикат g невыполним, если ОКНФ K состоит только из ОЭД, являющейся константой 0, и предикат g выполним во всех других случаях. Действительно, во втором случае в ОКНФ K содержится хотя бы одна простая имплицента предиката g, не являющаяся константой 0, поэтому g выполним. Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Пусть $k \geqslant 2$ и $f \in P_k^{(m+1)}$ — функция почти единогласия, $m \geqslant 2$. Существует детерминированный алгоритм, который по полным приведённым представлениям K_j предикатов $g_j \in \mathrm{Inv}(f)$, $j = 1, \ldots, l$, проверяет выполнимость предиката $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_l \in R_k$ со сложностью $O(n^{3m})$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Jeavons P., Coher D., Gyssens M.** Closure properties of constraints // J. ACM. 1997. Vol. 44. P. 527–548.
2. **Bulatov A., Jeavons P., Krokhin A.** Classifying the complexity of constraints using finite algebras // SIAM J. Comput. 2005. Vol. 34, No. 3. P. 720–742.
3. **Zhuk D.** An algorithm for constraint satisfaction problem // Proc. IEEE 47th Int. Symp. Multiple-Valued Logic. 2017. P. 1–6.
4. **Zhuk D.** A proof of CSP dichotomy conjecture // Proc. IEEE 58th Annu. Symp. Foundations of Computer Science (Berkeley, CA). 2017. P. 331–342
5. **Bulatov A. A.** A dichotomy theorem for nonuniform CSPs // Proc. IEEE 58th Annu. Symp. Foundations of Computer Science (Berkeley, CA). 2017. P. 319–330
6. **Schaefer T.** Complexity of satisfiability problems // Proc. 10th ACM Symp. Theory of Computing. 1978. P. 216–226.
7. **Bulatov A. A.** A dichotomy theorem for constraint satisfaction problems on a 3-element set // J. ACM. 2006. Vol. 53, No. 1. P. 66–120.
8. **Jeavons P., Cohen D., Cooper M.** Constraints, consistency and closure // Artif. Intell. 1998. Vol. 101, No. 1–2. P. 251–265.
9. **Jeavons P. J., Cooper M. C.** Tractable constraints on ordered domains // Artif. Intell. 1995. Vol. 79. P. 327–339.
10. **Булатов А. А.** Полиномиальность мальцевских задач CSP // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 6. С. 655–686.
11. **Селезнева С. Н.** О биюнктивных предикатах над конечным множеством // Дискрет. математика. 2017. Т. 29, вып. 4. С. 130–142.
12. **Селезнева С. Н.** О слабо положительных предикатах над конечным множеством // Дискрет. математика. 2018. Т. 30, вып. 3. С. 127–140.
13. **Dechter R.** From local to global consistency // Artif. Intell. 1992. Vol. 55. P. 87–107.

14. Cooper M. C. An optimal k-consistency algorithm // Artif. Intell. 1989. Vol. 41. P. 89–95.

15. Lau D. Function algebras on finite sets. Springer, 2006.

Селезнева Светлана Николаевна

Статья поступила
5 февраля 2019 г.

После доработки —
21 марта 2019 г.

Принята к публикации
25 марта 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2019. Vol. 26, No. 3. P. 46–59

UDC 519.7 DOI 10.33048/daio.2019.26.647

ON m-JUNCTIVE PREDICATES ON A FINITE SET*)

S. N. Selezneva

Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia

E-mail: `selezn@cs.msu.ru`

Abstract. We consider predicates on finite sets. The predicates invariant under some $(m + 1)$-ary near-unanimity function are called *m-junctive*. We propose to represent the predicates on a finite set in generalized conjunctive normal forms (GCNFs). The properties for GCNFs of m-junctive predicates are obtained. We prove that each m-junctive predicate can be represented by a strongly consistent GCNF in which every conjunct contains at most m variables. This representation of an m-junctive predicate is called *reduced*. Some fast algorithm is proposed for finding a reduced representation for an m-junctive predicate. It is shown how the obtained properties of GCNFs of m-junctive predicates can be applied for constructing a fast algorithm for the generalized S-satisfiability problem in the case that S contains only the predicates invariant under a common near unanimity function. Bibliogr. 15.

Keywords: predicate on a finite set, function on a finite set, near-unanimity function, bijunctive predicate, m-junctive predicate, conjunctive normal form, generalized satisfiability problem.

REFERENCES

1. **P. Jeavons, D. Coher,** and **M. Gyssens,** Closure properties of constraints, *J. ACM* **44**, 527–548 (1997).
2. **A. Bulatov, P. Jeavons,** and **A. Krokhin,** Classifying the complexity of constraints using finite algebras, *SIAM J. Comput.* **34**, 720–742 (2005).
3. **D. Zhuk,** An algorithm for constraint satisfaction problem, in *Proc. IEEE 47th Int. Symp. Multiple-Valued Logic, 2017*, pp. 1–6.
4. **D. Zhuk,** A proof of CSP dichotomy conjecture, in *Proc. IEEE 58th Annual Symp. Foundations Computer Science, Berkeley, CA, 2017*, pp. 331–342.

*)This work is supported by Russian Foundation for Basic Research (Project 17–01–00782-a).

5. **A. A. Bulatov,** A dichotomy theorem for nonuniform CSPs, in *Proc. IEEE 58th Annual Symp. Foundations Computer Science, Berkeley, CA, 2017*, pp. 319–330.
6. **T. Schaefer,** Complexity of satisfiability problems, in *Proc. 10th ACM Symp. Theory Computing, 1978*, pp. 216–226.
7. **A. A. Bulatov,** A dichotomy theorem for constraint satisfaction problems on a 3-Element Set, *J. ACM* **53**, 66–120 (2006).
8. **P. Jeavons, D. Cohen,** and **M. Cooper,** Constraints, consistency, and closure, *Artif. Intell.* **101**, 251–265 (1998).
9. **P. J. Jeavons** and **M. C. Cooper,** Tractable constraints on ordered domains, *Artif. Intell.* **79**, 327–339 (1995).
10. **A. A. Bulatov,** The property of being polynomial for Mal′tsev constraint satisfaction problems, *Algebra Logika* **45**, 655–686 (2006) [Russian] [*Algebra Logic* **45**, 371–388 (2006)].
11. **S. N. Selezneva,** On bijunctive predicates over a finite set, *Diskretn. Mat.* **29** (4) 130–142 (2017) [Russian] [*Discret. Math. Appl.* **29**, 49–58 (2019)].
12. **S. N. Selezneva,** On weak positive predicates over a finite set, *Diskretn. Mat.* **30** (3), 127–140 (2018) [Russian].
13. **R. Dechter,** From local to global consistency, *Artif. Intell.* **55**, 87–107 (1992).
14. **M. C. Cooper,** An optimal k-consistency algorithm, *Artif. Intell.* **41**, 89–95 (1989).
15. **D. Lau,** *Function Algebras on Finite Sets* (Springer, Berlin, 2006).

Svetlana N. Selezneva

Received February 5, 2019
Revised March 21, 2019
Accepted March 25, 2019