ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2019. Т. 26, № 4. С. 34–55

УДК 519.83 DOI 10.33048/daio.2019.26.632

# О НЕДОМИНИРУЕМОСТИ РАВНОВЕСИЙ В СМЕШАННОЙ ЭКОНОМИКЕ ТИПА ЭРРОУ — ДЕБРЁ [*)]

*В. А. Васильев* [1,2]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

[2] Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: vasilev@math.nsc.ru

**Аннотация.** Рассматривается модель экономики, в которой для каждого товара имеются два рынка: управляемый государством и конкурентный. При этом оба рынка сосуществуют в едином экономическом пространстве, допускающем свободное перемещение товаров и платёжных средств. В частности, предполагается, что избыток продуктов, приобретённых по фиксированным государственным ценам, может реализовываться по свободным ценам конкурентного рынка. Важной чертой модели является учёт производственной активности как на государственном, так и на конкурентном рынке. В то время как большая часть литературы по смешанным экономикам посвящена вопросам существования и Парето-оптимальности равновесий, в настоящей заметке основное внимание уделяется анализу их коалиционной стабильности. Продолжается исследование нечётких ядер смешанных экономических моделей типа Эрроу — Дебрё, начатое ранее для случая высоких цен свободного рынка. Установлены новые условия совпадения множеств недоминируемых и равновесных распределений, охватывающие случаи низких равновесных цен на некоторые из продуктов. Библиогр. 15.

**Ключевые слова:** смешанная экономика с производством, рационирование, государственный заказ, равновесие, недоминируемое распределение, нечёткое ядро.

[*)] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–10–00910) и Программы фундаментальных исследований СО РАН № I.5.1 (проект № 0314–2019–0018).

**Введение**

Главной особенностью рассматриваемой смешанной экономической системы является наличие двух механизмов регулирования, действующих совместно: централизованного планирования и свободных рыночных цен. В частности, в отличие от классических экономических моделей, имеет место симбиоз двух типов рынка. На первом из них, называемом далее государственным, цены жёсткие и распределение благ осуществляется с помощью схем рационирования и госзаказа. На втором, называемом свободным, цены гибкие и формируются стандартным механизмом выравнивания спроса и предложения. Предполагается, что избыток продуктов, приобретённых на первом рынке, может перепродаваться каждым из участников по свободным рыночным ценам. Важной чертой рассматриваемой модели, как и в [1], является учёт производственного фактора [1)].

Отметим, что в отличие от классических моделей равновесного анализа в рассматриваемой смешанной системе возникает проблема корректного определения недоминируемых распределений. Источником трудностей является наличие фиксированных цен для рационируемых благ и множественность типов коалиционной стабильности равновесных распределений, отвечающих различным типам гибких цен на свободном рынке. Универсальный способ преодоления этих трудностей основывается на использовании кусочной линейности функций дохода участников; он приводит к необходимости рассмотрения нескольких типов ядер, характеризующих различные виды коалиционной стабильности. В результате проверка известной гипотезы Эджворта об асимптотической эквивалентности ядер и равновесий [7, 8] редуцируется к анализу асимптотического поведения каждого из указанных ядер в отдельности (детальное рассмотрение условий асимптотической эквивалентности для смешанных моделей чистого обмена см. в [9]).

Ранние исследования недоминируемости и нечётких ядер в смешанных экономических системах (как с конечным, так и с бесконечным числом участников) относятся к моделям чистого обмена [9–11]. Что касается кооперативной характеризации равновесных распределений в смешанных моделях с производством, то единственная предшествующая работа [1] посвящена анализу недоминируемости равновесных распределений, отвечающих «высоким» равновесным ценам. В отличие от [1],

[1)] Больше деталей, касающихся содержательной интерпретации рассматриваемой модели смешанной экономики, можно найти в описании первой модели такого типа, предложенной В. Л. Макаровым [2,3]. Анализ некоторых качественных и алгоритмических вопросов существования равновесий в смешанной экономике см., например, в [4, 5] и [6] соответственно.

в настоящей статье изучается недоминируемость равновесных распределений, отвечающих равновесным ценам с невысокой стоимостью по крайней мере одного из продуктов. Доказывается принадлежность рассматриваемых распределений соответствующим нечётким ядрам. Более того, указываются условия, гарантирующие справедливость гипотезы Эджворта для изучаемых типов равновесных распределений в терминах нечёткого доминирования. Именно, для экономики типа Эрроу — Дебрё с рационированием и государственным заказом как в потребительском, так и в производственном секторе устанавливаются достаточно простые признаки совпадения множеств однотипных[2)] равновесных и недоминируемых распределений.

Статья организована следующим образом. Разд. 1 содержит детальное описание изучаемой модели смешанной экономики типа Эрроу — Дебрё. Разд. 2 посвящён изложению основных определений, относящихся к понятию равновесия в этой модели; даётся краткая интерпретация вводимых понятий, следующая изложению работы [5]. В разд. 3 вводится определение основного объекта работы — нечёткого доминирования, зависящего от структуры равновесных цен и порождаемого этим определением понятия $K$-ядра. Там же устанавливаются основные результаты работы, касающиеся условий совпадения нечётких ядер и множества равновесных распределений изучаемых типов.

## 1. Смешанная экономика типа Эрроу — Дебрё

Напомним [1, 5] основные понятия, относящиеся к смешанной экономической модели типа Эрроу — Дебрё. Как уже отмечалось, эта модель описывает симбиоз двух систем управления: централизованной и рыночной (децентрализованной). В первой системе действуют фиксированные государственные цены и распределение товаров и услуг осуществляется в рамках заданных схем рационирования и государственных заказов. Во второй системе цены свободны и работает стандартный механизм уравнивания спроса и предложения. Разрешена перепродажа избыточных объёмов рационируемых благ по свободным ценам. Согласно [5] формальное описание модели смешанной экономики типа Эрроу — Дебрё имеет следующий вид:

$$\mathcal{E} = \left\langle L, (X_i', X_i'', u_i, \beta^i, \theta^i, \omega^i)_{i\in N_1}, (Y_j, \vartheta^j)_{j\in N_2}, (s_{ij}', s_{ij}'')_{(i,j)\in N_1\times N_2}, q, P \right\rangle,$$

где $N_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ — множество потребителей, $N_2 = \{n_1+1, \ldots, n_2\}$ — множество производителей (фирм), $L = \{1, \ldots, l\}$ — множество продуктов, $X_i' \subseteq \mathbb{R}^L$ — потребительское множество участника $i \in N_1$ на первом

[2)] Отвечающих одному и тому же набору низких равновесных цен.

(государственном) рынке, $X''_i \subseteq \mathbb{R}^L$ — потребительское множество участника $i \in N_1$ на втором (свободном) рынке, $u_i$ — функция полезности $i \in N_1$ на $X'_i \times X''_i$, $\omega^i \in \mathbb{R}^L_+$ — начальные запасы участника $i \in N_1$, $\omega^o := \sum\limits_{i \in N_1} \omega^i$ — агрегированный начальный запас потребителей, $q \in \mathbb{R}^L_+$ — фиксированные цены первого рынка, $\beta^i \in \mathbb{R}^L_+$ — максимальный объём потребления рационируемых благ, доступный участнику $i \in N_1$ по фиксированным ценам $q$ на первом рынке, $\beta^o := \sum\limits_{i \in N_1} \beta^i$ — агрегированный объём рационируемых благ, доступных потребителям, $\theta^i \in \mathbb{R}^L$ — государственный заказ, определённый участнику $i \in N_1$, $\theta^o := \sum\limits_{i \in N_1} \theta^i$ — агрегированный государственный заказ в потребительском секторе, $Y_j \subseteq \mathbb{R}^L$ — производственное множество фирмы $j \in N_2$, $\vartheta^j \in \mathbb{R}^L$ — государственный заказ (план), определённый фирме $j \in N_2$, $\vartheta^o := \sum\limits_{j \in N_2} \vartheta^j$ — агрегированный госзаказ (план), определённый производственному сектору, $s'_{ij}$ — доля прибыли $q \cdot \vartheta^j$, полученной фирмой $j \in N_2$ за выполнение госзаказа $\vartheta^j$ и передаваемой ею потребителю $i \in N_1$, $s''_{ij}$ — доля прибыли $p \cdot (y^j - \vartheta^j)$, полученной фирмой $j \in N_2$ по ценам $p$ свободного рынка (при реализации производственной программы $y^j \in Y_j$ с учётом исполнения госзаказа $\vartheta^j$) и передаваемой ею потребителю $i \in N_1$, $P = \mathbb{R}^L_+$ — множество свободных цен второго рынка[3)].

Предполагается, что $s'_{ij}$ и $s''_{ij}$ удовлетворяют стандартным условиям: $s'_{ij}, s''_{ij} \geqslant 0$ для всех $i \in N_1$, $j \in N_2$ и $\sum\limits_{i \in N_1} s'_{ij} = \sum\limits_{i \in N_1} s''_{ij} = 1$ для каждой фирмы $j \in N_2$. В дальнейшем, не уменьшая общности, будем предполагать, что $\beta^o \neq 0$ и $q$ — строго положительный вектор. Далее, как и в [5], считаем, что схемы рационирования и госзаказы в потребительском и производственном секторах согласованы между собой: $\beta^o = \theta^o + \vartheta^o$, или, более подробно, предполагается, что выполняется предположение

$$(A) \qquad \sum_{N_1} \beta^i = \sum_{N_1} \theta^i + \sum_{N_2} \vartheta^j,$$

которое означает, что потребление максимального объёма $\sum\limits_{N_1} \beta^i$ рационируемых благ, доступных по фиксированным ценам $q$, гарантируется реализацией суммарного госзаказа для потребительского и производственного секторов экономики. В силу равенства $(A)$ все блага, полученные

---

3) Как обычно, выражение $x \cdot y$ обозначает скалярное произведение $x \cdot y = \sum\limits_{k=1}^{l} x_k y_k$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_l)$ и $y = (y_1, \ldots, y_l)$ из $\mathbb{R}^L$.

при исполнении госзаказа, могут быть целиком использованы для индивидуального потребления по фиксированным ценам на первом рынке и перепродажи по свободным ценам на втором рынке.

Как и в стандартной модели Эрроу — Дебрё, при текущих ценах свободного рынка потребители рассматриваемой модели максимизируют свои функции полезности на надлежащим образом определённых бюджетных множествах, а производители максимизируют прибыль (с учётом исполняемого госзаказа). Что касается государственных органов, их функция заключается в обеспечении выполнения госзаказов $\theta^i$, $i \in N_1$, и $\vartheta^j$, $j \in N_2$, и последующем контроле над использованием применяемых схем рационирования. Как уже отмечалось, в модели допускается перепродажа рационируемых благ по текущим ценам свободного рынка.

## 2. Равновесие в смешанной экономике $\mathcal{E}$

Приводимые далее определения аналогичны классическим понятиям допустимых состояний, бюджетных множеств и равновесных распределений. Они были предложены в [5] и отличаются лишь небольшими (но существенными) деталями от соответствующих определений стандартной модели Эрроу — Дебрё [12].

Пусть заданы цены $p \in \mathbb{R}^L_+$, действующие на свободном рынке. Согласно [5] для построения бюджетного множества $B_i(p)$ потребителя $i \in N_1$ введём сначала понятие его *основного дохода*, определяемого суммой $\nu_i(p) = \alpha_i(p) + \delta'_i(q) + \delta''_i(p)$, где

$$\alpha_i(p) := q \cdot \theta^i + p \cdot (\omega^i - \theta^i),$$

$$\delta'_i(q) := \sum_{j \in N_2} s'_{ij} q \cdot \vartheta^j, \quad \delta''_i(p) := \sum_{j \in N_2} s''_{ij} \pi_j(p).$$

Здесь прибыль $\pi_j(p)$ фирмы $j \in N_2$, получаемая при ценах $p$ на свободном рынке, определяется формулой $\pi_j(p) := \sup\{p \cdot (y^j - \vartheta^j) \mid y^j \in Y_j\}$ (учтён госзаказ $\vartheta^j$, выполняемый фирмой $j$ по фиксированным ценам $q$). Таким образом, основной доход $\nu_i(p)$ каждого участника $i \in N_1$ при ценах $p \in P$ включает сумму $\alpha_i(p)$, полученную в качестве оплаты госзаказа, передаваемого в централизованный фонд, и выручки от реализации на свободном рынке остающейся (после такой передачи) части его начального запаса. Кроме того, в состав этого дохода включается прибыль $\delta'_i$, получаемая от реализации госзаказа по ценам $q$, а также прибыль $\delta''_i(p)$, полученная в производственном секторе по ценам свободного рынка $p$.

Определим теперь *полный доход* $w_i(p, x'^i)$ участника $i \in N_1$ при ценах $p$ и потреблении рационируемых благ в объёме $x'^i$:

$$w_i(p, x'^i) := \nu_i(p) + (p - q)^+ \cdot (\beta^i - x'^i)$$

(здесь и далее применяются стандартные обозначения: для любого вектора $a \in \mathbb{R}^L$ через $a^+$ обозначаем вектор из $\mathbb{R}^L$ с компонентами $a_k^+ = a_k$ при $a_k > 0$ и $a_k^+ = 0$ при $a_k \leqslant 0$). Итак, полный доход потребителя $i \in N_1$ складывается из основного $\nu_i(p)$ и дополнительного $(p - q)^+ \cdot (\beta^i - x'^i)$, представляющего выручку от перепродажи тех рационируемых благ, для которых установившаяся конъюнктура свободного рынка оказалась благоприятной. Именно, предполагается, что при условии $q_j < p_j$ участник $i$ выкупает по государственным ценам максимальный доступный для него объём $\beta_j^i$ рационируемого продукта $j$ и в случае, когда его реальная потребность $x_j'^i$ строго меньше $\beta_j^i$, продаёт избыток $\beta_j^i - x_j'^i$ на свободном рынке, получая чистую прибыль от этой операции в сумме $\big(p_j - q_j\big)\big(\beta_j^i - x_j'^i\big)$. Конечно, при плохой конъюнктуре $(p_j < q_j)$ такая перепродажа теряет смысл; более того, в этом случае на первом рынке выкупается лишь часть гарантированного рациона $\beta_j^i$, равная величине $x_j'^i$, полностью идущей на потребление участника $i$.

В указанных обозначениях бюджетное множество $B_i(p)$ участника $i \in N_1$ определяется следующим образом.

**Определение 1.** Пусть $p$ — вектор цен свободного рынка. *Бюджетное множество* $B_i(p)$ потребителя $i \in N_1$ при ценах $p$ задаётся формулой

$$B_i(p) := \{x^i = (x'^i, x''^i) \in X_i(\beta) \mid q \cdot x'^i + p \cdot x''^i \leqslant w_i(p, x'^i)\},$$

где $X_i(\beta) := \{x^i = (x'^i, x''^i) \in X_i \mid x'^i \leqslant \beta^i\}$ и $X_i := X_i' \times X_i''$.

Как видно из определения 1, предполагается, что в текущих ценах $p \in P$ каждый участник $i \in N_1$ может приобретать наборы товаров $x'^i, x''^i$ в пределах потребительских множеств $X_i', X_i''$ по ценам $q$ и $p$ соответственно. Поскольку потребление экономического агента $i$ на государственном рынке ограничено сверху квотой $\beta^i$, вектор $x'^i$ помимо требования $x'^i \in X'^i$ должен удовлетворять условию $x'^i \leqslant \beta^i$. Кроме того, издержки на приобретение наборов $x'^i, x''^i$, составляющие величину $q \cdot x'^i + p \cdot x''^i$ (левая часть бюджетного неравенства), должны покрываться полным доходом $w_i(p, x'^i)$ (правая часть бюджетного неравенства). Отметим, что согласно определению полного дохода $w_i(p, x'^i)$ главная отличительная черта множеств $B_i(p)$ обусловлена необходимостью учёта взаимодействия рыночного и государственного регулирования: участникам предоставляется возможность исправлять перекосы централизованного планирования с помощью перепродажи на свободном рынке избыточных рационируемых продуктов (слагаемое $(p - q)^+ \cdot (\beta^i - x'^i)$ в правой части бюджетного неравенства). В модели учитывается, что такие перепродажи будут иметь место лишь при условии, что они дают экономическим агентам дополнительный доход.

Что касается оптимальной реакции участников на свободные цены, то, как это принято в неоклассической теории экономического равновесия (с учётом особенностей рассматриваемой модели), множество спроса $D_i(p) \subseteq X_i(\beta)$ экономического агента $i \in N_1$ при ценах $p \in P$ определяется как совокупность наилучших для него элементов бюджетного множества $B_i(p)$. Таким образом, *множество спроса* $D_i(p)$ представляет собой совокупность всех решений следующей экстремальной задачи:

$$u_i(x'^i, x''^i) \to \max$$

при условиях

$$q \cdot x'^i + p \cdot x''^i \leqslant q \cdot \theta^i + p \cdot (\omega^i - \theta^i) + \delta'_i(q) + \delta''_i(p) + (p - q)^+ \cdot (\beta^i - x'^i),$$
$$x'^i \in X'_i, \quad x'^i \leqslant \beta^i, \quad x''^i \in X''_i,$$

где, как и ранее, $\delta'_i(q) = \sum\limits_{j \in N_2} s'_{ij} q \cdot \vartheta^j$, $\delta''_i(p) = \sum\limits_{j \in N_2} s''_{ij} \pi_j(p)$. По аналогии с классической моделью Эрроу — Дебрё определяется и *множество предложения* $S_j(p)$ фирмы $j \in N_2$ при ценах $p \in P$. Это множество представляет собой совокупность всех производственных программ $y^j \in Y_j$, доставляющих наибольшую прибыль $\pi_j(p)$ участнику $j$.

Итак, соответствия индивидуального спроса $p \mapsto D_i(p)$, $p \in P$, и индивидуального предложения $p \mapsto S_j(p)$, $p \in P$, рассматриваемой модели $\mathcal{E}$ определяются формулами

$$D_i(p) := \big\{x^i \in B_i(p) \mid \mathcal{P}_i^\beta(x^i) \cap B_i(p) = \varnothing\big\},$$
$$S_j(p) := \{y^j \in Y_j \mid \pi_j(p) = p \cdot (y^j - \vartheta^j)\},$$

где $\mathcal{P}_i^\beta(x^i) := \{\tilde{x}^i \in X_i(\beta) \mid u_i(\tilde{x}^i) > u_i(x^i)\}$. Далее, соответствие избыточного спроса $p \mapsto E(p)$, $p \in P$, задаётся обычным образом:

$$E(p) := \sum_{i \in N_1} D_{oi}(p) - \sum_{j \in N_2} S_j(p) - \sum_{i \in N_1} \omega^i,$$

где $D_{oi}(p) := \{x^{oi} \mid (x'^i, x''^i) \in D_i(p)\}$. Здесь, как и всюду ниже, для каждого набора $(x'^i, x''^i)$ из $X'_i \times X''_i$ полагаем

$$x^{oi} = x'^i + x''^i.$$

Напомним понятие *допустимого распределения* модели $\mathcal{E}$ [1, 5]. Положим

$$X := \prod_{i \in N_1} X_i, \quad X(\beta) := \prod_{i \in N_1} X_i(\beta), \quad Y := \prod_{j \in N_2} Y_j,$$
$$Z := X \times Y, \quad Z(\beta) := X(\beta) \times Y.$$

**Определение 2.** *Множество $Z_\beta(\mathcal{E})$ допустимых распределений* модели $\mathcal{E}$ определяется формулой

$$Z_\beta(\mathcal{E}) := \Big\{ z = (x, y) \in Z(\beta) \mid \sum_{i \in N_1} x^{oi} = \sum_{j \in N_2} y^j + \sum_{i \in N_1} \omega^i \Big\}.$$

Используя приведённые обозначения, сформулируем одно из главных понятий работы — равновесное распределение смешанной экономической системы $\mathcal{E}$ (предложенное в статье [5] в полном соответствии со стандартами равновесного экономического анализа).

**Определение 3.** Распределение $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = ((\bar{x}^i)_{i \in N_1}, (\bar{y}^j)_{j \in N_2}) \in Z_\beta(\mathcal{E})$ является *равновесным распределением смешанной экономики* $\mathcal{E}$, если существует вектор цен $\bar{p} \in P$ такой, что $\bar{x}^i \in D_i(\bar{p})$ для всех $i \in N_1$, и $\bar{y}^j \in S_j(\bar{p})$ для всех $j \in N_2$. Как обычно, элемент $\bar{p}$ называется *вектором равновесных цен*, а пара $(\bar{p}, \bar{z})$ — *равновесным состоянием смешанной экономики* $\mathcal{E}$. Совокупность всех равновесных распределений экономики $\mathcal{E}$ будем обозначать через $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{E})$.

Принципиальная трудность кооперативной характеризации множества $\mathcal{W}$ равновесных распределений смешанной экономики $\mathcal{E}$ связана с нелинейностью функций полного дохода $w_i(p, x'^i)$ по ценам свободного рынка $p$. Для преодоления этой трудности используем тот факт, что указанная нелинейность достаточно проста. Именно, функции $w_i$ являются кусочно линейными по $p$. Представляя множество равновесных распределений $\mathcal{W}$ в виде объединения нескольких составляющих, отвечающих различным областям линейности этих функций, проводим анализ недоминируемости равновесных распределений для каждой из составляющих по отдельности с учётом типа соответствующих равновесных цен.

Приведём необходимые определения, формализующие рассмотрение коалиционной стабильности равновесных распределений с учётом различия в типах отвечающих им равновесных цен. Для каждого $K \subseteq L$ положим

$$P_K := \{ p \in \mathbb{R}^L_+ \mid p_k \geqslant q_k,\ k \in K,\ p_j \leqslant q_j,\ j \in J \},$$

где $J$ обозначает дополнение $K$, т. е. $J := L \setminus K$. Отмечавшиеся выше составляющие равновесных распределений определяются как подмножества $\mathcal{W}$, отвечающие различным типам равновесных цен, классифицируемых с помощью выпуклых полиэдров $P_K$:

$$\mathcal{W}_K = \mathcal{W}_K(\mathcal{E}) := \{ z \in \mathcal{W} \mid \exists\, p \in P_K : \\ (p, z) \text{ — равновесное состояние модели } \mathcal{E} \}.$$

Распределения из $\mathcal{W}_K$ будем называть *$K$-равновесными распределениями модели* $\mathcal{E}$.

## 3. Нечёткие $K$-ядра в смешанной экономике $\mathcal{E}$

Обратимся к анализу коалиционной стабильности (недоминируемости) распределений из $\mathcal{W}_K$. Далее проводится детальный анализ экстремальных свойств равновесных распределений экономики $\mathcal{E}$ в терминах отношений нечёткого $K$-доминирования. Доказывается недоминируемость $K$-равновесных распределений при всех $K \subseteq L$. Особое внимание уделяется отысканию условий, гарантирующих справедливость гипотезы Эджворта в форме нечёткого доминирования (совпадение $K$-равновесных распределений и отвечающих им нечётких $K$-ядер в смешанных экономиках типа Эрроу — Дебрё).

**3.1. Недоминируемость равновесных распределений модели $\mathcal{E}$.** Следуя [1], дадим определение нечёткого $K$-доминирования и отвечающего ему нечёткого $K$-ядра модели $\mathcal{E}$ — основных объектов исследования настоящей работы.

Приведём необходимые обозначения. Зафиксируем $K \subseteq L$. Для каждого вектора $a \in \mathbb{R}^L$ через $a_K$ будем обозначать вектор из $\mathbb{R}^L$ с компонентами

$$(a_K)_k := \begin{cases} a_k, & k \in K, \\ 0, & k \in J = L \setminus K. \end{cases}$$

В случае $b = (b^1, \dots, b^{n_1}) \in (\mathbb{R}^L)^{N_1}$ полагаем $b_K := \bigl(b^1_K, \dots, b^{n_1}_K\bigr)$. Кроме того, в дальнейшем используются следующие сокращения. Для каждого $i \in N_1$ полагаем

$$\vartheta'^i := \sum_{j \in N_2} s'_{ij} \vartheta^j, \quad \vartheta''^i := \sum_{j \in N_2} s''_{ij} \vartheta^j, \quad \widehat{\vartheta}^i := \vartheta'^i - \vartheta''^i,$$
$$\gamma'^i := \theta^i + \vartheta'^i - \beta^i, \quad \gamma''^i := \theta^i + \vartheta''^i - \beta^i.$$

Напомним [5] также определение модифицированных начальных запасов $\widehat{\omega}'^i$, $\widehat{\omega}''^i$:

$$\widehat{\omega}'^i := \omega^i - \gamma'^i, \quad \widehat{\omega}''^i := \omega^i - \gamma''^i, \quad i \in N_1,$$

и «приватизированных» производственных множеств $\widehat{Y}_i$, $\widetilde{Y}_i$:

$$\widehat{Y}_i := \widehat{\vartheta}^i + \widetilde{Y}_i, \quad \widetilde{Y}_i := \sum_{j \in N_2} s''_{ij} Y_j, \quad i \in N_1.$$

**Замечание 1.** Ясно, что при $\vartheta'^i = \vartheta''^i$, $i \in N_1$, выполняются равенства $\widehat{Y}_i = \widetilde{Y}_i$, $i \in N_1$. В частности, $\widehat{Y}_i = \widetilde{Y}_i$ при $s'_{ij} = s''_{ij}$ для всех $i \in N_1$, $j \in N_2$.

Как уже отмечалось, проверка гипотезы Эджворта для модели $\mathcal{E}$ состоит в характеризации множеств $\mathcal{W}_K$ в терминах нечёткого доминирования. Переходя к формальным определениям, напомним [13, 14], что *нечёткими коалициями* называются ненулевые элементы $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n_1})$ единичного гиперкуба $I_{n_1} = [0, 1]^{n_1}$. При этом каждая компонента $\tau_i$ вектора $\tau$ трактуется как мера участия соответствующего экономического агента в обыкновенной коалиции $N(\tau) = \operatorname{supp}\tau$, где

$$N(\tau) := \{i \in N_1 \mid \tau_i > 0\}$$

($N(\tau)$ обычно называют *носителем* нечёткой коалиции $\tau$). Пусть $\mathcal{T} := I_{n_1} \setminus \{0\}$. Для произвольных $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}) \in \mathcal{T}$ и $b = (b^1, \ldots, b^{n_1}) \in (\mathbb{R}^L)^{N_1}$ через $b(\tau)$ будем обозначать вектор

$$b(\tau) := \sum_{N_1} \tau_i b^i.$$

Положим $\widehat{Z}(\beta) := X(\beta) \times \widehat{Y}$, где $\widehat{Y} := \prod_{i \in N_1} \widehat{Y}_i$. Для любого $z = (x, y) \in \widehat{Z}(\beta)$ обозначим $x' := (x'^1, \ldots, x'^{n_1})$, $x'' := (x''^1, \ldots, x''^{n_1})$, $y := (y^1, \ldots, y^{n_1})$ и $x^0 := x' + x''$. Наконец, как и в случае рационирования $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^{n_1})$ и госзаказа $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^{n_1})$, будем полагать $\omega := (\omega^1, \ldots, \omega^{n_1})$, $\vartheta' := (\vartheta'^1, \ldots, \vartheta'^{n_1})$, $\vartheta'' := (\vartheta''^1, \ldots, \vartheta''^{n_1})$ и $\widehat{\omega}' := \omega - \theta - \vartheta' + \beta$.

**Определение 4.** *Нечёткая коалиция $\tau$ $K$-доминирует допустимое распределение* $\bar{z} \in Z_\beta(\mathcal{E})$, если существует распределение $z = (x, y) \in \widehat{Z}(\beta)$ такое, что

KF1: $u_i(x^i) > u_i(\bar{x}^i)$, $i \in N(\tau)$,

KF2: $x^0_K(\tau) \leqslant \widehat{\omega}'_K(\tau) + y_K(\tau)$,

KF3: $q_{K \cup I} \cdot x^0(\tau) + q_{J \setminus I} \cdot x'(\tau) \leqslant q_{K \cup I} \cdot (\omega + y)(\tau) + q_{J \setminus I} \cdot (\theta + \vartheta')(\tau)$ для всех $I \subseteq J$.

**Замечание 2.** Согласно [1] каждое из неравенств условия KF3 указывает на согласованность «требования» $(x^i, y^i)_{i \in N(\tau)}$ коалиции $\tau$ с её возможностями при соответствующей «экстремальной» реализации $q_{K \cup I}$, $I \subseteq J$, свободных рыночных цен из $P_K$. При этом принимается во внимание, что при нулевых свободных ценах на блага из $J \setminus I$ совокупный доход потребителя $i$, определяемый этими благами, равен лишь величине $q_{J \setminus I} \cdot (\theta^i + \vartheta'^i)$, гарантируемой госзаказом.

Следуя [1], сформулируем одно из ключевых понятий работы — определение *нечёткого $K$-ядра* модели $\mathcal{E}$.

**Определение 5.** *Нечётким $K$-ядром модели $\mathcal{E}$* называется множество $C_{K,F}$ всех распределений $\bar{z} \in Z_\beta(\mathcal{E})$, которые не являются $K$-доминируемыми никакой нечёткой коалицией $\tau$:

$$C_{K,F} = \{\bar{z} \in Z_\beta(\mathcal{E}) \mid \text{не существует коалиции } \tau \in \mathcal{T}, \text{ которая } K\text{-доминирует } \bar{z}\}.$$

Оказывается, что множества $C_{K,F}$ и $\mathcal{W}_K$ всегда связаны соотношением

$$\mathcal{W}_K \subseteq C_{K,F}, \quad K \subseteq L. \tag{1}$$

При $K = L$ вложение (1) установлено в [1]. Для проверки соотношения (1) в общем случае построим специальное представление бюджетных множеств $B_i(p)$ с учётом типа гибких цен $p$. Именно, как и ранее, через $\pi_i(p)$ будем обозначать прибыль, получаемую в «приватизированном» производственном множестве $\widetilde{Y_i}$:

$$\pi_i(p) := \sup\{p \cdot (y^i - \vartheta''^i) \mid y^i \in \widetilde{Y_i}\}, \quad i \in N_1.$$

Далее, непосредственно из определения модифицированных госзаказов $\vartheta'^i, \vartheta''^i$ и слагаемых $\delta'_i = \sum\limits_{j \in N_2} s'_{ij} q \cdot \vartheta^j$, $\delta''_i(p) = \sum\limits_{j \in N_2} s''_{ij} \pi_j(p)$ основного дохода $\nu_i(p)$ потребителя $i$ вытекает, что $\delta'_i = q \cdot \vartheta'^i$, и $\delta''_i(p) = \pi_i(p)$ для всех $i \in N_1$ и $p \in P$. Следовательно, бюджетное ограничение потребителя $i$ может быть переписано в виде

$$q \cdot x'^i + p \cdot x''^i \leqslant q \cdot \theta^i + p \cdot (\omega^i - \theta^i) + q \cdot \vartheta'^i + \pi_i(p) + (p - q)^+ \cdot (\beta^i - x'^i).$$

Отметим, что для каждых $K \subseteq L$ и $p \in P_K$ (в случае, когда существует $\tilde{y}^i \in \widetilde{Y_i}$, удовлетворяющий равенству $\pi_i(p) = p \cdot (\tilde{y}^i - \vartheta''^i)$) это бюджетное ограничение можно записать в виде

$$F_i^K(p, x^i, y^i) \leqslant 0,$$

где

$$F_i^K(p, x^i, y^i) := q \cdot \big(x'^i_J - \gamma'^i - \beta^i_J\big) + p \cdot \big(-x'^i_J + x^{0i} - y^i - \widehat{\omega}'^i + \beta^i_J\big),\ i \in N_1, \tag{2}$$

при $y^i = \widehat{\vartheta}^i + \tilde{y}^i$. Поэтому в случае, когда вектор $y^i = y^i(p) \in \widehat{Y_i}$ удовлетворяет требованию $\pi_i(p) = p \cdot (\tilde{y}^i - \vartheta''^i)$, где $\tilde{y}^i = y^i - \widehat{\vartheta}^i$, бюджетное множество $B_i(p)$ при $p \in P_K$ принимает вид

$$B_i(p) = \big\{x^i \in X_i(\beta) \mid F_i^K(p, x^i, y^i) \leqslant 0\big\}. \tag{3}$$

Применяя представления (2), (3) и используя элементарное описание вершин параллелепипедов вида $\{x \in \mathbb{R}^J \mid 0 \leqslant x \leqslant a\}$, получаем достаточно простое доказательство соотношения (1).

**Теорема 1.** *Для каждого $K \subseteq L$ справедливо вложение $\mathcal{W}_K \subseteq C_{K,F}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное равновесное распределение $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{W}_K$ и отвечающие ему равновесные цены $\bar{p} \in P_K$. Допустим, что существует нечёткая коалиция $\tau$, $K$-доминирующая $\bar{z}$ с помощью распределения $z = (x, y) \in \widehat{Z}(\beta)$. Положим $\tilde{y}^i = \sum\limits_{j \in N_2} s''_{ij} \bar{y}^j$ и $\bar{y}^i = \widehat{\vartheta}^i + \tilde{y}^i$, $i \in N_1$. Из определения равновесного распределения вытекают равенства $\pi_i(\bar p) = \bar p \cdot (\tilde y^i - \vartheta''^i)$, $i \in N_1$. Поскольку наборы $\bar x^i$ доставляют максимум функциям полезности $u_i$ на бюджетных множествах $B_i(\bar p)$ и согласно определению нечёткого $K$-доминирования $u_i(x^i) > u_i(\bar x^i)$, $i \in \operatorname{supp}\tau$, из представления (3) для бюджетных множеств $B_i(\bar p)$ получаем $F_i^K(\bar p, x^i, \bar y^i) > 0$, $i \in \operatorname{supp}\tau$. Следовательно, ввиду соотношений $\bar p \cdot (y^i - \vartheta''^i) \leqslant \bar p \cdot (\tilde y^i - \vartheta''^i) = \pi_i(\bar p)$, $i \in N_1$, выполняются неравенства

$$F_i^K(\bar p, x^i, y^i) > 0, \quad i \in \operatorname{supp}\tau. \tag{4}$$

Так как $\bar p$ принадлежит множеству $P_K$, получаем

$$(q, \bar p) = (q, q_K + \bar p_J) + (0, s_K),$$

где $s_K = \bar p_K - q_K$. По определению $P_K$ имеем $s_K \geqslant 0$ и $0 \leqslant \bar p_J \leqslant q_J$. Поскольку крайние точки выпуклого полиэдра $\{p \in \mathbb{R}^L \mid p_K = 0,\ 0 \leqslant p_J \leqslant q_J\}$ имеют форму $q_I$, $I \subseteq J$, найдутся коэффициенты $\lambda_I \geqslant 0$ такие, что $\sum\limits_{I \subseteq J} \lambda_I = 1$ и

$$\bar p_J = \sum_{I \subseteq J} \lambda_I q_I. \tag{5}$$

Используя (5), получаем

$$(q, \bar p) = \sum_{I \subseteq J} \lambda_I (q, q_{K \cup I}) + (0, s_K). \tag{6}$$

Суммируя неравенства (4), умноженные на соответствующие компоненты вектора $\tau$, и учитывая соотношения (2), (6), получаем неравенство

$$\sum_{I \subseteq J} \lambda_I \Big[ q \cdot \sum_{N_1} \tau_i \big( x'^i_J - \gamma'^i - \beta^i_J \big) + q_{K \cup I} \cdot \sum_{N_1} \tau_i \big( -x'^i_J + x^{0i} - y^i - \widehat{\omega}'^i + \beta^i_J \big) \Big] \\ + s_K \cdot \sum_{N_1} \tau_i (x^{0i} - y^i - \widehat{\omega}'^i) > 0.$$

Применяя равенства $q = q_{K \cup I} + q_{J \setminus I}$, $I \subseteq J$, и введённые ранее сокращения $b(\tau) = \sum\limits_{i \in N_1} \tau_i b^i$ (для $b = (b^1, \ldots, b^{n_1}) \in (\mathbb{R}^L)^{N_1}$ и $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}) \in \mathcal{T}$), перепишем последнее неравенство в более обозримом виде:

$$\sum_{I \subseteq J} \lambda_I [q_{K \cup I} \cdot (x^0(\tau) - y(\tau) - \widehat{\omega}'(\tau) - \gamma'(\tau)) + q_{J \setminus I} \cdot (x'_J(\tau) - \theta(\tau) - \vartheta'(\tau))] \\ + s_K \cdot (x^0(\tau) - y(\tau) - \widehat{\omega}'(\tau)) > 0.$$

Далее, принимая во внимание соотношения $\widehat{\omega}' = \omega - \gamma'$ и $K \cap J = \varnothing$, полуяаем

$$\sum_{I \subseteq J} \lambda_I [q_{K \cup I} \cdot (x^0(\tau) - y(\tau) - \omega(\tau)) + q_{J \setminus I} \cdot (x'(\tau) - \theta(\tau) - \vartheta'(\tau))] \\ + s_K \cdot \big(x^0_K(\tau) - y_K(\tau) - \widehat{\omega}'_K(\tau)\big) > 0, \quad (7)$$

но согласно определению нечёткого $K$-доминирования имеем

$$q_{K \cup I} \cdot (x^0(\tau) - y(\tau) - \omega(\tau)) + q_{J \setminus I} \cdot (x'(\tau) - \theta(\tau) - \vartheta'(\tau)) \leqslant 0, \quad I \subseteq J,$$
$$x^0_K(\tau) - \widehat{\omega}'_K(\tau) - y_K(\tau) \leqslant 0,$$

что противоречит соотношению (7), поскольку числа $\lambda_I$ и $s_K$ неотрицательны. Это противоречие и доказывает теорему 1.

**3.2. Условия совпадения множеств $C_{K,F}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{W}_K(\mathcal{E})$ при $K \neq L$.** В отличие от соотношений $\mathcal{W}_K(\mathcal{E}) \subseteq C_{K,F}(\mathcal{E})$, для доказательства обратных вложений $C_{K,F}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{W}_K(\mathcal{E})$ и их уточнений (означающих эквивалентность коалиционных и индивидуально-рациональных механизмов согласования интересов в экономике $\mathcal{E}$) требуются некоторые технические предположения, касающиеся параметров модели $\mathcal{E}$. Положим

$$X'(\mathcal{E}) := \operatorname*{Pr}_{X'} Z_\beta(\mathcal{E}), \quad X''(\mathcal{E}) := \operatorname*{Pr}_{X''} Z_\beta(\mathcal{E}), \quad X_\beta(\mathcal{E}) := \operatorname*{Pr}_{X} Z_\beta(\mathcal{E}),$$

где $X' := \prod\limits_{N_1} X'_i$, $X'' := \prod\limits_{N_1} X''_i$, $X := X' \times X''$, и сформулируем указанные предположения (ниже $a \gg 0$ означает, что $a_k > 0$ для всех компонент вектора $a$):

(A1) $X'_i = X''_i = \mathbb{R}^L_+$ для всех $i \in N_1$,

(A2) $Y_j$ — выпуклые множества, при этом $0 \in Y_j$ для всех $j \in N_2$,

(A3) $\forall (x \in X_\beta(\mathcal{E})) \ \Big[\sum\limits_{N_1} x^{0i} \gg 0\Big]$,

(A4) $u_i$ полунепрерывные снизу и вогнутые для всех $i \in N_1$,

(A5) $u_i$ строго возрастающие по $x''^i$ для всех $i \in N_1$.

Применяя подход, разработанный в [9] для моделей смешанной экономики чистого обмена, и используя предположения (A1)–(A5), приведём доказательство вложений $C_{K,F}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{W}_K(\mathcal{E})$ при $K \neq L$ (напомним, что случай $K = L$ рассматривался в [1]).

Для каждого $K \subseteq L$ положим

$$T_K := \{t = (t', t'') \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^L \mid t''_K \leqslant 0, \, q \cdot t^0 - q_{J \setminus I} \cdot t'' \leqslant 0, \, I \subseteq J\}.$$

Напомним, что, как и ранее, $J = L \setminus K$. В дальнейшем используется следующее общее описание поляры $T^0_K := \{h \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^L \mid h \cdot t \leqslant 0, \, t \in T_K\}$ конуса $T_K$, полученное в [9] (для полноты изложения это описание приводится вместе с доказательством из [9]).

**Утверждение 1.** *Для каждого* $K \subseteq L$ *поляра* $T_K^0$ *конуса* $T_K$ *имеет следующее строение:*

$$T_K^0 = \{(\lambda q, p) \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^L \mid \lambda \geqslant 0,\ \lambda q_K \leqslant p_K,\ 0 \leqslant p_J \leqslant \lambda q_J\}. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим через $H_K$ множество, стоящее в правой части соотношения (8). Поскольку конус $H_K$ выпуклый и замкнутый, по теореме о биполяре (см., например, [15]) имеем $H_K^{00} = H_K$. Поэтому для доказательства соотношения $H_K = T_K^0$ достаточно убедиться, что выполняется равенство

$$H_K^0 = T_K. \tag{9}$$

Для его проверки воспользуемся тем, что крайние лучи конуса $H_K$ порождаются векторами $\{(0, e^k)\}_{k \in K} \cup \{(q, q_{K\cup I})\}_{I \subseteq J}$. Отметим, что такой вид крайних лучей обусловлен тем, что в силу определения $H_K$ и неотрицательности $q$ для каждого элемента $(\lambda q, p)$ из $H_K$ справедливо представление

$$(\lambda q, p) = \lambda(q, q_K) + \lambda(0, s_J) + (0, s_K), \tag{10}$$

где $\lambda s_J = p_J$, $s_K = p_K - \lambda q_K \geqslant 0$ и выполняются неравенства $0 \leqslant s_J \leqslant q_J$. Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 1, вектор $s_J$, принадлежащий параллелепипеду $[0, q_J]$, может быть представлен в виде выпуклой комбинации $s_J = \sum\limits_{I \subseteq J} \lambda_I q_I$. Поэтому равенство (10) может быть переписано в виде

$$(\lambda q, p) = \sum_{I \subseteq J} \lambda \lambda_I (q, q_{K\cup I}) + \sum_{k \in K} s_k (0, e^k),$$

подтверждающем уже приводившееся описание крайних лучей множества $H_K$ (ввиду отмечавшейся неотрицательности чисел $\lambda$, $\lambda_I$ и $s_k = (s_K)_k$, $k \in K$). Опираясь на вышесказанное, получаем, что соотношение (9) вытекает из определения множеств $T_K$, $H_K$ и очевидного равенства

$$(t', t'') \cdot (q, q_{K\cup I}) = q \cdot t^0 - q_{J\setminus I} \cdot t'', \quad t = (t', t'') \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^L.$$

Утверждение 1 доказано.

Перейдём непосредственно к описанию $K$-равновесных распределений при $K \neq L$ в терминах нечёткого доминирования. Полученная характеризация имеет следующий вид.

**Теорема 2.** *Если модель* $\mathcal{E}$ *удовлетворяет предположениям* (A1)–(A5), *то для любого* $K \neq L$ *справедливо равенство*

$$C_{K,F}(\mathcal{E}) = \mathcal{W}_K(\mathcal{E}). \tag{11}$$

Для доказательства теоремы 2 потребуются некоторые вспомогательные конструкции. Следуя [9], для каждого $K \subseteq L$ определим линейный оператор $\Gamma_K$, действующий из $\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^L$ в $\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^L$ по формуле

$$\Gamma_K(t) := (t'_J, t^0 - t'_J), \quad t = (t', t'') \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^L,$$

где, как и ранее, $t^0 = t' + t''$ и $J = L \setminus K$. Далее, для каждого $i \in N_1$ положим

$$\omega_{K,i} := \left(\gamma'^i + \beta^i_J, \, \widehat{\omega}'^i - \beta^i_J\right), \quad \widehat{Y}_{0i} := \{0\} \times \widehat{Y}_i.$$

Введём, наконец, основную вспомогательную конструкцию, играющую важную роль в доказательстве теоремы 2. С этой целью для каждого допустимого распределения $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ модели $\mathcal{E}$ и для каждого множества $K \subseteq L$ введём множества

$$\mathcal{M}_{K,i}(\bar{z}) := \Gamma_K\big(\mathcal{P}^\beta_i(\bar{x}^i)\big) - \widehat{Y}_{0i} - \{\omega_{K,i}\}, \quad i \in N_1, \tag{12}$$

$$\mathcal{M}_K(\bar{z}) := \Big\{x(\tau) \mid x \in \prod_{i \in N_1} \mathcal{M}_{K,i}(\bar{z}), \; \tau \in \mathcal{T}\Big\}. \tag{13}$$

Отметим, что непосредственно из определения нечёткого $K$-доминирования получается (в терминах множества $\mathcal{M}_K(\bar{z})$) следующий достаточно простой критерий принадлежности распределения $\bar{z} \in Z_\beta(\mathcal{E})$ нечёткому $K$-ядру экономики $\mathcal{E}$.

**Лемма 1.** *Для любых $\bar{z} \in Z_\beta(\mathcal{E})$ и $K \subseteq L$ справедливо соотношение*

$$\bar{z} \in C_{K,F}(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \mathcal{M}_K(\bar{z}) \cap T_K = \varnothing.$$

Ещё одно полезное свойство множеств $\mathcal{M}_K(\bar{z})$ заключается в следующем.

**Лемма 2.** *Если модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет предположениям* (A1), (A2) *и* (A4), *то для любых $\bar{z} \in Z_\beta(\mathcal{E})$ и $K \subseteq L$ множество $\mathcal{M}_K(\bar{z})$ выпукло.*

Доказательство осуществляется прямой проверкой с учётом предположений (A1), (A2) и (A4).

Используя введённые конструкции, перейдём к доказательству основного результата работы.

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем какое-либо множество $K \neq L$. В силу теоремы 1 для доказательства равенства (11) достаточно убедиться в справедливости вложения $C_{K,F}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{W}_K(\mathcal{E})$. Пусть $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$ — произвольный элемент ядра $C_{K,F}(\mathcal{E})$. На основании леммы 1 имеем $\mathcal{M}_K(\bar{z}) \cap T_K = \varnothing$. Далее, в силу предположений (A3), (A5) и леммы 2 множество $\mathcal{M}_K(\bar{z})$ непустое и выпуклое. Следовательно, по теореме отделимости Минковского существует ненулевой функционал $\widehat{p} = (p', p'')$, разделяющий множества $\mathcal{M}_K(\bar{z})$ и $T_K$:

$$\sup\{\widehat{p} \cdot t \mid t \in T_K\} \leqslant \inf\{\widehat{p} \cdot t \mid t \in \mathcal{M}_K(\bar{z})\}. \tag{14}$$

Поскольку вершиной конуса $T_K$ является нулевой вектор, справедливо соотношение $\sup\{\widehat{p} \cdot t \mid t \in T_K\} = 0$. Следовательно, вектор $\widehat{p}$ принадлежит поляре $T_K^0$ конуса $T_K$. Значит, в силу предложения 1 для него имеет место представление $\widehat{p} = (\lambda q, \bar{p})$, где $\lambda \geqslant 0$, а $\bar{p}$ удовлетворяет неравенствам $\bar{p}_K \geqslant \lambda q_K$ и $0 \leqslant \bar{p}_J \leqslant \lambda q_J$. Пусть для определённости $\lambda > 0$ и $K \neq \varnothing$ (случаи $\lambda = 0$ и $K = \varnothing$ рассматриваются далее). Без потери общности можно предполагать, что $\lambda = 1$ и $\widehat{p} = (q, \bar{p})$.

Покажем, что пара $(\bar{p}, \bar{z})$ образует равновесное состояние экономики $\mathcal{E}$. Начнём с того, что в силу (14) и на основании вложений $\mathcal{M}_{K,i}(\bar{z}) \subseteq \mathcal{M}_K(\bar{z})$, $i \in N_1$, имеем

$$q \cdot \big(x'^i_J - \gamma'^i - \beta^i_J\big) + \bar{p} \cdot \big( - x'^i_J + x^{0i} - y^i - \widehat{\omega}'^i + \beta^i_J\big) \geqslant 0, \quad i \in N_1, \tag{15}$$

для всех $x^i \in \mathcal{P}_i^\beta(\bar{x}^i)$ и $y^i \in \widehat{Y}_i$, $i \in N_1$. Далее, ввиду предположения (A1) и строгого возрастания функций $u_i$ по $x''^i$ для каждого $i \in N_1$ существует сходящаяся последовательность $\big\{x^i_n\big\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{P}_i^\beta(\bar{x}^i)$ такая, что $\lim x^i_n = \bar{x}^i$. Поэтому, выбирая $y^i = \bar{y}^i$ с $\bar{y}^i := \widehat{\vartheta}^i + \sum\limits_{j \in N_2} s''_{ij}\bar{y}^j \in \widehat{Y}_i$ и переходя к пределу $F_i^K(\bar{p}, x^i_n, \bar{y}^i) \to F_i^K(\bar{p}, \bar{x}^i, \bar{y}^i)$, получаем

$$F_i^K(\bar{p}, \bar{x}^i, \bar{y}^i) \geqslant 0, \quad i \in N_1, \tag{16}$$

где, как и ранее, $F_i^K(\bar{p}, \bar{x}^i, \bar{y}^i)$ обозначает левую часть соотношения (15) с $x^i = \bar{x}^i$ и $y^i = \bar{y}^i$. Суммируя левые части неравенств (16) и используя соотношения

$$\sum_{i \in N_1} \gamma'^i = \sum_{i \in N_1} \theta^i + \sum_{j \in N_2} \vartheta^j - \sum_{i \in N_1} \beta^i = 0,$$

$$\sum_{i \in N_1} \bar{y}^i = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} s''_{ij}\bar{y}^j = \sum_{j \in N_2} \bar{y}^j,$$

$$\sum_{i \in N_1} \bar{x}^{0i} = \sum_{i \in N_1} \omega^i + \sum_{i \in N_1} \bar{y}^i$$

и неравенства $\bar{p}_J \leqslant q_J$ и $\bar{x}'^i \leqslant \beta^i$, вытекающие непосредственно из выбора $\bar{p}$ и $\bar{x}$, получаем

$$-q \cdot \sum_{N_1} \gamma'^i + q_J \cdot \sum_{N_1} \big(\bar{x}'^i_J - \beta^i_J\big) + \bar{p} \cdot \sum_{N_1} (\bar{x}^{0i} - \widehat{\omega}'^i - \bar{y}^i)$$
$$+ \bar{p}_J \cdot \sum_{N_1} \big( - \bar{x}'^i_J + \beta^i_J\big) \leqslant q_J \cdot \sum_{N_1} \big(\bar{x}'^i_J - \beta^i_J\big)$$
$$+ \bar{p} \cdot \bigg( \sum_{N_1} \bar{x}^{0i} - \sum_{N_1} \omega^i - \sum_{N_2} \bar{y}^j \bigg) + q_J \cdot \sum_{N_1} \big( - \bar{x}'^i_J + \beta^i_J\big) = 0.$$

Значит, $\sum\limits_{N_1} F^K_i(\bar{p}, \bar{x}^i, \bar{y}^i) \leqslant 0$ и, следовательно, каждое из неравенств (16) выполняется как равенство:

$$q \cdot \big(\bar{x}'^i_J - \gamma'^i - \beta^i_J\big) + \bar{p} \cdot \big( - \bar{x}'^i_J + \bar{x}^{0i} - \bar{y}^i - \widehat{\omega}'^i + \beta^i_J\big) = 0, \quad i \in N_1. \tag{17}$$

Отсюда в силу соотношений $\bar{p} \cdot (\bar{y}^i - \vartheta'^i) = \sum\limits_{j \in N_2} s''_{ij} \bar{p} \cdot (\bar{y}^j - \vartheta^j) \leqslant \pi_i(\bar{p})$ получаем, что $\bar{x}^i \in B_i(\bar{p})$ для всех $i \in N_1$. Кроме того, переходя к уже упоминавшимся пределам $x^i_n \to \bar{x}^i$ в (15) и используя равенства (17), имеем $F^K_i(\bar{p}, \bar{x}^i, y^i) \geqslant 0 = F^K_i(\bar{p}, \bar{x}^i, \bar{y}^i)$ для каждого $y^i \in \widehat{Y_i}$ и $i \in N_1$. Из этих соотношений немедленно вытекают следующие неравенства: $\bar{p} \cdot \bar{y}^i \geqslant \bar{p} \cdot y^i$ для каждого $y^i \in \widehat{Y_i}$, $i \in N_1$. Значит, для каждого потребителя $i \in N_1$ выполняются неравенства $\bar{p} \cdot \sum\limits_{j \in N_2} s''_{ij} \bar{y}^j \geqslant \bar{p} \cdot \sum\limits_{j \in N_2} s''_{ij} y^j$ для всех $y^j \in Y_j$, $j \in N_2$. Поэтому векторы $\bar{y}^j$ принадлежат соответствующим индивидуальным множествам предложения $S_j(\bar{p})$:

$$\bar{p} \cdot (\bar{y}^j - \vartheta^j) \geqslant \bar{p} \cdot (y^j - \vartheta^j) \quad \text{для всех } y^j \in Y_j,\ j \in N_2.$$

Для завершения доказательства включения $\bar{z} \in \mathcal{W}_K$ остаётся обосновать соотношения $\mathcal{P}^\beta_i(\bar{x}^i) \cap B_i(\bar{p}) = \varnothing$, $i \in N_1$. Покажем сначала, что вектор $\bar{p}$ строго положителен. Поскольку $\bar{p}_K \geqslant q_K$, из условия $q \gg 0$ вытекает, что $\bar{p}_k > 0$ для всех $k \in K$. Предположим, что $\bar{p}_m = 0$ для некоторого $m \in J$. Ясно, что ввиду (A1), (A5) для любого $\varepsilon > 0$ справедливы соотношения $\bar{x}^i(\varepsilon) \in X_i(\beta)$ и $u_i(\bar{x}^i(\varepsilon)) > u_i(\bar{x}^i)$, где $\bar{x}^i(\varepsilon) := \bar{x}^i + \varepsilon(0, e^m)$. Выберем какой-либо элемент $k \in K$. Поскольку $\bar{z} \in Z_\beta(\mathcal{E})$, согласно предположению (A3) выполняется неравенство $\sum\limits_{N_1} \bar{x}^{0i} \gg 0$. Следовательно, найдётся участник $i$, для которого $\bar{x}^{0i}_k = \bar{x}'^i_k + \bar{x}''^i_k > 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, используя предположение (A1) и полунепрерывность снизу функции $u_i$, выберем достаточно малое $\delta > 0$ так, что $\bar{x}^i(\varepsilon, \delta) \in X_i(\beta)$ и

$$u_i(\bar{x}^i(\varepsilon, \delta)) > u_i(\bar{x}^i), \tag{18}$$

где

$$\bar{x}^i(\varepsilon, \delta) := \begin{cases} \bar{x}^i(\varepsilon) - \delta(0, e^k) & \text{при } \bar{x}''^i_k > 0, \\ \bar{x}^i(\varepsilon) - \delta(e^k, 0) & \text{при } \bar{x}''^i_k = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\bar{p}_k > 0$, нетрудно видеть, что $F_i^K(\bar{p}, \bar{x}^i(\varepsilon, \delta), \bar{y}^i) < 0$, но это неравенство вместе с (18) противоречит условию (15).

На основании полученного противоречия получаем требуемое: $\bar{p} \gg 0$. Положим $\delta_i(\bar{p}, \bar{y}^i) := q \cdot (\gamma'^i + \beta_J^i) + \bar{p} \cdot (\widehat{\omega}'^i - \beta_J^i + \bar{y}^i)$ и, принимая во внимание включение $\bar{p} \in P_K$, перепишем бюджетные ограничения участников в виде

$$q \cdot x_J'^i + \bar{p} \cdot \left(x^{0i} - x_J'^i\right) \leqslant \delta_i(\bar{p}, \bar{y}^i), \quad i \in N_1.$$

Отсюда ввиду вложений $X_i \subseteq \mathbb{R}_+^L \times \mathbb{R}_+^L$, $i \in N_1$, имеем $\delta_i(\bar{p}, \bar{y}^i) \geqslant 0$ для всех $i \in N_1$. Отметим, что в силу строгой положительности $\bar{p}$ и $q$ равенство $\delta_i(\bar{p}, \bar{y}^i) = 0$ влечёт справедливость соотношения $B_i(\bar{p}) = \{(0, 0)\}$. Поэтому для наших целей достаточно проверить выполнение условий $\mathcal{P}_i^\beta(\bar{x}^i) \cap B_i(\bar{p}) = \varnothing$ для случая ненулевого значения $\delta_i(\bar{p}, \bar{y}^i)$. Итак, пусть $\delta_i(\bar{p}, \bar{y}^i) > 0$, $x^i \in \mathcal{P}_i^\beta(\bar{x}^i)$ и при этом элемент $x^i$ принадлежит бюджетному множеству $B_i(\bar{p})$. Тогда с учётом неравенств (15) получаем соотношение $q \cdot x_J'^i + \bar{p} \cdot \left(x^{0i} - x_J'^i\right) = \delta_i(\bar{p}, \bar{y}^i) > 0$. Следовательно, $x^i \neq (0, 0)$ и в силу (A1) и (A4) существует $\widetilde{x}^i \neq x^i$ такой, что $\widetilde{x}^i \leqslant x^i$ и $\widetilde{x}^i \in \mathcal{P}_i^\beta(\bar{x}^i)$. Ясно, что ввиду строгой положительности векторов $\bar{p}$ и $q$ для такого вектора $\widetilde{x}^i$ выполняется условие

$$q \cdot (\widetilde{x}'^i)_J + \bar{p} \cdot (\widetilde{x}^{0i} - (\widetilde{x}'^i)_J) < \delta_i(\bar{p}, \bar{y}^i), \tag{19}$$

но неравенство (19) вместе с включением $\widetilde{x}^i \in \mathcal{P}_i^\beta(\bar{x}^i)$ противоречит условию (15).

Итак, в предположении, что $\lambda > 0$, включение $\bar{x} \in \mathcal{W}_K$ установлено. Чтобы закончить доказательство теоремы в случае $K \neq \varnothing$ (наличие «высоких» цен свободного рынка), остаётся убедиться, что равенство $\lambda = 0$ реализоваться не может. С этой целью отметим, прежде всего, что при доказательстве соотношений (15) и (17) предположение $\lambda \neq 0$ не использовалось. Следовательно, аналоги этих соотношений справедливы и при нулевом значении $\lambda$:

$$\bar{p} \cdot \left(\bar{x}^{0i} - \bar{x}_J'^i\right) = \bar{p} \cdot \left(\widehat{\omega}'^i + \bar{y}^i - \beta_J^i\right), \quad i \in N_1,$$

при этом

$$\bar{p} \cdot \left(x^{0i} - x_J'^i\right) \geqslant \bar{p} \cdot \left(\widehat{\omega}'^i + y^i - \beta_J^i\right) \tag{20}$$

для всех $x^i \in \mathcal{P}_i^\beta(\bar{x}^i)$, $y^i \in \widehat{Y}_i$, $i \in N_1$. Поскольку $\bar{p} \neq 0$ и $\bar{p}_m = 0$ для всех $m \in J$ (в силу предположений $J \neq \varnothing$ и $\bar{p}_J \leqslant \lambda q_J$), существует $k \in K$, для которого $\bar{p}_k > 0$. В силу (A3) выполняется неравенство $\sum\limits_N \bar{x}_k^{0i} > 0$. Следовательно, $\bar{x}_k^{0i} > 0$ для некоторого $i \in N_1$. Рассуждая, как при доказательстве строгой положительности $\bar{p}$ в случае $\lambda > 0$, получаем, что существует вектор $\bar{x}^i(\varepsilon, \delta) \in \mathcal{P}_i^\beta(\bar{x}^i)$ такой, что

$\bar{p} \cdot \left(\bar{x}^{0i}(\varepsilon,\delta) - \bar{x}'^{i}_{J}(\varepsilon,\delta)\right) < \bar{p} \cdot \left(\widehat{\omega}'^{i} + \bar{y}^{i} - \beta^{i}_{J}\right)$, что противоречит неравенствам (20).

Для завершения доказательства теоремы 2 остаётся рассмотреть случай $K = \varnothing$ (отсутствие «высоких» цен свободного рынка). В этой ситуации применяются те же аргументы, что и в случае непустого множества $K$. В частности, устанавливается и используется строгая положительность цен $\bar{p}$. Поскольку вариант $\lambda = 0$ исключается как противоречащий условию $\widehat{p} \neq (0,0)$, основное отличие от соответствующих рассуждений при $K \neq \varnothing$ заключается в необходимости анализировать ситуацию $\lambda = 1$, $\bar{p} = 0$. Покажем, что в условиях теоремы 2 такая ситуация исключена — функционал $\widehat{p} = (q,0)$ не может разделять множества $\mathcal{M}_{\varnothing}(\bar{x})$ и $T_{\varnothing}$. Допуская противное, приходим к аналогам соотношений (15) и (20), принимающим при $\bar{p} = 0$ и $J = L$ следующую форму:

$$q \cdot (x'^{i} - \theta^{i} - \vartheta'^{i}) \geqslant 0, \quad x^{i} \in \mathcal{P}^{\beta}_{i}(\bar{x}^{i}),\ i \in N_1, \tag{21}$$

$$q \cdot (\bar{x}'^{i} - \theta^{i} - \vartheta'^{i}) = 0, \quad i \in N_1. \tag{22}$$

Согласно предположению (A) выполняются соотношения $\sum\limits_{N_1}(\theta^{i} + \vartheta'^{i}) = \sum\limits_{N_1}\beta^{i} \neq 0$. Отсюда ввиду условий $q \gg 0$, $\bar{x}'^{i} \leqslant \beta^{i}$, $i \in N_1$, и равенств (22) получаем $\bar{x}'^{i} = \beta^{i}$ для каждого $i \in N_1$. Тогда найдутся $k \in L$ и участник $i \in N_1$, для которых $\bar{x}'^{i}_{k} > 0$. Используя предположение (A1) и принимая во внимание строгое возрастание по $x''^{i}$ и полунепрерывность снизу функции $u_i$, можно выбрать достаточно малые числа $\varepsilon, \delta > 0$ такие, что $u_i(\bar{x}^{i}(\varepsilon,\delta)) > u_i(\bar{x}^{i})$, где $\bar{x}^{i}(\varepsilon,\delta) = \bar{x}^{i} + \varepsilon(0,e^{k}) - \delta(e^{k},0)$. Итак, элемент $\bar{x}^{i}(\varepsilon,\delta)$ принадлежит множеству $\mathcal{P}^{\beta}_{i}(\bar{x}^{i})$, но в силу положительности $q$ и равенства (22) имеем $q \cdot (\bar{x}'^{i}(\varepsilon,\delta) - \theta^{i} - \vartheta'^{i}) < 0$, что противоречит условию (21). Теорема 2 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Vasil'ev V. A.** Fuzzy core allocations in a mixed economy of Arrow–Debreu type // Optimization Problems and Their Applications (Rev. Sel. Pap. 7th Int. Conf. OPTA-2018, Omsk, Russia, July 8–14, 2018). Cham: Springer, 2018. P. 235–248. (Commun. Comput. Inf. Sci.; Vol. 871)
2. **Макаров В. Л., Васильев В. А., Козырев А. Н., Маракулин В. М.** О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики // Оптимизация. Вып. 30. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982. С. 5–86.
3. **Makarov V. L., Vasil'ev V. A., Kozyrev A. N., Marakulin V. M.** Equilibria, rationing and stability // Matekon. 1989. Vol. 25, No 4. P. 4–95.

4. **Васильев В. А., Сидоров А. В.** Равновесие на регулируемом рынке. I: Существование // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 3–21.
5. **Vasil'ev V. A., Wiesmeth H.** Equilibrium in a mixed economy of Arrow–Debreu type // J. Math. Econ. 2008. Vol. 44, No. 2. P. 132–147.
6. **Van der Laan G., Vasil'ev V. A., Venniker R. J. G.** On the transition from the mixed economy to the market economics // Sib. Adv. Math. 2000. Vol. 10, No. 1. P. 1–33.
7. **Алипрантис К., Браун Д., Беркеншо О.** Существование и оптимальность конкурентного равновесия. М.: Мир, 1995. 384 с.
8. **Гильденбранд В.** Ядро и равновесие в большой экономике. М.: Наука, 1986. 198 с.
9. **Vasil'ev V. A.** On Edgeworth equilibria for some types of nonclassic markets // Sib. Adv. Math. 1996. Vol. 6, No. 3. P. 96–150.
10. **Васильев В. А.** О совпадении ядер и согласованных состояний в смешанных экономических системах // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 3. С. 446–450.
11. **Vasil'ev V. A.** Core equivalence in a mixed economy // Theory and Markets. Amsterdam; Oxford; New York; Tokyo: North-Holland Publ., 1999. P. 59–82.
12. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры в математической экономике. М.: Мир, 1972. 517 с.
13. **Экланд И.** Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983. 248 с.
14. **Aubin J.-P.** Mathematical methods of game and economic theory. Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland Publ., 1979. 619 p.
15. **Рокафеллар Р. Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 499 с.


*Васильев Валерий Александрович*

Статья поступила
17 сентября 2018 г.

После доработки —
6 августа 2019 г.

Принята к публикации
28 августа 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2019. Vol. 26, No. 4. P. 34–55

UDC 519.83 DOI 10.33048/daio.2019.26.632

# UNDOMINATEDNESS OF EQUILIBRIA IN A MIXED ECONOMY OF ARROW–DEBREU TYPE *)

*V. A. Vasil'ev*[1,2]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

[2] Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: `vasilev@math.nsc.ru`

**Abstract.** We consider a model of economy with two markets for each product: one–state and the other–competitive. Moreover, both markets coexist in the same economic space allowing free movement of goods and means of payment. In particular, it is assumed that the surplus of products purchased at fixed state prices can be sold at free prices of the competitive market. The important feature of the model is that the manufacturing activity is taken into account both in the state and in the competitive market. While most literature on mixed economies is devoted to the issues of existence and Pareto optimality of equilibria, the focus of the present paper is on analyzing their coalition stability. We continue studying the fuzzy cores of mixed economic models of Arrow–Debreu type which was started earlier for the case of high free market prices. New conditions are established for the coincidence of the sets of undominated and equilibrium allocations, covering the cases of low equilibrium prices for some of the products. Bibliogr. 15.

**Keywords:** mixed economy with production, rationing, state order, equilibrium, undominated allocation, fuzzy core.

## REFERENCES

1. **V. A. Vasil'ev,** Fuzzy core allocations in a mixed economy of Arrow–Debreu type, in *Optimization Problems and Their Applications* (Rev. Sel. Pap. 7th Int. Conf. OPTA 2018, Omsk, Russia, July 8–14, 2018) (Springer, Cham, 2018), pp. 235–248 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 871).

*) This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 19–10–00910) and the Programme for Fundamental Scientific Research of SB RAS No. I.5.1 (Project 0314–2019–0018).

2. **V. L. Makarov, V. A. Vasil'ev, A. N. Kozyrev,** and **V. M. Marakulin,** On some problems and results of modern mathematical economics, in *Optimization*, Vol. 30 (Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1982), pp. 5–86 [Russian].
3. **V. L. Makarov, V. A. Vasil'ev, A. N. Kozyrev,** and **V. M. Marakulin,** Equilibria, rationing, and stability, *Matekon.* **25** (4), 4–95 (1989).
4. **V. A. Vasil'ev** and **A. V. Sidorov,** Equilibrium in a regulated market: I. Existence, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **8** (1), 3–21 (2001) [Russian].
5. **V. A. Vasil'ev** and **H. Wiesmeth,** Equilibrium in a mixed economy of Arrow–Debreu type, *J. Math. Econ.* **44** (2), 132–147 (2008).
6. **G. van der Laan, V. A. Vasil'ev,** and R. **J. G. Venniker,** On the transition from the mixed economies to the market economies, *Sib. Adv. Math.* **10** (1), 1–33 (2000).
7. **C. D. Aliprantis, D. J. Brown,** and **O. Burkinshaw,** *Existence and Optimality of Competitive Equilibria* (Springer, Berlin, 1990; Mir, Moscow, 1995 [Russian]).
8. **W. Hildenbrand,** *Core and Equilibria of a Large Economy* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1974; Nauka, Moscow, 1986 [Russian]).
9. **V. A. Vasil'ev,** On edgeworth equilibria for some types of nonclassical markets, *Sib. Adv. Math.* **6** (3), 96–150 (1996).
10. **V. A. Vasil'ev,** On the coincidence of cores and consistent distributions in mixed economic systems, *Dokl. Akad. Nauk* **352** (3), 446–450 (1997) [Russian] [*Dokl. Math.* **55** (1), 75–79 (1997)].
11. **V. A. Vasil'ev,** Core equivalence in a mixed economy, in *Theory and Markets* (North-Holland, Amsterdam, 1999), pp. 59–82.
12. **H. Nikaido,** *Convex Structures and Economic Theory* (Academic Press, New York, 1968; Mir, Moscow, 1972 [Russian]).
13. **I. Ekeland,** *Éléments d'économie mathématique* (Hermann, Paris, 1979 [French]; Mir, Moscow, 1983 [Russian]).
14. **J.-P. Aubin,** *Mathematical Methods of Game and Economic Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1979).
15. **R. T. Rockafellar,** *Convex analysis* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1970; Nauka, Moscow, 1973 [Russian]).

*Valery A. Vasil'ev*

Received September 17, 2018
Revised August 6, 2019
Accepted August 28, 2019