ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2020. Т. 27, № 1. С. 61–87

УДК 519.172.1 DOI 10.33048/daio.2020.27.656

МНОЖЕСТВО ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЧИСЛА ДОМИНИРОВАНИЯ В ДЕРЕВЬЯХ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

А. Д. Курносов

Московский физико-технический институт,
Институтский пер., 9, 141700 Долгопрудный, Россия

E-mail: `kurnosov@phystech.edu`

Аннотация. Найдено множество всех значений числа доминирования для класса деревьев с фиксированными степенями вершин, которое представляет собой отрезок натуральных чисел. Показано, что каждое промежуточное значение отрезка можно получить, постепенно меняя дерево, реализующее нижнюю оценку числа доминирования, с помощью двух специальных операций, и получив в конце дерево, реализующее верхнюю оценку. Ил. 1, библиогр. 12.

Ключевые слова: степенная последовательность, дерево, число доминирования, обратная задача, реализация, реализующее дерево.

Введение

1. Обозначения и определения. В работе рассматриваются простые неориентированные графы. Будем использовать приводимые ниже обозначения, в целом согласующиеся с современной литературой (см., например, [1, 2]):

$V(G)$ и $E(G)$ — множества вершин и рёбер графа G;

$|G|$ — число вершин в графе G;

$E(A, B)$ — множество рёбер вида uv, где $u \in A$, $v \in B$. Если $A = \{v\}$, то будем сокращённо писать $E(v, B)$ вместо $E(\{v\}, B)$.

Для графа $G = (V, E)$ и подмножества $V' \subseteq V$ через $G - V'$ обозначаем подграф G, порождаемый множеством $V \setminus V'$. Сокращённо будем писать $G - v$ вместо $G - V'$, если $V' = \{v\}$.

Для графа $G = (V, E)$ и подмножества $E' \subseteq E$ через $G - E'$ обозначаем граф $(V, E \setminus E')$. Сокращённо пишем $G - e$ вместо $G - E'$, если $E' = \{e\}$.

Далее P_n — цепь на n вершинах;

$N_G(v)$ — множество вершин графа G, смежных с вершиной v;

$N_G(S)$ — множество вершин графа G, смежных с какими-либо вершинами из множества вершин S;

$L(G)$ — множество висячих вершин графа G;

$L_G(v)$ — множество висячих вершин в G, смежных с вершиной v;

$H(G)$ — множество всех вершин G, смежных с листьями;

$S(G) = G - (L(G) \cup H(G))$;

$\deg_G(v)$ — степень вершины v в графе G, т. е. мощность $N_G(v)$.

В любом дереве путь между любой парой вершин единствен. Это позволяет корректно ввести следующее обозначение: для вершин дерева u и v через $u \sim v$ обозначим путь между u и v, а через $(u \sim v)$ обозначим этот же путь, но не включающий сами u и v.

Подмножество I вершин графа G называется *независимым множеством*, если никакие две вершины $u, v \in I$ не соединены ребром в G.

Для произвольной пары смежных или совпадающих вершин v и w будем говорить, что *вершина v покрывается вершиной w* (или *w покрывает v*). Будем говорить, что *вершина v покрывается множеством вершин W*, если v покрывается w для некоторой $w \in W$. Подмножество D вершин графа G называется *доминирующим*, если каждая вершина графа покрывается этим подмножеством. *Число доминирования* $\gamma(G)$ — это размер минимального доминирующего множества графа G. По доминированию в графах имеется обширная литература (см., например, монографию [3]).

Неубывающие последовательности натуральных чисел, содержащие ровно n элементов, будем называть *n-последовательностями*.

2. Деревья с заданной последовательностью степеней. Одним из классических вопросов теории графов является вопрос реализуемости значений инвариантов графов: для заданного класса графов $\mathcal{G}$, инварианта $\phi\colon \mathcal{G} \to \Phi$ и значения $\phi_0 \in \Phi$ выяснить, существует ли граф из $\mathcal{G}$ такой, что $\phi(G) = \phi_0$. Для некоторых сочетаний $\mathcal{G}, \phi$ и ϕ_0 такие вопросы тривиальны, для некоторых трудны (например, $\mathcal{G}$ — класс планарных графов, ϕ — хроматическое число, $\phi_0 = 5$), а для некоторых — открыты (см., например, [4]). Одними из первых вопросов, которые были поставлены непосредственно в указанном виде, были вопросы о графичности последовательностей натуральных чисел. Неубывающая конечная последовательность $\widetilde{d}$ натуральных чисел $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ называется *графической*, если существует простой граф на множестве вершин $\{v_i\}_{i=1}^n$ такой, что $\deg v_i = d_i$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Сам граф называется *реализацией n-последовательности $\widetilde{d}$*. Последовательности, реализуемые графами (без ограничений на структуру), были полностью охарактеризованы Гавелом [5] и Хакими [6].

В настоящей работе сосредоточимся на деревьях. Если существует реализация последовательности, являющаяся деревом, то соответствующая последовательность называется *древесной*. Широко известен следующий критерий древесности n-последовательностей, легко доказываемый по индукции.

Утверждение 1 (см., например, [2, теорема 47.2]). *Последовательность положительных целых чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$ может быть реализована деревом тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.*

Коль скоро решён вопрос о существовании дерева с заданной степенной последовательностью, что можно сказать о характеристиках такого дерева? В настоящей работе представлен исчерпывающий ответ на этот вопрос для числа доминирования. Ранее были известны достижимые нижняя и верхняя оценки числа доминирования, однако оставался открытым вопрос о полном описании множества всех возможных значений этого числа при заданных степенях вершин. Ответ на этот вопрос является основным результатом настоящей работы.

Для произвольного дерева T определим *усечение* T как дерево T', получающееся из T удалением всех листьев. Само дерево T будем при этом называть *расширением* дерева T'. Нетрудно заметить, что степенная последовательность дерева T' может быть получена из степенной последовательности T отбрасыванием единичных элементов и уменьшением некоторых из оставшихся элементов (причём суммарное уменьшение равно числу единичных элементов в первоначальной последовательности).

Пусть $\widetilde{d}$ — последовательность натуральных чисел $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, где $d_1 \geqslant 2$. Введём обозначение

$$l(\widetilde{d}) = \sum_{i=1}^{n} d_i - 2(n-1).$$

Обозначим через $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ множество всех деревьев, реализующих последовательность

$$1, 1, \ldots, 1, d_1, d_2, \ldots, d_n,$$

в которой ровно $l(\widetilde{d})$ единиц.

Лемма 1. *Пусть $\widetilde{d}$ — произвольная n-последовательность $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$, где $d_1 \geqslant 2$. Тогда множество деревьев $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ непусто.*

Доказательство. Утверждение леммы сразу следует из утверждения 1 и легко проверяемого соотношения $l(\widetilde{d}) + \sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2(n + l(\widetilde{d}) - 1)$. Лемма 1 доказана.

Очевидно, что количества вершин и листьев каждого дерева из $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ равны соответственно $n + l(\widetilde{d})$ и $l(\widetilde{d})$.

Нас будут интересовать только деревья хотя бы с тремя вершинами, им будут соответствовать непустые n-последовательности $d_1, d_2, \ldots, d_n$, где $d_1 \geqslant 2$.

Заметим, что произвольное дерево $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ однозначно восстанавливается по своему усечению T': для восстановления достаточно добавить каждой вершине необходимое количество листьев.

Для n-последовательности $\widetilde{d} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ введём следующие обозначения:

$n_k(\widetilde{d})$ — количество членов последовательности $\widetilde{d}$, равных k;

$n_{\geqslant k}(\widetilde{d})$ — количество членов последовательности $\widetilde{d}$, не меньших k;

$n_{\leqslant k}(\widetilde{d})$ — количество членов последовательности $\widetilde{d}$, не превосходящих k.

В обозначениях выше будем опускать аргумент $\widetilde{d}$ всегда, когда его вид ясен из контекста.

1. Число доминирования в деревьях с заданной последовательностью степеней

Ниже приведено несколько утверждений о доминирующих множествах, доказательства которых опускаем в силу их простоты. Следующее утверждение тривиально следует из определений.

Утверждение 2. *Пусть из графа G с доминирующим множеством D удалено некоторое множество рёбер E', после чего в графе $G' = G - E'$ некоторая вершина v больше не покрывается вершинами множества D. Тогда $v \notin D$ и $E(v, D) \subseteq E'$.*

Поскольку в любом доминирующем множестве графа можно заменить висячие вершины их соседями, не потеряв свойства доминирования, справедлива

Лемма 2. *В любом связном графе, имеющем не менее трёх вершин, существует такое доминирующее множество D размера $\gamma(G)$, для которого $D \cap L(G) = \varnothing$ и $D \supseteq H(G)$.*

В дальнейшем доминирующее множество графа G, не содержащее ни одного листа, будем называть *безлистовым* доминирующим множеством.

Оба приводимых ниже утверждения легко доказываются по индукции, если добавлять к цепи три вершины при индукционном переходе.

Утверждение 3. *Число доминирования цепи на n вершинах равно*

$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor.$$

Утверждение 4. *Пусть D — произвольное минимальное по размеру доминирующее множество графа G и $u, v \in D$. Если в G есть цепь P_s, все вершины которой имеют в G степень 2 и концы которой смежны соответственно с u и v, то $|D \cap V(P_s)| = \left\lfloor \frac{s}{3} \right\rfloor$.*

1.1. Верхняя оценка числа доминирования. Вопрос о верхней оценке числа доминирования в деревьях с заданной последовательностью степеней является решённым. Важную роль играет здесь количество листьев дерева. Для деревьев с заданным количеством листьев известна [7] следующая верхняя оценка числа доминирования.

Теорема 1 [7]**.** *В любом дереве T на n вершинах с l листьями существует независимое доминирующее множество (т. е. множество, являющееся одновременно и независимым, и доминирующим), размер которого не превосходит $\left\lfloor \frac{n+l}{3} \right\rfloor$.*

Достижимая верхняя оценка на число доминирования для *лесов* с заданными степенными последовательностями получена в [8] и имеет следующий вид.

Теорема 2 [8]**.** *Пусть n-последовательность натуральных чисел $\widetilde{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ такова, что $d_n \geqslant 2$. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2(n-c)$ для некоторого положительного c. Пусть n_1 — число единиц в $\widetilde{d}$, $n_{\geqslant 2}$ — число элементов, превышающих единицу и $\mathcal{F}_{\widetilde{d}}$ — класс лесов, реализующих $\widetilde{d}$. Положим $\gamma_{\max} = \max\limits_{F \in \mathcal{F}_{\widetilde{d}}} \gamma(F)$. Тогда*

$$\gamma_{\max} = \begin{cases} n - n_1 + c - 1, & \text{если } n_1 > n_{\geqslant 2} \text{ и } c < \left\lceil \frac{n_1 - n_{\geqslant 2} + 2}{2} \right\rceil, \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{если } n_1 > n_{\geqslant 2} \text{ и } c \geqslant \left\lceil \frac{n_1 - n_{\geqslant 2} + 2}{2} \right\rceil, \\ \left\lceil \frac{n + n_1 - 2}{3} \right\rceil, & \text{если } n_1 \leqslant n_{\geqslant 2}. \end{cases}$$

Так как дерево является частным случаем леса, верхняя оценка числа доминирования для деревьев может быть легко получена из теоремы 2. Также эта оценка может быть выведена из теоремы 1 с применением леммы 2. Мы приводим указанную верхнюю оценку для деревьев в явном виде в следующей теореме, в которой также указываем некоторые достаточные условия достижимости оценки, которые понадобятся при доказательстве основного результата (теоремы 7).

Теорема 3. *Пусть n-последовательность $\widetilde{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ такова, что $d_1 \geqslant 2$. Положим $\gamma_{\max} = \max\limits_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}} \gamma(T)$. Тогда*

$$\gamma_{\max} = \min \left\{ n,\, l(\widetilde{d}) + \left\lfloor \frac{n - l(\widetilde{d})}{3} \right\rfloor \right\}.$$

Пусть для дерева $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ выполнено одно из двух условий:

(1) каждая нелистовая вершина смежна хотя бы с одним листом;

(2) каждая вершина из $H(T)$ смежна ровно с одним листом, а вершины из $S(T)$ образуют цепь и имеют степень два в T.

Тогда $\gamma(T) = \gamma_{\max}$.

Доказательство. Воспользуемся результатом теоремы 2 и запишем максимальное значение числа доминирования в терминах последовательности из условия, т. е. при $d_1 \geqslant 2$ (тогда $c = 1$, $n_1 = l(\widetilde{d})$, а выражение $n - n_1 = n_{\geqslant 2}$ из теоремы 2 есть не что иное, как просто n в нашем случае). Получим

$$\gamma_{\max} = \begin{cases} n, & \text{если } l(\widetilde{d}) > n \text{ и } 1 < \left\lceil \frac{l(\widetilde{d}) - n + 2}{2} \right\rceil, \\ \left\lfloor \frac{n + l(\widetilde{d})}{2} \right\rfloor, & \text{если } l(\widetilde{d}) > n \text{ и } 1 \geqslant \left\lceil \frac{l(\widetilde{d}) - n + 2}{2} \right\rceil, \\ \left\lceil \frac{n + 2l(\widetilde{d}) - 2}{3} \right\rceil, & \text{если } l(\widetilde{d}) \leqslant n. \end{cases}$$

Ясно, что из неравенства $l(\widetilde{d}) > n$ автоматически следует неравенство $1 < \left\lceil \frac{l(\widetilde{d}) - n + 2}{2} \right\rceil$, что позволяет упростить выражение для $\gamma_{\max}$:

$$\gamma_{\max} = \begin{cases} n, & \text{если } l(\widetilde{d}) > n, \\ \left\lceil \frac{n + 2l(\widetilde{d}) - 2}{3} \right\rceil, & \text{если } l(\widetilde{d}) \leqslant n. \end{cases}$$

Учитывая, что $\left\lceil \frac{n + 2l(\widetilde{d}) - 2}{3} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n + 2l(\widetilde{d})}{3} \right\rfloor = l(\widetilde{d}) + \left\lfloor \frac{n - l(\widetilde{d})}{3} \right\rfloor$, окончательно получаем

$$\gamma_{\max} = \min \left\{ n,\, l(\widetilde{d}) + \left\lfloor \frac{n - l(\widetilde{d})}{3} \right\rfloor \right\}.$$

Теперь рассмотрим вторую часть теоремы и покажем, что деревья указанного вида действительно реализуют $\gamma_{\max}$.

Если каждая из n нелистовых вершин дерева смежна с листьями, то выполнено неравенство $l(\widetilde{d}) \geqslant n$ и в силу леммы 2 множество $H(T)$ является минимальным доминирующим в T, а значит, $\gamma(T) = |H(T)| = n = \gamma_{\max}$.

Пусть у каждой из вершин $H(T)$ есть ровно один соседний лист. Тогда $n \geqslant |H(T)| = l(\widetilde{d})$. Все оставшиеся нелистовые вершины имеют степень

два и образуют цепь длиной $n-l(\widetilde{d})$. Концы этой цепи смежны с некоторыми вершинами из $H(T)$, а $H(T)$ содержится в некотором минимальном безлистовом доминирующем множестве D. Согласно утверждению 4 в D кроме $l(\widetilde{d})$ вершин, смежных с листьями, лежит ровно $\left\lfloor\frac{n-l(\widetilde{d})}{3}\right\rfloor$ вершин степени два, не смежных с листьями и образующих цепь. Поэтому

$$\gamma(T)=|D|=l(\widetilde{d})+\left\lfloor\frac{n-l(\widetilde{d})}{3}\right\rfloor=\gamma_{\max}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Приводимые в формулировке теоремы 3 условия достаточны, но в общем случае не являются необходимыми для того, чтобы дерево из класса $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ имело значение $\gamma(T)=\gamma_{\max}$; существует соответствующая бесконечная серия примеров.

Доказательство. Пусть имеется набор целых положительных чисел $s_1,s_2,\ldots,s_k$, $k\geqslant 2$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{s_i}{3}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}{3}\right\rfloor. \tag{1}$$

Обозначим $n_i=\sum\limits_{j=1}^{i}s_j+i+1$, $i=1,2,\ldots,k$, и положим $n=n_k$. Возьмём цепь на $n+2$ вершинах с концами t_1 и t_2 и пронумеруем внутренние вершины цепи в порядке прохождения от t_1 к t_2: $v_1,v_2,\ldots,v_n$. Далее к каждой из вершин $\{v_{n_i}\}_{i=1}^{k-1}$ добавим один соседний лист. В полученном дереве T выполнено $|H(T)|=|L(T)|=k+1$ и $|S(T)|=\sum\limits_{i=1}^{k}s_i$.

При этом $S(T)$ представляет из себя лес, состоящий из k цепей, в которых соответственно $s_1,s_2,\ldots,s_k$ вершин. Каждая из вершин $S(T)$ имеет степень два в T. Рассмотрим n-последовательность $\widetilde{d}$, в которой ровно $k-1$ и $n-k+1$ чисел равны 2 и 3 соответственно. По построению $T\in\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$. Применив лемму 2, утверждение 4 и соотношение (1), получаем

$$\gamma(T)=|H(T)|+\sum_{i=1}^{k}\left\lfloor\frac{s_i}{3}\right\rfloor=l(\widetilde{d})+\left\lfloor\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}s_i}{3}\right\rfloor=l(\widetilde{d})+\left\lfloor\frac{n-l(\widetilde{d})}{3}\right\rfloor.$$

Таким образом, согласно теореме 3 на дереве T достигается максимум числа доминирования в классе $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$, хотя T и не удовлетворяет приведённым в теореме достаточным условиям экстремальности.

Отметим, что для каждого k существует бесконечно много наборов натуральных чисел $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$, удовлетворяющих равенству (1): подойдёт любой набор, в котором первые $k-2$ чисел кратны трём, а сумма остатков от деления на три у двух оставшихся чисел не превосходит двух.

1.2. Нижняя оценка числа доминирования. Достижимая нижняя оценка числа доминирования в лесах с заданными последовательностями степеней была получена в [9] и приводится ниже (см. также [10]).

Теорема 4 [9]**.** *Пусть невозрастающая последовательность натуральных чисел* $\widetilde{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *является степенной последовательностью для некоторого леса без изолированных вершин. Пусть* $\mathcal{F}_{\widetilde{d}}$ *— класс лесов, реализующих* $\widetilde{d}$, *и* $\gamma_{\min} = \min\limits_{F \in \mathcal{F}_{\widetilde{d}}} \gamma(F)$. *Тогда* $\gamma_{\min} = \min\{k_1, k_2\}$, *где*

$$k_1 = \min\left\{k \mid \sum_{i=1}^{k} d_i \geqslant \sum_{i=k+1}^{n} d_i\right\},$$

$$k_2 = \min\left\{k \mid \sum_{i=1}^{k} d_i \geqslant n-k, \right.$$
$$\left. 0 \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant \max\{0,\, 2(n_{\geqslant 2}(\widetilde{d}) - k) - 2\}\right\}.$$

Также известна следующая нижняя оценка числа доминирования для произвольных графов, определяемая через число Слейтера. *Число Слейтера* графа G, имеющего неубывающую степенную последовательность $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, это минимальное число $\mathrm{sl}(G)$, для которого

$$\sum_{i=n-\mathrm{sl}(G)+1}^{n} (d_i + 1) \geqslant n.$$

Теорема 5 (см., например, [11, 12])**.** *Справедливо неравенство*

$$\gamma(G) \geqslant \mathrm{sl}(G).$$

Доказательство. Пусть D — произвольное доминирующее множество графа G размера $\gamma(G)$. Имеем $V(G) = N_G(D) \cup D$. Тогда

$$n = |V(G)| \leqslant |N_G(D)| + |D| \leqslant \sum_{v \in D} \deg_G(v) + \gamma(G)$$
$$\leqslant \sum_{i=n-\gamma(G)+1}^{n} d_i + \gamma(G) = \sum_{i=n-\gamma(G)+1}^{n} (d_i + 1).$$

Тем самым из определения величины $\mathrm{sl}(G)$ получаем требуемое неравенство $\gamma(G) \geqslant \mathrm{sl}(G)$. Теорема 5 доказана.

Величину $\mathrm{sl}(G)$ из теоремы 5 можно естественным образом распространить на неубывающую последовательность $\widetilde{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_1 > 1$, если вспомнить, что $n + l(\widetilde{d})$ есть число вершин в деревьях из класса $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$. Положим

$$\mathrm{sl}(\widetilde{d}) = \min \left\{ k \mid \sum_{i=n-k+1}^{n} (d_i + 1) \geqslant n + l(\widetilde{d}) \right\},$$

$$\mathrm{lv}(\widetilde{d}) = \min \left\{ k \mid \sum_{i=n-k+1}^{n} (d_i - 1) \geqslant l(\widetilde{d}) \right\}.$$

Хотя принципиально нижняя оценка числа доминирования для деревьев может быть выведена из теоремы 4, приведём альтернативное доказательство нижней оценки, более простое, чем оригинальное доказательство теоремы 4, а саму оценку сформулируем в терминах определённых выше чисел sl и lv. Также отметим, что важную роль в доказательстве основной теоремы 7 будет играть дерево, которое строится в доказательстве достижимости оценки в теореме 6.

Теорема 6. *Пусть n-последовательность $\widetilde{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ такова, что $d_1 \geqslant 2$. Положим $\gamma_{\min} = \min\limits_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}} \gamma(T)$. Тогда*

$$\gamma_{\min} = \max\{\mathrm{sl}(\widetilde{d}),\ \mathrm{lv}(\widetilde{d})\}.$$

Доказательство. При $n = 1$ класс деревьев $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ содержит единственный элемент, представляющий собой граф-звезду с d_1 листьями и числом доминирования, равным 1. Величина $\mathrm{lv}(\widetilde{d})$ в этом случае не определена, поскольку $d_1 = l(\widetilde{d})$, и неравенство $\sum\limits_{i=n-k+1}^{n} (d_i - 1) \geqslant l(\widetilde{d})$ не выполняется даже при $k = n$. При этом $\mathrm{sl}(\widetilde{d}) = 1$. Следовательно, равенство $\gamma_{\min} = \max\{\mathrm{sl}(\widetilde{d}), \mathrm{lv}(\widetilde{d})\}$ выполнено.

Пусть $n \geqslant 2$. В этом случае определены обе величины, так как оба неравенства, которыми они задаются, выполнены при $k = n$.

Для начала покажем, что верна нижняя оценка

$$\gamma_{\min} \geqslant \max\{\mathrm{sl}(\widetilde{d}),\ \mathrm{lv}(\widetilde{d})\}.$$

Для этого достаточно показать, что для любого дерева $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ выполнены оба неравенства: $\gamma(T) \geqslant \mathrm{sl}(\widetilde{d})$ и $\gamma(T) \geqslant \mathrm{lv}(\widetilde{d})$. Первое неравенство сразу следует из теоремы 5. Докажем второе неравенство.

Оценим снизу $|H(T)| = k$. Заметим, что $k \geqslant 2$, поскольку ситуация, когда лишь одна вершина связана с листьями, возможна только в графах-звёздах, т. е. при $n = 1$.

Для степеней вершин $H(T)$ справедливо соотношение

$$\sum_{v\in H(T)} \deg_T(v) = 2|E(H(T), H(T))| \\ + |E(H(T), S(T))| + |E(H(T), L(T))|. \quad (2)$$

Последнее слагаемое, очевидно, равно $l(\widetilde{d})$. Рассмотрим первые два слагаемых. Пусть подграф, порождённый $H(T)$, представляет собой лес с ровно c компонентами связности. Тогда $|E(H(T), H(T))| = k - c$. Если $c \geqslant 2$, то зная, что в дереве T существует путь из каждой такой компоненты до других компонент, получаем, что из каждой компоненты исходит некоторое ребро в подграф $S(T)$, а значит, $|E(H(T), S(T))| \geqslant c$. Тогда из (2) выводим

$$\sum_{v\in H(T)} \deg_T(v) \geqslant 2k - 2c + c + l(\widetilde{d}) \geqslant k + l(\widetilde{d}).$$

Если же $c = 1$, то в силу ограничения $k \geqslant 2$ и неотрицательности второго слагаемого в правой части равенства (2) имеем

$$\sum_{v\in H(T)} \deg_T(v) \geqslant 2k - 2 + l(\widetilde{d}) \geqslant k + l(\widetilde{d}).$$

Итак, получаем цепочку соотношений

$$l(\widetilde{d}) \leqslant \sum_{v\in H(T)} \deg_T(v) - k \leqslant \sum_{i=n-k+1}^{n} (d_i - 1).$$

Из неравенства $l(\widetilde{d}) \leqslant \sum\limits_{i=n-k+1}^{n} (d_i - 1)$ и определения величины $\mathrm{lv}(\widetilde{d})$ следует, что $k \geqslant \mathrm{lv}(\widetilde{d})$. Учитывая этот факт и лемму 2, приходим к неравенству $\gamma(T) \geqslant |H(T)| \geqslant \mathrm{lv}(\widetilde{d})$. Нижняя оценка доказана.

Теперь покажем, что оценка достижима. Пусть $r = \max\{\mathrm{sl}(\widetilde{d}), \mathrm{lv}(\widetilde{d})\}$. Тогда выполнены оба неравенства:

$$\sum_{i=n-r+1}^{n} (d_i + 1) \geqslant n + l(\widetilde{d}),$$

$$\sum_{i=n-r+1}^{n} (d_i - 1) \geqslant l(\widetilde{d}).$$

Преобразуем первое неравенство, записав его для наименьших членов n-последовательности:

$$\sum_{i=1}^{n-r}(d_i+1) = \sum_{i=1}^{n}(d_i+1) - \sum_{i=n-r+1}^{n}(d_i+1)$$
$$= 2n-2+l(\widetilde{d})+n-\sum_{i=n-r+1}^{n}(d_i+1) \leqslant 2n-2,$$

таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n-r}(d_i+1) \leqslant 2n-2. \tag{3}$$

Аналогично преобразовав второе неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n-r}(d_i-1) = 2n-2+l(\widetilde{d})-n-\sum_{i=n-r+1}^{n}(d_i-1) \leqslant n-2,$$

получаем

$$\sum_{i=1}^{n-r}(d_i-1) \leqslant n-2. \tag{4}$$

Обе величины $\mathrm{sl}(\widetilde{d})$ и $\mathrm{lv}(\widetilde{d})$ легко можно эквивалентным образом переопределить через неравенства (3) и (4) соответственно.

Чтобы показать достижимость требуемой оценки, достаточно привести дерево $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$, в котором есть доминирующее множество размера r. Если $d_1 \geqslant n$, то с учётом неравенства (4) имеем $r = n$. В таком случае нам подойдёт любое дерево $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$. Действительно, у любой нелистовой вершины в таком дереве может быть максимум $n-1$ соседей, не являющихся листьями. Тогда каждая нелистовая вершина смежна хотя бы с одним листом, т. е. $H(T) = V(T')$ и, следовательно, $\gamma(T) = n = r$. Поэтому далее считаем, что $d_1 \leqslant n-1$. Тогда очевидно, что $n-r \geqslant 1$.

Рассмотрим множество вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Пусть

$$V_2 = \{v_i \in V \mid i \leqslant n_2\}, \quad V_3 = \{v_i \in V \mid i > n-r\}$$

(V_2 и V_3, вообще говоря, могут пересекаться). Построим такое дерево, в котором множество V_3 будет доминирующим. Так как $|V_3| = r$, этого будет достаточно для завершения доказательства. Отдельно рассмотрим два случая в зависимости от соотношения между n_2 и $n-r$.

Предположим, что $n_2 \geqslant n-r$. Тогда все $n-r$ первых членов n-последовательности являются двойками, и из неравенства (3) получаем

$$n-r = 3(n-r)-2(n-r) = \sum_{i=1}^{n-r}(d_i+1)-2(n-r) \leqslant 2n-2-2(n-r) = 2(r-1).$$

Приходим к неравенству

$$n - r \leqslant 2(r-1). \tag{5}$$

Соединим все n вершин в цепь в следующем порядке:

$$v_{n-r+1}, v_1, v_2, v_{n-r+2}, v_3, v_4, v_{n-r+3}, \ldots, v_{n-r}, v_{n-r+\lceil\frac{n-r}{2}\rceil+1}, \ldots, v_n.$$

Таким образом, в этой цепи между вершинами v_{n-r+i} и $v_{n-r+i+1}$ лежат ровно две вершины v_{2i-1} и v_{2i} для каждого $1 \leqslant i \leqslant \lceil\frac{n-r}{2}\rceil - 1$. При $i = \lceil\frac{n-r}{2}\rceil$ между v_{n-r+i} и $v_{n-r+i+1}$ лежат вершины v_{n-r-1} и v_{n-r}, когда $n-r$ чётно, и только одна вершина v_{n-r}, когда $n-r$ нечётно. Далее после вершины $v_{n-r+\lceil\frac{n-r}{2}\rceil+1}$ идут все оставшиеся вершины в порядке возрастания номеров вплоть до вершины v_n. Такая цепь может быть построена благодаря неравенству (5), поскольку как раз получается $n - r + \lceil\frac{n-r}{2}\rceil + 1 \leqslant n$. Дерево T получим как расширение построенной цепи: присоединим к каждой вершине v_i столько листьев, чтобы выполнялось $\deg_T(v_i) = d_i$. Тогда $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$. При этом все вершины v_i $(1 \leqslant i \leqslant n-r)$ имеют степень 2 и по построению не соединены с листьями. С другой стороны, каждая из этих вершин соединена с некоторой вершиной $v_j \in V_3$. В таком случае множество V_3 действительно является доминирующим.

Пусть всё-таки $n_2 < n-r$, т. е. множество вершин с номерами n_2+1, $n_2+2, \ldots, n-r$ непусто. Используем неравенство (3), чтобы получить оценку числа двоек в последовательности:

$$\begin{aligned} n_2 = \sum_{i=1}^{n_2}(d_i-1) = \sum_{i=1}^{n-r}(d_i-1) - \sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-1) \leqslant 2n-2-2(n-r) - \sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-1) \\ = 2n-4-2n_2-2\sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-1) + \sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-1) + 2 - 2(n-r-n_2) \\ = 2\left(n-2-\sum_{i=1}^{n-r}(d_i-1)\right) + \sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-3) + 2. \end{aligned}$$

Итоговая оценка имеет вид

$$n_2 \leqslant 2\left(n-2-\sum_{i=1}^{n-r}(d_i-1)\right) + \sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-3) + 2. \tag{6}$$

Соединим последовательно вершины $v_{n_2+1}, v_{n_2+2}, \ldots, v_{n-r}$ так, чтобы они образовывали простую цепь, обозначим её через P. Далее будем поочерёдно соединять вершины из P с вершинами из V_2 так, чтобы каждая вершина из V_2 соединялась не более чем с одной вершиной в P и чтобы степень каждой вершины v_i $(n_2+1 \leqslant i \leqslant n-r)$ в итоге не превзошла

$d_i - 1$. Всего к вершинам из P присоединим $\min\left\{\sum\limits_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-3)+2,\, n_2\right\}$ вершин из V_2. Дополним степень каждой вершины v_i текущего дерева до d_i, присоединив к ним вершины из множества V_3 так, что вершины V_3 будут висячими в получившемся дереве $\widetilde{T}$. То, что это возможно сделать, будет видно при подсчёте числа незадействованных в $\widetilde{T}$ вершин из V_2 и V_3. Также заметим, что в $\widetilde{T}$ у каждой вершины v_i при $i \leqslant n-r$ будет сосед из V_3.

Итак, всего незадействованных вершин осталось

$$n-(n-r-n_2)-\sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-2)+2-\min\left\{\sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-3)+2,\, n_2\right\}$$
$$= n-2-\sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-1)-\min\left\{\sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-3)+2,\, n_2\right\}.$$

Из них вершин, принадлежащих множеству V_2, ровно

$$\max\left\{n_2-\left(\sum_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i-3)+2\right),\, 0\right\}.$$

Тогда незадействованных вершин из V_3 будет

$$n-2-\sum_{i=1}^{n-r}(d_i-1) \geqslant 0.$$

Таким образом, вершин из V_3 действительно хватает для построения $\widetilde{T}$. Более того, из неравенства (6) следует, что количество оставшихся вершин из V_3 равно по крайней мере половине от оставшихся вершин из V_2. Это значит, что можно так соединить все оставшиеся вершины в цепь, что один конец u этой цепи будет из V_3, другой конец — из V_2 (если оно непусто) и в этой цепи не найдётся трёх подряд идущих вершин из V_2. Соединим конец цепи, отличный от u, с некоторым листом $\widetilde{T}$ (в котором все листья лежат в множестве V_3), смежным с концом цепи P.

В итоге в полученном дереве T' каждая вершина v_i $(1 \leqslant i \leqslant n-r)$ имеет степень d_i и при этом имеет хотя бы одного соседа из V_3. Вершины из V_3 имеют степень не выше 2. Восстановим по усечённому дереву T' дерево $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$, добавив к вершинам из V_3 необходимое количество листьев, очевидно, отличное от нуля. Тогда множество V_3 является доминирующим размера r, кроме того, оно совпадает с $H(T)$. Теорема 6 доказана.

2. Достижимость всех промежуточных значений числа доминирования

Теорема 7. *Пусть $\widetilde{d} = (d_1, \ldots, d_n)$, где $2 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Положим $\gamma_{\min} = \min\limits_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}} \gamma(T)$, $\gamma_{\max} = \max\limits_{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}} \gamma(T)$. Тогда для любого натурального числа γ из промежутка $\gamma_{\min} \leqslant \gamma \leqslant \gamma_{\max}$ существует реализующее его дерево T из класса $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$, т. е. такое, что $\gamma(T) = \gamma$.*

Доказательству теоремы посвящён весь этот раздел. Реализуемость каждого числа из указанного промежутка будем доказывать следующим образом. Начнём с дерева, которое реализует $\gamma = \gamma_{\min}$. Далее будем последовательно применять к имеющемуся дереву определённые операции по его перестроению так, чтобы, во-первых, степенная последовательность дерева не изменилась, а во-вторых, чтобы число доминирования дерева увеличивалось не более чем на единицу при каждой отдельно взятой операции. Очевидно, что если с помощью такого ряда преобразований получим в итоге дерево, реализующее $\gamma = \gamma_{\max}$, то это значит, что в процессе перестроения попутно реализуем все значения $\gamma_{\min} \leqslant \gamma \leqslant \gamma_{\max}$. Теперь остановимся подробнее на операциях перестроения.

Для произвольного графа G, в котором выбраны два непересекающихся по концам ребра tu и vw, назовём *X_{vw}^{tu}-операцией* действие, заключающееся в удалении рёбер tu и vw и проведении рёбер uv и tw (если такие рёбра уже имеются в графе, то повторно их не проводим).

Лемма 3. *После проведения X_{vw}^{tu}-операции в произвольном графе G число доминирования графа увеличивается не более чем на единицу.*

Доказательство. Пусть D — минимальное доминирующее множество в G, а G' — граф, полученный из G после применения к нему X_{vw}^{tu}. Согласно утверждению 2 множество D покрывает все вершины из $G' \setminus \{t, u, v, w\}$. Покажем, что для покрытия четвёрки вершин t, u, v, w нам потребуется не более одной дополнительной вершины.

Допустим, что ни одна из указанных четырёх вершин не входит в D. Тогда согласно утверждению 2 после удаления из G рёбер tu, vw все вершины t, u, v, w всё ещё будут покрываться множеством D.

Пусть хотя бы одна вершина (не умаляя общности, считаем, что это u) входит в D. Тогда в G' вершины u и v будут покрыты вершиной u, а для покрытия вершин w и t, которые смежны, достаточно к D добавить любую из этих вершин, например, w.

Таким образом, в обоих случаях мы смогли построить доминирующее множество в G', добавив не более одной вершины к минимальному доминирующему множеству в G, откуда и следует требуемое. Лемма 3 доказана.

Пусть в графе G выбраны вершины u, v, w, s, t (допустимо совпадение t и u, но не остальных) такие, что $uv, vw, st \in E(G)$. Назовём Y^{st}_{uvw}-*операцией* действие, заключающееся в удалении из графа рёбер uv, vw, st и проведении рёбер uw, sv, vt (проводим именно отсутствующие из этих рёбер).

Лемма 4. *После проведения Y^{st}_{uvw}-операции в произвольном графе G число доминирования графа увеличивается не более чем на единицу.*

Доказательство. Пусть D — минимальное доминирующее множество в G, а G' — граф, полученный из G после применения к нему Y^{st}_{uvw}. Согласно утверждению 2 множество D покрывает все вершины из $G' \setminus \{s, t, u, v, w\}$.

Предположим, что $v \in D$. Тогда в силу наличия в G' рёбер sv, tv вершины s, t, v оказываются покрыты множеством D в G'. Вершины u и w также соединены в новом графе ребром, поэтому, добавив к D вершину u, таким образом покроем все вершины из G'.

Пусть $v \notin D$. Тогда после удаления рёбер uv, vw вершины u, w всё ещё будут покрыты D. Тогда если добавим к D вершину v, то полученное множество будет покрывать все три вершины s, v, t (их покроет v).

Таким образом, во всех случаях мы смогли построить доминирующее множество в G', добавив не более одной вершины к минимальному доминирующему множеству в G, откуда и следует требуемое. Лемма 4 доказана.

В произвольном дереве T между любыми двумя вершинами существует единственный путь. Последовательность вершин $v_1, v_2, \ldots, v_k$ будем называть T-*упорядоченной*, если путь в T от вершины v_1 к вершине v_k проходит через каждую из вершин v_i ($1 \leqslant i \leqslant k$), причём порядок их следования такой же, как в последовательности (т. е. при $1 \leqslant i < j \leqslant k$ вершина v_i встречается на пути раньше, чем v_j).

Следующая лемма сводит воедино все необходимые для дальнейшего изложения свойства X- и Y-операций при применении их к деревьям.

Лемма 5. *Пусть $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$. Предположим, что t, u, w, v — T-упорядоченная последовательность вершин. Пусть T^X — граф, получающийся из T с помощью X^{tu}_{vw}-операции. Тогда*

$$T^X \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}, \quad \gamma(T^X) \leqslant \gamma(T) + 1.$$

Пусть p, q, x, y, z — T-упорядоченная последовательность вершин, а T^Y — граф, получающийся из T с помощью Y^{pq}_{xyz}-операции. Тогда

$$T^Y \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}, \quad \gamma(T^Y) \leqslant \gamma(T) + 1.$$

Доказательство. Заметим, что неравенства

$$\gamma(T^X) \leqslant \gamma(T) + 1 \quad \text{и} \quad \gamma(T^Y) \leqslant \gamma(T) + 1$$

немедленно следуют из лемм 3 и 4 соответственно. Остаётся доказать, что T^X, $T^Y \in \mathcal{T}_{\tilde{d}}$.

Сначала рассмотрим X^{tu}_{vw}-операцию.

Заметим, что рёбер uv, wt в дереве T быть не может, поскольку иначе в дереве было бы целых два пути между вершинами u и w. Один из них не проходит через t и v в силу T-упорядоченности рассматриваемой четвёрки, а второй имел бы вид либо u, t, w, либо u, v, w. Отсюда следует, что при операции над T степени вершин, как и число рёбер графа не меняются: для всех вершин, кроме u, t, v, w, множество их соседей не меняется вообще, а для каждой из указанных четырёх вершин и удалено, и добавлено ровно одно инцидентное ей ребро.

Также заметим, что при операции граф не мог потерять связности. Если бы это было не так, то в графе T^X отсутствовал бы хотя бы один из путей: либо из u в t, либо из v в w. Однако все четыре вершины в этом графе лежат на пути из v в t в порядке v, u, w, t, так как путь $u \sim w$ остался при операции нетронутым. А значит, есть путь между любыми двумя из них. Таким образом, T^X является связным графом с тем же числом вершин и рёбер, что и дерево T, поэтому он сам является деревом. Учитывая, что степени вершин в нём тоже остались неизменными, получаем, что $T^X \in \mathcal{T}_{\tilde{d}}$.

Рассмотрим Y^{pq}_{xyz}-операцию. Как и для первой операции, в дереве T не может быть ни одного из рёбер xz, py, qy. В случае наличия ребра xz в T был бы цикл на трёх вершинах x, y, z. В случае наличия qy или py мы бы нашли в T циклический маршрут $q, y, x, x \sim q$ или $p, y, x, x \sim q, p$ соответственно. Получаем, что для каждой вершины графа число удалённых инцидентных ей рёбер равно числу добавленных: у вершины y удалили и добавили по два ребра, у вершин p, q, x, z — по одному, у всех остальных вершин графа рёбра не тронули.

Связность графа T^Y следует из того, что между концами каждого из удалённых рёбер сохранился путь: все вершины p, q, x, y, z лежат на пути из p в z в порядке p, y, q, x, z.

Из всего вышеперечисленного получаем, что $T^Y \in \mathcal{T}_{\tilde{d}}$. Лемма 5 доказана.

Теперь построим последовательность деревьев $\{T_i\}_{i=0}^m$ со следующими свойствами:

(1) $T_i \in \mathcal{T}_{\tilde{d}}$,
(2) $\gamma(T_0) = \gamma_{\min}$, $\gamma(T_m) = \gamma_{\max}$,
(3) $\gamma(T_{i+1}) - \gamma(T_i) \leqslant 1$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$.

Деревья этой последовательности, очевидно, будут реализовывать все числа от $\gamma_{\min}$ до $\gamma_{\max}$, что и влечёт утверждение теоремы 7.

При $d_1 \geqslant n$ (в частности, при $n = 1$) имеем $\gamma_{\min} = \gamma_{\max} = n$, так как в любом дереве с такой степенной последовательностью все нелистовые вершины образуют минимальное по размеру доминирующее множество, поскольку все они смежны с листьями. Поэтому в этом случае в качестве требуемой последовательности достаточно взять последовательность из одного дерева — любого элемента $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$.

Если все элементы n-последовательности равны 2, то класс $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ содержит лишь одно дерево — цепь на $n + 2$ вершинах. Для такого класса $\gamma_{\min} = \gamma_{\max}$, поэтому все промежуточные значения также достигаются.

Везде будем предполагать, что $d_1 < n$ и $d_n > 2$. В качестве T_0 возьмём дерево из доказательства теоремы 6, реализующее $\gamma_{\min}$. Это дерево строилось двумя разными способами в зависимости от того, насколько много двоек есть в n-последовательности. Однако можем описать полученную конструкцию, обобщив её для обоих случаев. Далее в решении будем использовать минимальное доминирующее множество $D = V_3$, которое получалось при построении экстремального дерева. Говоря, что одна вершина покрывает другую, будем подразумевать, что первая из вершин лежит в D и смежна со второй.

Для каждого дерева T_i, $0 \leqslant i \leqslant m - 1$, определим пять групп нелистовых вершин P, S_1, S_2, D_1, D_2. Дерево T_{i+1} будет строиться на основе некоторой X- или Y-операции, применяемой к T_i, при этом выбор конкретной операции существенно зависит от вида указанных пяти групп. Для начального дерева T_0 определим группы следующим образом.

- Группа P состоит из вершин степени не менее трёх, не смежных с листьями, они соединены в цепь. Эта группа в точности соответствует пути P в случае $n_2 < n-r$ в доказательстве теоремы 6, в случае $n_2 \geqslant n-r$ группа P будет пустой.

- Группа S_1 состоит из вершин степени два, смежных с вершинами из P.

- Группа D_1 состоит из вершин степени не менее трёх, лежащих в D и покрывающих вершины из групп P или S_1. Если множество оставшихся нелистовых вершин, не вошедших в $P \cup S_1 \cup D_1$, не является пустым, то имеется единственная вершина в D_1, смежная с какой-то из этих оставшихся. Эту особую вершину будем обозначать через u. В таком случае исключим u из D_1.

- Группа S_2 состоит из вершин степени два, не смежных с вершинами из P.

- Наконец, группа вершин D_2 — это оставшиеся вершины степени не менее трёх, смежные с листьями. Сюда же входит исключённая из D_1 вершина u, если исключение имело место.

Через P_2 обозначим цепь, образуемую объединением множеств S_2 и D_2. В случае, когда непусты обе цепи P и P_2, одним из концов P_2 будет особая вершина u из D_2. Обозначим её соседа из P_2 через u_1, а другой конец P_2 — через u_2 (вершины u_1 и u_2 могут совпадать). Вершина u_2 тоже принадлежит D_2. При $n_2 \geqslant n - r$ группы вершин P, S_1, D_1 пусты.

Далее при описании процесса построения нужной последовательности деревьев будем также указывать, каким образом меняются множества S_1, S_2, D_1, D_2 при переходе от T_i к T_{i+1}. Множество P будет постоянным, т. е. одинаковым для всех деревьев строящейся последовательности.

Будем придерживаться следующей общей схемы построения последовательности деревьев. Начав с дерева T_0 и перестраивая каждое новое дерево T_i, будем постепенно «освобождать» вершины из P и S_1 от покрывающих их вершин из D_1 с помощью X-операций, соединяя вершины из P и S_1 с листьями и уменьшая при этом множество D_1. Этот процесс заканчивается, как только D_1 становится пустым. В конце этого процесса лишь одна вершина из $P \cup S_1$ может быть не смежна с листьями, для неё будет проведена отдельная X- или Y-операция. Естественно, что если P пусто в T_0, то данных шагов построения последовательности не будет.

Последующие деревья обладают тем свойством, что с листьями в них не смежны только вершины из S_2, если таковые имеются. Если с листьями будут смежны не все вершины S_2, то проверяем, есть ли вершина, смежная хотя бы с двумя листьями. Если такая вершина имеется, то с помощью соответствующей операции соединяем одну из вершин степени два с одним из этих листьев. Таким образом мы уменьшим число вершин, не смежных с листьями. Этот процесс закончится либо тогда, когда все вершины станут смежны с листьями, либо тогда, когда каждая вершина из $H(T)$ будет смежна ровно с одним листом. Если выполнено последнее, то при построении дальнейших деревьев с помощью Y-операций добьёмся того, что все вершины, не смежные с листьями, соединены в одну цепь (все такие вершины лежат в S_2). На этом построение последовательности гарантированно закончится (хотя оно могло закончиться и раньше).

В результате описанных операций конечным элементом последовательности деревьев всегда будет дерево, реализующее $\gamma_{\max}$.

Разберём описанную схему более детально.

Для каждого из деревьев T_i, $i < m$, будем специальным образом определять некоторую вершину w_i, называемую *выделенной*. Вершины w_i необязательно различны при разных i.

Сначала определим w_0. Если непусты обе цепи P и P_2, то полагаем $w_0 = u_2$. Если P пусто, то D_2 пустым быть не может, поскольку иначе все нелистовые вершины имели бы степень два. При этом нелистовые вершины T_0 образуют цепь P_2, один из концов которой принадлежит D_2

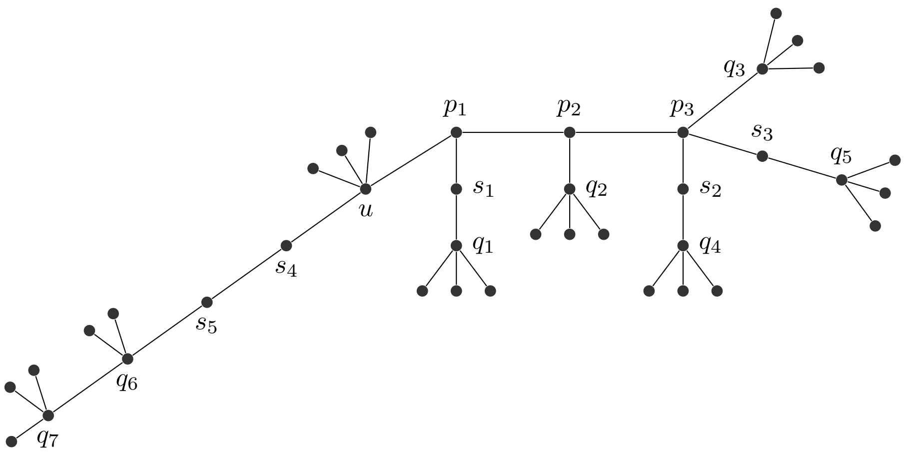

Рис. 1. Дерево T_0 для последовательности
$\widetilde{d} = (2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5)$

в соответствии с построением экстремального дерева в доказательстве теоремы 6. В качестве w_0 берём этот конец цепи P_2. Если только P_2 пусто, то в качестве w_0 берём любую вершину из D_1, покрывающую один из концов пути P. Заметим, что в каждом из случаев w_0 имеет лишь одного нелистового соседа, а её степень не меньше трёх, поэтому $|L_{T_0}(w_0)| \geqslant 2$.

На рис. 1 приведён пример дерева T_0 со следующими группами P, S_1, S_2, D_1, D_2 и выделенной вершиной $q_7 = w_0$. Множества разбиения равны $P = \{p_1, p_2, p_3\}$, $S_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$, $S_2 = \{s_4, s_5\}$, $D_1 = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $D_2 = \{u, q_6, q_7\}$, а $q_7 = w_0$.

Далее опишем построение T_{i+1} по T_i и укажем, как при этом меняются множества S_1, S_2, D_1, D_2. Построение будет опираться на структуру этих множеств в T_i, поэтому раздельно опишем процесс для разного вида деревьев в последовательности. Порядок рассмотрения случаев ниже определяется порядком, в котором деревья соответствующего вида могут возникать в последовательности $\{T_i\}_{i=0}^m$.

1. Сначала рассмотрим деревья, для которых D_1 содержит хотя бы одну вершину, отличную от w_0.

Для T_0 мы уже определили w_0 и установили справедливость неравенства $|L_{T_0}(w_0)| \geqslant 2$. При $i \geqslant 1$ вершину w_i будем определять в процессе перехода от T_{i-1} к T_i, причём в качестве w_i всегда будем брать вершину, удовлетворяющую неравенству $|L_{T_i}(w_i)| \geqslant 2$. Опишем ниже переход от имеющейся пары T_i, w_i к паре T_{i+1}, w_{i+1}.

Рассмотрим произвольную вершину $v \in D_1 \setminus \{w_0\}$. Пусть w — её единственный нелистовой сосед, он лежит в $P \cup S_1$. Пусть t — любой из листьев, смежных с w_i. В качестве T_{i+1} возьмём дерево, получающееся из T_i с помощью $X_{vw}^{tw_i}$-операции: четвёрка t, w_i, w, v является T_i-упорядоченной, поэтому по лемме 5 граф T_{i+1} — дерево, удовлетворяющее требуемым условиям $T_{i+1} \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ и $\gamma(T_{i+1}) - \gamma(T_i) \leqslant 1$. В качестве вершины w_{i+1} возьмём v.

Заметим, что неравенство $|L_{T_{i+1}}(w_{i+1})| \geqslant 2$ выполнено, поскольку v имеет только одного нелистового соседа (и до, и после X-операции) и её степень не меньше трёх. В свою очередь, для вершины w_i верно неравенство $|L_{T_{i+1}}(w_i)| \geqslant 1$, поскольку у w_i из соседей пропал ровно один лист. Вершина w в T_{i+1} становится смежна с листом t. Для всех остальных вершин множества их соседей остались прежними.

Также заметим, что после операции над T_i вершина v исключается из D_1 (она больше не покрывает вершины из P или S_1) и переходит в D_2. Множества S_1, S_2 пока считаем неизменными.

После каждой операции множество D_1 уменьшается, поэтому в некоторый момент придём к дереву, в котором D_1 либо пусто, либо содержит лишь вершину w_0. Обозначим последнее дерево рассмотренного вида через T_k. Отметим, что в T_k все вершины $w_0, w_1, \ldots, w_k$ соединены в цепь, что следует из описанного построения последовательности.

2. Допустим, что дерево T_{k+1} таково, что для него $D_1 = \{w_0\}$. Это возможно, только если в T_0 множество P_2 было пустым, а тогда в T_{k+1} все вершины степени не менее трёх образуют цепь: начальная часть этой цепи — подцепь P, затем идут вершины $w_0, w_1, \ldots, w_{k+1}$ (вершина w_{k+1} была определена при переходе от T_k к T_{k+1}). Все вершины $\{w_j\}_{j=0}^{k+1}$ вместе составляли всё множество D_1 в T_0.

Покажем, что каждая из нелистовых вершин (за исключением, быть может, соседней для w_0 вершины $w_{-1} \in P$) лежит в $H(T_{k+1})$. Сначала рассмотрим вершины степени не менее трёх.

В самом деле, в T_0 у каждой вершины $p \in P$ был сосед из D_1, покрывавший её, но если этим соседом не являлась вершина w_0, то в одной из промежуточных X-операций этот сосед пропал, а вместо него у вершины p появился сосед-лист. Таким образом, исключение может составить лишь вершина, покрываемая только w_0, а у w_0 на P сосед единствен — это конец w_{-1} цепи P, смежный с w_0. Посмотрим на вторую часть цепи. Для каждой вершины w_j $(0 \leqslant j \leqslant k)$ ранее установили неравенство $|L_{T_{j+1}}(w_j)| \geqslant 1$, т. е. после $(j+1)$-й операции у w_j имеются соседние листья. При дальнейших же операциях множество соседей w_j уже не менялось, а значит, $w_j \in H(T_{k+1})$. Для w_{k+1} и вовсе верно неравенство $|L_{T_{k+1}}(w_{k+1})| \geqslant 2$.

Все остальные нелистовые вершины лежат в S_1, и каждая из них смежна с одним листом: в T_0 все эти вершины были смежны с некоторыми из вершин $D_1 \setminus \{w_0\}$, но после применённых $k+1$ раз X-операций их соседями стали какие-то листья.

Теперь рассмотрим вершину w_{-1}. Так как в T_0 она являлась концом цепи P, у неё кроме возможного соседа из P (очевидно, что при $P = \{w_{-1}\}$ такой сосед отсутствует) и вершины w_0 был ещё по крайней мере один сосед v. Вершина v могла лежать либо в S_1, либо в D_1. Если в T_0 было выполнено $D_1 \ni v$, то в T_{k+1} вершина w_{-1} оказывается смежна уже не с v, а с листом. В этом случае завершаем процесс, полагая $T_m = T_{k+1}$.

Пусть $v \in S_1$. В T_{k+1} вершины w_{-1} и v тоже смежны, при этом v смежна с некоторым листом. Через t обозначим любой из листьев, смежных с w_{k+1}; таких найдётся, как минимум, два. Тогда в качестве последнего дерева последовательности $T_m = T_{k+2}$ возьмём дерево, получающееся из T_{k+1} с помощью $X^{tw_{k+1}}_{vw_{-1}}$-операции (четвёрка t, w_{k+1}, w_{-1}, v T_{k+1}-упорядочена, поэтому можно применить лемму 5). Тем самым в T_m вершина w_{-1} смежна с листом t, вершина v остаётся смежна со своим листом и у w_{k+1} остался хотя бы один сосед-лист.

Таким образом, в случае, когда цепь P_2 пуста в T_0, конечное дерево T_m таково, что в нём все нелистовые вершины лежат в $H(T_m)$. По теореме 3 дерево T_m реализует верхнюю оценку числа доминирования, что и требовалось получить.

3. Далее рассматриваем деревья T_i, в которых D_1 уже пусто. Тогда цепь P_2 непуста в T_0. Эта подпоследовательность деревьев начинается либо с T_{k+1}, если множество P не пусто, либо с T_0, если P пусто.

Для данной группы деревьев вершину w_i будем задавать во время перехода от T_i к T_{i+1}, хотя начальное дерево уже имеет определённую выделенную вершину w, смежную по крайней мере с двумя листьями.

3.1. Пусть цепь P тоже непуста. Обозначим через w_{-1} конец цепи P, смежный с u.

В дереве T_{k+1} все вершины из P, кроме, быть может, w_{-1}, лежат в $H(T_{k+1})$. Это следует из того, что у всех вершин из $P \setminus \{w_{-1}\}$ вместо соседей из D_1, которые были в T_0, появились соседние листья при одной из предыдущих операций. Только у w_{-1} могло не быть соседа из D_1, если её покрывала лишь вершина $u \in D_2$ (т. е. ситуация аналогична случаю 2, когда после череды операций в T_{k+1} стало выполнено $D_1 = \{w_0\}$). Аналогично $H(T_{k+1}) \supseteq S_1 \cup D_2$.

Предположим, что $w_{-1} \notin H(T_{k+1})$. Это означает, что в T_0 она покрыта только вершиной u. Тогда в T_{k+1} у w_{-1} кроме не более чем одного соседа

из P и вершины u есть по крайней мере один сосед $v \in S_1$, смежный с листом t.

Через t' обозначим произвольный из листьев, смежных с w_{k+1}. Пусть T_{k+2} — дерево, получающееся из T_{k+1} с помощью $Y^{t'w_{k+1}}_{w_{-1}vt}$-операции (пятёрка $t', w_{k+1}, w_{-1}, v, t$ T_{k+1}-упорядочена, можем применить лемму 5). В T_{k+2} вершина w_{-1} станет смежна с листом t; вершина v пропадёт из S_1, перейдя в множество S_2, и будет смежна с листом t'. Для вершины w_{k+1} после операции тоже будет выполняться неравенство $|L_{T_{k+2}}(w_{k+1})| \geqslant 1$. Множества D_1, D_2 не изменились.

В результате во всех деревьях T, начиная с T_{k+2}, в $S(T)$ будут входить лишь некоторые вершины из S_2 (переходы проводим так, что множество $H(T_i)$ не убывает по включению с ростом i).

Этим же свойством обладает T_{k+1}, если в нём w_{-1} всё-таки смежна с листьями. В таком случае операция над данным деревом будет определяться так же, как для всех последующих деревьев, но для них надо будет задавать выделенную вершину, в отличие от T_{k+1}.

Приведём описание перехода для деревьев T_i, в которых все вершины степени не менее трёх входят в $H(T_i)$.

3.1.1. Предположим, что каждая вершина степени два тоже лежит в $H(T_i)$. Тогда $T_m = T_i$, и по теореме 3 дерево T_m реализует $\gamma_{\max}$.

3.1.2. Предположим, что в T_i существует хотя бы одна вершина $y \in S(T_i)$ (её степень будет равна двум) и при этом существует некоторая вершина w степени не менее трёх, для которой $|L_{T_i}(w)| \geqslant 2$. Вершину w будем считать выделенной вершиной w_i (для T_{k+1} эта вершина уже определена).

Обозначим через t произвольный лист, смежный с w_i, а через x и z — двух соседей вершины y таких, что пятёрка t, w_i, x, y, z будет T_i-упорядоченной. Тогда в качестве T_{i+1} по лемме 5 можем взять дерево, получающееся из T_i с помощью $Y^{tw_i}_{xyz}$-операции. В T_{i+1} вершина y станет смежна с листом t, у вершины w_i всё ещё останется хотя бы один смежный с ней лист, а у всех остальных вершин множество соседних с ними листьев не изменится.

Таким образом, выполнено равенство $|S(T_{i+1})| = |S(T_i)| - 1$. Значит, после ряда операций над деревьями такого вида получим дерево, удовлетворяющее либо случаю 3.1.3, либо случаю 3.1.1.

3.1.3. Пусть в T_i у каждой вершины из $H(T_i)$ есть ровно один соседний лист и при этом $V(S(T_i))$ непусто. Ясно, что $V(S(T_i)) \subseteq S_2$ и такие вершины лежат на пути $(u \sim w_0)$. Тогда возьмём из них самую близкую к w_0 вершину (т. е. такую, что длина пути между ней и w_0 самая маленькая среди всех вершин $S(T_i)$), эту вершину считаем выделенной вершиной w_i.

Допустим, что вершины из $S(T_i)$ не образуют цепи. Это означает, что часть вершин из $S(T_i)$ соединена в цепь W_i, у которой одним из концов является w_i; а другая непустая часть S' в эту цепь не входит. Возьмём любую вершину $y \in S'$. Обозначим двух её соседей через x и z (из них x ближе к w_0, чем z). Пусть w — сосед w_i такой, что пятёрка w, w_i, x, y, z является T_i-упорядоченной. Тогда по лемме 5 в качестве T_{i+1} можем взять дерево, получающееся из T_i с помощью $Y_{xyz}^{ww_i}$-операции.

Тогда в T_{i+1} вершина y становится смежна с w, т. е. становится самой близкой к w_0 вершиной из $S(T_{i+1})$. Стало быть, сразу можно сказать, что вершина y в T_{i+1} будет выделенной. Кроме того, вершина y смежна с w_i, поэтому она является концом цепи $W_{i+1} = \{y\} \cup W_i$.

В результате при росте i число вершин, образующих цепь W_i в T_i, увеличивается, а множество S' наоборот уменьшается. Таким образом, в какой-то момент получим дерево T_m (оно будет конечным деревом последовательности), в котором множество S' вершин, не принадлежащих цепи W_m, будет пустым.

Граф $S(T_m)$ представляет из себя цепь. Тогда по теореме 3 получаем, что T_m реализует $\gamma_{\max}$.

3.2. Пусть цепь P пуста. Тогда T_0 представляет собой цепь P_2, к некоторым вершинам которой присоединены листья. Все вершины степени не менее трёх смежны с листьями. Вершина w_0 является концом P_2.

Тогда при работе с произвольным деревом последовательности T_i можем действовать аналогично предыдущим случаям.

Если все нелистовые вершины лежат в $H(T_i)$ или каждая из вершин $H(T_i)$ смежна ровно с одним листом и при этом $S(T_i)$ является цепью, состоящей из вершин степени два в T_i, то такое дерево $T_i = T_m$ конечное.

Если в $S(T_i)$ (туда могут входить лишь вершины степени два) есть вершины и при этом существует вершина w_i (выделенной делаем именно её) такая, что $|L_{T_i}(w_i)| \geqslant 2$, то действовать будем аналогично случаю 3.1.2, т. е. «забираем» один лист у w_i и «отдаём» его вершине из $S(T_i)$ с помощью Y-операции.

Если же каждая вершина из $H(T_i)$ смежна ровно с одним листом и вершины из $S(T_i)$ не образуют цепи, то действуем аналогично случаю 3.1.3, т. е. с помощью Y-операций постепенно объединяем все вершины степени два из $S(T_i)$ в одну цепь W_i, выбирая в качестве w_i самую близкую к w_0 вершину из $S(T_i)$.

Таким образом, согласно лемме 5 мы построили последовательность $\{T_i\}_{i=0}^m \subset \mathcal{T}_{\tilde{d}}$ такую, что $\gamma(T_{i+1}) - \gamma(T_i) \leqslant 1$, $\gamma(T_0) = \gamma_{\min}$ и $\gamma(T_m) = \gamma_{\max}$. Значит, каждое натуральное число из отрезка $[\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ реализуется некоторым элементом построенной последовательности. Теорема 7 доказана.

Заключение

Естественное продолжение настоящей работы состоит в исследовании достижимости промежуточных значений числа доминирования в классе лесов с заданной степенной последовательностью, особенно с учётом уже имеющихся достижимых верхней и нижней оценок (теоремы 2 и 4). Нам представляется, что подход, использованный для деревьев (основанный на слабо меняющих число доминирования операциях над деревьями), может оказаться на этом пути весьма плодотворным.

На настоящий момент в литературе исследуются многочисленные основанные на доминировании инварианты графов [3] (k-доминирование, независимое доминирование, связное доминирование, экспоненциальное доминирование и т. д.), относительно которых исследование, аналогичное проведённому в настоящей работе, могло бы представлять интерес.

Автор выражает признательность А. Б. Дайняку за многочисленные обсуждения, способствовавшие улучшению изложения статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Diestel R.** Graph theory. Heidelberg: Springer, 2016. (Grad. Texts Math.; Vol. 173).
2. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
3. **Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J.** Fundamentals of domination in graphs. New York: Marcel Dekker, 1998 (Monogr. Textb. Pure Appl. Math.).
4. **Дайняк А. Б., Курносов А. Д.** Об одной экстремальной обратной задаче теории графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 1. С. 19–31.
5. **Havel V.** A remark on the existence of finite graphs // Čas. Pěstování Mat. 1955. Vol. 80. P. 477–480. [Czech.]
6. **Hakimi S.** On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph // SIAM J. Appl. Math. 1962. Vol. 10. P. 496–506.
7. **Favaron O.** A bound on the independent domination number of a tree // Vishwa Int. J. Graph Theory. 1992. Vol. 1, No. 1. P. 19–27.
8. **Gentner M., Henning M., Rautenbach D.** Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence // Discrete Appl. Math. 2016. Vol. 206. P. 181–187.
9. **Gentner M., Henning M., Rautenbach D.** Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence // J. Graph Theory. 2018. Vol. 88, No. 1. P. 131–145.
10. **Lemanska M.** Lower bound on the domination number of a tree // Discus. Math. Graph Theory. 2004. Vol. 24. P. 165–169.

11. **Slater P. J.** Locating dominating sets and locating-dominating sets // Graph theory, combinatorics and applications. Proc. 7th Quad. Int. Conf. Theory Appl. Graphs (Kalamazoo, USA, June 1–5, 1992). Vol. 2. New York: Wiley, 1995. P. 1073–1079.

12. **Desormeaux W. J, Haynes T. W., Henning M. A.** Improved bounds on the domination number of a tree // Discrete Appl. Math. 2014. Vol. 177. P. 88–94.

Курносов Артем Дмитриевич

Статья поступила
6 апреля 2019 г.

После доработки —
21 августа 2019 г.

Принята к публикации
28 августа 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2020. Vol. 27, No. 1. P. 61–87

UDC 519.172.1 DOI 10.33048/daio.2020.27.656

THE SET OF ALL VALUES OF THE DOMINATION NUMBER IN TREES WITH A GIVEN DEGREE SEQUENCE

A. D. Kurnosov

Moscow Institute of Physics and Technology,
9 Institutskii Lane, 9, 141700 Dolgoprudnyi, Russia
E-mail: `kurnosov@phystech.edu`

Abstract. We find the set of all values of the domination number for a class of trees with some given vertex degrees that forms a segment of naturals. We prove that each intermediate value of the segment can be obtained by gradually changing the tree that minimizes the domination number and with the use of two special operations, so that the last tree maximizes the domination number. Illustr. 1, bibliogr. 12.

Keywords: degree sequence, tree, domination number, inverse problem, realization, realization tree.

REFERENCES

1. **R. Diestel,** *Graph Theory* (Springer, Heidelberg, 2016).
2. **V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov,** and **R. I. Tyshkevich,** *Lectures on Graph Theory* (Nauka, Moscow, 1990; B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994).
3. **T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi,** and **P. J. Slater,** *Fundamentals of Domination in Graphs* (Marcel Dekker, New York, 1998).
4. **A. B. Dainyak** and **A. D. Kurnosov,** On an extremal inverse problem in graph theory, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (1), 19–30 (2015) [*J. Appl. Ind. Math.* **9** (2), 157–164 (2015)].
5. **V. Havel,** A remark on the existence of finite graphs, *Čas. Pěstování Mat.* **80** (4), 477–480 (1955).
6. **S. Hakimi,** On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph, *SIAM J. Appl. Math.* **10**, 496–506 (1962).
7. **O. Favaron,** A bound on the independent domination number of a tree, *Vishwa Int. J. Graph Theory* **1** (1), 19–27 (1992).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (1), 131–147 (2020), DOI 10.1134/S1990478920010135.

8. **M. Gentner, M. Henning,** and **D. Rautenbach,** Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence, *Discrete Appl. Math.* **206**, 181–187 (2016).
9. **M. Gentner, M. Henning,** and **D. Rautenbach,** Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence, *J. Graph Theory* **88** (1), 131–145 (2018).
10. **M. Lemanska,** Lower Bound on the Domination Number of a Tree, *Discuss. Math., Graph Theory* **24**, 165–169 (2004).
11. **P. J. Slater,** Locating dominating sets and locating-dominating sets, in *Graph Theory, Combinatorics and Applications (Proc. 7th Quadrennial Int. Conf. Theory and Applications of Graphs, Kalamazoo, USA, June 1–5, 1992)*, Vol. 2 (Wiley, New York, 1995), pp. 1073–1079.
12. **W. J. Desormeaux, T. W. Haynes,** and **M. A. Henning,** Improved bounds on the domination number of a tree, *Discrete Appl. Math.* **177**, 88–94 (2014).

Artem D. Kurnosov

Received April 6, 2019
Revised August 21, 2019
Accepted August 28, 2019