ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2019. Т. 26, № 4. С. 16–33

УДК 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2019.26.663

ДВУХУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ «АТАКУЮЩИЙ — ЗАЩИТНИК» ДЛЯ ВЫБОРА СОСТАВА СРЕДСТВ АТАКИ *)

В. Л. Береснев[1,2,a], *А. А. Мельников*[1,2,b]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия

[2] Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Россия

E-mail: [a] beresnev@math.nsc.ru, [b] melnikov@math.nsc.ru

Аннотация. Рассматривается двухуровневая модель для оценки величины затрат атакующей стороны на успешную атаку заданного множества объектов, защищаемых другой стороной. При этом атакующий и защитник располагают различными средствами (способами) соответственно для атаки и защиты объектов, а потери атакующего зависят от выбранных защитником средств атаки. Рассматриваемая модель построена на основе игры Штакельберга, в которой атакующий стремится провести успешную атаку объектов с наименьшими затратами, а защитник — нанести атакующей стороне максимальный ущерб, используя ограниченный бюджет. Формально рассматриваемая модель «атакующий — защитник» записывается как задача двухуровневого целочисленного программирования. Особенность задачи состоит в том, что допустимость решения задачи верхнего уровня зависит от всех оптимальных решений задачи нижнего уровня. Для вычисления оптимального решения исследуемой двухуровневой задачи предлагается алгоритм, состоящий в специальном разбиении множества допустимых решений задачи на подмножества и её сведении к последовательности двухуровневых подзадач. Специфика множеств допустимых решений этих подзадач позволяет свести их к задачам смешанного целочисленного программирования двух видов. Библиогр. 14.

Ключевые слова: разбиение множества допустимых решений, двухуровневая подзадача, условие оптимальности.

---

*) Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17–11–01021).

Введение

Широкое семейство моделей, построенных по схеме «защитник — атакующий — защитник» [1, 2] применяется для поддержки принятия решений в планировании систем обороны и нападения. В [3] рассматривается семейство математических моделей планирования развития технических средств, предназначенных для выполнения заданных видов работ (задач). Среди этих моделей важное место занимает задача выбора рационального состава средств, используемых для выполнения работ, и назначения исполнителя для работы каждого вида. В модели учитывается, в частности, что при выполнении работ средства—исполнители этих работ несут потери, поэтому количественный состав средств, назначаемых на выполнение работ, выбирается с учётом возможных потерь. Данную модель также можно рассматривать как модель выбора состава средств атаки заданного множества объектов.

Её недостатком является то, что защита объектов в модели предполагается фиксированной и потери средств атаки задаются нормативно, как доля от общего числа средств, атакующих данный объект. Аналогичное упрощение присутствует в моделях «защитник — атакующий» [4, 5], где возможность выбора способов защиты объектов сводится к двум вариантам: объект защищается или нет. Предполагается, что в первом варианте потери атакующего будут для него неприемлемыми, поэтому атакуются только незащищённые объекты, при атаке которых потери нулевые. Более общая ситуация, в которой степень укреплённости и разрушения объектов может принимать также промежуточные значения, рассматривается в работе [6], предлагающей точные методы для решения задачи обороняющейся стороны.

В предлагаемой модели «атакующий — защитник» делается попытка рассмотреть более общую ситуацию, когда атакующий и защитник располагают различными средствами (способами) соответственно для атаки и защиты объектов, а потери атакующей стороны и результат атаки в целом зависят от выбранных атакующим средств атаки и выбранных защитником средств защиты. В такой ситуации атакующая сторона вступает в игровое взаимодействие со стороной защиты и, принимая решение, должна учитывать ответное решение другой стороны, которая, выбирая своё решение, будет стремиться нанести атакующему максимальные потери.

Рассматриваемая модель построена на основе игры Штакельберга [7], в которой атакующий (Лидер) выбирает из заданного множества типы средств атаки, необходимые количества средств каждого типа и производит назначение средств выбранных типов по объектам атаки. Защитник (Последователь), обладая информацией о решении Лидера, выбирает для каждого объекта вид средств защиты.

Задача Лидера — выбрать состав средств атаки минимальной суммарной стоимости, допустимый по эффективности, т. е. позволяющий с учётом возможных потерь выполнить все задачи по атаке объектов при любом оптимальном решении Последователя. Задача Последователя — выбрать состав средств защиты, удовлетворяющий бюджетным ограничениям и позволяющий в случае атаки нанести Лидеру максимальный ущерб и, в конечном итоге, максимизировать его затраты на реализацию планов атаки.

Формально рассматриваемая модель «атакующий — защитник» записывается как задача двухуровневого математического программирования [8], включающая в себя задачу верхнего уровня (задачу атакующего) и задачу нижнего уровня (задачу защитника). Задача верхнего уровня представляет собой задачу, близкую ограниченной задаче размещения [9], а нижнего уровня — задачу о рюкзаке с непрерывными переменными [10, 11]. Особенность исследуемой модели состоит в том, что в случае неединственности оптимального решения задачи защитника допустимость решения задачи атакующего зависит от всех оптимальных решений задачи защитника. Это приводит к необходимости уточнения понятия допустимого решения рассматриваемой двухуровневой модели. Таким решением является пара $(X, O(X))$, где X — допустимое решение задачи атакующего, а $O(X)$ — множество оптимальных решений задачи защитника при заданном X. При этом X есть допустимое решение при любом оптимальном решении из множества $O(X)$. Понятно, что в случае единственности оптимального решения задачи защитника при рассматриваемых допустимых решениях задачи атакующего это определение совпадает с общепринятым понятием допустимого решения для задач двухуровневого программирования.

Для вычисления оптимального решения исследуемой двухуровневой задачи «атакующий — защитник» используется подход, состоящий в специальном разбиении множества допустимых решений задачи на подмножества и её сведении к последовательности двухуровневых подзадач двух типов.

Данное сведение базируется на свойстве оптимального решения задачи о рюкзаке с непрерывными переменными, позволяющем выписать это решение в явном виде. Указанный подход использован в [12] при исследовании задачи двухуровневого линейного программирования, в которой задачей нижнего уровня является задача о рюкзаке с непрерывными переменными. В работе строится последовательность задач линейного программирования, среди оптимальных решений которых содержится оптимальное решение исходной задачи. Задачи рассматриваемой последовательности отличаются дополнительными ограничениями, «разбивающими» множество допустимых решений исследуемой двухуровневой задачи.

В [13] идея декомпозиции области допустимых решений двухуровневой задачи реализована для некоторых случаев задачи двухуровневого линейного программирования с задачей о многовариантном рюкзаке на нижнем уровне. В настоящей работе при построении последовательности двухуровневых подзадач используются дополнительные ограничения, аналогичные рассмотренным в [12]. Специфика получаемых подзадач позволяет свести их к задачам смешанного целочисленного программирования (MIP). Эти задачи строятся на основе задач high-point problem (HPP) [14], которые усиливаются ограничениями, гарантирующими оптимальность решений задач нижнего уровня.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 формулируются модель «атакующий — защитник» в виде задачи двухуровневого целочисленного программирования и задача выбора состава средств атаки в данной модели. В разд. 2 уточняется понятие допустимого решения исследуемой задачи, а в разд. 3 предлагается алгоритм её решения, состоящий в её сведении к последовательности задач MIP.

1. Математическая модель

Для построения математической модели принятия наилучшего решения атакующей стороной по выбору состава средств атаки в рассматриваемом игровом взаимодействии атакующего и защитника сформулируем предположения, используемые при её построении, уточним необходимые исходные данные и введём обозначения для параметров и переменных.

1.1. Предположения и допущения. Уточним прежде всего цели и задачи каждой из сторон. Цель атакующего состоит в определении состава средств атаки, позволяющего выполнить заданный перечень видов работ (атаковать заданное множество видов объектов) с требуемым уровнем эффективности. Достижение этой цели подразумевает выбор качественного и количественного составов, т. е. выбор типов средств из множества возможных и определение необходимых объёмов средств выбранных типов. При выборе состава средств атаки атакующий исходит из того, что в ходе выполнения работ часть используемых средств будет потеряна и размер потерь зависит от средств защиты, используемых защитником. При этом предполагается, что защитник будет стремиться нанести атакующей стороне максимальный ущерб и будет использовать против средств атаки каждого типа наиболее эффективное средство защиты. Таким образом, задача атакующего состоит в выборе состава средств атаки минимальной суммарной стоимости, позволяющего выполнить заданный перечень видов работ с требуемой эффективностью в условиях оптимального решения защитника.

Цель защитника, как уже отмечалось, — максимизировать суммарную стоимость потерь атакующего в случае атаки и, в конечном итоге, увеличить расходы атакующего на проведение успешной атаки. Поэтому задача защитника состоит в том, чтобы, находясь в условиях ограниченного бюджета (или другого ресурса), выбрать средства защиты, их назначения по средствам атаки и интенсивности использования, чтобы суммарная стоимость потерь атакующего была максимальной.

При формальной записи задачи атакующего будем использовать следующие допущения и предположения. Считаем, что для каждого вида объектов атаки и всякого типа средств атаки известно количество таких средств, необходимое для успешной атаки в условиях отсутствия защиты. Эту величину назовём *нормативным количеством средств атаки* данного типа для рассматриваемого вида объектов. Общее количество средств атаки, необходимое для успешной атаки защищённого объекта, равняется сумме нормативного количества средств атаки и объёма потерянных средств. При вычислении величины потерь средств атаки будем исходить из следующего. Считаем, что величина потерь средств данного типа зависит от используемого средства защиты объекта и пропорциональна нормативному количеству средств атаки для объектов данного вида. Коэффициент пропорциональности, зависящий от типа средства атаки, вида средств защиты и, возможно, вида атакуемого объекта, назовём *нормативной величиной потерь* данного средства атаки для рассматриваемого средства защиты. Считаем, что данный коэффициент вычисляется для максимальной (единичной) интенсивности использования рассматриваемых средств защиты. Если средство защиты используется с меньшей интенсивностью, то нормативная величина потерь уменьшится пропорционально интенсивности использования средств защиты. В частности, при нулевой интенсивности нормативная величина потерь равна нулю.

Для каждого типа средств атаки и всякого вида средств защиты считаем известным количество средств защиты, которое обеспечивает нормативную величину потерь средств атаки при единичной интенсивности использования данного средства защиты. Эту величину назовём *нормативным количеством средств защиты* для рассматриваемых средств атаки. Таким образом, считаем, что общее количество средств защиты данного вида в случае их использования для защиты данного вида объектов с единичной интенсивностью от рассматриваемых средств атаки равняется произведению нормативного количества средств атаки и нормативного количества средств защиты. Если средства защиты используются не с единичной интенсивностью, то их нормативная численность и, следовательно, общее количество уменьшаются в той же пропорции, что и интенсивность использования.

Считаем, что суммарные затраты атакующего на средства атаки, составляющие его целевую функцию, включают начальные затраты для выбранных типов средств и затраты на закупку средств атаки выбранных типов в требуемых объёмах, не превышающих заданных ограничений на допустимые объёмы закупок. Затраты на закупку считаем пропорциональными объёму закупаемых средств. Потери атакующего, выражаемые целевой функцией защитника, считаем равными стоимости теряемых средств атаки.

1.2. Параметры и переменные модели. Введём необходимые обозначения.

Множества:

$J = \{1, \ldots, n\}$ — множество объектов (видов объектов), являющихся целями для атакующего;

$I = \{1, \ldots, m\}$ — множество возможных средств (типов средств) атаки;

K — множество возможных средств (типов средств) защиты.

Параметры:

p_{ij} — нормативное количество средств атаки $i \in I$ для объекта $j \in J$;

h_{ki} — нормативная величина потерь средств атаки $i \in I$ при использовании для защиты целей атаки средств защиты $k \in K$;

q_{ki} — нормативное количество средств защиты $k \in K$, обеспечивающее нормативную величину потерь средств атаки $i \in I$;

f_i — фиксированные затраты атакующего на использование средств атаки $i \in I$;

c_i — удельные затраты атакующего на закупку средств атаки $i \in I$;

A_i — верхняя граница для допустимого объёма закупки средств атаки $i \in I$;

d_k — удельные затраты защитника на закупку средств защиты $k \in K$;

d — бюджет защитника на закупку средств защиты.

Переменные:

x_i — переменные выбора средств атаки; величина x_i равна единице, если средства атаки $i \in I$ используются для атаки объектов, и равна нулю в противном случае;

v_i — переменные выбора суммарного нормативного объёма использования средств атаки $i \in I$;

w_i — переменные, определяющие возможные потери средств атаки $i \in I$;

x_{ij} — переменные назначения средств атаки на объекты атаки; величина x_{ij} равна единице, если средства атаки $i \in I$ назначены для атаки объекта $j \in J$, и нулю в противном случае;

z_{ki} — переменные назначения средств защиты по средствам атаки, величина z_{ki} равна интенсивности использования средства защиты $k \in K$ против средств атаки $i \in I$.

1.3. Формулировка задачи. Построение модели «атакующий — защитник» начнём с формулировки задачи защитника. Цель защищающей стороны — нанести атакующему максимальный ущерб, или, другими словами, максимизировать суммарную стоимость выведенных из строя средств атаки. Сдерживающим фактором для защитника является ограниченный бюджет, используемый для формирования набора средств защиты.

Пусть задан вектор $v = (v_i)$, определяющий нормативную численность средств атаки, выбранных атакующей стороной. Тогда с использованием переменных z_{ki}, $k \in K$, $i \in I$, задача защитника записывается следующим образом:

$$\max_{(z_{ki})} \sum_{i \in I} c_i v_i \sum_{k \in K} h_{ki} z_{ki},$$

$$\sum_{i \in I} v_i \sum_{k \in K} d_k q_{ki} z_{ki} \leqslant d,$$

$$\sum_{k \in K} z_{ki} \leqslant 1, \quad i \in I,$$

$$z_{ki} \geqslant 0, \quad k \in K,\ i \in I.$$

Из вида данной задачи следует, что для средств атаки $i \in I$ оптимальным решением по выбору средства защиты будет средство $k(i) \in K$ такое, что

$$\frac{c_i h_{k(i)i}}{d_{k(i)} q_{k(i)i}} = \max_{k \in K} \frac{c_i h_{ki}}{d_k q_{ki}}.$$

Если указанное равенство имеет место для нескольких элементов множества K, то через $k(i)$ будем обозначать элемент с наибольшей величиной h_{ki}. Отсюда получаем, что если (z_{ki}) — оптимальное решение рассматриваемой задачи защитника, то можно считать, что $z_{ki} = 0$ для $i \in I$, $k \neq k(i)$.

С учётом этого замечания введём новые обозначения: $c'_i = c_i h_{k(i)i}$, $d' = d_{k(i)} q_{k(i)i}$, $h'_i = h_{k(i)}$, $u_i = v_i z_{k(i)i}$ и перепишем задачу защитника следующим образом:

$$\max_{(u_i)} \sum_{i \in I} c'_i u_i,$$

$$\sum_{i \in I} d'_i u_i \leqslant d,$$

$$u_i \leqslant v_i, \quad i \in I,$$

$$u_i \geqslant 0, \quad i \in I.$$

В этой задаче переменные u_i, $i \in I$, можно рассматривать как величины, определяющие среднюю интенсивность использования средств защиты $k(i)$ при атаке объектов средствами атаки $i \in I$.

С использованием введённых переменных и с учётом сформулированных предположений задача выбора состава средств атаки записывается как следующая задача двухуровневого программирования:

$$\min_{(x_i),(x_{ij}),(v_i),(w_i)} \sum_{i \in I} (f_i x_i + c_i(v_i + h_i' w_i)), \tag{1}$$

$$v_i = \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij}, \quad i \in I, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad i \in I, \tag{3}$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{4}$$

$$v_i + h_i' w_i \leqslant A_i, \quad i \in I, \tag{5}$$

$$w_i \geqslant \tilde{u}_i, \quad i \in I,\ \tilde{u}_i \in O(v), \tag{6}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \tag{7}$$

$$x_{ij}, v_i, w_i \geqslant 0, \quad i \in I,\ j \in J; \tag{8}$$

$$O(v) \text{ — множество оптимальных решений } \tilde{u} = (\tilde{u}_i) \text{ задачи} \tag{9}$$

$$\max_{(u_i)} \sum_{i \in I} c_i' u_i, \tag{10}$$

$$\sum_{i \in I} d_i' u_i \leqslant d, \tag{11}$$

$$u_i \leqslant v_i, \quad i \in I, \tag{12}$$

$$u_i \geqslant 0, \quad i \in I. \tag{13}$$

Обозначим задачу верхнего уровня (1)–(9) (задачу атакующего) через $\mathcal{L}$, а задачу нижнего уровня (10)–(13) (задачу защитника) через $\mathcal{F}$. Задачу (1)–(13) в целом обозначим через $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

В задаче $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ целевая функция (1) выражает расходы атакующего на средства атаки, включающие начальные затраты на выбранные для использования средства и затраты на закупку этих средств в объёмах, необходимых для успешной атаки объектов с учётом возможных потерь. Равенства (2) определяют величины нормативных объёмов средств атаки каждого типа, необходимых для успешной атаки объектов. Ограничения (3) и (4) означают, что каждый объект должен быть атакован и для атаки объектов могут быть использованы только выбранные типы средств. Неравенства (5) задают ограничения на объёмы закупок средств атаки каждого типа, а неравенства (6) означают, что закупленных средств атаки каждого типа должно быть достаточно для успешной атаки при любом оптимальном решении защитника. Целевая функция (10) выражает величину ущерба, наносимого атакующему средствами защиты. Неравенство (11) задаёт бюджетное ограничение на объёмы закупаемых средств защиты, а ограничение (12) означает, что интенсивность воздействия средств защиты по средствам атаки не превосходит единицы.

2. Допустимые решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$

В соответствии со спецификой сформулированной двухуровневой задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ уточним понятия её допустимого и оптимального решений. Последовательность вычисления допустимых значений переменных задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ можно представить следующим образом. Первоначально выбирается вектор $x = (x_i)$, определяющий типы средств атаки, используемые атакующим для атаки объектов. Далее определяются величины x_{ij}, задающие распределение средств атаки по объектам атаки и вычисляются суммарные нормативные объёмы v_i выбранных средств атаки. После этого при заданном векторе $v = (v_i)$ решается задача защитника и отыскивается множество $O(v)$ оптимальных решений $\tilde{u} = (\tilde{u}_i)$ этой задачи. Далее по множеству $O(v)$ вычисляются величины w_i, оценивающие сверху интенсивности использования средств защиты по средствам атаки. После этого вычисляются возможные объёмы потерь средств атаки и проверяется справедливость неравенств (5), ограничивающих возможности атакующего по закупке средств атаки. Если указанные ограничения выполняются, то построенное решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ является допустимым.

Таким образом, пару $(X, O(v))$, $X = ((x_i), (x_{ij}), (v_i), (w_i))$, где $O(v)$ — множество оптимальных решений задачи $\mathcal{F}$ при заданном векторе $v = (v_i)$, а X —допустимое решение задачи $\mathcal{L}$ при любом оптимальном решении $\tilde{u} = (\tilde{u}_i)$ из множества $O(v)$, назовём *допустимым решением задачи* $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Заметим, что если задача $\mathcal{F}$ имеет единственное оптимальное решение $\tilde{u} = (\tilde{u}_i)$ при любом допустимом векторе $v = (v_i)$, то допустимое решение $(X, O(v))$ трансформируется в допустимое в обычном смысле решение $(X, \tilde{u})$ двухуровневой задачи. Значение целевой функции (1) задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на допустимом решении $(X, O(v))$ обозначим через $L(X, O(v))$. Допустимое решение $(X, O(v))$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ назовём *оптимальным решением* задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если $L(X, O(v)) \leqslant L(X', O(v'))$ для любого допустимого решения $(X', O(v'))$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

В заключение отметим, что далее при исследовании задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ ограничение (11) задачи $\mathcal{F}$ будем считать активным и рассматривать его в форме равенства. Если на оптимальном решении задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ данное ограничение выполняется как строгое неравенство, то задача $\mathcal{F}$ имеет единственное оптимальное решение $\tilde{u} = (\tilde{u}_i)$ такое, что $\tilde{u}_i = v_i$, $i \in I$, и задача $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ трансформируется в задачу $\mathcal{L}$.

3. Алгоритм решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$

Алгоритм решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ представим в виде последовательного решения некоторых подзадач исследуемой задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, каждая из которых сводится к задачи MIP.

3.1. Подзадачи задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$. Для построения требуемых подзадач задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ будем считать, что элементы множества $I = \{1, \ldots, m\}$ занумерованы по невозрастанию величин $\frac{c'_i}{d'_i}$, $i \in I$. Рассмотрим разбиение множества I на подмножества точками m_l, $l = 0, 1, \ldots, L$, такими, что $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_L = m$, $\frac{c'_{m_l}}{d'_{m_l}} > \frac{c'_{m_l+1}}{d'_{m_l+1}}$, $l = 1, \ldots, L-1$. Пусть $I_l = \{m_{l-1}+1, \ldots, m_l\}$, $l = 1, \ldots, L$. Считаем, что для элементов всякого множества I_l выполняется одно из двух: либо $\frac{c'_i}{d'_i} = \frac{c'_k}{d'_k}$ для любых $i, k \in I_l$, либо $\frac{c'_i}{d'_i} > \frac{c'_k}{d'_k}$ для любых $i, k \in I_l$, $i < k$. В первом случае множество I_l назовём *подмножеством с равенствами*, а во втором — *подмножеством с неравенствами*. Будем считать, что рассматриваемое разбиение множества I есть разбиение с наименьшим числом элементов, т. е. такое, что никакие два соседних подмножества I_l и I_{l+1} не являются одновременно подмножествами с неравенствами.

Для всякого $l = 1, \ldots, L$ рассмотрим неравенства

$$\sum_{s=1}^{l} \sum_{i \in I_s} d'_i v_i \geqslant d, \tag{14}$$

$$\sum_{s=1}^{l-1} \sum_{i \in I_s} d'_i v_i \leqslant d \tag{15}$$

и подзадачу $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$ задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, где $\mathcal{L}_l$ есть задача $\mathcal{L}$ с дополнительными ограничениями (14) и (15), а $\mathcal{F}_l$ есть задача $\mathcal{F}$, в которой величины v_i, $i \in I$, удовлетворяют ограничениям (14) и (15).

Отметим прежде всего следующее полезное свойство оптимального решения $\tilde{u} = (\tilde{u}_i)$ задачи $\mathcal{F}_l$.

Утверждение 1. *Если $\tilde{u} = (\tilde{u}_i)$ — оптимальное решение задачи $\mathcal{F}_l$, то $\tilde{u}_i = v_i$ для $i \in I_s$, $s < l$, и $\tilde{u}_i = 0$ для $i \in I_s$, $s > l$.*

Доказательство. Действительно, пусть равенство $\tilde{u}_i = v_i$ выполняется не для всякого $i \in I_s$, $s < l$. Тогда в силу неравенства (15) имеем

$$\sum_{s=1}^{l-1}\sum_{i\in I_s} d'_i\tilde{u}_i < \sum_{s=1}^{l-1}\sum_{i\in I_s} d'_i v_i \leqslant d,$$

следовательно, найдётся $i_0 \in I_s$, $s \geqslant l$, такой, что $\tilde{u}_i > 0$. Это противоречит оптимальности решения $\tilde{u}$. Пусть равенство $\tilde{u}_i = 0$ выполняется не для всякого $i \in I_s$, $s > l$. В силу оптимальности решения $\tilde{u}$ имеем $\tilde{u}_i = v_i$ для $i \in I_s$, $s \leqslant l$. Стало быть,

$$\sum_{s=1}^{l}\sum_{i\in I_s} d'_i v_i = \sum_{s=1}^{l}\sum_{i\in I_s} d'_i\tilde{u}_i < d,$$

что противоречит неравенству (14). Утверждение 1 доказано.

Укажем на связь исходной задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ с семейством задач $(\mathcal{L}_l,\mathcal{F}_l)$, $1 \leqslant l \leqslant L$.

Утверждение 2. *Если $(X_l, O(v_l))$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$, $1 \leqslant l \leqslant L$, то $(X_l, O(v_l))$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$. Если $(X_l^*, O(v_l^*))$ — оптимальное решение задачи $(\mathcal{L}_l,\mathcal{F}_l)$, $1 \leqslant l \leqslant L$, и $L(X_{l_0}^*, O(v_{l_0}^*)) = \min\limits_l L(X_l^*, O(v_l^*))$, то $(X_{l_0}^*, O(v_{l_0}^*))$ — оптимальное решение задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$.*

Доказательство. Действительно, если $(X_l, O(v_l))$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{L}_l,\mathcal{F}_l)$, то для этого решения выполняются все ограничения задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$, следовательно, $(X_l, O(v_l))$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$. Пусть $(X^*, O(v^*))$ — оптимальное решение задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ и $\tilde{u} = (\tilde{u}_i)$ — некоторое оптимальное решение задачи $\mathcal{F}$. Выберем наибольший номер l_0, $1 \leqslant l_0 \leqslant L$, такой, что $\tilde{u}_{l_0} > 0$ для некоторого $i_0 \in I_{l_0}$. Тогда $\tilde{u}_i = 0$ для $i \in I_l$, $l > l_0$, и $\tilde{u}_i = v_i^*$ для $i \in I_l$, $l < l_0$, в силу оптимальности решения $(\tilde{u}_i)$. Отсюда получаем

$$\sum_{s=1}^{l_0-1}\sum_{i\in I_s} d'_i v_i^* = \sum_{s=1}^{l_0-1}\sum_{i\in I_s} d'_i\tilde{u}_i < \sum_{s=1}^{l_0-1}\sum_{i\in I_s} d'_i\tilde{u}_i + \tilde{u}_{l_0} \leqslant d,$$

$$\sum_{s=1}^{l_0}\sum_{i\in I_s} d'_i v_i^* \geqslant \sum_{s=1}^{l_0}\sum_{i\in I_s} d'_i\tilde{u}_i = d.$$

Следовательно, при $l = l_0$ для вектора $v^* = (v_i^*)$ выполняются неравенства (14) и (15). Таким образом, $(X^*, O(v^*))$ — допустимое, а значит, и оптимальное решение задачи $(\mathcal{L}_{l_0},\mathcal{F}_{l_0})$. Поскольку $(X_l^*, O(v_l^*))$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{L},\mathcal{F})$ при любом $l = 1,\ldots,L$, получаем $L(X_{l_0}^*, O(v_{l_0}^*)) = L(X^*, O(v^*)) = \min\limits_l L(X_l^*, O(v_l^*))$. Утверждение 2 доказано.

Из сказанного следует, что для построения оптимального решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ достаточно найти оптимальные решения задач $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$, $l = 1, \ldots, L$. Каждая из задач $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$ в силу свойств оптимальных решений задачи $\mathcal{F}_l$ может быть сведена к задаче MIP. При этом вид получаемой задачи MIP зависит от того, будет ли множество I_l подмножеством с неравенствами или подмножеством с равенствами.

3.2. Случай подмножества с неравенствами. Пусть для заданного номера l, $1 \leqslant l \leqslant L$, множество I_l есть подмножество с неравенствами. Рассмотрим задачу $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$. Заметим, что допустимое решение задачи $u = (u_i)$ будет оптимальным решением задачи $\mathcal{F}_l$ тогда и только тогда, когда найдётся номер $i_0 \in I_l$ такой, что

$$\begin{gathered} u_i = v_i, \quad i < i_0, \\ u_i = 0, \quad i > i_0, \\ d'_{i_0} u_{i_0} = d - \sum_{i < i_0} d'_i v_i. \end{gathered}$$

Номер i_0 в этих соотношениях определяется единственным образом, поэтому задача $\mathcal{F}_l$ имеет единственное оптимальное решение. Указанное условие оптимальности решения $u = (u_i)$ может быть эквивалентно записано в виде следующих линейных соотношений:

$$u_i \leqslant M t_i, \quad i \in I_l, \tag{16}$$

$$v_i - u_i \leqslant M(1 - t_k), \quad i, k \in I_l,\ i < k, \tag{17}$$

$$t_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I_l, \tag{18}$$

где M — некоторое достаточно большое число.

Для задачи $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$ рассмотрим задачу HPP, усиленную ограничениями (16)–(18), гарантирующими оптимальность решения задачи $\mathcal{F}_l$. Эта задача с учётом единственности оптимального решения задачи $\mathcal{F}_l$ при любом допустимом векторе $v = (v_i)$ записывается как следующая задача MIP:

$$\begin{gathered} \min_{(x_i),(x_{ij}),(v_i),(w_i)} \sum_{i \in I} (f_i x_i + c_i(v_i + h'_i w_i)), \\ v_i = \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij}, \quad i \in I, \\ \sum_{s=1}^{t} \sum_{i \in I_s} d'_i v_i \geqslant d, \quad \sum_{s=1}^{t-1} \sum_{i \in I_s} d'_i v_i \leqslant d, \\ \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J, \end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J,\\
v_i + h'_i w_i \leqslant A_i, \quad i \in I,\\
w_i = v_i, \quad i \in I_s,\ s < l,\\
w_i = 0, \quad i \in I_s,\ s > l,\\
\sum_{i \in I} d'_i w_i = d,\\
w_i \leqslant v_i, \quad i \in I_l,\\
w_i \leqslant A_i t_i, \quad i \in I_l,\\
v_i - w_i \leqslant A_i(1 - t_k), \quad i, k \in I_l,\ i < k,\\
x_i, t_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I,\\
x_{ij}, v_i, w_i \geqslant 0, \quad i \in I,\ j \in J.
\end{gathered}
$$

Эту задачу обозначим через MIP1.

Утверждение 3. *Если (X, t) — оптимальное решение задачи* MIP1, *где $X = ((x_i), (x_{ij}), (v_i), (w_i))$, $t = (t_i)$, то (X, w) — оптимальное решение задачи $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$, где $w = (w_i)$.*

3.3. Случай подмножества с равенствами. Пусть для заданного номера l, $1 \leqslant l \leqslant L$, множество I_l есть множество с равенствами. Рассмотрим задачу $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$. Поскольку I_l — множество с равенствами, оптимальным решением задачи $\mathcal{F}_l$ будет любое допустимое решение $u = (u_i)$ этой задачи такое, что $u_i = v_i$ для $i \in I_s$, $s < l$, и $u_i = 0$ для $i \in I_s$, $s > l$. При этом для любого $i_0 \in I_l$ значение переменной u_{i_0} ограничено сверху двумя величинами: v_{i_0} и $\frac{1}{d'_{i_0}}\Bigl(d - \sum\limits_{s=1}^{l-1} \sum\limits_{i \in I_s} d'_i v_i\Bigr)$. В силу этого ограничения $w_i \geqslant \tilde{u}_i$, $i \in I_l$, $\tilde{u} \in O(v)$ в задаче $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$ могут быть заменены равенствами

$$
w_i = \min\left\{v_i, \frac{1}{d'_i}\left(d - \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{k \in I_s} d'_k v_k\right)\right\}, \quad i \in I_l. \tag{19}
$$

Тат как равенство $w = \min\{a, b\}$ может быть записано в виде системы линейных ограничений

$$
\begin{gathered}
w \leqslant a, \quad w \leqslant b,\\
w \geqslant a - Mt, \quad w \geqslant b - M(1 - t),
\end{gathered}
$$

где $M \geqslant |a - b|$ и $t \in \{0, 1\}$, получаем, что в случае, когда I_l — множество с равенствами, задача НРР для задачи $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$, усиленная линейными ограничениями, эквивалентными равенствам (19), записывается следующим образом:

$$\min_{(x_i),(x_{ij}),(v_i),(w_i)} \sum_{i\in I}(f_i x_i + c_i(v_i + h'_i w_i)),$$

$$v_i = \sum_{j\in J} p_{ij} x_{ij}, \quad i \in I,$$

$$\sum_{s=1}^{t}\sum_{i\in I_s} d'_i v_i \geqslant d, \quad \sum_{s=1}^{t-1}\sum_{i\in I_s} d'_i v_i \leqslant d,$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J,$$

$$x_i \geqslant x_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J,$$

$$v_i + h'_i w_i \leqslant A_i, \quad i \in I,$$

$$w_i = v_i, \quad i \in I_s,\ s < l,$$

$$w_i = 0, \quad i \in I_s,\ s > l,$$

$$w_i \leqslant v_i, \quad i \in I_l,$$

$$d'_i w_i \leqslant d - \sum_{k=1}^{l-1}\sum_{s\in I_k} d'_s v_s, \quad i \in I_l,$$

$$v_i - w_i \leqslant A_i t_i, \quad i \in I_l,$$

$$d - \sum_{k=1}^{l-1} d'_s v_s - d'_i w_i \leqslant d(1 - t_i), \quad i \in I_l,$$

$$x_i, t_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I,$$

$$x_{ij}, v_i, w_i \geqslant 0, \quad i \in I,\ j \in J.$$

Обозначим данную задачу через MIP0. Справедливо

Утверждение 4. *Если* (X, t) *— оптимальное решение задачи* MIP0, *где* $X = ((x_i), (x_{ij}), (v_i), (w_i))$, $t = (t_i)$, *то* $(X, O(v))$ *— оптимальное решение задачи* $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$, *где* $v = (v_i)$.

3.4. Общая схема построения оптимального решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$**.** Алгоритм вычисления оптимального решения исследуемой задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ включает предварительный шаг и конечное число однотипных основных шагов. На предварительном шаге элементы множества I упорядочиваются по невозрастанию величин c'_i/d'_i и строится разбиение множества I на подмножества I_l, $l = 1, \ldots, L$. Каждое подмножество I_l есть множество с равенствами или множество с неравенствами.

На l-м шаге, $l = 1, \ldots, L$, рассматривается задача $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$. Если I_l — множество с неравенствами, то строится задача MIP1, иначе строится задача MIP0. В любом случае определяем оптимальное решение $(X_l, O(v_l))$ задачи $(\mathcal{L}_l, \mathcal{F}_l)$. Пусть $(X_0, O(v_0))$ — наилучшее (рекордное) оптимальное решение среди оптимальных решений задач $(\mathcal{L}_s, \mathcal{F}_s)$, $s < l$, рассмотренных на предыдущих шагах. Если $L(X_l, O(v_l)) < L(X_0, O(v_0))$, то заменяем рекордное решение решением $(X_l, O(v_l))$. В любом случае, если $l < L$, начинаем следующий шаг. Если $l = L$, то алгоритм заканчивает работу и найденное рекордное решение $(X_0, O(v_0))$ — оптимальное решение задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

4. Заключение

В данной работе построена и исследована двухуровневая модель «атакующий — защитник», в которой атакующий выбирает средства для атаки заданного множества объектов, а защитник выбирает средства для защиты этих объектов. Модель формализована в виде задачи двухуровневого программирования. Особенность задачи состоит в том, что задача нижнего уровня имеет неединственное оптимальное решение, а допустимость решения задачи верхнего уровня зависит от всех оптимальных решений задачи нижнего уровня. Для вычисления оптимального решения исследуемой двухуровневой задачи построен алгоритм, состоящий в её сведении к последовательности двухуровневых подзадач, каждая из которых сводится к задаче MIP одного из двух видов.

В предложенной модели неединственность оптимального решения задачи защитника можно рассматривать как возможность учёта в модели фактора неопределённости, связанного с отсутствием у атакующего полной информации о некоторых средствах защиты. Это не позволяет атакующему, используя критерий «стоимость/эффективность», точно определить, против каких средств атаки средства защиты будут использованы с максимальной интенсивностью. Это приводит к необходимости закупки избыточного объёма средств атаки некоторых типов и, как следствие, к увеличению суммарных затрат атакующего.

Целью наших дальнейших исследований будет проведение вычислительных экспериментов на предложенной модели. В частности, экспериментов с целью исследования влияния неопределённости данных об эффективности средств защиты на выбор средств атаки.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ding T., Yao L., Li F.** A multi-uncertainty-set based two-stage robust optimization to Defender–Attacker–Defender model for power system protection // Reliab. Eng. Syst. Saf. 2018. Vol. 169. P. 179–186.

2. **Alguacil N., Delgadillo A., Arroyo J. M.** A trilevel programming approach for electric grid defense planning // Comput. Oper. Res. 2014. Vol. 41, No. 1. P. 282–290.
3. **Береснев В. Л.** Математические модели планирования развития систем технических средств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4, № 1. С. 4–29.
4. **Scaparra M. P., Church R. L.** A bilevel mixed-integer program for critical infrastructure protection planning // Comput. Oper. Res. 2008. Vol. 35. P. 1905–1923.
5. **Liberatore F., Scaparra M. P., Daskin M. S.** Analysis of facility protection strategies against an uncertain number of attacks: The stochastic r-interdiction median problem with fortification // Comput. Oper. Res. 2011. Vol. 38. P. 357–366.
6. **Sadeghi S., Seifi A., Azizi E.** Trilevel shortest path network interdiction with partial fortification // Comput. Ind. Eng. 2017. Vol. 106. P. 400–411.
7. **Stackelberg H.** The theory of the market economy. Oxford: Oxford Univ. Press, 1952. 289 p.
8. **Dempe S.** Foundations of bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. 332 p.
9. **Fischetti M., Ljubic I., Sinnl M.** Benders decomposition without separability: A computational study for capacitated facility location problems // Eur. J. Oper. Res. 2016. Vol. 253, No. 3. P. 557–569.
10. **Martello S., Toth P.** Knapsack problems: algorithms and computer implementations. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1990. 306 p.
11. **Kellerer H., Pferschy U., Pisinger D.** Knapsack problems. Heidelberg: Springer, 2004. 546 p.
12. **Кочетов Ю. А., Плясунов А. В.** Полиномиально разрешимый класс задач двухуровневого линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4, № 2. С. 23–33.
13. **Плясунов А. В.** Задача двухуровневого линейного программирования с многовариантным ранцем на нижнем уровне // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2003. Т. 10, № 1. С. 44–52.
14. **Moore J. T., Bard J. F.** The mixed integer linear bilevel programming problem // Oper. Res. 1990. Vol. 38, No. 5. P. 911–921.

Береснев Владимир Леонидович
Мельников Андрей Андреевич

Статья поступила
10 июня 2019 г.

После доработки —
30 июля 2019 г.

Принята к публикации
28 августа 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2019. Vol. 26, No. 4. P. 16–33

UDC 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2019.26.663

A BILEVEL "ATTACKER–DEFENDER" MODEL TO CHOOSING THE COMPOSITION OF ATTACK MEANS *)

V. L. Beresnev[1,2,a] and *A. A. Melnikov*[1,2,b]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090, Novosibirsk, Russia

[2] Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090, Novosibirsk, Russia

E-mail: [a] `beresnev@math.nsc.ru`, [b] `melnikov@math.nsc.ru`

Abstract. We consider a bilevel model of estimating the costs of the attacking party (the Attacker) for a successful attack of a given set of objects protected by the other party (the Defender). The Attacker and the Defender have multiple means to, correspondingly, attack and protect the objects, and the Attacker's costs depend on the Defender's means of protection. The model under consideration is based on the Stackelberg game, where the Attacker aims to successfully attack the objects with the least costs, while the Defender maximizes the Attacker's losses committing some limited budget. Formally, the "Attacker–Defender" model can be written as a bilevel mixed-integer program. The particularity of the problem is that the feasibility of the upper-level solution depends on all lower-level optimal solutions. To compute an optimal solution of the bilevel problem under study, we suggest some algorithm that splits the feasible region of the problem into subsets and reducing the problem to a sequence of bilevel subproblems. Specificity of feasible regions of these subproblems allows us to reduce them to common mixed-integer programming problems of two types. Bibliogr. 14.

Keywords: partition of the feasible region, bilevel subproblem, optimality condition.

REFERENCES

1. **T. Ding, L. Yao,** and **F. Li,** A multi-uncertainty-set based two-stage robust optimization to Defender–Attacker–Defender model for power system protection, *Reliab. Eng. Syst. Saf.* **169**, 179–186 (2018).

*) This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 17–01–00710).

2. **N. Alguacil, A. Delgadillo,** and **J. M. Arroyo,** A trilevel programming approach for electric grid defense planning, *Comput. Oper. Res.* **41** (1), 282–290 (2014).
3. **V. L. Beresnev,** Mathematical models for planning development of technical means systems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **4** (1), 4–29 (1997) [Russian].
4. **M. P. Scaparra** and **R. L. Church,** A bilevel mixed-integer program for critical infrastructure protection planning, *Comput. Oper. Res.* **35**, 1905–1923 (2008).
5. **F. Liberatore, M. P. Scaparra,** and **M. S. Daskin,** Analysis of facility protection strategies against an uncertain number of attacks: The stochastic r-interdiction median problem with fortification, *Comput. Oper. Res.* **38**, 357–366 (2011).
6. **S. Sadeghi, A. Seifi,** and **E. Azizi,** Trilevel shortest path network interdiction with partial fortification, *Comput. Ind. Eng.* **106**, 400–411 (2017).
7. **H. Stackelberg,** *The Theory of the Market Economy* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1952).
8. **S. Dempe,** *Foundations of Bilevel Programming* (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002).
9. **M. Fischetti, I. Ljubic,** and **M. Sinnl,** Benders decomposition without separability: A computational study for capacitated facility location problems, *Eur. J. Oper. Res.* **253** (3), 557–569 (2016).
10. **S. Martello** and **P. Toth,** *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations* (John Wiley & Sons, New York, NY, 1990).
11. **H. Kellerer, U. Pferschy,** and **D. Pisinger,** *Knapsack Problems* (Springer, Berlin, 2004).
12. **Y. A. Kochetov** and **A. V. Plyasunov,** Polynomially solvable class of linear bilevel programming problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **4** (2), 23–33 (1997) [Russian].
13. **A. V. Plyasunov,** Linear bilevel programming problem with multivariant knapsack problem on the lower level, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **10** (1), 44–52 (2003) [Russian].
14. **J. T. Moore** and **J. F. Bard,** The mixed integer linear bilevel programming problem, *Oper. Res.* **38** (5), 911–921 (1990).

Vladimir L. Beresnev
Andrey A. Melnikov

Received June 10, 2019
Revised July 30, 2019
Accepted August 28, 2019