ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2020. Т. 27, № 1. С. 5–16

УДК 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2020.27.653

О ЧИСЛЕ ПОМЕЧЕННЫХ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫХ k-ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ БЕЗ МОСТОВ

В. А. Воблый

Всероссийский институт научной и технической информации РАН,
ул. Усиевича, 20, 125190, Москва, Россия.

E-mail: vitvobl@yandex.ru

Аннотация. Получена явная формула для числа помеченных связных внешнепланарных k-циклических n-вершинных графов без мостов. Найдена асимптотика для числа таких графов при большом числе вершин и фиксированном числе k. Как следствие, доказывается, что при фиксированном числе k почти все помеченные связные внешнепланарные k-циклические графы имеют мосты. Табл. 1, библиогр. 14.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, внешнепланарный граф, граф без мостов, k-циклический граф, асимптотика.

Введение

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Определение 1. *Точкой сочленения* связного графа называется его вершина, после удаления которой вместе с инцидентными ей рёбрами граф становится несвязным. *Мост* — это ребро связного графа, после удаления которого граф становится несвязным. *Блоком* называется связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения.

Определение 2. *Цикломатическим числом* связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом рёбер графа и числом его вершин. *k-Циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k.

Определение 3. *Планарный* граф — это граф, который можно уложить на плоскости без пересечения рёбер. *Внешнепланарным* графом называется планарный граф, если его можно уложить на плоскости так, что все его вершины принадлежат одной грани [1, с. 127, 131].

Класс внешнепланарных графов является тестовым для класса планарных графов. Он используется для тестирования средней сложности алгоритмов на графах. Случайный помеченный внешнепланарный граф может быть сгенерирован полиномиальным алгоритмом, базирующимся на результатах перечисления таких графов [2].

В [3, 4] асимптотически перечислены помеченные внешнепланарные графы с большим числом вершин. В [5] получена явная формула для числа помеченных связных внешнепланарных графов с заданным числом вершин. В [6] перечислены точно и асимптотически помеченные внешнепланарные k-циклические блоки с заданным числом вершин. В [5] найдена явная формула для числа помеченных внешнепланарных k-циклических графов с заданным числом вершин n, а также найдена асимптотика для числа таких графов при фиксированном k и большом n. Хэнлон и Робинсон перечислили помеченные графы без мостов [7].

В статье перечислены помеченные связные внешнепланарные k-циклические n-вершинные графы без мостов, а также найдена асимптотика для числа таких графов при фиксированном k и большом n. Как следствие, получена явная формула для числа помеченных внешнепланарных графов без мостов с заданным числом вершин.

При равномерном вероятностном распределении на множестве помеченных связных графов найдена вероятность того, что при фиксированном k и $n \to \infty$ случайный связный внешнепланарный n-вершинный k-циклический граф без мостов является блоком. Кроме того, доказывается, что при фиксированном k почти все помеченные связные внешнепланарные k-циклические графы имеют мосты.

1. Перечисление графов

Теорема 1. *Число $p(n,k)$ помеченных связных внешнепланарных k-циклических графов без мостов с n вершинами при $n \geqslant k+2$ и $k \geqslant 1$ равно*

$$p(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{p=1}^{k} \frac{n^{p-1}}{2^p}(n+k-p-1)!\binom{n-p-2}{k-1}\binom{k-1}{p-1}. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим через $S(n,k)$ число помеченных связных n-вершинных k-циклических графов, а через $B_{n,m}$ — число помеченных блоков с n вершинами и m рёбрами. Введём экспоненциальную производящую функцию

$$B(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + \sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=n}^{n(n-1)/2} B_{n,m}\frac{x^n y^m}{n!}.$$

В [8] получена формула

$$S(n,k) = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]\exp(n\frac{\partial B(x,y)}{\partial x})x^{-n}y^{-n-k}, \qquad (2)$$

где $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета [9].

Будем считать, что числа $S(n,k), B_{n,m}$ и функция $B(x,y)$ относятся не ко всему классу помеченных связных графов, а к его подклассу. Формула (2) может быть неверна для подкласса связных графов [10].

Определение 4. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу [11, 12].

Для блочно-устойчивого подкласса связных графов формула (2) верна и её можно использовать для перечисления таких графов [10]. Известно, что класс внешнепланарных графов является блочно-устойчивым классом графов [11, 12].

Внешнепланарные блоки могут рассматриваться как рассечения выпуклого многоугольника и для них известна следующая формула [3]:

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} = \frac{1 + xy(3+2y) - \sqrt{1 - 2xy - 4xy^2 + x^2y^2}}{4(1+y)}.$$

Мост — это блок, состоящий из одного ребра. Ему в производящей функции $B(x,y)$ соответствует слагаемое $\frac{1}{2}x^2y$. Поэтому, вычитая из $B(x,y)$ это слагаемое, из формулы (2) для графов без мостов получим

$$p(n,k) = \frac{(n-1)!}{n}[x^{-1}y^{-1}]x^{-n}y^{-n-k} \\ \times \exp\left(n\left(\frac{1 + xy(3+2y) - \sqrt{1 - 2xy - 4xy^2 + x^2y^2}}{4(1+y)} - xy\right)\right).$$

Сделаем замену переменной: $1+xy(3+2y)-\sqrt{1 - 2xy - 4xy^2 + x^2y^2} = 4(1+y)xy(t+1)$. Выражая xy через t, найдём

$$xy = \frac{2t}{(2t+1)(y+2(1+y)t)}, \quad dx = \frac{2(y - 4(1+y)t^2)dt}{y(2t+1)^2(y+2(1+y)t)^2}.$$

Таким образом, имеем

$$p(n,k) = \frac{(n-1)!}{n}[t^{-1}y^{-1}]y^{-k-1}\frac{2(y-4(1+y)t^2)}{(2t+1)^2(y+2(1+y)t)^2} \\ \times \exp\left(\frac{2nt^2}{(2t+1)(y+2(1+y)t)}\right)\left(\frac{(2t+1)(y+2(1+y)t)}{2t}\right)^n.$$

Разложим экспоненту в степенной ряд:

$$p(n,k)=\frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}y^{-1}]t^{-n}y^{-k-1}\frac{y-4(1+y)t^2}{(2t+1)^2(y+2(1+y)t)^2}$$
$$\times\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2nt^2)^p}{p!((2t+1)(y+2(1+y)t))^p}((2t+1)(y+2(1+y)t)^n.$$

Разобьём выражение для $p(n,k)$ на 3 слагаемых в соответствии с трёхчленом $y-4(1+y)t^2$ в числителе дроби перед знаком суммы и слагаемые (с точностью до множителя) обозначим через $p_1(n,k)$, $p_2(n,k)$ и $p_3(n,k)$ соответственно:

$$p(n,k)=p_1(n,k)-4p_2(n,k)-4p_3(n,k),$$
$$p_1(n,k)=\frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}y^{-1}]t^{-n}y^{-k}$$
$$\times\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2nt^2)^p(2t+1)^{n-p-2}(y(2t+1)+2t)^{n-p-2}}{p!}.$$

После разложения по формуле бинома Ньютона вычислим вычет по y:

$$p_1(n,k)=\frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}y^{-1}]t^{-n}y^{-k}$$
$$\times\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2nt^2)^p(2t+1)^{n-p-2}}{p!}\sum_{q=0}^{n-p-2}\binom{n-p-2}{q}y^q(2t+1)^q(2t)^{n-p-q-2}$$
$$=\frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}]t^{-n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2nt^2)^p(2t+1)^{n-p+k-3}}{p!}\binom{n-p-2}{k-1}(2t)^{n-p-k-1}.$$

Опять применяя формулу бинома Ньютона, вычислим вычет по t:

$$p_1(n,k)=\frac{(n-1)!}{n2^k}[t^{-1}]\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^p}{p!}\binom{n-p-2}{k-1}$$
$$\times\sum_{j=0}^{n-p+k-3}\binom{n-p+k-3}{j}2^jt^{j+p-k-1}$$
$$=\frac{(n-1)!}{n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^p}{p!2^p}\binom{n-p-2}{k-1}\binom{n-p+k-3}{k-p}.$$

Аналогично найдём

$$p_2(n,k) = \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}y^{-1}]t^{2-n}y^{-k-1}$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2nt^2)^p(2t+1)^{n-p-2}(y(2t+1)+2t)t)^{n-p-2}}{p!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}y^{-1}]t^{2-n}y^{-k-1}$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2nt^2)^p(2t+1)^{n-p-2}}{p!} \sum_{q=0}^{n-p-2} \binom{n-p-2}{q} y^q(2t+1)^q(2t)^{n-p-q-2}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}]t^{2-n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2nt^2)^p(2t+1)^{n-p+k-2}}{p!} \binom{n-p-2}{k} (2t)^{n-p-k-2}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n2^{k+1}}[t^{-1}] \sum_{p=0}^{\infty} \binom{n-p-2}{k} \sum_{j=0}^{n-p+k-2} \binom{n-p+k-2}{j} \frac{n^p2^j}{p!} t^{j+p-k}$$

$$= \frac{(n-1)!}{4n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^p}{p!2^p} \binom{n-p-2}{k} \binom{n-p+k-2}{k-p-1};$$

$$p_3(n,k) = \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}y^{-1}]t^{2-n}y^{-k}$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2nt^2)^p(2t+1)^{n-p-2}(y(2t+1)+2t)^{n-p-2}}{p!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}y^{-1}]t^{2-n}y^{-k}$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2nt^2)^p(2t+1)^{n-p-2}}{p!} \sum_{q=0}^{n-p-2} \binom{n-p-2}{q} y^q(2t+1)^q(2t)^{n-p-q-2}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n2^{n-1}}[t^{-1}]t^{2-n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2nt^2)^p(2t+1)^{n-p+k-3}}{p!} \binom{n-p-2}{k-1} (2t)^{n-p-k-1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n2^{k}}[t^{-1}] \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^p}{p!} \binom{n-p-2}{k-1} \sum_{j=0}^{n-p+k-3} \binom{n-p+k-3}{j} 2^j t^{j+p-k+1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{4n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^p}{p!2^p} \binom{n-p-2}{k-1} \binom{n-p+k-3}{k-p-2}.$$

Подставляя выражения слагаемых в формулу для $p(n,k)$, получим

$$p(n,k)=\frac{(n-1)!}{n}\sum_{p=0}^{k}\frac{n^p}{p!2^p}\left(\binom{n-p-2}{k-1}\binom{n-p+k-3}{k-p}\right.$$
$$\left.-\binom{n-p-2}{k}\binom{n-p+k-2}{k-p-1}-\binom{n-p-2}{k-1}\binom{n-p+k-3}{k-p-2}\right).$$

Упростим выражение в квадратных скобках. После замены индекса суммирования $s=n-p-2$ имеем

$$\binom{s}{k-1}\binom{k+s}{k-p-1}-\binom{s}{k}\binom{k+s}{k-p-1}-\binom{s}{k-1}\binom{k+s-1}{k-p-2}$$
$$=\frac{s!(k+s-1)!}{(k-1)!(s-k+1)!(k-p)!(p+s-1)!}$$
$$-\frac{s!(k+s)!}{k!(s-k)!(k-p-1)!(p+s+1)!}$$
$$-\frac{s!(k+s-1)!}{(k-1)!(s-k+1)!(k-p-2)!(p+s+1)!}$$
$$=\frac{s!(k+s-1)!}{k!(s-k+1)!(k-p)!(p+s+1)!}$$
$$\times\left(k(p+s)(p+s+1)-(k+s)(s-k+1)(k-p)-k(k-p)(k-p-1)\right)$$
$$=\frac{s!(k+s-1)!(k+s)(k+s+1)p}{k!(s-k+1)!(k-p)!(p+s+1)!}=\frac{s!(k+s+1)!p}{k!(s-k+1)!(k-p)!(p+s+1)!}.$$

Возвращаясь к индексу p, получим

$$p(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{p=1}^{k}\frac{n^{p-1}(n-p-2)!(n+k-p-1)!}{2^p(p-1)!(k-p)!(n-k-p-1)!},$$

что эквивалентно формуле (1). Теорема 1 доказана.

Суммируя числа помеченных связных внешнепланарных k-циклических n-вершинных графов без мостов $p(n,k)$ по k от 1 до $n-2$, имеем

Следствие 1. *Пусть $p(n)$ — число помеченных связных внешнепланарных графов без мостов с n вершинами. Тогда при $n\geqslant 3$ верна формула*

$$p(n)=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k!}\sum_{p=1}^{k}\frac{n^{p-1}}{2^p}(n+k-p-1)!\binom{n-p-2}{k-1}\binom{k-1}{p-1}. \qquad (3)$$

При $k=1$, $k=2$ и $k=3$ из теоремы 1 получим

Следствие 2. *Число помеченных связных внешнепланарных без мостов унициклических графов $p(n,1)$ при $n \geqslant 3$, число бициклических графов $p(n,2)$ при $n \geqslant 4$ и число трициклических графов $p(n,3)$ при $n \geqslant 5$ равны*

$$p(n,1) = \frac{(n-1)!}{2}, \quad p(n,2) = \frac{n!}{8}(3n-10),$$
$$p(n,3) = \frac{n!}{96}(9n^3 - 71n^2 + 130n + 48).$$

Так как унициклический граф без мостов — это простой цикл, для $p(n,1)$ получили формулу для числа помеченных циклов с n вершинами.

2. Асимптотика и вероятность

Теорема 2. *Для числа $p(n,k)$ помеченных связных внешнепланарных k-циклических графов без мостов с n вершинами и фиксированным цикломатическим числом $k \geqslant 1$ при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$p(n,k) \sim \frac{n! n^{2k-3}}{3(k-1)!k!}\left(\frac{3}{2}\right)^k. \tag{4}$$

Доказательство. При $n \to \infty$ и фиксированном числе $k \geqslant 1$ имеем

$$p(n,k) = \frac{n!}{k!(k-1)!}\sum_{p=1}^{k}\frac{n^{p-1}(n-p-2)!(n+k-p-1)!}{2^p(n-k-p-1)!n!}\binom{k-1}{p-1}$$
$$\sim \frac{n!}{k!(k-1)!}\sum_{p=1}^{k}\frac{n^{p-1}n^{k-1}n^{k-p-1}}{2^p}\binom{k-1}{p-1}$$
$$= \frac{n! n^{2k-3}}{k!(k-1)!}\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{2^p}\binom{k-1}{p-1} = \frac{n! n^{2k-3}}{3(k-1)!k!}\left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *При фиксированном числе k и $n \to \infty$ почти все связные внешнепланарные k-циклические графы с n вершинами имеют мосты.*

Доказательство. В [5] для числа помеченных связных внешнепланарных k-циклических графов $P(n,k)$ при $n \to \infty$ и фиксированном $k \geqslant 1$ получена асимптотическая формула

$$P(n,k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}k!\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} n^{n+\frac{3k}{2}-2} = c(k) n^{n+\frac{3k}{2}-2}.$$

С помощью формулы (4) и формулы Стирлинга при $n \to \infty$ найдём

$$\frac{p(n,k)}{P(n,k)} \sim \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+2k-\frac{5}{2}}}{3(k-1)!k!c(k)n^{n+\frac{3k}{2}-2}} \left(\frac{3}{2}\right)^k e^{-n} = d(k) n^{\frac{k-1}{2}} e^{-n} = o(1).$$

Следствие 3 доказано.

Зададим на множестве помеченных связных графов равномерное распределение вероятностей.

Следствие 4. *Пусть* $\mathsf{P}_k(n)$ *— вероятность того, что помеченный связный* k*-циклический внешнепланарный граф без мостов с* n *вершинами является блоком. Тогда при фиксированном* $k \geqslant 1$ *и* $n \to \infty$

$$\mathsf{P}_k(n) \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

Доказательство. Пусть $OB(n,k)$ — число помеченных внешнепланарных k-циклических блоков с n вершинами. В [6] для $OB(n,k)$ при $n \to \infty$ и фиксированном $k \geqslant 1$ получена асимптотическая формула

$$OB(n,k) \sim n! \frac{n^{2k-3}}{2(k-1)!k!},$$

откуда

$$\mathsf{P}_k(n) = \frac{OB(n,k)}{p(n,k)} \sim \frac{n! \frac{n^{2k-3}}{2(k-1)!k!}}{\frac{n! n^{2k-3}}{3(k-1)!k!}\left(\frac{3}{2}\right)^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

Следствие 4 доказано.

Определение 5. *Кактусом* называется связный граф, в котором нет рёбер, лежащих более чем на одном простом цикле [13, с. 93]. Все блоки кактуса — рёбра или простые циклы.

Следствие 5. *Пусть* $\widetilde{\mathsf{P}}_k(n)$ *— вероятность того, что помеченный связный* k*-циклический внешнепланарный граф без мостов с* n *вершинами является кактусом. Тогда при фиксированном* $k \geqslant 1$ *и* $n \to \infty$

$$\widetilde{\mathsf{P}}_k(n) \sim \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

Доказательство. Заметим, что кактусы без мостов являются эйлеровыми кактусами, и наоборот [14]. Пусть $\widetilde{Ca}(n,k)$ — число помеченных эйлеровых k-циклических кактусов с n вершинами. В [8] при $n \geqslant 3$ и $k \geqslant 1$ получена формула

$$\widetilde{Ca}(n,k) = \frac{(n-1)! n^{k-1}}{k! 2^k} \binom{n-k-2}{k-1}.$$

При фиксированном $k \geqslant 1$ и $n \to \infty$ имеем

$$\widetilde{Ca}(n,k) = \frac{(n-1)!n^{k-1}(n-k-2)!}{k!2^k(k-1)!(n-2k-1)!} \sim \frac{n!n^{2k-3}}{2^k(k-1)!k!},$$

$$\widetilde{\mathsf{P}}_k(n) = \frac{\widetilde{Ca}(n,k)}{p(n,k)} \sim \frac{n!n^{2k-3}k!(k-1)!3}{2^k(k-1)!k!n!n^{2k-3}}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

Следствие 5 доказано.

В таблице представлены числа $p(n,2)$, $p(n,3)$, $p(n,4)$ и $p(n)$, вычисленные с помощью формул (1) и (3).

n	4	5	6	7	8	9	10
$p(n,2)$	6	75	720	6930	70560	771120	9072000
$p(n,3)$	0	60	1620	29715	483840	7665840	122774400
$p(n,4)$	0	0	840	39060	1159200	28751625	659232000
$p(n)$	9	147	3240	91185	3122280	126031185	5860602720

Автор благодарит рецензентов за замечания и предложения по улучшению изложения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
2. **Bodirsky M., Kang M.** Generating outerplanar graphs uniformly at random // Comb., Probab., Comput. 2006. Vol. 15, No. 3. P. 333–343.
3. **Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Comb. 2007. Vol. 28, No. 8. P. 2091–2105.
4. **Drmota M., Fusy E., Kang M., Kraus V., Rue J.** Asymptotic study of subcritical graph classes // SIAM J. Discrete Math. 2011. Vol. 25, No. 4. P. 1615–1651.
5. **Воблый В. А.** Число помеченных внешнепланарных графов k-циклических графов // Мат. заметки. 2018. Т. 103, вып. 5. С. 657–666.
6. **Воблый В. А.** Простая формула для числа помеченных внешнепланарных k-циклических блоков и их асимптотическое перечисление // Мат. XII Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 20–25 июня 2016 г.). М.: МГУ, 2016. С. 285–287.
7. **Hanlon P., Robinson R. W.** Counting bridgeless graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. 1982. Vol. 33, No. 3. P. 276–305.
8. **Воблый В. А.** О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 2. С. 5–20.
9. **Гульден Я., Джексон Д.** Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990. 504 с.

10. Воблый В. А. Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 26, № 1. С. 20–32.

11. McDiarmid C., Scott A. Random graphs from a block stable class // Eur. J. Comb. 2016. Vol. 58. P. 96–106.

12. Noy M. Random planar graphs and beyond // Proc. Int. Congress of Mathematicians. Seoul, 2014. Vol. IV. P. 407–431.

13. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 325 с.

14. Воблый В. А. Перечисление помеченных эйлеровых кактусов // Мат. XI Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 18–23 января 2012 г.). М.: МГУ, 2012. С. 275–277.

Воблый Виталий Антониевич

Статья поступила
21 марта 2019 г.

После доработки —
9 октября 2019 г.

Принята к публикации
27 ноября 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2020. Vol. 27, No. 1. P. 5–16

UDC 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2020.27.653

ON THE NUMBER OF LABELED OUTERPLANAR k-CYCLIC BRIDGELESS GRAPHS

V. A. Voblyi

Russian Institute for Scientific and Technical Information RAS
20 Usievich Street, 125190 Moscow, Russia

E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

Abstract. We obtain an explicit formula for the number of labeled connected outerplanar k-cyclic n-vertex bridgeless graphs. We find asymptotics for the number of those graphs for a large number of vertices and fixed k. As a consequence, we prove that, for k fixed, almost all labeled connected outerplanar k-cyclic graphs have bridges. Tab. 1, bibliogr. 14.

Keywords: enumeration, labeled graph, outerplanar graph, bridgeless graph, k-cyclic graph, asymptotics.

REFERENCES

1. **F. Harary,** *Graph Theory* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1969; Mir, Moscow, 1973).
2. **M. Bodirsky** and **M. Kang,** Generating outerplanar graphs uniformly at random, *Comb. Probab. Comput.* **15** (3), 333–343 (2006).
3. **M. Bodirsky, O. Gimenez, M. Kang,** and **M. Noy,** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs, *Eur. J. Comb.* **28** (8), 2091–2105 (2007).
4. **M. Drmota, E. Fusy, M. Kang, V. Kraus,** and **J. Rue,** Asymptotic study of subcritical graph classes, *SIAM J. Discrete Math.* **25** (4), 1615–1651 (2011).
5. **V. A. Voblyi,** Number of labeled outerplanar k-cyclic graphs, *Mat. Zametki* **103** (5), 657–666 (2018).
6. **V. A. Voblyi,** A simple formula for the number of labeled outerplanar k-cyclic blocks and their asymptotic counting, in *Proc. XII Int. Workshop "Discrete Mathematics and Its Applications", Moscow, Russia, June 20–25, 2016* (Izd. Mekh.-Mat. Fak. Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2016), pp. 285–287.
7. **P. Hanlon** and **R. W. Robinson,** Counting bridgeless graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **33** (3), 276–305 (1982).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (1), 205–211 (2020), DOI 10.1134/S1990478920010196.

8. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled connected graphs with given order and size, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **23** (2), 5–20 (2016). [*J. Appl. Ind. Math.* **10** (2), 302–310 (2016)].
9. **I. P. Goulden** and **D. M. Jackson,** *Combinatorial Enumeration* (J. Wiley & Sons, New York, 1983; Nauka, Moscow, 1990).
10. **V. A. Voblyi,** The second Riddell relation and its consequences, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **26** (1), 20–32 (2019) [*J. Appl. Ind. Math.* **13** (1), 168–174 (2019)].
11. **C. McDiarmid** and **A. Scott,** Random graphs from a block stable class, *Eur. J. Comb.* **58**, 96–106 (2016).
12. **M. Noy,** Random planar graphs and beyond, in *Proc. Int. Congr. of Mathematicians, Seoul, Korea, Aug. 13–21, 2014*, Vol. IV (ICM 2014 Organ. Comm., Seoul, 2014), pp. 407–431.
13. **F. Harary** and **E. M. Palmer,** *Graphical Enumeration* (Acad. Press, New York, 1973; Mir, Moscow, 1977).
14. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled Euler cactuses, in *Proc. XI Int. Workshop "Discrete Mathematics and Its Applications", Moscow, Russia, Jan. 18–23, 2012* (Izd. Mekh.-Mat. Fak. Mosk. Gos. Univ., Moscow, 2012), pp. 275–277.

Vitaly A. Voblyi

Received March 21, 2019
Revised October 9, 2019
Accepted November 27, 2019