ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2019. Т. 26, № 4. С. 108–120

УДК 519.7 DOI 10.33048/daio.2019.26.643

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ГЛУБИНОЙ И СЛОЖНОСТЬЮ МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФОРМУЛ *)

И. С. Сергеев

Научно-исследовательский институт «Квант»,
4-й Лихачёвский пер., 15, 125438 Москва, Россия

E-mail: `isserg@gmail.com`

Аннотация. Построен пример последовательности монотонных булевых функций, глубина которых в базисе $\{\vee, \wedge\}$ превосходит логарифм сложности реализации формулами в $c > 1{,}06$ раз. Табл. 1, библиогр. 24.

Ключевые слова: булева формула, глубина, сложность, монотонная функция.

Посвящается памяти
Валерия Михайловича Храпченко

Введение

Напомним, что множество формул над базисом B, сложность формулы, глубина формулы и функция, реализуемая формулой, определяются индуктивно следующим образом: 0) константы базиса являются формулами сложности и глубины 0; 1) символы переменных являются формулами сложности 1, глубины 0 и реализуют соответствующие тождественные функции; 2) выражение $G(F_1, \ldots, F_k)$, где G — символ, обозначающий отличную от константы k-местную функцию $g \in B$, а F_i — формула сложности L_i и глубины D_i, реализующая функцию f_i, является формулой сложности $L_1 + \cdots + L_k$, глубины $\max\{D_1, \ldots, D_k\} + 1$ и реализует функцию $g(f_1, \ldots, f_k)$. (Неформально, сложность формулы — это число символов переменных в ней.)

Пусть $L_B(f)$ означает сложность реализации функции f формулами над базисом B, т. е. минимальную сложность по всем формулам, реализующим данную функцию, а $D_B(f)$ обозначает глубину функции f, определяемую по аналогии.

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–01–00294-а).

Тривиальным образом в любом базисе, состоящем из не более чем k-местных функций, выполняется $D_B(f) \geqslant \log_k L_B(f)$. Базисы, для которых также выполнено $D_B(f) = O(\log L_B(f))$, называются *равномерными.*

Около 1968 г. свойство равномерности было установлено В. М. Храпченко для любого функционально полного конечного булева базиса [8]. Чуть позже Р. Брентом с соавторами в работах [11, 12] была доказана равномерность основных арифметических базисов $\{+, *\}$ и $\{+, *, /\}$. Наконец, к 1987 г. А. Б. Угольников [4] и М. Рагаз [22] независимо доказали равномерность произвольной (не обязательно полной) конечной булевой системы. Также они построили примеры неравномерных конечных систем в алгебре трёхзначной логики. Равномерность полного конечного базиса функций k-значной логики устанавливается так же, как и в булевом случае. Исследование равномерности неполных конечных систем в k-значных логиках при $k \geqslant 3$ продолжено, например, в работах [2, 3] (подробная библиография приводится там же).

Следуя [7], равномерность базиса B можно охарактеризовать величиной (равной константе или ∞)

$$c_B = \varlimsup_{N\to\infty} \max_{L_B(f)=N} \frac{D_B(f)}{\log_2 N}.$$

Определение означает, что для любой выражаемой в базисе B функции f выполнено $D_B(f) \leqslant (c_B + o(1)) \log L_B(f)$, а также существует бесконечная последовательность функций f_k, для которой $D_B(f_k) \geqslant (c_B - o(1)) \log L_B(f_k)$. Здесь и далее логарифмы без указания основания полагаются двоичными.

Оценкам констант равномерности было посвящено множество работ, преимущественно в 1970-х гг. Особый интерес представляют базисы арифметического типа, т. е. состоящие из операций сложения и умножения и, возможно, вычитания или деления в некотором полукольце, в связи с практической задачей о параллельном преобразовании арифметических выражений. В основном рассматривается базис $B_A = \{+, *\}$ и реже $B_{AD} = \{+, *, /\}$. Булевыми аналогами арифметического базиса являются монотонный базис $B_M = \{\vee, \wedge\}$, дополняемый до стандартного базиса $B_0 = \{\wedge, \vee, \bar{\ }\}$, и базис $\{\oplus, \wedge\}$, дополняемый до базиса Жегалкина $\{\oplus, \wedge, 1\}$. Тривиально выполняются соотношения

$$c_{B_0} \leqslant c_{B_M} \leqslant c_{B_A}, \quad c_{\{\oplus,\wedge\}} \leqslant c_{B_A}.$$

Рекордные на сегодняшний день верхние оценки для указанных базисов $c_{B_M} < 1{,}73$ и $c_{B_A} \leqslant 2$ получены соответственно В. М. Храпченко [6] и С. Р. Косараю [16]. Нетривиальные нижние оценки известны только для общего арифметического базиса: соотношения $c_{B_A} > 1{,}16$ и $c_{B_A} \geqslant 1{,}5$

были получены последовательно в работах [23] и [15]. В булевом случае подобные нижние оценки известны только для некоторых неарифметических базисов: первая из них была установлена ещё в 1967 г. В. М. Храпченко [5] для базиса $B_S = \{\backslash\}$, состоящего из единственной функции «штрих Шеффера». Отметим, что существуют и идеально равномерные базисы: так, для $B = \{\oplus\}$ тривиально выполняется $c_B = 1$.

Известные автору результаты для булевых и общих арифметических базисов сведены в табл. 1. Символ $\Rightarrow$ обозначает функцию импликации. Дизъюнкции и конъюнкции k входов обозначены соответственно через $\bigvee_k$ и $\bigwedge_k$. Через m_3 обозначена функция голосования трёх переменных, а B_2 обозначает базис всех двуместных булевых функций.

Таблица 1

Перечень известных оценок для констант равномерности

Авторы	Базис B	Оценка c_B	Год
Храпченко [5]	B_S	$c_B \geqslant 2$	1967
Храпченко [8]	ф.п. кон. булев базис	$c_B < \infty$	1968
Spira [24]	B_0	$c_B < 3{,}42$	1971
Brent, Kuck, Maruyama [11]	B_A	$c_B < 2{,}47$	1973
Brent [12]	B_{AD}	$c_B \leqslant 4$	1974
Preparata, Muller [19]	B_A	$c_B < 2{,}16$	1975
Barak, Shamir [10]	B_M	$c_B \leqslant 2$	1976
Muller, Preparata [18]	B_A B_{AD}	$c_B < 2{,}09$ $c_B < 2{,}89$	1976
Preparata, Muller [20]	B_M	$c_B < 1{,}82$	1976
McColl [17]	$\{\Rightarrow, 0\}$ B_S B_2	$c_B > 1{,}44$ $c_B < 2{,}89$ $c_B < 2{,}47$	1977
Preparata, Muller, Barak [21]	$\{\bigvee_3, \bigwedge_3\}$ $\{\bigvee_4, \bigwedge_4\}$ $\{\bigvee_5, \bigwedge_5\}$	$c_B < 1{,}38$ $c_B < 1{,}18$ $c_B \leqslant 1$	1977
Храпченко [6]	B_M	$c_B < 1{,}73$	1978
Shamir, Snir [23]	B_A	$c_B > 1{,}16$	1980
Храпченко [7]	$\{m_3, ^-, 0, 1\}$	$1 \leqslant c_B < 1{,}45$	1981
Kosaraju [16]	B_A	$c_B \leqslant 2$	1986
Угольников [4], Ragaz [22]	кон. булева система	$c_B < \infty$	1987
Coppersmith, Schieber [15]	B_A	$c_B \geqslant 1{,}5$	1992

В базисе B_M нетривиальное соотношение между глубиной и сложностью, хотя и не приводящее к оценке $c_{B_M} > 1$, получила Б. Комменц-Вальтер [13] для функций вида

$$f_n = x_n \vee y_n(x_{n-1} \vee y_{n-1}(\ldots(x_1 \vee y_1)\ldots)).$$

Результат можно записать так: $D_{B_M}(f_n) \geqslant \log n + \log\log n - O(1)$. Впоследствии М. И. Гринчук [1] доказал аналогичную верхнюю оценку. Два результата в совокупности устанавливают соотношение

$$D_{B_M}(f_n) = \log L_{B_M}(f_n) + \log\log L_{B_M}(f_n) \pm O(1).$$

В [14] метод из [13] был распространён на полный базис B_0 и получена оценка

$$D_{B_0}(f_n) \geqslant \log L_{B_0}(f_n) + (1 - o(1)) \log\log\log L_{B_0}(f_n).$$

В настоящей работе путём оценки глубины функций достаточно естественно определяемых последовательностей мы устанавливаем первую нетривиальную нижнюю оценку константы равномерности для монотонного булева базиса: $c_{B_M} > 1{,}06$.

Как и в [15, 23], нижняя оценка глубины доказывается для бесповторных функций, т. е. выражаемых формулами, в которых переменные не повторяются[1)]. Стратегия рассуждения состоит в рассмотрении двух главных подформул минимальной по глубине формулы для данной функции. Доказывается, что либо одна из подформул содержит бесповторную функцию, «похожую» на исходную (т. е. при переходе на меньшую глубину функция не сильно упрощается), либо суммарное число существенных переменных, от которых зависят две подфункции, реализуемые главными подформулами, заметно возрастает. Это позволяет оценить сложность формул при различных ограничениях на глубину и воспользоваться тем фактом, что сложность формулы глубины d не может быть больше чем 2^d.

Метод работает и в арифметическом базисе B_A, позволяя получать потенциально более высокие нижние оценки, чем в булевом случае, однако уступающие уже известным оценкам для этого базиса.

1. Расщепление монотонных функций

Примем соглашение о том, что запись $X = \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, означает, что вместо всех переменных группы X подставлена константа α.

Напомним, что моном $x^S = \prod\limits_{i\in S} x_i$ называется *импликантой* монотонной булевой функции f, если $f \geqslant x^S$. Если дополнительно при любом $i \in S$ свойство $f \geqslant x^{S\setminus\{i\}}$ не выполнено, то x^S называется *простой импликантой* функции f.

[1)] На самом деле, при выводе как нижних, так и верхних оценок констант c_B достаточно ограничиться бесповторными функциями.

В основе стратегии доказательства лежит

Лемма 1. *Пусть f и g — отличные от констант монотонные булевы функции непересекающихся групп переменных X и Y. Тогда если*

$$f(X) \vee g(Y) = p(X, Y) \cdot q(X, Y),$$

где p, q — монотонные функции, то либо $p(X, 0) = f(X)$, либо $q(0, Y) = g(Y)$; симметричным образом, либо $q(X, 0) = f(X)$, либо $p(0, Y) = g(Y)$.

Доказательство. Пусть p и q отличны от констант (иначе с очевидностью утверждение леммы выполнено). Запишем $p = p_X \vee p_Y \vee p_{XY}$ и $q = q_X \vee q_Y \vee q_{XY}$, где $p_X = p(X, 0)$, $q_X = q(X, 0)$, $p_Y = p(0, Y)$, $q_Y = q(0, Y)$, а функции p_{XY} и q_{XY} объединяют простые импликанты функций p и q, в которые входят переменные как из X, так и из Y.

По построению $p_X q_X = f$ и $p_Y q_Y = g$. В частности, $p_X \geqslant f$ и $q_Y \geqslant g$. Не ограничивая общности, предположим, что $p_X \neq f$, т. е. p_X содержит некоторую импликанту I, которой нет у функции f. Если при этом q_Y содержит импликанту J, которой нет у g, то произведение pq содержит импликанту IJ, которой нет у $f(X) \vee g(Y)$, что невозможно. Поэтому $q_Y \leqslant g$. Учитывая, что одновременно выполнено $q_Y \geqslant g$, получаем $q_Y = g$. Рассуждая симметрично, устанавливаем, что либо $q_X = f$, либо $p_Y = g$. Лемма 1 доказана.

В силу принципа двойственности (см., например, [9]) аналогичное утверждение справедливо для представлений типа $f(X)g(Y) = p \vee q$.

Содержательно, лемма устанавливает, что либо функции p и q имеют общие подфункции [2] (т. е. суммарное число существенных [3] переменных у p и q больше, чем у исходной функции $f \vee g$), либо одна из функций p и q содержит f и g в качестве подфункций.

2. Нижняя оценка

Пусть $t \geqslant 2$ — параметр. Последовательность обобщённых чисел Фибоначчи $\Phi_k^{(t)}$ зададим соотношением $\Phi_n^{(t)} = \Phi_{n-1}^{(t)} + \Phi_{n-t}^{(t)}$ и начальными условиями $\Phi_{1-t}^{(t)} = \cdots = \Phi_0^{(t)} = 1$.

Построим специальную последовательность функций $f_k^{\vee}, f_k^{\wedge}$. Функции с индексом k зависят от $\Phi_k^{(t)}$ переменных. При $k \leqslant 0$ положим $f_k^{\vee}(x) = f_k^{\wedge}(x) = x$, а далее определим рекурсивно:

$$f_k^{\vee}(X, Y) = f_{k-1}^{\wedge}(X) \vee f_{k-t}^{\wedge}(Y), \quad f_k^{\wedge}(X, Y) = f_{k-1}^{\vee}(X) \cdot f_{k-t}^{\vee}(Y), \qquad (1)$$

[2] Напомним, что *подфункцией* функции f называется функция, получаемая из f подстановкой констант вместо некоторых аргументов.

[3] Переменная x называется *существенной* для функции f, если $f|_{x=a} \neq f|_{x=b}$ при некоторых значениях a и b.

где X и Y — непересекающиеся группы из соответственно $\Phi_{k-1}^{(t)}$ и $\Phi_{k-t}^{(t)}$ переменных. По построению функции $f_k^{\vee}$ и $f_k^{\wedge}$ двойственны [4)].

Из определения следует, что функции $f_k^{\vee}, f_k^{\wedge}$ выражаются бесповторными формулами от $\Phi_k^{(t)}$ своих переменных. Эти формулы (при $k \geqslant 0$) имеют глубину $k \sim \log_\phi 2 \cdot \log \Phi_k^{(t)}$, где ϕ — единственный положительный корень многочлена $x^t - x^{t-1} - 1$.

Предлагаемый способ построения «труднораспараллеливаемых» функций (1) созвучен примеру из [15]. Чередование операций применяется, чтобы в основной формуле не возникало выражений типа конъюнкции или дизъюнкции большого числа элементов — такие выражения допускали бы простую балансировку по глубине. Важно, чтобы сложность слагаемых в правой части формул (1) существенно различалась — тогда вычисления прямо по этим формулам становятся невыгодными с точки зрения глубины. И напротив, можно ожидать, что параллельная реализация функций $f_k^{\vee}, f_k^{\wedge}$ должна идти вразрез с их естественной структурой, приводя к избыточной сложности. С другой стороны, разница сложности слагаемых в (1) не должна быть чрезмерно большой, так как выражения вида $fg \vee h$ можно вычислять по формуле $(f \vee h)(g \vee h)$, достаточно экономной в случае, когда h — простая функция. Предполагаем, что выполнение последних двух условий может быть обеспечено грамотным выбором параметра t.

Далее для удобства рассуждений будем работать с расширенным константами базисом $B'_M = B_M \cup \{0,1\}$. Легко проверить, что константы бесполезны для реализации отличных от констант функций: их можно удалить из любой формулы, не увеличивая сложность и глубину. Поэтому и константа равномерности одна и та же для базисов B_M и B'_M.

Через $\nu_d^0(f)$ и $\nu_d^1(f)$ обозначим минимум сложности реализации функции f формулами над B'_M глубины не более d с внешней операцией дизъюнкции и, соответственно, конъюнкции. Тогда $\nu_d(f) = \min\left\{\nu_d^0(f), \nu_d^1(f)\right\}$ означает просто сложность реализации функции f формулами глубины не выше d. Если реализация с глубиной d невозможна, то формально положим $\nu_d(f) = \infty$. В силу двойственности

$$\nu_d^0\bigl(f_k^{\vee}\bigr) = \nu_d^1\bigl(f_k^{\wedge}\bigr), \quad \nu_d^1\bigl(f_k^{\vee}\bigr) = \nu_d^0\bigl(f_k^{\wedge}\bigr). \tag{2}$$

Для компактности обозначений положим $f_k = f_k^{\vee}$.

Наша дальнейшая цель — получение нижней оценки для $\nu_d(f_k)$. Тогда из неравенства $\nu_d(f_k) > 2^d$ извлекается оценка глубины $D_{B_M}(f_k) > d$.

[4)] Напомним, что функции $f(X)$ и $g(X)$ называются *двойственными*, если $f(X) = \overline{g(\overline{X})}$, где $\overline{X}$ — вектор из отрицаний переменных X.

Следующий факт относительно сложности формул тривиален.

Утверждение 1. *Пусть* $g_1, \ldots, g_s$ — *подфункции функции* f, *попарно не имеющие общих переменных. Тогда для* $\alpha \in \{0,1\}$

$$\nu_d^\alpha(f) \geqslant \nu_d^\alpha(g_1) + \cdots + \nu_d^\alpha(g_s).$$

Доказательство. Рассмотрим формулу F, на которой достигается оценка $\nu_d^\alpha(f)$. Подставляя константы в эту формулу, получим формулу F_i для каждой подфункции g_i. По условию любая переменная x функции f может встречаться не более чем в одной формуле F_i. При этом по построению число вхождений x в формулы F и F_i одинаково. Утверждение 1 доказано.

Далее это утверждение будем комбинировать с оценкой сложности формулы через сумму сложностей подформул.

Лемма 2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\nu_d^0(f_k) \geqslant \nu_d^1(f_{k-1}) + \nu_d^1(f_{k-t}), \tag{3}$$

$$\nu_d^1(f_k) \geqslant \min\{2\nu_{d-1}(f_{k-1}) + \nu_d^0(f_{k-t}),\ \ 2\nu_{d-1}(f_{k-t}) + \nu_d^0(f_{k-1}),$$
$$\nu_{d-1}(f_{k-1}) + \nu_{d-1}(f_{k-t})\}. \tag{4}$$

Доказательство. Соотношение (3) выполнено в силу определения функций f_k, утверждения 1 и свойства (2). Второе соотношение устанавливается при помощи леммы 1. Рассмотрим формулу минимальной сложности с внешним элементом конъюнкции, реализующую функцию $f_k = f_{k-1}^\wedge(X) \vee f_{k-t}^\wedge(Y)$ при ограничении d на глубину. Пусть p, q — функции, реализуемые на входах финального элемента.

Согласно лемме 1 выполнено одно из трёх. Если $p(X,0) = q(X,0) = f_{k-1}^\wedge(X)$, то с учётом утверждения 1 и (2) величина $\nu_d^1(f_k)$ оценивается снизу первым выражением под знаком минимума в (4). Иначе если $p(0,Y) = q(0,Y) = f_{k-t}^\wedge(Y)$, то величина $\nu_d^1(f_k)$ оценивается вторым выражением в (4). В последнем случае, скажем, для функции p выполнено $p(X,0) = f_{k-1}^\wedge(X)$ и $p(0,Y) = f_{k-t}^\wedge(Y)$. Так получаем третье выражение в (4). Лемма 2 доказана.

Теорема 1. $c_{B_M} > 1{,}06$.

Доказательство. Первая часть доказательства основана на стандартном приёме: для оценки величины $\nu_d(f_k)$ (по индукции при помощи леммы 2) подберём подходящее простое выражение, в нашем случае зависящее от d, k, параметра t и вспомогательных параметров $a > 1$, $c > 0$ и γ.

Обозначим $r_{d,k} = ca^{k-\gamma d}\phi^k$. Покажем, что при надлежащем выборе параметров t, a, c, γ справедливо

$$\nu_d^1(f_k) \geqslant r_{d,k}, \quad \nu_d(f_k), \nu_d^0(f_k) \geqslant r_{d,k-1} + r_{d,k-t}. \tag{5}$$

Определим условия на параметры, при которых (5) заведомо выполнено.

По определению величин $r_{d,k}$ и в силу $(a\phi)^t > (a\phi)^{t-1} + 1$ справедливо

$$r_{d,k} \geqslant r_{d,k-1} + r_{d,k-t}. \tag{6}$$

Значит, для $\nu_d^1(f_k)$ используется более высокая оценка, чем для $\nu_d^0(f_k)$. Поэтому оцениваем $\nu_d(f_k)$ так же, как $\nu_d^0(f_k)$.

При заданных t, γ и a константа c определяется так, чтобы заявленные оценки выполнялись при $k \leqslant t$ и допустимых d (поскольку не имеет смысла рассматривать значения $d \geqslant k$, оставшихся пар k, d конечное число). Очевидно, что $c > 0$, так как все величины $\nu_d(f_k)$ положительны, а их число конечно.

Далее, считая, что t, γ и a выбраны подходящим образом, применяем индукцию по $d+k$. Индуктивный переход состоит в доказательстве того, что оценки (5) не противоречат неравенствам (3) и (4).

Соотношение (3) выполнено автоматически видом выбранной оценки для $\nu_d^0(f_k)$. Рассмотрим (4). Первое выражение под знаком минимума в (4) всегда больше третьего. Действительно,

$$2\nu_{d-1}(f_{k-1}) + \nu_d^0(f_{k-t}) > 2\nu_{d-1}(f_{k-1}) \geqslant \nu_{d-1}(f_{k-1}) + \nu_{d-1}(f_{k-t}).$$

Тогда (5) будет согласовано с (4), если $r_{d,k}$ не превосходит оценки величины двух последних выражений под знаком минимума, т. е. справедливо

$$r_{d,k} \leqslant r_{d,k-2} + r_{d,k-t-1} + 2r_{d-1,k-t-1} + 2r_{d-1,k-2t},$$
$$r_{d,k} \leqslant r_{d-1,k-2} + 2r_{d-1,k-t-1} + r_{d-1,k-2t},$$

или, если записать иначе,

$$(a\phi)^{2t} \leqslant (a\phi)^{2t-2} + (a\phi)^{t-1} + 2a^\gamma((a\phi)^{t-1} + 1), \tag{7}$$
$$a^{-\gamma}(a\phi)^{2t} \leqslant (a\phi)^{2t-2} + 2(a\phi)^{t-1} + 1. \tag{8}$$

Тем самым доказано, что соотношения (5) имеют место, если выполнены неравенства (7) и (8).

Теперь несложно получить оценку глубины функции f_k. Неравенство $\nu_d(f_k) > 2^d$ вытекает из $r_{d,k} \geqslant c'2^d$ при некоторой константе c'. Последнее имеет место при $d = k \cdot \frac{\log(a\phi)}{1+\gamma\log a} - O(1)$. Как следствие,

$$D_{B_M}(f_k) \geqslant \frac{\log(a\phi)\cdot k}{1+\gamma\log a} - O(1) = \frac{1+\log_\phi a}{1+\gamma\log a}\log\Phi_k^{(t)} - O(1). \tag{9}$$

С целью максимизации оценки (9) выберем $t = 250$, при этом $\phi \approx 1{,}016596$. Тогда условия (7) и (8) выполнены, например, при $a = 1{,}00134$

и $\gamma = 8{,}93$. При подстановке выбранных значений параметров получаем $D_{B_M}(f_k) > 1{,}063 \log \Phi_k^{(t)} - O(1)$. Теорема 1 доказана.

Автор благодарен рецензенту за внимательное чтение статьи и ряд замечаний и предложений, существенно повысивших качество изложения материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гринчук М. И.** Уточнение верхней оценки глубины сумматора и компаратора // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2008. Т. 15, № 2. С. 12–22.
2. **Сафин Р. Ф.** О соотношении между глубиной и сложностью в предполных классах k-значной логики // Мат. вопросы кибернетики. Вып. 13. М.: Физматлит, 2004. С. 223–278.
3. **Тарасов П. Б.** Об условиях равномерности систем функций многозначной логики: Дисс. . . . канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2016.
4. **Угольников А. Б.** О глубине и полиномиальной эквивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Мат. заметки. 1987. Т. 42, № 4. С. 603–612.
5. **Храпченко В. М.** Об асимптотической оценке времени сложения параллельного сумматора // Пробл. кибернетики. Вып. 19. М.: Наука, 1967. С. 107–120.
6. **Храпченко В. М.** О соотношении между сложностью и глубиной формул // Методы дискретного анализа в синтезе управляющих систем. Вып. 32. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1978. С. 76–94.
7. **Храпченко В. М.** О соотношении между сложностью и глубиной формул в базисе, содержащем медиану // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Вып. 37. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981. С. 77–84.
8. **Яблонский С. В., Козырев В. П.** Математические вопросы кибернетики // Инф. мат. Науч. совета по комплексной проблеме «Кибернетика» АН СССР. М., 1968. Вып. 19а. С. 3–15.
9. **Яблонский С. В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
10. **Barak A., Shamir E.** On the parallel evaluation of Boolean expressions // SIAM J. Comput. 1976. Vol. 5, No. 4. P. 678–681.
11. **Brent R. P., Kuck D. J., Maruyama K.** The parallel evaluation of arithmetic expressions without division // IEEE Trans. Comp. 1973. Vol. C-22. P. 532–534.
12. **Brent R. P.** The parallel evaluation of general arithmetic expressions in logarithmic time // J. ACM. 1974. Vol. 21, No. 2. P. 201–206.
13. **Commentz-Walter B.** Size-depth tradeoff in monotone Boolean formulae // Acta Inf. 1979. Vol. 12. P. 227–243.
14. **Commentz-Walter B., Sattler J.** Size-depth tradeoff in non-monotone Boolean formulae // Acta Inf. 1980. Vol. 14. P. 257–269.

15. **Coppersmith D., Schieber B.** Lower bounds on the depth of monotone arithmetic computations // Proc. 33rd Symp. Found. Comput. Sci. Washington: IEEE CS, 1992. P. 288–295.
16. **Kosaraju S. R.** Parallel evaluation of division-free arithmetic expressions // Proc. 18th Annual ACM Symp. Theory Comput. New York: ACM, 1986. P. 231–239.
17. **McColl W. F.** Some results on circuit depth. Theory of computation. Rep. No. 18. Coventry: Univ. Warwick, 1977.
18. **Muller D. E., Preparata F. P.** Restructuring of arithmetic expressions for parallel evaluation // J. ACM. 1976. Vol. 23, No. 3. P. 534–543.
19. **Preparata F. P., Muller D. E.** The time required to evaluate division-free arithmetic expressions // Inf. Proc. Lett. 1975. Vol. 3, No. 5. P. 144–146.
20. **Preparata F. P., Muller D. E.** Efficient parallel evaluation of Boolean expressions // IEEE Trans. Comp. 1976. Vol. C-25, No. 5. P. 548–549.
21. **Preparata F. P., Muller D. E., Barak A. B.** Reduction of depth of Boolean networks with a fan-in constraint // IEEE Trans. Comp. 1977. Vol. C-26, No. 5. P. 474–479.
22. **Ragaz M.** Parallelizable algebras // Arch. Math. Logic. 1986/87. Vol. 26. P. 77–99.
23. **Shamir E., Snir M.** On the depth complexity of formulas // Math. Syst. Theory. 1979/80. Vol. 13, No. 4. P. 301–322.
24. **Spira P. M.** On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions // Proc. 4th Hawaii Symp. System Sci. N. Hollywood: Western Periodical Co., 1971. P. 525–527.

Сергеев Игорь Сергеевич

Статья поступила
26 декабря 2018 г.
После доработки —
1 июня 2019 г.
Принята к публикации
5 июня 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2019. Vol. 26, No. 4. P. 108–120

UDC 519.7 DOI 10.33048/daio.2019.26.643

ON A RELATION BETWEEN THE DEPTH AND COMPLEXITY OF MONOTONE BOOLEAN FORMULAS *)

I. S. Sergeev

Scientific and Research Institute «Kvant»,
15 Chetvyortyi Likhachyovskii Lane, 125438 Moscow, Russia

E-mail: `isserg@gmail.com`

Abstract. We present a sequence of monotone Boolean functions whose depth over the basis $\{\vee, \wedge\}$ is $c > 1.06$ times greater than the logarithm of the formula complexity. Tab. 1, bibliogr. 24.

Keywords: Boolean formula, depth, complexity, monotone function.

REFERENCES

1. **M. I. Grinchuk,** Sharpening an upper bound on the adder and comparator depths, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **15** (2), 12–22 (2008) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **3** (1), 61–67 (2009)].
2. **R. F. Safin,** On a relation between depth and complexity in precomplete classes of k-valued logic, in *Mathematical Problems of Cybernetics*, Vol. 13 (Fizmatlit, Moscow, 2004), pp. 223–278 [Russian].
3. **P. B. Tarasov,** Conditions for the uniformity of systems of multivalued logic functions, *Cand. Sci. Dissertation* (Moscow State Univ., Moscow, 2016) [Russian].
4. **A. B. Ugol'nikov,** Depth and polynomial equivalence of formulas for closed classes of two-valued logic, *Mat. Zametki* **42** (4), 603–612 (1987) [Russian] [*Math. Notes* **42** (4), 832–837 (1987)].
5. **V. M. Khrapchenko,** Asymptotic estimate of addition time of a parallel adder, in *Problems of Cybernetics*, Vol. 19 (Nauka, Moscow, 1967), pp. 107–120 [Russian] [*Syst. Theory Res.* **19**, 105–122 (1970)].
6. **V. M. Khrapchenko,** On a relation between complexity and depth of formulas, in *Methods of Discrete Analysis in Synthesis of Control Systems*, Vol. 32 (Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1978), pp. 76–94 [Russian].

*) This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 19–01–00294-a).

7. **V. M. Khrapchenko,** On a relation between complexity and depth of formulas in the basis containing median, in *Methods of Discrete Analysis in Studying Boolean Functions and Graphs*, Vol. 37 (Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1981), pp. 77–84 [Russian].
8. **S. V. Yablonskii** and **V. P. Kozyrev,** Mathematical problems of cybernetics, in *Information Materials of Scientific Council of Academy of Sciences USSR on Complex Problem "Cybernetics"*, Vol. 19a (Akad. Nauk USSR, Moscow, 1968), pp. 3–15 [Russian].
9. **S. V. Yablonskii,** *Introduction to Discrete Mathematics* (Nauka, Moscow, 1986) [Russian].
10. **A. Barak** and **E. Shamir,** On the parallel evaluation of Boolean expressions, *SIAM J. Comput.* **5** (4), 678–681 (1976).
11. **R. P. Brent, D. J. Kuck,** and **K. Maruyama,** The parallel evaluation of arithmetic expressions without division, *IEEE Trans. Comp.* **C-22**, 532–534 (1973).
12. **R. P. Brent,** The parallel evaluation of general arithmetic expressions in logarithmic time, *J. ACM* **21** (2), 201–206 (1974).
13. **B. Commentz-Walter,** Size-depth tradeoff in monotone Boolean formulae, *Acta Inform.* **12**, 227–243 (1979).
14. **B. Commentz-Walter** and **J. Sattler,** Size-depth tradeoff in nonmonotone Boolean formulae, *Acta Inform.* **14**, 257–269 (1980).
15. **D. Coppersmith** and **B. Schieber,** Lower bounds on the depth of monotone arithmetic computations, in *Proc. 33rd Symp. Found. Comput. Sci.* (IEEE CS, Washington, 1992), pp. 288–295.
16. **S. R. Kosaraju,** Parallel evaluation of division-free arithmetic expressions, in *Proc. 18th Annu. ACM Symp. Theory Comput.* (ACM, New York, 1986), pp. 231–239.
17. **W. F. McColl,** Some results on circuit depth. Theory of computation, *Report No. 18,* (Univ. of Warwick, Coventry, 1977).
18. **D. E. Muller** and **F. P. Preparata,** Restructuring of arithmetic expressions for parallel evaluation, *J. ACM* **23** (3), 534–543 (1976).
19. **F. P. Preparata** and **D. E. Muller,** The time required to evaluate division-free arithmetic expressions, *Inf. Proc. Lett.* **3** (5), 144–146 (1975).
20. **F. P. Preparata** and **D. E. Muller,** Efficient parallel evaluation of Boolean expressions, *IEEE Trans. Comp.* **C-25** (5), 548–549 (1976).
21. **F. P. Preparata, D. E. Muller,** and **A. B. Barak,** Reduction of depth of Boolean networks with a fan-in constraint, *IEEE Trans. Comp.* **C-26** (5), 474–479 (1977).
22. **M. Ragaz,** Parallelizable algebras, *Arch. Math. Logic* **26**, 77–99 (1986/87).
23. **E. Shamir** and **M. Snir,** On the depth complexity of formulas, *Math. Syst. Theory* **13** (4), 301–322 (1979/80).

24. **P. M. Spira,** On time-hardware complexity tradeoffs for Boolean functions, in *Proc. Hawaii Symp. Syst. Sci.* (Western Periodical Company, N. Hollywood, 1971), pp. 525–527.

Igor S. Sergeev

Received December 26, 2018
Revised June 1, 2019
Accepted June 5, 2019