ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2019. Т. 26, № 4. С. 74–107

УДК 519.714 DOI 10.33048/daio.2019.26.662

О СОВЕРШЕННОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ПРАВИЛЬНЫХ РАЗБИЕНИЙ МНОЖЕСТВА РЁБЕР n-МЕРНОГО КУБА *)

К. Л. Рычков

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: `rychkov@math.nsc.ru`

Аннотация. Доказано, что при $n = 3, 5$ и при n, равном степени двойки, любое минимальное правильное разбиение множества рёбер n-мерного куба является совершенным. Следствием этих результатов является описание классов всех минимальных параллельно-последовательных контактных схем (π-схем), реализующих линейные булевы функции, существенно зависящие от n переменных при соответствующих значениях n. Библиогр. 16.

Ключевые слова: булева функция, π-схема, правильное разбиение множества рёбер n-мерного куба, нижняя оценка сложности.

Введение

В статьях [1–3] В. М. Храпченко сформулировал некоторый общий метод получения нижних оценок сложности π-схем, реализующих данную конкретную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. В дальнейшем этот метод получил своё развитие в работах многих других авторов [4–10]. Заметим, что возможности метода не исчерпываются только нижними оценками сложности π-схем. В [11] на его основе удалось получить полное описание класса всех минимальных π-схем, реализующих линейную булеву функцию, существенно зависящую от $n = 2^k$ переменных. А именно, было показано, что любая минимальная π-схема для такой функции по сути является π-схемой, построенной по несколько обобщённому алгоритму С. В. Яблонского [11–13]. Естественным образом возникает гипотеза, состоящая в том, что та же картина должна сохраняться и для произвольного n, т. е. в случае линейной булевой функции, существенно зависящей от произвольного числа переменных. В настоящей работе приведено решение задач, к которым в [13] на основе метода В. М. Храпченко сведено

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1 (проект № 0314–2019–0016).

доказательство этой гипотезы в случаях $n = 2^k$, $n = 3$ и $n = 5$. Эти задачи заключаются в том, чтобы доказать утверждения, сформулированные ниже как теоремы 1, 2 и 3 соответственно.

Единичным n-мерным кубом B^n называется множество всех двоичных наборов $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Сами двоичные наборы называются *вершинами куба*. Вершину $\alpha \in \mathrm{B}^n$ будем называть *чётной*, если $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0 \pmod 2$. В противном случае назовём её *нечётной*. Через $\mathrm{N}^0, \mathrm{N}^1$ обозначим множество всех чётных и нечётных вершин куба B^n соответственно.

Элементы множества $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ назовём (0-1)-*парами* куба B^n. Для произвольной (0-1)-пары $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ вершины α, β будем называть *концами пары*. При этом вершину α назовём *чётным концом*, вершину β — *нечётным*, множество $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ — *множеством* (0-1)-*пар* куба B^n.

Множество вида $A^0 \times A^1$, где $A^0 \subseteq \mathrm{N}^0$, $A^1 \subseteq \mathrm{N}^1$, будем называть *прямоугольным подмножеством* множества $\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ или *прямоугольником*.

Для произвольного подмножества $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ через $\mathrm{N}^0(M), \mathrm{N}^1(M)$ обозначим соответственно множества всех чётных и нечётных концов (0-1)-пар из M. Прямоугольник $[M] = \mathrm{N}^0(M) \times \mathrm{N}^1(M)$ назовём *прямоугольником, натянутым на M*.

Через $\mathrm{dist}(\alpha, \beta)$ обозначим *расстояние Хэмминга* между вершинами $\alpha, \beta \in \mathrm{B}^n$, т. е. число разрядов, в которых наборы $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ отличаются друг от друга.

Пара $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ называется (0-1)-*ребром* куба B^n, если $\mathrm{dist}(\alpha, \beta) = 1$. Если при этом для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выполнено $\alpha_i \neq \beta_i$, то пара (α, β) называется (0-1)-*ребром направления i*. Если помимо этого $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 0$, то пару (α, β) будем называть *отрицательным*, а если $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, то *положительным* (0-1)-*ребром направления i*.

Множество всех (0-1)-рёбер куба B^n будем называть *множеством* R *куба* B^n или просто *множеством* R. Множество R_i^{-1} всех отрицательных и множество R_i^1 всех положительных (0-1)-рёбер направления i куба B^n назовём *отрицательной* и *положительной компонентами с номером i множества* R соответственно, $i = 1, \ldots, n$. Множество R_i всех (0-1)-рёбер направления i куба B^n назовём *большой компонентой с номером i множества* R, $i = 1, \ldots, n$.

Подмножество Q множества R называется *однородным*, если существуют такие $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, что $Q \subseteq \mathrm{R}_i^\delta$ (другими словами, если Q состоит из (0-1)-рёбер одного направления и одного знака).

Семейство $P = \{Q_1, \ldots, Q_L\}$ непустых подмножеств некоторого множества A называется *разбиением* этого множества, если подмножества $Q_1, \ldots, Q_L$ попарно не пересекаются и $Q_1 \cup \cdots \cup Q_L = A$. Мощность семейства P называется *мощностью разбиения*, а множества $Q_1, \ldots, Q_L$ — *блоками разбиения*.

Разбиение $P = \{Q_1, \ldots, Q_L\}$ множества R назовём *однородным*, если все блоки $Q_1, \ldots, Q_L$ этого разбиения являются однородными подмножествами R. Разбиение $P = \{Q_1, \ldots, Q_L\}$ множества R назовём *правильным*, если оно однородно и прямоугольники $[Q_1], \ldots, [Q_L]$ попарно не пересекаются; назовём его *неправильным*, если оно однородно и не является правильным. Правильное разбиение множества R назовём *минимальным*, если оно имеет наименьшую мощность среди всех правильных разбиений этого множества. Мощность минимального правильного разбиения множества R обозначим через μ_n. Правильное разбиение $P = \{Q_1, \ldots, Q_L\}$ множества R назовём *совершенным*, если выполнено равенство $[Q_1] \cup \cdots \cup [Q_L] = \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$.

Отметим, что множество рёбер любого n-мерного куба в евклидовом пространстве можно естественным образом отождествить с множеством R куба B^n. При этом такие понятия, как однородность, правильность и совершенность правильного разбиения множества рёбер n-мерного куба, не зависят от способа такого (естественного) отождествления. В этом смысле используем эти понятия как по отношению к множеству R куба B^n, так и по отношению к множеству рёбер произвольного n-мерного куба.

В [13] установлено, что в общем случае для доказательства вышеупомянутой гипотезы достаточно доказать, что, во-первых, справедливо равенство

$$\mu_n = n^2 + n(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}) - 2(n - 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor})^2, \tag{1}$$

а во-вторых, все минимальные правильные разбиения множества R куба B^n совершенны.

В [14] приведено доказательство равенства (1) при $n = 2^k$ и при $n = 3, 5, 6, 7$. Поэтому для доказательства этой гипотезы в случаях $n = 2^k$, $n = 3$ и $n = 5$ достаточно доказать соответственно следующие три утверждения (что и составляет цель настоящей статьи).

Теорема 1. *При $n = 2^k$ любое минимальное правильное разбиение множества рёбер n-мерного куба совершенно.*

Теорема 2. *Любое минимальное правильное разбиение множества рёбер 3-мерного куба совершенно.*

Теорема 3. *Любое минимальное правильное разбиение множества рёбер 5-мерного куба совершенно.*

Теорема 1 впервые была доказана в [11]. Основным результатом настоящей статьи является теорема 3.

Заметим, что из равенства (1) следует, что $\mu_3 = 10$, $\mu_5 = 28$ и при $n = 2^k$ справедливо равенство $\mu_n = n^2$.

1. Доказательство теорем 1 и 2

Через U_n и $\mathrm{Correct}_n$ обозначим множество всех однородных и всех правильных разбиений множества R соответственно. Через $\mathrm{U}_n(L)$ и $\mathrm{Correct}_n(L)$ обозначим соответственно множество всех таких $P \in \mathrm{U}_n$ и множество всех таких $P \in \mathrm{Correct}_n$, что $|P| = L$.

Для произвольного семейства $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ однородных подмножеств множества R множество $\mathrm{G}(P) = \{[Q_1], \dots, [Q_L]\}$ назовём *гирляндой* семейства P, а величину $\mathrm{s}(P) = |[Q_1]| + \dots + |[Q_L]|$ — *площадью гирлянды* $\mathrm{G}(P)$.

Лемма 1. *Для любого семейства P однородных подмножеств множества R справедливо равенство*

$$\mathrm{s}(P) = \sum_{Q \in P} |Q|^2.$$

Доказательство. Из однородности произвольного $Q \in P$ следует, что (0-1)-рёбра из Q имеют одно направление и тем самым не имеют общих концов. Значит, справедливы равенства $|\mathrm{N}^0(Q)| = |\mathrm{N}^1(Q)| = |Q|$, а потому и равенство $|[Q]| = |Q|^2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если для правильного разбиения $P \in \mathrm{Correct}_n$ справедливо неравенство $\mathrm{s}(P) \geqslant (2^{n-1})^2$, то P совершенно.*

Доказательство. Заметим, что $|\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1| = (2^{n-1})^2$ и по определению для правильного разбиения $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ множества R справедливо равенство $\mathrm{s}(P) = |[Q_1] \cup \dots \cup [Q_L]|$. Поэтому из неравенства $\mathrm{s}(P) \geqslant (2^{n-1})^2$ следует, что $|[Q_1] \cup \dots \cup [Q_L]| \geqslant |\mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1|$. Значит, из включения $[Q_1] \cup \dots \cup [Q_L] \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ вытекает, что $[Q_1] \cup \dots \cup [Q_L] = \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$. Последнее равенство по определению означает, что разбиение P совершенно. Лемма 2 доказана.

В силу леммы 2 для доказательства теорем 1–3 достаточно установить справедливость неравенства $\mathrm{s}(P) \geqslant (2^{n-1})^2$ для всех $P \in \mathrm{Correct}_n(\mu_n)$ при соответствующих значениях n.

Лемма 3. *При любом $n \geqslant 1$ для любого однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_n(n^2)$ справедливо неравенство $\mathrm{s}(P) \geqslant (2^{n-1})^2$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное однородное разбиение $P = \{Q_1, \dots, Q_{n^2}\}$ множества R. В силу леммы 1, неравенства Коши — Буняковского и очевидных равенств $|Q_1| + \dots + |Q_{n^2}| = |\mathrm{R}| = n2^{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{s}(P) &= |[\![Q_1]\!]| + \dots + |[\![Q_{n^2}]\!]| = |Q_1|^2 + \dots + |Q_{n^2}|^2 \\ &\geqslant \frac{(|Q_1| + \dots + |Q_{n^2}|)^2}{n^2} = \frac{|\mathrm{R}|^2}{n^2} = \frac{(n2^{n-1})^2}{n^2} = (2^{n-1})^2.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Справедливость неравенства $\mathrm{s}(P) \geqslant (2^{n-1})^2$ для всех $P \in \mathrm{Correct}_n(\mu_n)$ при $n = 2^k$ следует из выполненного при этих n равенства $\mu_n = n^2$, включения $\mathrm{Correct}_n(n^2) \subseteq \mathrm{U}_n(n^2)$ и леммы 3. Теорема 1 доказана.

Лемма 4. *Для любого однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_3(10)$ *справедливо неравенство* $\mathrm{s}(P) \geqslant (2^{3-1})^2$.

Доказательство. Заметим, что для множества R куба B^3 справедливо равенство $|\mathrm{R}| = 12$, а для любого непустого однородного подмножества Q множества R куба B^3 справедливы неравенства $1 \leqslant |Q| \leqslant 2$. Поэтому произвольное однородное разбиение $P = \{Q_1, \dots, Q_{10}\}$ множества R куба B^3 состоит из 8 блоков мощности 1 и из двух блоков мощности 2. Значит, для этого разбиения в силу леммы 1 имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{s}(P) &= |[\![Q_1]\!]| + \dots + |[\![Q_{10}]\!]| \\ &= |Q_1|^2 + \dots + |Q_{10}|^2 = 8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 16 = (2^{3-1})^2.\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Справедливость неравенства $\mathrm{s}(P) \geqslant (2^{n-1})^2$ для всех $P \in \mathrm{Correct}_n(\mu_n)$ при $n = 3$ следует из равенства $\mu_3 = 10$, включения $\mathrm{Correct}_3(10) \subseteq \mathrm{U}_3(10)$ и леммы 4. Теорема 2 доказана.

В отличие от случаев $n = 2^k$ и $n = 3$ при $n = 5$ среди однородных разбиений $P \in \mathrm{U}_n(\mu_n)$ существуют такие P, что $\mathrm{s}(P) < (2^{n-1})^2$. Суть доказательства теоремы 3 заключается в том, чтобы показать неправильность всех таких P.

2. Признаки неправильности однородных разбиений множества R

Всюду далее полагаем $n \geqslant 2$.

Для произвольного однородного разбиения P множества R подмножества

$$P_i^{-1} = \bigl\{Q \in P \mid Q \subseteq \mathrm{R}_i^{-1}\bigr\}, \quad P_i^1 = \bigl\{Q \in P \mid Q \subseteq \mathrm{R}_i^1\bigr\}, \quad P_i = P_i^{-1} \cup P_i^1$$

множества P назовём *отрицательной, положительной* и *большой компонентой с номером* i *разбиения* P соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Заметим, что любая компонента P_i^δ однородного разбиения P множества R является разбиением соответствующей компоненты R_i^δ множества R.

Матрицей сложности однородного разбиения P множества R назовём матрицу $\mathbb{L}(P) = (\ell_i^\delta)_{i=1,\ldots,n}^{\delta=-1,1}$ размера $2 \times n$, где $\ell_i^\delta = |P_i^\delta|$. Для произвольного $i \in \{1, \ldots, n\}$ матрицу

$$\mathbb{L}_{(i)}(P) = \begin{pmatrix} \ell_1^{-1} & \ldots & \ell_{i-1}^{-1} & \min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\} & \ell_{i+1}^{-1} & \ldots & \ell_n^{-1} \\ \ell_1^1 & \ldots & \ell_{i-1}^1 & \min\left\{\ell_i^{-1}, \ell_i^1\right\} & \ell_{i+1}^1 & \ldots & \ell_n^1 \end{pmatrix}$$

будем называть *нижней производной матрицы* $\mathbb{L}(P)$ *по столбцу с номером* i. Заметим, что элементы матриц $\mathbb{L}(P)$ и $\mathbb{L}_{(i)}(P)$ являются целыми положительными числами.

Величины $\|\mathbb{L}\|_{-1}$ и $\|\mathbb{L}\|_1$ для числовой матрицы $\mathbb{L} = (\ell_i^\delta)$ с ненулевыми элементами определим формулами $\|\mathbb{L}\|_{-1} = \sum\limits_{i,\delta} \frac{1}{\ell_i^\delta}$, $\|\mathbb{L}\|_1 = \sum\limits_{i,\delta} \ell_i^\delta$.

Заметим, что для любого однородного разбиения P множества R справедливо равенство $|P| = \|\mathbb{L}(P)\|_1$.

Через $\mathfrak{L}(k)$ обозначим множество всех матриц с целыми положительными элементами размера $2 \times k$. Пусть $\mathfrak{L} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{L}(k)$. Через $\mathfrak{L}_{-1}^4$ обозначим класс всех матриц $\mathbb{L} \in \mathfrak{L}$ таких, что $\mathbb{L}$ удовлетворяет одному из двух условий:

1) $\|\mathbb{L}\|_{-1} > 4$;

2) $\|\mathbb{L}\|_{-1} = 4$ и не все элементы матрицы $\mathbb{L}$ равны степеням двойки.

Следующие две теоремы из [14] будем называть соответственно *первым* и *вторым признаком неправильности однородных разбиений множества* R (в [14] эти теоремы имеют номера 4 и 11 соответственно).

Теорема 4 (первый признак неправильности)**.** *Если матрица сложности однородного разбиения P множества* R *принадлежит классу $\mathfrak{L}_{-1}^4$, то разбиение P неправильное.*

Теорема 5 (второй признак неправильности)**.** *Если для однородного разбиения P множества* R *при некотором $i \in \{1, \ldots, n\}$ справедливо включение $\mathbb{L}_{(i)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, то разбиение P неправильное.*

Для произвольных $0 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$ множество ${\mathrm{B}^n}_{i_1,\ldots,i_k}^{\sigma_1,\ldots,\sigma_k} = \{\alpha \in \mathrm{B}^n \mid \alpha_{i_1} = \sigma_1, \ldots, \alpha_{i_k} = \sigma_k\}$ называется *гранью* куба B^n, а число $\dim(F) = n - k$ — *размерностью* грани $F = {\mathrm{B}^n}_{i_1,\ldots,i_k}^{\sigma_1,\ldots,\sigma_k}$. Множества

$$\mathrm{Dir}(F) = \{i_1, \ldots, i_k\} \quad \text{и} \quad \mathrm{Form}(F) = \{1, \ldots, n\} \setminus \mathrm{Dir}(F)$$

называются *направлением* и *множеством образующих* этой грани соответственно.

Множество всех граней куба B^n обозначим через $\mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$. Через $\mathfrak{F}_k(\mathrm{B}^n)$ и $\mathfrak{F}_{\geqslant k}(\mathrm{B}^n)$ обозначим множество всех граней $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ размерностей $\dim(F) = k$ и $\dim(F) \geqslant k$ соответственно. Через $\mathfrak{F}_{\geqslant k}^1(\mathrm{B}^n)$ обозначим множество всех таких граней $F \in \mathfrak{F}_{\geqslant k}(\mathrm{B}^n)$, что число $\dim(F)$ нечётное. Для произвольной грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ через $\mathfrak{F}_k(F)$ обозначим множество всех таких $X \in \mathfrak{F}_k(\mathrm{B}^n)$, что $X \subseteq F$.

Будем говорить, что (0-1)-ребро $(\alpha,\beta) \in \mathrm{R}$ *является* (0-1)-*ребром грани* $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$, если выполнено включение $\{\alpha,\beta\} \subseteq F$.

Для произвольной грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ через $\mathrm{R}(F)$ обозначим множество всех (0-1)-рёбер грани F. Множества

$$\mathrm{R}_i^{-1}(F) = \bigl\{r \in \mathrm{R}(F) \mid r \in \mathrm{R}_i^{-1}\bigr\}, \quad \mathrm{R}_i^{1}(F) = \bigl\{r \in \mathrm{R}(F) \mid r \in \mathrm{R}_i^{1}\bigr\},$$
$$\mathrm{R}_i(F) = \mathrm{R}_i^{-1}(F) \cup \mathrm{R}_i^{1}(F)$$

будем называть *отрицательной, положительной* и *большой компонентой с номером i множества* $\mathrm{R}(F)$ соответственно, $i = 1, \ldots, n$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 5. *Для любой грани $F \in \mathfrak{F}_{\geqslant 2}(\mathrm{B}^n)$ справедливо равенство*

$$\bigl|\mathrm{R}_i^{\delta}(F)\bigr| = \begin{cases} 2^{\dim(F)-2}, & \text{если } i \in \mathrm{Form}(F),\ \delta \in \{-1,1\},\\ 0, & \text{если } i \in \mathrm{Dir}(F),\ \delta \in \{-1,1\}. \end{cases}$$

Будем говорить, что грань $F \in \mathfrak{F}_{\geqslant 2}(\mathrm{B}^n)$ является *опорной* для компоненты P_i^{δ}, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\delta \in \{-1,1\}$, однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_n$, если $\mathrm{R}_i^{\delta}(F) \neq \varnothing$ (т. е. если $i \in \mathrm{Form}(F)$) и для некоторого $Q \in P_i^{\delta}$ выполнено включение $\mathrm{R}_i^{\delta}(F) \subseteq Q$.

Множество $\mathrm{D}(F) = \{(\alpha,\beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1 \mid \mathrm{dist}(\alpha,\beta) = \dim(F)\}$ называется *диаметральным множеством* грани F.

Соединением куба B^n будем называть любое однородное двухэлементное подмножество $e = \{r_1, r_2\}$ множества R. *Индексом* и *знаком соединения e* назовём номер направления и знак (0-1)-рёбер r_1, r_2 соответственно. Сами (0-1)-рёбра r_1, r_2 будем называть *концами* этого соединения.

Множество E всех соединений куба B^n будем называть *множеством* E *куба* B^n или просто *множеством* E. Множество E_i^{-1} всех отрицательных и множество E_i^{1} всех положительных соединений индекса i куба B^n назовём *отрицательной* и *положительной компонентой с номером i множества* E соответственно, $i = 1, \ldots, n$. Множество E_i всех соединений индекса i куба B^n назовём *большой компонентой с номером i множества* E, $i = 1, \ldots, n$.

Расстояние $\rho(r_1, r_2)$ между (0-1)-*рёбрами* $r_1, r_2 \in \mathrm{R}$ определим как наименьшее из расстояний Хэмминга между концами (0-1)-ребра r_1 и концами (0-1)-ребра r_2. *Длиной соединения* $e = \{r_1, r_2\} \in \mathrm{E}$ назовём величину $\mathrm{w}(e) = \rho(r_1, r_2)$. Через $\mathrm{E}[k]$ обозначим множество всех таких $e \in \mathrm{E}$, что $\mathrm{w}(e) = k$.

Заметим, что для любого соединения $e = \{r_1, r_2\} \in \mathrm{E}$ минимум расстояний Хэмминга между концами (0-1)-ребра r_1 и концами (0-1)-ребра r_2

больше нуля и достигается на чётных (а также на нечётных) концах (0-1)-рёбер r_1, r_2. Значит, длина $\mathrm{w}(e)$ соединения $e \in \mathrm{E}$ может принимать только чётные положительные значения и $\mathrm{w}(e) < n$, поэтому справедливо равенство $\mathrm{E} = \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} \mathrm{E}[2k]$.

Будем говорить, что соединение $e = \{r_1, r_2\}$ куба B^n *порождено семейством P однородных подмножеств множества* R, если для некоторого $Q \in P$ оба конца этого соединения принадлежат Q. Для произвольного семейства P однородных подмножеств множества R через $\mathrm{E}(P)$ обозначим множество всех соединений e куба B^n, порождённых семейством P. Через $\mathrm{E}[k](P)$ обозначим множество всех таких $e \in \mathrm{E}(P)$, что $\mathrm{w}(e) = k$.

Для произвольного однородного подмножества $Q \subseteq \mathrm{R}$ через $\mathbf{P}_2(Q)$ обозначим множество всех 2-элементных подмножеств множества Q.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 6. *Для любого дизъюнктного семейства P однородных подмножеств множества* R *справедливо равенство* $\mathrm{E}(P) = \bigcup\limits_{Q \in P} \mathbf{P}_2(Q)$ *и множества* $\mathbf{P}_2(Q)$, $Q \in P$, *попарно не пересекаются.*

Для произвольного соединения $e = \{r_1, r_2\} \in \mathrm{E}$ через $\widetilde{e}$ обозначим минимальную по включению грань $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$, содержащую все концы (0-1)-рёбер r_1, r_2. При этом будем говорить, что *соединение e порождает грань* $F = \widetilde{e}$ куба B^n. Заметим, что для любого соединения $e \in \mathrm{E}$ справедливо равенство $\dim(\widetilde{e}) = \mathrm{w}(e) + 1$. Для произвольных однородного разбиения P множества R и грани $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^n)$ через $\mathrm{E}(P, F)$ обозначим множество всех таких $e \in \mathrm{E}(P)$, что $\widetilde{e} = F$.

Следующая лемма вытекает непосредственно из определений.

Лемма 7. *Для любого однородного разбиения P множества* R *при любом чётном $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ множества* $\mathrm{E}(P, F)$, $F \in \mathfrak{F}_{k+1}(\mathrm{B}^n)$, *попарно не пересекаются и справедливо равенство*

$$\mathrm{E}[k](P) = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}_{k+1}(\mathrm{B}^n)} \mathrm{E}(P, F).$$

Для произвольного однородного разбиения $P = \{Q_1, \ldots, Q_L\}$ множества R *точкой самопересечения гирлянды* $\mathrm{G}(P) = \{[Q_1], \ldots, [Q_L]\}$ называется такая (0-1)-пара $(\alpha, \beta) \in \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$, что $(\alpha, \beta) \in [Q_i] \cap [Q_j]$ для некоторых $[Q_i], [Q_j] \in \mathrm{G}(P)$, $i \neq j$.

Очевидно, что однородное разбиение P множества R тогда и только тогда неправильно, когда гирлянда $\mathrm{G}(P)$ имеет точку самопересечения.

Для произвольного однородного разбиения $P = \{Q_1, \dots, Q_L\}$ множества R и подмножества $M \subseteq \mathrm{N}^0 \times \mathrm{N}^1$ величина

$$\operatorname{def}(P, M) = |M| - |(\llbracket Q_1 \rrbracket \cup \dots \cup \llbracket Q_L \rrbracket) \cap M|$$

называется *дефицитом гирлянды* $\mathrm{G}(P)$ *относительно* M.

Заметим, что из этого определения следует, что $\operatorname{def}(P, M) \geqslant 0$.

Теорема 6 (третий признак неправильности). *Если для однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_n$ *существует такая грань* $F \in \mathfrak{F}^1_{\geqslant 3}(\mathrm{B}^n)$, *что справедливо неравенство*

$$|\mathrm{E}(P, F)| > 2^{\dim(F)-2} - \frac{1}{2}\operatorname{def}(P, \mathrm{D}(F)), \tag{2}$$

то разбиение P *неправильное.*

Доказательство. Достаточно показать, что диаметральное множество $\mathrm{D}(F)$ грани F содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$. Предположим, напротив, что множество $\mathrm{D}(F)$ не содержит точек самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$. Лемма 47 из [14] утверждает, что в этом случае справедливо равенство

$$|\mathrm{E}(P, F)| = \frac{1}{2}(|\mathrm{D}(F)| - \operatorname{def}(P, \mathrm{D}(F))),$$

что в силу очевидного равенства $|\mathrm{D}(F)| = 2^{\dim(F)-1}$ противоречит неравенству (2). Значит, наше предположение неверно и множество $\mathrm{D}(F)$ содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$. Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (четвёртый признак неправильности). *Если для однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_n$ *существует такая* 3*-мерная грань* $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$, *что в множестве* $\mathrm{E}(P, F)$ *имеются два соединения с разными индексами, то разбиение* P *неправильное.*

Доказательство. Достаточно показать, что диаметральное множество $\mathrm{D}(F)$ грани F содержит точку самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$. Через e_1 и e_2 обозначим такие два соединения из $\mathrm{E}(P, F)$, что e_1, e_2 имеют разные индексы. Тогда по определению множества $\mathrm{E}(P, F)$ и по лемме 7 имеем $\widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 = F$ и $e_1, e_2 \in \mathrm{E}\llbracket 2 \rrbracket(P)$. Теорема 14 из [14] утверждает, что из этих соотношений и различия индексов соединений e_1, e_2 следует наличие в множестве $\mathrm{D}(F)$ точки самопересечения гирлянды $\mathrm{G}(P)$. Теорема 7 доказана.

Теорема 8 (пятый признак неправильности). *Если для некоторой компоненты* P_i^δ, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, *однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_n$ *существует такая опорная для неё* 4*-мерная грань* $F \in \mathfrak{F}_4(\mathrm{B}^n)$, *что каждый столбец матрицы сложности* $\mathbb{L}(P) = \left(\ell_i^\delta\right)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ *с номером из множества* $\operatorname{Form}(F) \setminus \{i\}$ *содержит элемент, не превосходящий* 3, *то разбиение* P *неправильное.*

Доказательство. Покажем, что разбиение P является неправильным по четвёртому признаку (теорема 7). Для этого достаточно доказать существование такой 3-мерной грани $X \in \mathfrak{F}_3(F)$, что в множестве $\mathrm{E}(P, X)$ имеются два соединения с разными индексами.

Без ограничения общности считаем, что грань F является опорной для компоненты P_1^1, $\mathrm{Form}(F) = \{1,2,3,4\}$ и $\ell_2^1, \ell_3^1, \ell_4^1 \leqslant 3$. Тогда, во-первых, по лемме 5 при каждом $i \in \{1,2,3,4\}$ справедливо равенство $\bigl|\mathrm{R}_i^1(F)\bigr| = 4$. Во-вторых, по определению опорной грани существует такое $Q \in P_1^1$, что $\mathrm{R}_1^1(F) \subseteq Q$. В-третьих, при каждом $i \in \{2,3,4\}$ из $\ell_i^1 \leqslant 3$ и $\mathrm{R}_i^1(F) \subseteq \mathrm{R}_i^1$ следует существование такого $Q \in P_i^1$, что $\bigl|\mathrm{R}_i^1(F) \cap Q\bigr| \geqslant 2$. Тем самым в силу леммы 6 имеем

$$\begin{aligned} &\bigl|\mathbf{P}_2\bigl(\mathrm{R}_1^1(F)\bigr) \cap \mathrm{E}(P)\bigr| = 6, \quad &&\bigl|\mathbf{P}_2\bigl(\mathrm{R}_2^1(F)\bigr) \cap \mathrm{E}(P)\bigr| \geqslant 1,\\ &\bigl|\mathbf{P}_2\bigl(\mathrm{R}_3^1(F)\bigr) \cap \mathrm{E}(P)\bigr| \geqslant 1, \quad &&\bigl|\mathbf{P}_2\bigl(\mathrm{R}_4^1(F)\bigr) \cap \mathrm{E}(P)\bigr| \geqslant 1. \end{aligned}$$

Эти соотношения наряду с включением $\mathbf{P}_2\bigl(\mathrm{R}_i^\delta(F)\bigr) \subseteq \mathrm{E}_i^\delta\mathtt{[2]}$ означают существование девяти таких положительных соединений $e \in \mathrm{E}\mathtt{[2]}(P)$, что $\widetilde{e} \in \mathfrak{F}_3(F)$. Очевидно, что для любых двух различных $e_1, e_2 \in \mathrm{E}\mathtt{[2]}$ из одновременного совпадения индексов и знаков этих соединений следует, что $\widetilde{e}_1 \neq \widetilde{e}_2$. Поэтому равенство $|\mathfrak{F}_3(F)| = 8$ влечёт существование среди указанных девяти соединений двух таких, что они имеют разные индексы и порождают одну и ту же 3-мерную грань. Эта грань и является искомой гранью X. Теорема 8 доказана.

Теорема 9 (шестой признак неправильности)**.** *Если для некоторой компоненты* P_i^δ, $i \in \{1,\dots,n\}$, $\delta \in \{-1,1\}$, *однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_n$ *существует такая опорная для неё грань* $F \in \mathfrak{F}_4(\mathrm{B}^n)$, *что среди столбцов матрицы сложности* $\mathbb{L}(P) = \bigl(\ell_i^\delta\bigr)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ *с номерами из множества* $\mathrm{Form}(F) \setminus \{i\}$ *найдутся два, один из которых содержит элемент, не превосходящий* 2, *а другой — элемент, не превосходящий* 3, *то разбиение* P *неправильное.*

Доказательство. Все рассуждения аналогичны рассуждениям из доказательства теоремы 8.

Без ограничения общности считаем, что грань F является опорной для компоненты P_1^1, $\mathrm{Form}(F) = \{1,2,3,4\}$, $\ell_2^1 \leqslant 2$ и $\ell_3^1 \leqslant 3$. Тогда, во-первых, по лемме 5 при каждом $i \in \{1,2,3\}$ справедливо равенство $\bigl|\mathrm{R}_i^1(F)\bigr| = 4$. Во-вторых, по определению опорной грани существует такое $Q \in P_1^1$, что $\mathrm{R}_1^1(F) \subseteq Q$. В-третьих, из $\ell_2^1 \leqslant 2$ и $\mathrm{R}_2^1(F) \subseteq \mathrm{R}_2^1$ следует либо существование такого $Q \in P_2^1$, что $\bigl|\mathrm{R}_2^1(F) \cap Q\bigr| \geqslant 3$, либо существование двух таких $Q_1, Q_2 \in P_2^1$, что $\bigl|\mathrm{R}_2^1(F) \cap Q_1\bigr| = \bigl|\mathrm{R}_2^1(F) \cap Q_2\bigr| = 2$. В-четвёртых, из $\ell_3^1 \leqslant 3$ и $\mathrm{R}_3^1(F) \subseteq \mathrm{R}_3^1$ следует существование такого

$Q \in P_3^1$, что $\left|\mathrm{R}_3^1(F) \cap Q\right| \geqslant 2$, поэтому в силу леммы 6 имеем

$$\left|\mathbf{P}_2\big(\mathrm{R}_1^1(F)\big) \cap \mathrm{E}(P)\right| = 6, \quad \left|\mathbf{P}_2\big(\mathrm{R}_2^1(F)\big) \cap \mathrm{E}(P)\right| \geqslant 2,$$
$$\left|\mathbf{P}_2\big(\mathrm{R}_3^1(F)\big) \cap \mathrm{E}(P)\right| \geqslant 1.$$

Теорема 9 доказана.

3. Отношение двойственности на множестве $\mathrm{E}[2]$ и седьмой признак неправильности однородных разбиений множества R куба B^n

Двойственной парой трёхмерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ назовём такую пару соединений $\{e_1, e_2\} \subseteq \mathrm{E}[2]$, что e_1, e_2 имеют одинаковые индексы и противоположные знаки и справедливы равенства $\widetilde{e}_1 = \widetilde{e}_2 = F$.

На множестве $\mathrm{E}[2]$ определим бинарное отношение, которое будем называть *отношением двойственности*: по определению два соединения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}[2]$ связаны отношением двойственности, если пара $\{e_1, e_2\}$ является двойственной парой некоторой трёхмерной грани куба B^n.

Лемма 8. *Для любой трёхмерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ двойственными парами этой грани являются три пары $\left\{\mathrm{R}_i^{-1}(F), \mathrm{R}_i^1(F)\right\}$, $i \in \mathrm{Form}(F)$, и только они.*

Доказательство. По лемме 5 для любой грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ среди $2n$ компонент $\mathrm{R}_1^{-1}(F), \ldots, \mathrm{R}_n^{-1}(F), \mathrm{R}_1^1(F), \ldots, \mathrm{R}_n^1(F)$ множества $\mathrm{R}(F)$ непустыми являются следующие шесть: $\mathrm{R}_i^\delta(F)$, $i \in \mathrm{Form}(F)$, $\delta \in \{-1, 1\}$. При этом мощность каждой из этих шести компонент равна 2. Значит, все они являются соединениями куба B^n. Очевидно, что для соединения $e \in \mathrm{E}[2]$ равенство $\widetilde{e} = F$ выполнено тогда и только тогда, когда e совпадает с одной из этих шести компонент. Лемма 8 доказана.

Если соединения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}[2]$ связаны отношением двойственности, будем говорить, что *соединение e_2 двойственно соединению e_1* и писать $e_2 = e_1^*$.

Следующие два утверждения с очевидностью вытекают из леммы 8.

Лемма 9. *Для любого соединения $e \in \mathrm{E}[2]$ существует единственное двойственное ему соединение $e^* \in \mathrm{E}[2]$. При этом соединения e и e^* имеют одинаковые индексы и противоположные знаки и справедливо равенство $e^{**} = e$.*

Лемма 10. *Если для однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_n$ и 3-мерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$ два различных соединения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}(P, F)$ не связаны отношением двойственности, то они имеют разные индексы.*

Отношение двойственности следующим образом расширим до множества E: по определению два соединения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}$ связаны отношением двойственности, если $e_1, e_2 \in \mathrm{E}[2]$ и соединения e_1, e_2 связаны отношением двойственности в $\mathrm{E}[2]$.

Для произвольного множества $A \subseteq \mathrm{E}$ через $(A)^*$ обозначим множество всех таких соединений $e \in \mathrm{E}$, что e связано отношением двойственности с некоторым соединением из A.

Заметим, что если для подмножества $A \subseteq \mathrm{E}$ концы любого соединения $e \in A$ принадлежат некоторому подмножеству $Q \subseteq \mathrm{R}$, то пара множеств (Q, A) представляет собой граф с множеством вершин Q и множеством рёбер A.

Для произвольного $A \subseteq \mathrm{E}$ множество $\mathrm{V}(A)$ всех (0-1)-рёбер куба B^n, которые являются концами соединений $e \in A$, назовём *носителем* множества A. Подмножество $A \subseteq \mathrm{E}$ будем называть *треугольником*, если треугольником (полным графом с тремя вершинами) является граф $(\mathrm{V}(A), A)$. Подмножество $A \subseteq \mathrm{E}$ будем называть *звездой*, если все соединения $e \in A$ имеют один общий конец (т. е. если звездой является граф $(\mathrm{V}(A), A)$). Для произвольного множества $A \subseteq \mathrm{E}$ через $\widetilde{A}$ обозначим минимальную по включению грань куба B^n, содержащую все концы (0-1)-рёбер из $\mathrm{V}(A)$.

Следующее простое утверждение вытекает из лемм 35–37 и 39 в [14].

Лемма 11. *Для любого треугольника* $\Delta \subseteq \mathrm{E}[2]$ *множество* $(\Delta)^*$ *является звездой и справедливы равенства* $\dim(\widetilde{\Delta}) = 4$ *и* $\widetilde{(\Delta)^*} = \widetilde{\Delta}$.

Подмножество $A \subseteq \mathrm{E}$ назовём *двойственно независимым*, если никакие два соединения $e_1, e_2 \in A$ не связаны отношением двойственности. Для произвольного подмножества $M \subseteq \mathrm{E}$ подмножество $A \subseteq M$ назовём *наибольшим двойственно независимым подмножеством множества* M, если A является двойственно независимым и имеет наибольшую мощность среди всех двойственно независимых подмножеств множества M. *Числом двойственной независимости* $\mathfrak{B}^*(P)$ произвольного семейства P однородных подмножеств множества R назовём мощность наибольшего двойственно независимого подмножества множества $\mathrm{E}(P)$.

Теорема 10 (седьмой признак неправильности)**.** *Если для однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_n$ *выполнено неравенство*

$$\mathfrak{B}^*(P) > 2^{n-3}\binom{n}{3} + 2^{n-2} \sum_{2 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} \binom{n}{2k+1}, \tag{3}$$

то разбиение P *неправильное.*[1)]

1) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$

Доказательство. Для однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_n$ через $\mathfrak{B}_2^*(P)$ обозначим мощность наибольшего двойственно независимого подмножества множества $\mathrm{E}[2](P)$.

По определению расширенного отношения двойственности никакое соединение e из множества $\mathrm{E}(P)$ с длиной $\mathrm{w}(e) > 2$ не связано отношением двойственности ни с каким другим соединением из этого множества. Поэтому для наибольшего двойственно независимого подмножества $A \subseteq \mathrm{E}(P)$ при $k \geqslant 2$ справедливо равенство $A \cap \mathrm{E}[2k](P) = \mathrm{E}[2k](P)$, а множество $A \cap \mathrm{E}[2](P)$ является наибольшим двойственно независимым подмножеством множества $\mathrm{E}[2](P)$. Отсюда в силу того, что множества $\mathrm{E}[2k](P)$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$, попарно не пересекаются и справедливо равенство $\mathrm{E}(P) = \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} \mathrm{E}[2k](P)$, имеем

$$\mathfrak{B}^*(P) = \mathfrak{B}_2^*(P) + \sum_{2 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}} |\mathrm{E}[2k](P)|.$$

Значит, из неравенства (3) следует, что либо выполнено неравенство $\mathfrak{B}_2^*(P) > 2^{n-3}\binom{n}{3}$, либо для некоторого k, $2 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$, выполнено неравенство $|\mathrm{E}[2k](P)| > 2^{n-2}\binom{n}{2k+1}$.

Пусть $\mathfrak{B}_2^*(P) > 2^{n-3}\binom{n}{3}$. Тогда $|A| > 2^{n-3}\binom{n}{3}$ для наибольшего двойственно независимого подмножества A множества $\mathrm{E}[2](P)$, поэтому из леммы 7 и равенства $|\mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)| = 2^{n-3}\binom{n}{3}$ следует существование такой 3-мерной грани $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^n)$, что $|A \cap \mathrm{E}(P, F)| \geqslant 2$. Последнее неравенство означает, что в множестве $\mathrm{E}(P, F)$ имеются два различных соединения, не связанных отношением двойственности. По лемме 10 эти соединения имеют разные индексы. Значит, по четвёртому признаку (теорема 7) разбиение P неправильное.

Предположим, что для некоторого k, $2 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$, выполнено неравенство $|\mathrm{E}[2k](P)| > 2^{n-2}\binom{n}{2k+1}$. Тогда в силу леммы 7 из равенства $|\mathfrak{F}_{2k+1}(\mathrm{B}^n)| = 2^{n-2k-1}\binom{n}{2k+1}$ следует существование $(2k+1)$-мерной грани $F \in \mathfrak{F}_{2k+1}(\mathrm{B}^n)$ такой, что $|\mathrm{E}(P, F)| > 2^{(2k+1)-2}$. Значит, по третьему признаку (теорема 6) разбиение P неправильное. Теорема 10 доказана.

4. О способах оценки величины $\mathfrak{B}^*(P)$

Множество всех целочисленных наборов $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_k)$ обозначим через $\mathbb{Z}^k$. Через $\mathfrak{M}(k)$ обозначим множество всех таких $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{Z}^k$, что выполнены неравенства $z_1 \geqslant \ldots \geqslant z_k \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}(k)$.

Величины $\|\overline{z}\|_{-1}$, $\|\overline{z}\|_1$, $\|\overline{z}\|_2$, $\|\overline{z}\|_{\mathrm{C}}$ и $\|\overline{z}\|_{\mathrm{T}}$ для произвольного набора $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_k) \in \mathfrak{M}$ определим формулами

$$\|\overline{z}\|_{-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{z_i}, \quad \|\overline{z}\|_1 = \sum_{i=1}^{k} z_i, \quad \|\overline{z}\|_2 = \sum_{i=1}^{k} z_i^2,$$
$$\|\overline{z}\|_{\mathrm{C}} = \sum_{i=1}^{k} \binom{z_i}{2}, \quad \|\overline{z}\|_{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{(z_i-1)^2}{4} \right\rfloor.^{2)}$$

Через $\mathfrak{M}(k, L)$ обозначим множество таких $\overline{z} \in \mathfrak{M}(k)$, что $\|\overline{z}\|_1 = L$. Через $\overline{\mathrm{m}}(k, L)$ обозначим *максимально равномерный вектор* из множества $\mathfrak{M}(k, L)$, т. е. такой набор $(z_1, \dots, z_k) \in \mathfrak{M}(k, L)$, что числа $z_1, \dots, z_k$ отличаются друг от друга не более чем на 1.

Нам понадобятся два следующих, доказанных в [14] (теорема 26 и лемма 50) утверждения.

Лемма 12. *При любых k, L таких, что $1 \leqslant k \leqslant L$, и для любого $\overline{z} \in \mathfrak{M}(k, L)$ из того, что $\overline{z} \neq \overline{\mathrm{m}}(k, L)$, следует, что*

$$\|\overline{z}\|_{-1} > \|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_{-1}, \quad \|\overline{z}\|_{\mathrm{C}} > \|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_{\mathrm{C}}, \quad \|\overline{z}\|_{\mathrm{T}} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_{\mathrm{T}}.$$

Лемма 13. *При любых k, L таких, что $1 \leqslant k \leqslant L$, справедливо неравенство $\|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_{-1} > \|\overline{\mathrm{m}}(k, L+1)\|_{-1}$.*

Для произвольного подмножества $A \subseteq \mathrm{E}$ множества

$$A_i^{-1} = A \cap \mathrm{E}_i^{-1}, \quad A_i^1 = A \cap \mathrm{E}_i^1, \quad A_i = A \cap \mathrm{E}_i$$

будем называть *отрицательной, положительной* и *большой компонентой с номером i множества A* соответственно, $i = 1, \dots, n$.

Заметим, что большие компоненты $A_1, \dots, A_n$ любого подмножества $A \subseteq \mathrm{E}$ попарно не пересекаются и, если $A \subseteq M \subseteq \mathrm{E}$, то справедливы включения $A_1 \subseteq M_1, \dots, A_n \subseteq M_n$.

Лемма 14. *Подмножество $A \subseteq M$ тогда и только тогда является наибольшим двойственно независимым подмножеством множества $M \subseteq \mathrm{E}$, когда каждая большая компонента A_i этого подмножества является наибольшим двойственно независимым подмножеством соответствующей большой компоненты M_i множества M.*

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу леммы 9 при $i \neq j$ соединения из M_i не связаны отношением двойственности с соединениями из M_j. Лемма 14 доказана.

Теорема 11. *Для любого однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_n$ справедливо равенство*

$$\mathfrak{B}^*(P) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{B}^*(P_i).$$

---

2) $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.

Доказательство. Каждая большая компонента $\mathrm{E}_i(P)$ множества $\mathrm{E}(P)$ связана равенством $\mathrm{E}_i(P) = \mathrm{E}(P_i)$ с соответствующей большой компонентой P_i однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_n$, и для наибольшего двойственно независимого подмножества A множества $\mathrm{E}(P)$ справедливо равенство $|A| = |A_1| + \dots + |A_n|$. Поэтому теорема 11 является следствием леммы 14. Теорема 11 доказана.

Лемма 15. *Для больших компонент однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_n$ справедливы неравенства*

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geqslant \bigl|\mathrm{E}\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr| + \bigl|\mathrm{E}\bigl(P_i^{-\delta}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr)^*\bigr|, \quad i = 1, \dots, n, \ \delta = -1, 1.$$

Доказательство. По лемме 9 соединения e и e^* всегда имеют противоположные знаки. Значит, при любом $i \in \{1, \dots, n\}$ компоненты M_i^{-1} и M_i^{1} произвольного множества $M \subseteq \mathrm{E}$ являются двойственно независимыми подмножествами M, поэтому при любом $\delta \in \{-1, 1\}$ множество $M_i^{\delta} \cup \bigl(M_i^{-\delta} \setminus \bigl(M_i^{\delta}\bigr)^*\bigr)$ также является двойственно независимым подмножеством M. Из очевидного равенства $\bigl(M_i^{\delta}\bigr)^* = \bigl(M_i^{\delta} \cap \mathrm{E}\,[2]\bigr)^*$ следует, что $M_i^{\delta} \cup \bigl(M_i^{-\delta} \setminus \bigl(M_i^{\delta}\bigr)^*\bigr) = M_i^{\delta} \cup \bigl(M_i^{-\delta} \setminus \bigl(M_i^{\delta} \cap \mathrm{E}\,[2]\bigr)^*\bigr)$. Тем самым при любом $\delta \in \{-1, 1\}$ множество $M_i^{\delta} \cup \bigl(M_i^{-\delta} \setminus \bigl(M_i^{\delta} \cap \mathrm{E}\,[2]\bigr)^*\bigr)$ является двойственно независимым подмножеством множества M. Из $M_i^{\delta} \cap M_i^{-\delta} = \varnothing$ вытекает равенство

$$\bigl|M_i^{\delta} \cup \bigl(M_i^{-\delta} \setminus \bigl(M_i^{\delta} \cap \mathrm{E}\,[2]\bigr)^*\bigr)\bigr| = \bigl|M_i^{\delta}\bigr| + \bigl|\bigl(M_i^{-\delta} \setminus \bigl(M_i^{\delta} \cap \mathrm{E}\,[2]\bigr)^*\bigr)\bigr|.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что для компонент $\mathrm{E}_i^{\delta}(P_i)$, $\delta \in \{-1, 1\}$, множества $\mathrm{E}(P_i)$ справедливы равенства $\mathrm{E}_i^{\delta}(P_i) = \mathrm{E}(P_i^{\delta})$ и $\mathrm{E}_i^{\delta}(P_i) \cap \mathrm{E}\,[2] = \mathrm{E}\,[2]\,(P_i^{\delta})$. Лемма 15 доказана.

Лемма 16. *Для компонент однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_n$ с матрицей сложности $\mathbb{L}(P) = \bigl(\ell_i^{\delta}\bigr)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ справедливы неравенства*

$$\bigl|\mathrm{E}\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr| \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^{\delta}, 2^{n-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}}, \quad i = 1, \dots, n, \ \delta = -1, 1.$$

Доказательство. Учитывая, что компонента P_i^{δ} однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_n$ является разбиением соответствующей компоненты R_i^{δ} множества R и $\bigl|\mathrm{R}_i^{\delta}\bigr| = 2^{n-2}$, по леммам 6 и 12 имеем

$$\bigl|\mathrm{E}\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr| = \sum_{Q \in P_i^{\delta}} |\mathbf{P}_2(Q)| = \sum_{Q \in P_i^{\delta}} \binom{|Q|}{2} \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\bigl|P_i^{\delta}\bigr|, \bigl|\mathrm{R}_i^{\delta}\bigr|\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}} = \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^{\delta}, 2^{n-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}}.$$

Лемма 16 доказана.

Теорема 12. *Для больших компонент однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_n$ *с матрицей сложности* $\mathbb{L}(P) = \bigl(\ell_i^\delta\bigr)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$ *справедливы неравенства*

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^\delta, 2^{n-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}}, \quad i = 1, \dots, n,\ \delta = -1, 1.$$

Доказательство. Утверждение следует из лемм 15 и 16. Теорема 12 доказана.

Теорема 13. *Если ни одна 4-мерная грань куба* B^n *не является опорной для компоненты* P_i^δ, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, *однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_n$ *с матрицей сложности* $\mathbb{L}(P) = \bigl(\ell_i^\delta\bigr)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$, *то для большой компоненты* P_i *этого разбиения справедливо неравенство*

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^\delta, 2^{n-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}} + \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^{-\delta}, 2^{n-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{T}}.$$

Доказательство. Из лемм 15 и 16 следует, что

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^\delta, 2^{n-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}} + \bigl|\mathrm{E}\bigl(P_i^{-\delta}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^\delta\bigr)\bigr)^*\bigr|,$$

поэтому для доказательства теоремы 13 достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма 17. *Если ни одна 4-мерная грань куба* B^n *не является опорной для компоненты* P_i^δ, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, *однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_n$ *с матрицей сложности* $\mathbb{L}(P) = \bigl(\ell_i^\delta\bigr)_{i=1,\dots,n}^{\delta=-1,1}$, *то справедливо неравенство*

$$\bigl|\mathrm{E}\bigl(P_i^{-\delta}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^\delta\bigr)\bigr)^*\bigr| \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^{-\delta}, 2^{n-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство (4) в предположении, что множество $\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^\delta\bigr)\bigr)^*$ не содержит треугольников. Для этого рассмотрим граф с множеством вершин $\mathrm{R}_i^{-\delta}$ и множеством рёбер $\mathrm{E}\bigl(P_i^{-\delta}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^\delta\bigr)\bigr)^*$, т. е. граф

$$\bigl(\mathrm{R}_i^{-\delta}, \mathrm{E}\bigl(P_i^{-\delta}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^\delta\bigr)\bigr)^*\bigr).$$

В силу леммы 6 он является дизъюнктным объединением графов

$$\bigl(Q, \mathbf{P}_2(Q) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^\delta\bigr)\bigr)^*\bigr), \quad Q \in P_i^{-\delta}.$$

Кроме того, в силу нашего предположения каждый из этих последних графов является дополнением графа без треугольников.

Известная теорема Турана [15, 16] утверждает, что число рёбер у графа, имеющего q вершин и не содержащего треугольников, не превышает $\lfloor q^2/4 \rfloor$. Значит, дополнение такого графа имеет не меньше $\lfloor (q-1)^2/4 \rfloor$

рёбер. Отсюда и из леммы 12, учитывая, что $P_i^{-\delta}$ является разбиением множества $\mathrm{R}_i^{-\delta}$, имеем

$$\bigl|\mathrm{E}\bigl(P_i^{-\delta}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr)^*\bigr| = \sum_{Q \in P_i^{-\delta}} \bigl|\mathbf{P}_2(Q) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr)^*\bigr|$$

$$\geqslant \sum_{Q \in P_i^{-\delta}} \left\lfloor \frac{(|Q|-1)^2}{4} \right\rfloor \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(|P_i^{-\delta}|, |\mathrm{R}_i^{-\delta}|\bigr)\bigr\|_{\mathrm{T}} = \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_i^{-\delta}, 2^{n-2}\bigr)\bigr\|_{\mathrm{T}}.$$

Итак в предположении, что множество $\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr)^*$ не содержит треугольников, неравенство (4) доказано, поэтому лемма 17 вытекает из следующего утверждения.

Лемма 18. *Если ни одна 4-мерная грань куба* B^n *не является опорной для компоненты* P_i^{δ}, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{-1, 1\}$, *однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_n$, *то множество* $\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr)^*$ *не содержит треугольников.*

Доказательство. Предположим, что, напротив, ни одна четырёхмерная грань куба B^n не является опорной для компоненты P_i^{δ}, но множество $\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr)^*$ содержит некоторый треугольник Δ. Чтобы прийти к противоречию, покажем, что грань $F = \widetilde{\Delta}$ имеет размерность 4 и является опорной для P_i^{δ}.

Из включения $\Delta \subseteq \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr)^*$ следует, что $\Delta \subseteq \mathrm{E}\,[2]$. Значит, по лемме 11 справедливо равенство $\dim(\widetilde{\Delta}) = 4$, т. е. грань F имеет размерность 4.

Кроме того, по лемме 11 множество $(\Delta)^*$ является звездой, т. е. все соединения из $(\Delta)^*$ имеют общий конец — некоторое (0-1)-ребро r. Через Q обозначим блок однородного разбиения P, который содержит r. В силу леммы 9 из того, что $\Delta \subseteq \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^{\delta}\bigr)\bigr)^*$, следует, что $(\Delta)^* \subseteq \mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_i^{\delta}\bigr)$ и $|(\Delta)^*| = |\Delta| = 3$. Учитывая, что концы любого порождённого разбиением P соединения e по определению принадлежат одному и тому же блоку этого разбиения, отсюда имеем

$$(1)\ (\Delta)^* \subseteq \mathbf{P}_2(Q), \quad (2)\ Q \in P_i^{\delta},$$
$$(3)\ \mathrm{V}((\Delta)^*) \subseteq Q \subseteq \mathrm{R}_i^{\delta}, \quad (4)\ |\mathrm{V}((\Delta)^*)| = 4.$$

По лемме 11 справедливо равенство $\widetilde{(\Delta)^*} = \widetilde{\Delta}$, поэтому из включения (3) следует, что $\mathrm{V}((\Delta)^*) \subseteq \mathrm{R}_i^{\delta}(F)$. Значит, $\mathrm{R}_i^{\delta}(F) \neq \varnothing$ и по лемме 5 из того, что $\dim(F) = 4$, вытекает, что $\bigl|\mathrm{R}_i^{\delta}(F)\bigr| = 4$. Тем самым из (4) получаем $\mathrm{R}_i^{\delta}(F) = \mathrm{V}((\Delta)^*)$. Это равенство наряду с включениями (3) и (2) означает, что 4-мерная грань $F = \widetilde{\Delta}$ является опорной для компоненты P_i^{δ} однородного разбиения P. Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Лемма 18 доказана. Лемма 17 доказана. Теорема 13 доказана.

5. О матрицах сложности разбиений $P \in \mathrm{Correct}_5(\mu_5)$

Заметим, что $\mathrm{Correct}_5(\mu_5) = \mathrm{Correct}_5(28) \subseteq \mathrm{U}_5(28)$,поскольку $\mu_5 = 28$.

Матрицы $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ размера 2×5 с суммой элементов 28 определим равенствами

$$\mathbb{M}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Через $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ обозначим классы всех однородных разбиений $P \in \mathrm{U}_5(28)$ таких, что матрица сложности $\mathbb{L}(P)$ разбиения P с точностью до перестановки столбцов совпадает с матрицами $\mathbb{M}_1$ и $\mathbb{M}_2$ соответственно.

Теорема 14. *Справедливо включение* $\mathrm{Correct}_5(28) \subseteq \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого правильного разбиения $P \in \mathrm{Correct}_5(28)$ матрица сложности $\mathbb{L}(P) = \big(\ell_i^\delta\big)_{i=1,\ldots,5}^{\delta=-1,1}$ удовлетворяет следующим трём условиям.

1. Элементами матрицы $\mathbb{L}(P)$ могут быть только числа 2, 3, 4.
2. Матрица $\mathbb{L}(P)$ имеет столбец, оба элемента которого равны 4.
3. В каждом столбце матрицы $\mathbb{L}(P)$ нижний элемент равен верхнему.

Выполнение этих условий следует из включения $\mathrm{Correct}_5(28) \subseteq \mathrm{U}_5(28)$ и следующих трёх лемм.

Лемма 19. *Если матрица сложности* $\mathbb{L}(P)$ *однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_5(28)$ *имеет элемент, равный* 1 *или не меньший* 5, *то разбиение* P *неправильное.*

Доказательство. Предположим, что матрица $\mathbb{L}(P)$ имеет элемент, равный 1. Тогда сумма остальных девяти элементов этой матрицы равна 27. Отсюда и в силу равенства $\overline{\mathrm{m}}(9,27) = (\underbrace{3,\ldots,3}_{9})$ по лемме 12 имеем

$$\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} \geqslant \frac{1}{1} + \|\overline{\mathrm{m}}(9,27)\|_{-1} = \frac{1}{1} + \frac{9}{3} = 4.$$

При этом в силу леммы 12 равенство $\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} = 1 + \|\overline{\mathrm{m}}(9,27)\|_{-1}$ возможно, только если девять остальных элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$ совпадают с компонентами вектора $\overline{\mathrm{m}}(9,27)$, т. е. если все они равны 3. Поэтому равенство $\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} = 4$ возможно только в том случае, если не все элементы матрицы $\mathbb{L}(P)$ являются степенями двойки. По определению это означает, что $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$. Значит, по первому признаку (теорема 4) разбиение P является неправильным.

Предположим, что матрица $\mathbb{L}(P)$ имеет элемент, не меньший 5. Без ограничения общности считаем, что ℓ_1^1 является наибольшим элементом этой матрицы.

Пусть $\ell_1^1 = 5$ и $\ell_1^{-1} \leqslant 3$. Тогда сумма элементов матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ не больше 26. В силу равенства $\overline{\mathrm{m}}(10, 26) = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{6}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{4})$ по леммам 12 и 13 имеем

$$\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} \geqslant \|\overline{\mathrm{m}}(10, 26)\|_{-1} = \frac{6}{3} + \frac{4}{2} = 4.$$

При этом, как и в предыдущем случае, равенство $\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} = 4$ возможно, только если не все элементы матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ являются степенями двойки. По определению это означает, что $\mathbb{L}_{(1)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$. Значит, по второму признаку (теорема 5) разбиение P неправильное.

Пусть $\ell_1^1 = 5$ и $\ell_1^{-1} = 4$. Тогда сумма остальных восьми элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$, а значит, и сумма соответствующих восьми элементов матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ равна 19. В силу равенства $\overline{\mathrm{m}}(8, 19) = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{3}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{5})$ по лемме 12 имеем

$$\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \|\overline{\mathrm{m}}(8, 19)\|_{-1} = \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{5}{2} = 4.$$

Как и в предыдущих случаях, равенство $\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} = 4$ возможно, только если не все элементы матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ являются степенями двойки. Поэтому $\mathbb{L}_{(1)}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, значит, по второму признаку (теорема 5) разбиение P является неправильным.

Пусть $\ell_1^1 = \ell_1^{-1} = 5$. Тогда сумма остальных восьми элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$ равна 18. В силу равенства $\overline{\mathrm{m}}(8, 18) = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{2}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{6})$ по лемме 12 имеем

$$\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} \geqslant \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \|\overline{\mathrm{m}}(8, 18)\|_{-1} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} + \frac{6}{2} = 4\frac{1}{15} > 4,$$

тем самым $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, а значит, по первому признаку (теорема 4) разбиение P неправильное.

Пусть $\ell_1^1 = 6$. Тогда сумма остальных девяти элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$ равна 22. В силу равенства $\overline{\mathrm{m}}(9, 22) = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{4}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{5})$ по лемме 12 имеем

$$\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} \geqslant \frac{1}{6} + \|\overline{\mathrm{m}}(9, 22)\|_{-1} = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2} = 4.$$

Как и ранее, равенство $\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} = 4$ возможно, только если не все элементы матрицы $\mathbb{L}(P)$ являются степенями двойки, поэтому $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, значит, по первому признаку (теорема 4) разбиение P неправильное.

Пусть $\ell_1^1 \geqslant 7$. Тогда сумма остальных девяти элементов матрицы $\mathbb{L}(P)$ не больше 21. В силу равенства $\overline{\mathrm{m}}(9,21) = (\underbrace{3,\ldots,3}_{3},\underbrace{2,\ldots,2}_{6})$ по леммам 12 и 13 имеем

$$\|\mathbb{L}(P)\|_{-1} \geqslant \frac{1}{\ell_1^1} + \|\overline{\mathrm{m}}(9,21)\|_{-1} = \frac{1}{\ell_1^1} + \frac{3}{3} + \frac{6}{2} > 4.$$

Тем самым $\mathbb{L}(P) \in \mathfrak{L}_{-1}^4$, значит, по первому признаку (теорема 4) разбиение P неправильное. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. *Если в каждом столбце матрицы сложности* $\mathbb{L}(P)$ *однородного разбиения* $P \in \mathrm{U}_5(28)$ *имеется элемент, не превосходящий* 3, *то разбиение* P *неправильное.*

Доказательство. Считаем, что матрица сложности $\mathbb{L}(P)$ не содержит единиц (в противном случае однородное разбиение P неправильно по лемме 19). Кроме того, без ограничения общности считаем, что все элементы нижней строки матрица $\mathbb{L}(P)$ не превосходят 3, т. е. $2 \leqslant \ell_1^1, \ell_2^1, \ell_3^1, \ell_4^1, \ell_5^1 \leqslant 3$. Через k обозначим число двоек в этой строке.

Если хотя бы одна компонента P_i^δ однородного разбиения P имеет опорную грань $F \in \mathfrak{F}_4(\mathrm{B}^5)$, то P неправильное по пятому признаку (теорема 8), поскольку каждый столбец матрицы $\mathbb{L}(P)$ содержит элемент, не превосходящий 3.

Если же компоненты однородного разбиения P не имеют опорных 4-мерных граней, то в силу теорем 11, 13 и леммы 12 имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}^*(P) = \sum_{i=1}^{5} \mathfrak{B}^*(P_i) \geqslant \sum_{i=1}^{5} \left(\left\|\overline{\mathrm{m}}\left(\ell_i^1, 8\right)\right\|_{\mathrm{C}} + \left\|\overline{\mathrm{m}}\left(\ell_i^{-1}, 8\right)\right\|_{\mathrm{T}}\right) \\ = k \cdot \|\overline{\mathrm{m}}(2,8)\|_{\mathrm{C}} + (5-k) \cdot \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{C}} + \sum_{i=1}^{5} \left\|\overline{\mathrm{m}}\left(\ell_i^{-1}, 8\right)\right\|_{\mathrm{T}} \\ \geqslant k \cdot (\|\overline{\mathrm{m}}(2,8)\|_{\mathrm{C}} - \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{C}}) + 5 \cdot \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{C}} + \left\|\overline{\mathrm{m}}\left(\sum_{i=1}^{5} \ell_i^{-1}, 5 \cdot 8\right)\right\|_{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Из равенств $\overline{\mathrm{m}}(2,8) = (4,4)$ и $\overline{\mathrm{m}}(3,8) = (3,3,2)$ следуют равенства

$$\|\overline{\mathrm{m}}(2,8)\|_{\mathrm{C}} = 12, \quad \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{C}} = 7.$$

Кроме того, из того, что $\sum\limits_{i=1}^{5} \ell_i^{-1} + \sum\limits_{i=1}^{5} \ell_i^1 = 28$, вытекает

$$\sum_{i=1}^{5} \ell_i^{-1} = 28 - (k \cdot 2 + (5-k) \cdot 3) = 13 + k.$$

Значит, справедливо неравенство

$$\mathfrak{B}^*(P) \geqslant k \cdot 5 + 35 + \|\overline{\mathrm{m}}(13 + k, 40)\|_{\mathrm{T}}.$$

Рассмотрим четыре возможных случая: $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ и $k \geqslant 3$.

При $k = 0$ из того, что $\overline{\mathrm{m}}(13, 40) = (4, \underbrace{3, \ldots, 3}_{12})$, получаем равенство $\|\overline{\mathrm{m}}(13, 40)\|_{\mathrm{T}} = 14$, поэтому $\mathfrak{B}^*(P) \geqslant 35 + 14 = 49$.

При $k = 1$ из того, что $\overline{\mathrm{m}}(14, 40) = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{12}, 2, 2)$, имеем $\|\overline{\mathrm{m}}(14, 40)\|_{\mathrm{T}} = 12$, тем самым $\mathfrak{B}^*(P) \geqslant 5 + 35 + 12 = 52$.

При $k = 2$ из того, что $\overline{\mathrm{m}}(15, 40) = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{10}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{5})$, следует, что $\|\overline{\mathrm{m}}(15, 40)\|_{\mathrm{T}} = 10$, поэтому $\mathfrak{B}^*(P) \geqslant 2 \cdot 5 + 35 + 10 = 55$.

При $k \geqslant 3$ справедливо неравенство $\mathfrak{B}^*(P) \geqslant 3 \cdot 5 + 35 = 50$.

Во всех четырёх случаях справедливо неравенство $\mathfrak{B}^*(P) > 48$. Значит, во всех четырёх случаях однородное разбиение P неправильно по шестому признаку (теорема 9). Лемма 20 доказана.

Лемма 21. *Если в некотором столбце матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_5(28)$ нижний элемент не равен верхнему, то разбиение P неправильное.*

Доказательство. Считаем, что матрица $\mathbb{L}(P)$ имеет столбец, оба элемента которого равны 4 (в противном случае однородное разбиение P неправильно по леммам 19 и 20). Кроме того, без ограничения общности считаем, что $\ell_1^1 \neq \ell_1^{-1}$. Тогда сумма элементов матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ не превышает 27 и по крайней мере два элемента этой матрицы равны 4. Значит, сумма остальных восьми элементов этой матрицы не превышает 19. В силу равенства $\overline{\mathrm{m}}(8, 19) = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{3}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{5})$ по леммам 12 и 13 имеем

$$\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \|\overline{\mathrm{m}}(8, 19)\|_{-1} = \frac{2}{4} + \frac{3}{3} + \frac{5}{2} = 4.$$

При этом равенство $\|\mathbb{L}_{(1)}(P)\|_{-1} = 4$ возможно, только если не все элементы матрицы $\mathbb{L}_{(1)}(P)$ являются степенями двойки. Тем самым получаем, что $\mathbb{L}_{(1)}(P) \in \mathfrak{L}^4_{-1}$, значит, по второму признаку (теорема 5) разбиение P неправильное. Лемма 21 доказана. Теорема 14 доказана.

6. Доказательство теоремы 3

Компоненту P_i^δ однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_5(28)$ будем называть *максимально равномерной*, если мощности блоков $Q \in P_i^\delta$ отличаются друг от друга не более чем на 1.

По определению класса $\mathcal{K}_2$ любое однородное разбиений $P \in \mathcal{K}_2$ имеет ровно четыре компоненты P_i^δ мощности 3. Класс $\mathcal{K}_2$ разобьём на два подкласса в зависимости от того, имеется ли среди этих четырёх компонент максимально равномерная.

Через $\mathcal{K}_2^1$ обозначим множество всех однородных разбиений $P \in \mathcal{K}_2$ таких, что ни одна из четырёх компонент P_i^δ мощности 3 этого разбиения не является максимально равномерной. Через $\mathcal{K}_2^2$ обозначим множество всех однородных разбиений $P \in \mathcal{K}_2$ таких, что хотя бы одна из четырёх компонент P_i^δ мощности 3 этого разбиения является максимально равномерной. Очевидно, что справедливы равенства $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2^1 \cup \mathcal{K}_2^2$ и $\mathcal{K}_2^1 \cap \mathcal{K}_2^2 = \varnothing$.

Теорема 15. *Для любого однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2^1$ справедливо неравенство $\mathrm{S}(P) \geqslant (2^{5-1})^2$.*

Доказательство. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 22. *При любых k, L таких, что $1 \leqslant k \leqslant L$ и L чётное, для любого $\overline{z} \in \mathfrak{M}(k, L)$ из того, что $\overline{z} \neq \overline{\mathrm{m}}(k, L)$ следует, что $\|\overline{z}\|_2 \geqslant 2 + \|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_2$.*

Доказательство. Очевидно, что для любого $\overline{z} \in \mathfrak{M}(k, L)$ справедливо равенство $\|\overline{z}\|_2 = 2 \cdot \|\overline{z}\|_{\mathrm{C}} + \mathrm{L}$. Значит, из чётности L следует чётность $\|\overline{z}\|_2$. Тем самым если $\overline{z} \neq \overline{\mathrm{m}}(k, L)$, то в силу леммы 12 справедливо неравенство $\|\overline{z}\|_2 > \|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_2$, а значит, и неравенство $\|\overline{z}\|_2 \geqslant 2 + \|\overline{\mathrm{m}}(k, L)\|_2$. Лемма 22 доказана.

Для произвольного однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2^1$ из определения компонент P_i^δ этого разбиения и леммы 1 следует равенство

$$\mathrm{S}(P) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{\delta \in \{-1,1\}} \mathrm{S}\big(P_i^\delta\big).$$

Если $P \in \mathcal{K}_1$, то по определению класса $\mathcal{K}_1$ шесть компонент P_i^δ разбиения P имеют мощность 2 и четыре — мощность 4. Учитывая, что P_i^δ является разбиением множества R_i^δ и $\left|\mathrm{R}_i^\delta\right| = 8$, по лемме 22, а также в силу равенств $\overline{\mathrm{m}}(2, 8) = (4, 4)$ и $\overline{\mathrm{m}}(4, 8) = (2, 2, 2, 2)$ имеем

$$\mathrm{S}(P) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{\delta \in \{-1,1\}} \mathrm{S}(P_i^\delta) \geqslant 6 \cdot \|\overline{\mathrm{m}}(2, 8)\|_2 + 4 \cdot \|\overline{\mathrm{m}}(4, 8)\|_2$$
$$= 192 + 64 = (2^{5-1})^2.$$

Если $P \in \mathcal{K}_2^1$, то по определению класса $\mathcal{K}_2^1$ четыре компоненты P_i^δ разбиения P имеют мощность 2, четыре — мощность 3 и две — мощность 4; при этом ни одна компонента мощности 3 не является максимально равномерной. Отсюда, как и в предыдущем случае, по лемме 22 и в силу равенства $\overline{\mathrm{m}}(3,8) = (3,3,2)$ имеем

$$\mathrm{S}(P) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{\delta \in \{-1,1\}} \mathrm{S}(P_i^\delta) \geqslant 4 \cdot \|\overline{\mathrm{m}}(2,8)\|_2 + 4 \cdot (2 + \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_2) \\ + 2 \cdot \|\overline{\mathrm{m}}(4,8)\|_2 = 128 + 96 + 32 = (2^{5-1})^2.$$

Теорема 15 доказана.

Как уже было отмечено в разд. 1, для доказательства теоремы 3 достаточно установить справедливость неравенства $\mathrm{s}(P) \geqslant (2^{5-1})^2$ для всех $P \in \mathrm{Correct}_5(\mu_5)$, которая для всех таких P вытекает из равенства $\mu_5 = 28$, теорем 14, 15 и следующей теоремы.

Теорема 16. *Любое однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^2$ неправильно.*

Доказательство. Класс однородных разбиений $\mathcal{K}_2^2$ следующим образом разобьём на два подкласса $\mathcal{K}_2^{2,1}$ и $\mathcal{K}_2^{2,2}$.

Через $\mathcal{K}_2^{2,1}$ обозначим множество всех однородных разбиений $P \in \mathcal{K}_2^2$ таких, что хотя бы одна из четырёх компонент P_i^δ мощности 3 этого разбиения имеет опорную 4-мерную грань куба B^5. Через $\mathcal{K}_2^{2,2}$ обозначим множество всех однородных разбиений $P \in \mathcal{K}_2$ таких, что ни одна из четырёх компонент P_i^δ мощности 3 этого разбиения не имеет опорных 4-мерных граней куба B^5. Очевидно, что справедливы равенства $\mathcal{K}_2^2 = \mathcal{K}_2^{2,1} \cup \mathcal{K}_2^{2,2}$ и $\mathcal{K}_2^{2,1} \cap \mathcal{K}_2^{2,2} = \varnothing$.

Теорема 16 вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 17. *Любое однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^{2,1}$ неправильно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^{2,1}$. Без ограничения общности считаем, что $\mathbb{L}(P) = \mathbb{M}_2$ и компонента P_3^1 этого разбиения имеет опорную 4-мерную грань $F \in \mathfrak{F}_4(\mathrm{B}^5)$. Тогда по определению справедливо включение $3 \in \mathrm{Form}(F)$, а значит, $|\mathrm{Form}(F) \setminus \{3\}| = 3$. Тем самым среди столбцов матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ с номерами из множества $\mathrm{Form}(F) \setminus \{3\}$ найдутся два, один из которых содержит элемент, не превосходящий 2, а другой — элемент, не превосходящий 3. Отсюда по шестому признаку (теорема 9) однородное разбиение P неправильно. Теорема 17 доказана.

Теорема 18. *Любое однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^{2,2}$ неправильно.*

Доказательство. Заметим, что для любого $j \in \{1,\ldots,5\}$ грани $\mathrm{B}^5{}_j^{\,0}$ и $\mathrm{B}^5{}_j^{\,1}$ куба B^5 имеют размерность 4, поэтому при $i \in \{1,\ldots,5\} \setminus \{j\}$, $\delta \in \{-1,1\}$ по лемме 5 справедливо равенство $\bigl|\mathrm{R}_i^\delta\bigl(\mathrm{B}^5{}_j^{\,0}\bigr)\bigr| = \bigl|\mathrm{R}_i^\delta\bigl(\mathrm{B}^5{}_j^{\,1}\bigr)\bigr| = 4$. Отсюда и из равенств $\bigl|\mathrm{R}_i^\delta\bigr| = 8$ и $\mathrm{B}^5{}_j^{\,0} \cap \mathrm{B}^5{}_j^{\,1} = \varnothing$ следует, что при таких i, j, δ пара множеств $\bigl\{\mathrm{R}_i^\delta\bigl(\mathrm{B}^5{}_j^{\,0}\bigr), \mathrm{R}_i^\delta\bigl(\mathrm{B}^5{}_j^{\,1}\bigr)\bigr\}$ является разбиением компоненты R_i^δ множества R.

Компоненту P_i^δ, $i \in \{1,\ldots,5\}$, $\delta \in \{-1,1\}$, однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_5$ назовём *простой*, если $\bigl|P_i^\delta\bigr| = 2$ и для некоторого $j \in \{1,\ldots,5\} \setminus \{i\}$ выполнено равенство $P_i^\delta = \bigl\{\mathrm{R}_i^\delta\bigl(\mathrm{B}^5{}_j^{\,0}\bigr), \mathrm{R}_i^\delta\bigl(\mathrm{B}^5{}_j^{\,1}\bigr)\bigr\}$. При этом число j будем называть *показателем простоты компоненты* P_i^δ.

Большую компоненту P_i, $i \in \{1,\ldots,5\}$, однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_5$ назовём *простой*, если $|P_i| = 4$ и простыми с равными показателями простоты являются компоненты P_i^{-1} и P_i^1 этого разбиения. При этом *показателем простоты большой компоненты* P_i будем называть показатель простоты компонент P_i^{-1} и P_i^1.

Лемма 23. *Для любой большой компоненты P_i, $i \in \{1,\ldots,5\}$, однородного разбиения $P \in \mathrm{U}_5$ из равенства $|P_i| = 4$ следует неравенство*

$$\mathfrak{B}^*(P_i) \geqslant \begin{cases} 12, & \text{если большая компонента } P_i \text{ является простой,} \\ 15 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, что для некоторого $i \in \{1,\ldots,5\}$ выполнено равенство $|P_i| = 4$. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$. Тогда если большая компонента P_1 является простой, то по определению выполнено равенство $\bigl|P_1^{-1}\bigr| = \bigl|P_1^1\bigr| = 2$. Поэтому для соответствующих элементов ℓ_1^{-1}, ℓ_1^1 матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ также справедливо равенство $\ell_1^{-1} = \ell_1^1 = 2$. Значит, по теореме 12 и в силу равенства $\overline{\mathrm{m}}(2,8) = (4,4)$ имеем

$$\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant \bigl\|\overline{\mathrm{m}}\bigl(\ell_1^1, 8\bigr)\bigr\|_{\mathrm{C}} = \|\overline{\mathrm{m}}(2,8)\|_{\mathrm{C}} = 6 + 6 = 12,$$

что и требовалось доказать.

Предположим, что большая компонента P_1 не является простой. Если при этом для некоторого $\delta \in \{-1,1\}$ найдётся такой блок $Q' \in P_1^\delta$, что $|Q'| \geqslant 6$, то по леммам 15 и 6 имеем

$$\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant \bigl|\mathrm{E}\bigl(P_1^\delta\bigr)\bigr| = \sum_{Q \in P_1^\delta} |\mathbf{P}_2(Q)| \geqslant |\mathbf{P}_2(Q')| \geqslant \binom{6}{2} = 15,$$

что и требовалось доказать.

Пусть большая компонента P_1 не является простой и все её блоки имеют мощность не более 5. Тогда поскольку компоненты P_1^{-1} и P_1^1 являются разбиениями множеств R_1^{-1} и R_1^1 (т. е. множеств мощности 8), из равенства $|P_1^{-1}| + |P_1^1| = |P_1| = 4$ следует, что $|P_1^{-1}| = |P_1^1| = 2$. Если при этом хотя бы одна из компонент P_1^{-1}, P_1^1 не имеет опорных 4-мерных граней куба B^5 (без ограничения общности считаем, что такой компонентой является P_1^1), то по теореме 13 и в силу равенств $\ell_1^1 = \ell_1^{-1} = 2$, $\overline{\mathrm{m}}(2,8) = (4,4)$ имеем

$$\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant \big\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_1^1, 8\big)\big\|_{\mathrm{C}} + \big\|\overline{\mathrm{m}}\big(\ell_1^{-1}, 8\big)\big\|_{\mathrm{T}} = (6+6) + (2+2) = 16 > 15,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, пусть большая компонента P_1 не является простой, все её блоки имеют мощность не более 5 и каждая из компонент P_1^{-1} и P_1^1 имеет опорную 4-мерную грань куба B^5.

Через Q_1^{-1} и Q_2^{-1} обозначим блоки компоненты P_1^{-1} (таким образом, $P_1^{-1} = \{Q_1^{-1}, Q_2^{-1}\}$), через F^{-1} — её опорную 4-мерную грань. Точно так же через Q_1^1 и Q_2^1 обозначим блоки компоненты P_1^1 (таким образом, $P_1^1 = \{Q_1^1, Q_2^1\}$), через F^1 — её опорную 4-мерную грань.

Без ограничения общности считаем, что $|Q_1^{-1}| \geqslant |Q_2^{-1}|$ и $|Q_1^1| \geqslant |Q_2^1|$. Тогда с учётом того, что P_1^δ, $\delta \in \{-1,1\}$, является разбиением множества R_1^δ и $|\mathrm{R}_1^\delta| = 8$, имеем

$$4 \leqslant |Q_1^{-1}| \leqslant 5, \quad |Q_1^{-1}| + |Q_2^{-1}| = 8,$$
$$4 \leqslant |Q_1^1| \leqslant 5, \quad |Q_1^1| + |Q_2^1| = 8.$$

Заметим, что максимальная равномерность компоненты P_1^δ, $\delta \in \{-1,1\}$, равносильна её простоте. Действительно, из того, что $\dim(F^\delta) = 4$, следует, что грань F^δ куба B^5 является гранью вида $\mathrm{B}^5\,{}^{\sigma}_{j}$, где $j \neq 1$. Тем самым из включения $\mathrm{R}_1^\delta(F^\delta) \subseteq Q$, выполненного для некоторого блока $Q \in P_1^\delta$, следует, что равенство $|Q_1^\delta| = |Q_2^\delta| = 4$ равносильно равенству $P_1^\delta = \{\mathrm{R}_1^\delta(\mathrm{B}^5\,{}^{0}_{j}), \mathrm{R}_1^\delta(\mathrm{B}^5\,{}^{1}_{j})\}$.

Заметим также, что если компонента P_1^δ, $\delta \in \{-1,1\}$, не является максимально равномерной, то выполнены соотношения $|Q_1^\delta| = 5$, $|Q_2^\delta| = 3$ и $\mathrm{R}_1^\delta(F^\delta) \subseteq Q_1^\delta$.

Возможны три следующих случая.

1. Обе компоненты P_1^{-1}, P_1^1 максимально равномерные.

2. Одна из двух компонент P_1^{-1}, P_1^1 максимально равномерна, а другая не является максимально равномерной.

3. Обе компоненты P_1^{-1}, P_1^1 не являются максимально равномерными.

Величину $\mathfrak{B}^*(P_1)$ будем оценивать по лемме 15 с помощью неравенства

$$\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant \big|\mathrm{E}\big(P_1^1\big)\big| + \big|\mathrm{E}\big(P_1^{-1}\big) \setminus \big(\mathrm{E}\,[2]\,\big(P_1^1\big)\big)^*\big|. \tag{5}$$

По лемме 6 при любом $\delta \in \{-1, 1\}$ имеем

$$\mathrm{E}\big(P_1^\delta\big) = \mathbf{P}_2\big(Q_1^\delta\big) \cup \mathbf{P}_2\big(Q_2^\delta\big), \quad \mathbf{P}_2\big(Q_1^\delta\big) \cap \mathbf{P}_2\big(Q_2^\delta\big) = \varnothing,$$

поэтому для первого слагаемого правой части неравенства (5) справедливо равенство $\big|\mathrm{E}\big(P_1^1\big)\big| = \big|\mathbf{P}_2\big(Q_1^1\big)\big| + \big|\mathbf{P}_2\big(Q_2^1\big)\big|$. Значит, если компонента P_1^1 максимально равномерная, то $\big|\mathrm{E}\big(P_1^1\big)\big| = 12$; если компонента P_1^1 не является максимально равномерной, то $\big|\mathrm{E}\big(P_1^1\big)\big| = 13$. Чтобы оценить второе слагаемое, понадобятся следующие два понятия.

Соединение $e = \{r_1, r_2\}$ куба B^5 будем называть *внутренним для грани* $F \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^5)$, если $\{r_1, r_2\} \subseteq \mathrm{R}(F)$. Будем говорить, что соединение $e = \{r_1, r_2\}$ *связывает грани* $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}(\mathrm{B}^5)$, если $r_1 \in \mathrm{R}(F_1)$ и $r_2 \in \mathrm{R}(F_2)$.

Следующие два утверждения очевидны.

Лемма 24. *Соединение $e \in \mathrm{E}[2]$ куба B^5 тогда и только тогда является внутренним для грани ${\mathrm{B}^5}_i^\sigma$, $i \in \{1, \ldots, 5\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, когда двойственное ему соединение e^* является внутренним для этой грани.*

Лемма 25. *Соединение $e \in \mathrm{E}[2]$ куба B^5 тогда и только тогда связывает грани ${\mathrm{B}^5}_i^0$ и ${\mathrm{B}^5}_i^1$, $i \in \{1, \ldots, 5\}$, когда двойственное ему соединение e^* связывает эти грани.*

Рассмотрим случай 1. В этом случае обе компоненты P_1^{-1}, P_1^1 простые. Но в силу того, что большая компонента P_1 не является простой, показатели простоты этих компонент не совпадают. Без ограничения общности считаем эти показатели равными 2 и 3 соответственно. Тогда также без ограничения общности имеем $F^{-1} = {\mathrm{B}^5}_2^0$, $F^1 = {\mathrm{B}^5}_3^0$ и

$$Q_1^{-1} = \mathrm{R}_1^{-1}\big({\mathrm{B}^5}_2^0\big), \quad Q_2^{-1} = \mathrm{R}_1^{-1}\big({\mathrm{B}^5}_2^1\big),$$
$$Q_1^1 = \mathrm{R}_1^1\big({\mathrm{B}^5}_3^0\big), \quad Q_2^1 = \mathrm{R}_1^1\big({\mathrm{B}^5}_3^1\big).$$

Значит, множество $\mathrm{E}(P_1^{-1})$ содержит 8 соединений, связывающих грани ${\mathrm{B}^5}_3^0$ и ${\mathrm{B}^5}_3^1$ (четыре из них принадлежат множеству $\mathbf{P}_2(Q_1^{-1})$ и четыре — множеству $\mathbf{P}_2\big(Q_2^{-1}\big)$). При этом множество $\mathrm{E}\big(P_1^1\big)$ (а значит, по лемме 25 и множество $\big(\mathrm{E}[2]\,\big(P_1^1\big)\big)^*$) вообще не содержит таких соединений. Тем самым справедливо неравенство

$$\big|\mathrm{E}\big(P_1^{-1}\big) \setminus \big(\mathrm{E}[2]\,\big(P_1^1\big)\big)^*\big| \geqslant 8.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant 12 + 8 > 15$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай 2. Без ограничения общности считаем, что компонента P_1^{-1} является максимально равномерной и $F^{-1} = {\mathrm{B}^5}_2^0$. Тогда, как и в предыдущем случае, без ограничения общности имеем

$$Q_1^{-1} = \mathrm{R}_1^{-1}\big({\mathrm{B}^5}_2^0\big), \quad Q_2^{-1} = \mathrm{R}_1^{-1}\big({\mathrm{B}^5}_2^1\big).$$

Как отмечено выше, для компоненты P_1^1, поскольку она не является максимально равномерной, выполнены соотношения $\left|Q_1^1\right| = 5$, $\left|Q_2^1\right| = 3$ и $\mathrm{R}_1^1(F^1) \subseteq Q_1^1$. Значит, если $F^1 = \mathrm{B}^5\,{}^0_2$ или $F^1 = \mathrm{B}^5\,{}^1_2$ (без ограничения общности считаем, что $F^1 = \mathrm{B}^5\,{}^0_2$), то

$$\mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^0_2\bigr) \subseteq Q_1^1, \quad \bigl|Q_1^1 \cap \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_2\bigr)\bigr| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_2\bigr).$$

Тогда множество всех внутренних для грани $\mathrm{B}^5\,{}^1_2$ соединений $e \in \mathrm{E}\bigl(P_1^1\bigr)$ совпадает с множеством $\mathbf{P}_2\bigl(Q_2^1\bigr)$ и потому состоит из трёх соединений. Следовательно, по лемме 24 множество $\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*$ содержит не более трёх внутренних для грани $\mathrm{B}^5\,{}^1_2$ соединений. Тогда в силу того, что множество $\mathrm{E}\bigl(P_1^{-1}\bigr)$ содержит 6 внутренних для грани $\mathrm{B}^5\,{}^1_2$ соединений (эти соединения принадлежат множеству $\mathbf{P}_2\bigl(Q_2^{-1}\bigr)$), справедливо неравенство

$$\bigl|\mathrm{E}\bigl(P_1^{-1}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*\bigr| \geqslant 6 - 3 = 3.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant 13 + 3 > 15$, что и требовалось доказать.

Если же $F^1 \neq \mathrm{B}^5\,{}^0_2$ и $F^1 \neq \mathrm{B}^5\,{}^1_2$, то без ограничения общности полагаем $F^1 = \mathrm{B}^5\,{}^0_3$. Тогда

$$\mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^0_3\bigr) \subseteq Q_1^1, \quad \bigl|Q_1^1 \cap \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_3\bigr)\bigr| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_3\bigr),$$

поэтому множество всех связывающих грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_3$ и $\mathrm{B}^5\,{}^1_3$ соединений $e \in \mathrm{E}(P_1^1)$ состоит из четырёх соединений (все они принадлежат множеству $\mathbf{P}_2\bigl(Q_1^1\bigr)$). Следовательно, по лемме 25 множество $\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*$ содержит не более четырёх соединений, связывающих грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_3$ и $\mathrm{B}^5\,{}^1_3$. Тем самым в силу того, что множество $\mathrm{E}\bigl(P_1^{-1}\bigr)$ содержит 8 соединений, связывающих грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_3$ и $\mathrm{B}^5\,{}^1_3$, справедливо неравенство

$$\bigl|\mathrm{E}\bigl(P_1^{-1}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*\bigr| \geqslant 8 - 4 = 4.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant 13 + 4 > 15$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай 3. Без ограничения общности считаем, что $F^{-1} = \mathrm{B}^5\,{}^0_2$. Тогда

$$\mathrm{R}_1^{-1}\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^0_2\bigr) \subseteq Q_1^{-1}, \quad \bigl|Q_1^{-1} \cap \mathrm{R}_1^{-1}\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_2\bigr)\bigr| = 1, \quad Q_2^{-1} \subseteq \mathrm{R}_1^{-1}\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_2\bigr).$$

Если при этом $F^1 = F^{-1} = \mathrm{B}^5\,{}^0_2$, то имеем

$$\mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^0_2\bigr) \subseteq Q_1^1, \quad \bigl|Q_1^1 \cap \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_2\bigr)\bigr| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_2\bigr).$$

Тогда множество всех внутренних для грани $\mathrm{B}^5\,{}^1_2$ соединений $e \in \mathrm{E}\bigl(P_1^1\bigr)$ совпадает с множеством $\mathbf{P}_2\bigl(Q_2^1\bigr)$ и потому является треугольником. Отсюда и из очевидного включения $\mathbf{P}_2\bigl(Q_2^1\bigr) \subseteq \mathrm{E}\,[2]$ по леммам 24 и 11 следует, что множество всех внутренних для грани $\mathrm{B}^5\,{}^1_2$ соединений $e \in$

$\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*$ является звездой. Точно так же множество всех внутренних для грани $\mathrm{B}^5\,{}^1_2$ соединений $e \in \mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^{-1}\bigr)$ совпадает с множеством $\mathbf{P}_2\bigl(Q_2^{-1}\bigr)$ и потому является треугольником. Следовательно, справедливо неравенство $\bigl|\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^{-1}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*\bigr| \geqslant 1$.

Заметим, что одно из четырёх связывающих грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_2$ и $\mathrm{B}^5\,{}^1_2$ соединений $e \in \mathrm{E}(P_1^{-1})$ имеет длину 4, поэтому справедливо неравенство $\bigl|\mathrm{E}\,[4]\,\bigl(P_1^{-1}\bigr)\bigr| \geqslant 1$.

Отсюда следует, что

$$\bigl|\mathrm{E}\bigl(P_1^{-1}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*\bigr| = \bigl|\mathrm{E}\,[4]\,\bigl(P_1^{-1}\bigr)\bigr| + \bigl|\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^{-1}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*\bigr| \geqslant 2,$$

поэтому в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant 13 + 2 = 15$, что и требовалось доказать.

Если $F^1 = \mathrm{B}^5\,{}^1_2$, то

$$\mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_2\bigr) \subseteq Q_1^1, \quad \bigl|Q_1^1 \cap \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^0_2\bigr)\bigr| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^0_2\bigr).$$

Тогда множество всех внутренних для грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_2$ соединений $e \in \mathrm{E}(P_1^1)$ совпадает с множеством $\mathbf{P}_2(Q_2^1)$ и потому состоит из 3 соединений. Следовательно, по лемме 24 множество $\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*$ содержит не более трёх внутренних для грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_2$ соединений. Тем самым в силу того, что множество $\mathrm{E}\bigl(P_1^{-1}\bigr)$ содержит 6 внутренних для грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_2$ соединений (эти соединения принадлежат множеству $\mathbf{P}_2\bigl(Q_1^{-1}\bigr)$), справедливо неравенство

$$\bigl|\mathrm{E}\bigl(P_1^{-1}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*\bigr| \geqslant 6 - 3 = 3.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant 13 + 3 > 15$, что и требовалось доказать.

Если $F^1 \neq \mathrm{B}^5\,{}^0_2$ и $F^1 \neq \mathrm{B}^5\,{}^1_2$, то без ограничения общности полагаем $F^1 = \mathrm{B}^5\,{}^0_3$. Тогда

$$\mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^0_3\bigr) \subseteq Q_1^1, \quad \bigl|Q_1^1 \cap \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_3\bigr)\bigr| = 1, \quad Q_2^1 \subseteq \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5\,{}^1_3\bigr),$$

поэтому множество всех связывающих грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_3$ и $\mathrm{B}^5\,{}^1_3$ соединений $e \in \mathrm{E}\bigl(P_1^1\bigr)$ состоит из четырёх соединений (все они принадлежат множеству $\mathbf{P}_2\bigl(Q_1^1\bigr)$). Следовательно, по лемме 25 множество $\bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*$ содержит не более четырёх соединений, связывающих грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_3$ и $\mathrm{B}^5\,{}^1_3$. Тогда в силу того, что множество $\mathrm{E}\bigl(P_1^{-1}\bigr)$ содержит 8 соединений, связывающих грани $\mathrm{B}^5\,{}^0_3$ и $\mathrm{B}^5\,{}^1_3$ (шесть из них принадлежат множеству $\mathbf{P}_2\bigl(Q_1^{-1}\bigr)$ и два — множеству $\mathbf{P}_2\bigl(Q_2^{-1}\bigr)$), справедливо неравенство

$$\bigl|\mathrm{E}\bigl(P_1^{-1}\bigr) \setminus \bigl(\mathrm{E}\,[2]\,\bigl(P_1^1\bigr)\bigr)^*\bigr| \geqslant 8 - 4 = 4.$$

Значит, в силу неравенства (5) имеем $\mathfrak{B}^*(P_1) \geqslant 13 + 4 > 15$, что и требовалось доказать. Лемма 23 доказана.

Заметим, что любое однородное разбиение $P \in \mathcal{K}_2^{2,2}$ по определению имеет ровно две большие компоненты мощности 4, поэтому теорема 18 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 26. *Если хотя бы одна из двух больших компонент мощности 4 однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_2^{2,2}$ не является простой, то P неправильное.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что выполнено равенство $\mathbb{L}(P) = \mathbb{M}_2$ и компонента P_1^1 разбиения P не является простой. Тогда по теореме 11, лемме 23, теореме 13, теореме 12, а также в силу равенств $\overline{\mathrm{m}}(3,8) = (3,3,2)$ и $\overline{\mathrm{m}}(4,8) = (2,2,2,2)$ имеем

$$\mathfrak{B}^*(P) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{B}^*(P_i) \geqslant 15+12+2\cdot(\|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{C}} + \|\overline{\mathrm{m}}(3,8)\|_{\mathrm{T}}) + \|\overline{\mathrm{m}}(4,8)\|_{\mathrm{C}}$$

$$= 15+12+2\cdot(7+2)+4 = 49 > 48.$$

Значит, по седьмому признаку (теорема 10) однородное разбиение P неправильное. Лемма 26 доказана.

Лемма 27. *Если обе большие компоненты мощности 4 однородного разбиения $P \in \mathcal{K}_2^{2,2}$ простые, то P неправильна.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что выполнено равенство $\mathbb{L}(P) = \mathbb{M}_2$ и компонента P_3^1 однородного разбиения P является максимально равномерной.

Через j и k обозначим показатели простоты больших компонент P_1 и P_2 соответственно. Тогда по определению простой компоненты имеем $j \neq 1$, $k \neq 2$ и

$$P_1^1 = \bigl\{\mathrm{R}_1^1(\mathrm{B}^5{}^{\,0}_{\,j}), \mathrm{R}_1^1(\mathrm{B}^5{}^{\,1}_{\,j})\bigr\}, \quad P_2^1 = \bigl\{\mathrm{R}_2^1(\mathrm{B}^5{}^{\,0}_{\,k}), \mathrm{R}_2^1(\mathrm{B}^5{}^{\,1}_{\,k})\bigr\}.$$

Отсюда следует, что 4-мерная грань $\mathrm{B}^5{}^{\,0}_{\,j}$ куба B^5 является опорной для компоненты P_1^1 однородного разбиения P и 4-мерная грань $\mathrm{B}^5{}^{\,0}_{\,k}$ куба B^5 опорная для компоненты P_2^1 однородного разбиения P.

В случае $j \neq 2$ из равенства $\mathrm{Form}(\mathrm{B}^5{}^{\,0}_{\,j}) = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{j\}$ следует включение $2 \in \mathrm{Form}(\mathrm{B}^5{}^{\,0}_{\,j}) \setminus \{1\}$. Тем самым среди столбцов матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ с номерами из множества $\mathrm{Form}(\mathrm{B}^5{}^{\,0}_{\,j}) \setminus \{1\}$ найдутся два, один из которых содержит элемент, не превосходящий 2, а другой — элемент, не превосходящий 3. Отсюда по шестому признаку (теорема 9) однородное разбиение P неправильное.

Точно так же в случае $k \neq 1$ справедливо $1 \in \mathrm{Form}(\mathrm{B}^5{}^{\,0}_{\,k}) \setminus \{2\}$, поэтому среди столбцов матрицы сложности $\mathbb{L}(P)$ с номерами из множества $\mathrm{Form}(\mathrm{B}^5{}^{\,0}_{\,k}) \setminus \{2\}$ найдутся два, один из которых содержит элемент, не превосходящий 2, а другой — элемент, не превосходящий 3. Отсюда по шестому признаку (теорема 9) однородное разбиение P неправильное.

Покажем, что в случае, когда $j = 2$ и $k = 1$, найдётся такая 3-мерная грань $F \in \mathfrak{F}_3(\mathrm{B}^5)$, что некоторые два соединения $e_1, e_2 \in \mathrm{E}(P, F)$ имеют разные индексы. Последнее означает, что однородное разбиение P является неправильным по четвёртому признаку (теорема 7).

Действительно, в этом случае имеем

$$P_1^1 = \bigl\{\mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5{}_2^0\bigr), \mathrm{R}_1^1\bigl(\mathrm{B}^5{}_2^1\bigr)\bigr\}, \quad P_2^1 = \bigl\{\mathrm{R}_2^1\bigl(\mathrm{B}^5{}_1^0\bigr), \mathrm{R}_2^1\bigl(\mathrm{B}^5{}_1^1\bigr)\bigr\},$$

поэтому множество $\mathrm{E}\bigl(P_1^1\bigr)$ состоит из двенадцати соединений индекса 1, шесть из которых являются внутренними для грани $\mathrm{B}^5{}_2^0$ и шесть — для грани $\mathrm{B}^5{}_2^1$. Эти двенадцать соединений порождают двенадцать различных 3-мерных граней из множества $\mathfrak{F}_3\bigl(\mathrm{B}^5{}_2^0\bigr) \cup \mathfrak{F}_3\bigl(\mathrm{B}^5{}_2^1\bigr)$. Очевидно, что этими двенадцатью гранями являются все грани из этого множества за исключением следующих четырёх: $\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{0,0}$, $\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{0,1}$, $\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{1,0}$, $\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{1,1}$.

Аналогично множество $\mathrm{E}(P_2^1)$ состоит из двенадцати соединений индекса 2, шесть из которых являются внутренними для грани $\mathrm{B}^5{}_1^0$ и шесть — для грани $\mathrm{B}^5{}_1^1$. Эти двенадцать соединений порождают все грани из множества $\mathfrak{F}_3\bigl(\mathrm{B}^5{}_1^0\bigr) \cup \mathfrak{F}_3\bigl(\mathrm{B}^5{}_1^1\bigr)$ за исключением тех же четырёх: $\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{0,0}$, $\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{0,1}$, $\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{1,0}$, $\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{1,1}$.

Таким образом, любая 3-мерная грань из множества

$$X = \bigl(\mathfrak{F}_3\bigl(\mathrm{B}^5{}_2^0\bigr) \cup \mathfrak{F}_3\bigl(\mathrm{B}^5{}_2^1\bigr) \cup \mathfrak{F}_3\bigl(\mathrm{B}^5{}_1^0\bigr) \cup \mathfrak{F}_3\bigl(\mathrm{B}^5{}_1^1\bigr)\bigr) \setminus \bigl\{\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{0,0}, \mathrm{B}^5{}_{1,2}^{0,1}, \mathrm{B}^5{}_{1,2}^{1,0}, \mathrm{B}^5{}_{1,2}^{1,1}\bigr\}$$

порождается некоторым соединением $e \in \mathrm{E}\bigl(P_1^1\bigr) \cup \mathrm{E}\bigl(P_2^1\bigr)$. Значит, чтобы доказать существование вышеуказанной грани F, достаточно найти такое соединение $e' \in \mathrm{E}(P)$, что $\widetilde{e'} \in X$ и e' имеет индекс, отличный от 1 и 2. Покажем, что такое e' имеется среди соединений, порождённых максимально равномерной компонентой P_3^1, т. е. в множестве $\mathrm{E}(P_3^1)$.

Рассмотрим четыре множества (0-1)-рёбер:

$$\mathrm{R}_3^1\bigl(\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{0,0}\bigr), \quad \mathrm{R}_3^1\bigl(\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{0,1}\bigr), \quad \mathrm{R}_3^1\bigl(\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{1,0}\bigr), \quad \mathrm{R}_3^1\bigl(\mathrm{B}^5{}_{1,2}^{1,1}\bigr).$$

Обозначим их через $M^{0,0}, M^{0,1}, M^{1,0}, M^{1,1}$ соответственно.

По лемме 5 имеем $|M^{0,0}| = |M^{0,1}| = |M^{1,0}| = |M^{1,1}| = 2$. Кроме того, очевидно, что эти четыре множества образуют разбиение множества R_3^1.

Два множества $M^{\delta,\sigma}$ и $M^{\gamma,\lambda}$, $\delta, \sigma, \gamma, \lambda \in \{0, 1\}$, назовём *соседними*, если наборы δ, σ и γ, λ различаются в одном разряде, и *противоположными*, если — в двух.

Блоки максимально равномерной компоненты P_3^1 однородного разбиения P обозначим через Q_1, Q_2 и Q_3. При этом полагаем $|Q_1| = |Q_2| = 3$ и $|Q_3| = 2$.

Заметим, что хотя бы один из блоков Q_1, Q_2, Q_3 имеет непустое пересечение с некоторой парой соседних множеств из вышеуказанной четвёрки. Действительно, если таковым блоком не является Q_1 (блок мощности 3), то для некоторой пары противоположных множеств $M^{\delta,\sigma}$ и $M^{\gamma,\lambda}$ справедливо включение $Q_1 \subseteq M^{\delta,\sigma} \cup M^{\gamma,\lambda}$. Без ограничения общности считаем, что $M^{\delta,\sigma} = M^{0,0}$, $M^{\gamma,\lambda} = M^{1,1}$ и $M^{0,0} \subseteq Q_1$, $|M^{1,1} \cap Q_1| = 1$. Если, кроме того, таковым блоком не является Q_2 (блок мощности 3), то без ограничения общности считаем, что $M^{0,1} \subseteq Q_2$ и $|M^{1,0} \cap Q_2| = 1$. Тогда в силу того, что компонента P_3^1 является разбиением множества R_3^1, для пары соседних множеств $M^{1,1}$, $M^{1,0}$ и блока Q_3 (блока мощности 2) имеем $|M^{1,1} \cap Q_3| = 1$ и $|M^{1,0} \cap Q_3| = 1$.

Если некоторый блок $Q \in P_3^1$ имеет непустое пересечение с парой соседних множеств $M^{\delta,\sigma}$ и $M^{\gamma,\lambda}$, то для некоторого 2-элементного подмножества $\{r_1, r_2\} \subseteq Q$ имеем $r_1 \in M^{\delta,\sigma}$ и $r_2 \in M^{\gamma,\lambda}$. Ясно, что соединение $e' = \{r_1, r_2\}$ принадлежит множеству $\mathrm{E}\big(P_3^1\big)$ и $\widetilde{e} \in X$. Лемма 27 доказана. Теорема 18 доказана. Теорема 16 доказана. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Храпченко В. М.** О сложности реализации линейной функции в классе П-схем // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 1. С. 35–40.
2. **Храпченко В. М.** Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 1. С. 83–92.
3. **Храпченко В. М.** Упрощённое доказательство одной нижней оценки сложности // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, № 2. С. 82–84.
4. **Рычков К. Л.** Модификация метода В. М. Храпченко и применение её к оценке сложности П-схем для кодовых функций // Методы дискретного анализа в теории графов и схем. Вып. 42. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. С. 91–98.
5. **Razborov A.** Applications of matrix methods to the theory of lower bounds in computational complexity // Combinatorica. 1990. Vol. 10, No. 1. P. 81–93.
6. **Karchmer M., Wigderson A.** Monotone circuits for connectivity require super-logarithmics depth // SIAM J. Discrete Math. 1990. Vol. 3, No. 2. P. 255–265.
7. **Håstad J.** The shrinkage exponent of de Morgan formulas is 2 // SIAM J. Comput. 1998. Vol. 27. P. 48–64.
8. **Черухин Д. Ю.** К вопросу о логическом представлении счётчика чётности // Неформальная наука. 2009. № 2. С. 14–23.
9. **Августинович С. В., Васильев Ю. Л., Рычков К. Л.** Формульная сложность тернарной линейной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 3. С. 3–12.
10. **Васильев Ю. Л., Рычков К. Л.** Нижняя оценка формульной сложности тернарной линейной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 4. С. 15–26.

11. **Рычков К. Л.** О минимальных π-схемах для линейных булевых функций // Дискрет. анализ. 1991. Вып. 51. С. 84–104.
12. **Яблонский С. В.** Реализация линейной функции в классе П-схем // Докл. АН СССР. 1954. Т. 94, № 5. С. 805–806.
13. **Рычков К. Л.** Достаточные условия локальной бесповторности минимальных π-схем, реализующих линейные булевы функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 5. С. 71–85.
14. **Рычков К. Л.** О сложности реализации линейной булевой функции в классе π-схем // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 25, № 3. С. 36–94.
15. **Harary F.** Graph theory. London: Addison-Wesley, 1969. 273 p.
16. **Turán P.** Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie // Mat. Fiz. Lapok. 1941. Bd 48. S. 436–452. [Hungarian].

Рычков Константин Леонидович

Статья поступила
10 июня 2019 г.
После доработки —
29 июля 2019 г.
Принята к публикации
28 августа 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2019. Vol. 26, No. 4. P. 74–107

UDC 519.714 DOI 10.33048/daio.2019.26.662

ON THE PERFECTNESS OF MINIMAL REGULAR PARTITIONS OF THE EDGE SET OF THE n-DIMENSIONAL CUBE *)

K. L. Rychkov

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: rychkov@math.nsc.ru

Abstract. We prove that, for n equal to 3, 5, and a power of 2, every minimal partition of the edge set of the n-dimensional cube is perfect. As a consequence, we obtain some description of the classes of all minimal parallel-serial contact schemes (π-schemes) realizing the linear Boolean functions that depend essentially on n variables for the corresponding values of n. Bibliogr. 16.

Keywords: Boolean function, π-scheme, regular partition of the edge set of the n-dimensional cube, lower complexity bound.

REFERENCES

1. **V. M. Khrapchenko,** Complexity of the realization of a linear function in the class of Π-circuits, *Mat. Zametki* **9** (1), 35–40 (1971) [Russian] [*Math. Notes Acad. Sci. USSR* **9** (1), 21–23 (1971)].
2. **V. M. Khrapchenko,** A method of determining lower bounds for the complexity of Π-schemes, *Mat. Zametki* **10** (1), 83–92 (1971) [Russian] [*Math. Notes Acad. Sci. USSR* **10** (1), 474–479 (1971)].
3. **V. M. Khrapchenko,** A simplified proof of a lower complexity estimate, *Discrete Math.* **25** (2), 82–84 (2013) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **23** (2), 171–174 (2013)].
4. **K. L. Rychkov,** A modification of Khrapchenko's method and its application to estimation of complexity of Π-schemes for code functions, in *Methods of Discrete Analysis in Theory of Graphs and Schemes*, Vol. 42 (Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1985), pp. 91–98 [Russian].
5. **A. Razborov,** Applications of matrix methods to the theory of lower bounds in computational complexity, *Combinatorica* **10** (1), 81–93 (1990).
6. **M. Karchmer** and **A. Wigderson,** Monotone circuits for connectivity require super-logarithmic depth, *SIAM J. Discrete Math.* **3** (2), 255–265 (1990).

*) This research is supported by the Programme for Fundamental Scientific Research of SB RAS No. I.5.1 (Project 0314–2019–0016).

7. **J. Håstad,** The shrinkage exponent of de Morgan formulas is 2, *SIAM J. Comput.* **27** (1), 48–64 (1998).
8. **D. Yu. Cherukhin,** To the question of a logical representation for the parity counter, *Neform. Nauka,* No. 2, 14–23 (2009) [Russian].
9. **S. V. Avgustinovich, Yu. L. Vasil'ev,** and **K. L. Rychkov,** The computation complexity in the class of formulas, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **19** (3), 3–12 (2012) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (4), 403–409 (2012)].
10. **Yu. L. Vasil'ev** and **K. L. Rychkov,** A lower bound on formula size of a ternary linear function, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **20** (4), 15–26 (2013) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **7** (4), 490–499 (2013)].
11. **K. L. Rychkov,** On minimal π-schemes for linear Boolean functions, in *Methods of Discrete Analysis in Synthesis of Schemes for Boolean Functions*, Vol. 51 (Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1991), pp. 84–104 [Russian] [*Sib. Adv. Math.* **3** (3), 172–185 (1993)].
12. **S. V. Yablonskii,** Realization of a linear function in the class of Π-circuits, *Dokl. Akad. Nauk SSSR, Nov. Ser.* **94** (5), 805–806 (1954) [Russian].
13. **K. L. Rychkov,** Sufficient conditions for the minimal π-schemes for linear Boolean functions to be locally nonrepeating, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (5), 71–85 (2015) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **9** (4), 580–587 (2015)].
14. **K. L. Rychkov,** Complexity of the realization of a linear Boolean function in the class of π-schemes, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **25** (3), 36–94 (2018) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **12** (3), 540–576 (2018)].
15. **F. Harary,** *Graph Theory* (Addison-Wesley, London, 1969).
16. P. Turán, Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie, *Mat. Fiz. Lapok* **48** (1), 436–452 (1941) [Hungarian].

Konstantin L. Rychkov

Received June 10, 2019
Revised July 29, 2019
Accepted August 28, 2019