

ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ  
ЧАСТИЧНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ  
ДЛЯ ЗАДАЧ ПОТОКОВОГО РАВНОВЕСИЯ

*И. В. Коннов<sup>1,a</sup>, Э. Лайтинен<sup>2,b</sup>, О. В. Пинягина<sup>1,c</sup>*

<sup>1</sup> Казанский федеральный университет,  
ул. Кремлёвская, 18, 420008 Казань, Россия

<sup>2</sup> Университет Оулу,  
ул. Пентти Кайтеран, 1, 90014 Оулу, Финляндия

E-mail: <sup>a</sup>konn-igor@ya.ru, <sup>b</sup>erkki.laitinen@oulu.fi,  
<sup>c</sup>olga.piniaguina@kpfu.ru

**Аннотация.** Предлагаются упрощённые модификации метода частичной линеаризации для задачи потокового равновесия со смешанным спросом. В этих модификациях вспомогательная задача поиска направления решается приближённо. Для предложенных модификаций сохраняются основные свойства сходимости исходного метода, а неточное решение вспомогательных задач позволяет сократить вычислительные затраты. Предварительные численные тесты показали преимущество и эффективность предложенного подхода по сравнению с точным вариантом метода. Табл. 3, ил. 2, библиогр. 17.

**Ключевые слова:** задача потокового равновесия, метод частичной линеаризации, направление спуска, приближённое решение.

**Введение**

Задачи потокового равновесия возникают в разных областях человеческой деятельности, включая телекоммуникации и транспортные сети. Эти задачи давно известны и детально исследованы (см., например, [1–4]). Простой вид допустимого множества и декомпозируемая структура этих задач позволяют применять метод условного градиента и частичной линеаризации с простыми процедурами поиска направления [5, 6].

---

Первый автор был поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 19–01–00431). Результаты первого автора в этой работе были получены в рамках государственного задания Министерства науки и образования России (проект 1.460.2016/1.4). Первый и второй авторы были поддержаны грантом 315471 Академии Финляндии.

При этом задача поиска направления может быть решена неточно с использованием подхода из работы [7], в которой предложен вариант метода условного градиента с неточным поиском направления. В настоящей статье мы приводим две модификации метода частичной линеаризации с разными вариантами неточного поиска направления для задачи потокового равновесия.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 приводятся общая схема метода частичной линеаризации и общие сведения о задаче потокового равновесия. В разд. 2 и 3 предлагаются варианты метода частичной линеаризации с неточным поиском направления для задачи потокового равновесия и обосновывается их сходимость. Результаты предварительных тестовых расчётов приведены в разд. 4.

## 1. Предварительные сведения

**1.1. Метод частичной линеаризации.** Метод частичной линеаризации был предложен в [8] для оптимизационных задач. Дальнейшему развитию и обобщению метода посвящено много работ, в том числе [9–12]. Этот метод имеет преимущества, когда допустимое множество задачи — множество простой структуры, а целевая функция расщепляется на две части, одна из которых линеаризуема, а вторая достаточно проста. Рассмотрим следующую задачу оптимизации с ограничениями:

$$\min_{x \in D} \rightarrow \mu(x). \quad (1)$$

Здесь целевая функция  $\mu: R^n \rightarrow R$  является суммой двух функций:  $\mu(x) = f(x) + h(x)$ , первая из них гладкая, а вторая выпуклая. Допустимое множество задачи  $D \subset R^n$  выпукло, замкнуто и ограничено.

Напомним схему метода частичной линеаризации для задачи (1). Предположим, что  $x^k \in D$  —  $k$ -я итерационная точка метода,  $k = 1, 2, \dots$ . Найдём  $z^k \in D$  как решение вспомогательной задачи

$$\min_{x \in D} \rightarrow \langle f'(x^k), x \rangle + h(z), \quad (2)$$

положим  $d^k = z^k - x^k$  и определим следующую итерационную точку  $x^{k+1} = x^k + \lambda_k d^k$ , где шаг  $\lambda_k$  может быть выбран с использованием подходящей точной либо неточной процедуры для задачи одномерной минимизации. Вышеописанный метод сходится к стационарной точке задачи (1), а если  $\mu$  выпукла, то к решению этой задачи.

Исходные варианты методов условного градиента и частичной линеаризации требуют точного решения вспомогательных задач поиска направления типа (2). Недавно в [7] предложена специальная модификация

метода условного градиента с неточным решением задачи поиска направления. В настоящей статье мы применяем этот подход для решения задач потокового равновесия методом частичной линеаризации.

**1.2. Задача потокового равновесия.** Напомним формулировку задачи потокового равновесия. Она описывает модель транспортных или информационных потоков.

Пусть  $V$  — множество узлов сети,  $A$  — множество направленных дуг,  $W$  — множество пар источник-адресат (origin-destination)  $(i, j)$ ,  $i, j \in V$ , для краткости будем называть их О/D-парами. Для каждой О/D-пары  $w \in W$  известно множество путей  $P_w$ . Каждый путь представляет собой простую цепочку дуг, начинающуюся в узле-источнике и заканчивающуюся в узле-адресате О/D-пары. Для удобства пронумеруем последовательно все пути индексами  $p = 1, 2, \dots, \sum_{w \in W} |P_w|$ . Обозначим через  $x_p$

переменные потоков, проходящих по путям  $p$ ,  $p \in P_w$ ,  $w \in W$ .

Кроме того, для каждой пары  $w \in W$  задана переменная спроса  $y_w$ . Она представляет собой величину потока, выходящего из узла-источника и входящего в узел-адресат. Предполагаем, что эти переменные ограничены сверху и снизу величинами  $0 \leq \gamma_w < \Gamma_w$ .

Задача потокового равновесия состоит в распределении объёмов спроса для всех О/D-пар между всевозможными путями сети с использованием некоторого (равновесного) критерия.

Допустимое множество имеет вид

$$U = \left\{ (x, y) \mid \sum_{p \in P_w} x_p = y_w, x_p \geq 0, p \in P_w, y_w \in [\gamma_w, \Gamma_w], w \in W \right\}.$$

Соответствие дуг и путей задано матрицей инцидентности с элементами

$$\alpha_{pa} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга } a \text{ входит в путь } p, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда поток по каждой дуге  $a \in A$  определяется как сумма соответствующих потоков по путям:

$$f_a = \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} \alpha_{pa} x_p. \quad (3)$$

Пусть для каждой дуги  $a \in A$  задана непрерывная функция затрат  $c_a$ ; в общем случае она может зависеть от всех потоков по дугам. Кроме того, пусть для каждой О/D-пары  $w \in W$  задана функция допустимых затрат  $h_w$  (в англоязычных источниках её называют disutility function). В общем случае она может зависеть от всех величин спроса  $y_w$ ,  $w \in W$ . Эта функция показывает, какие затраты согласна нести О/D-пара для

обеспечения заданной величины спроса. Тогда функция затрат по пути имеет вид

$$g_p(x) = \sum_{a \in A} \alpha_{pa} c_a(f)$$

для каждого  $p$ , где  $f$  — вектор потоков по дугам  $f_a$ ,  $a \in A$ .

Обозначим через  $G$  и  $H$  векторы с компонентами  $g_p$ ,  $p \in P_w$ ,  $w \in W$ , и  $h_w$ ,  $w \in W$ , соответственно.

Для отыскания равновесного состояния сети требуется решить следующее вариационное неравенство: найти точку  $(x^*, y^*) \in U$  такую, что

$$\langle G(x^*), x - x^* \rangle - \langle H(y^*), y - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall (x, y) \in U. \quad (4)$$

Здесь действует «пользовательско-оптимизационный» равновесный принцип (равновесие по Нэшу): потоковое равновесие в сети достигнуто, если ни один из участников (ни одна из О/D-пар) не может уменьшить свои затраты, принимая единоличное решение об изменении распределения своих потоков по путям.

В [13] показано, что вышеуказанная равновесная задача может быть представлена как задача двустороннего многопродуктового рыночного равновесия. Условия равновесия для неё имеют следующий вид. Точка  $(x^*, y^*) \in U$  является точкой равновесия задачи (4), если для каждой  $w \in W$  найдётся число  $\lambda_w$  такое, что для любого  $p \in P_w$

$$g_p(x^*) \begin{cases} \geq \lambda_w, & \text{если } x_p^* = 0, \\ = \lambda_w, & \text{если } x_p^* > 0, \end{cases}$$

$$h_w(y^*) \begin{cases} \leq \lambda_w, & \text{если } y_w^* = \gamma_w, \\ = \lambda_w, & \text{если } y_w^* \in (\gamma_w, \Gamma_w), \\ \geq \lambda_w, & \text{если } y_w^* = \Gamma_w. \end{cases}$$

Такая постановка задачи обобщает классические задачи потокового равновесия с постоянным и переменным (эластичным) спросом (см. также работы [14, 15], где данная задача была названа задачей потокового равновесия со смешанным спросом). Если, например, функции затрат по дугам и допустимых затрат для О/D-пар таковы, что  $g_p(x) > h_w(y)$  для всех  $p \in P_w$ ,  $w \in W$ ,  $(x, y) \in U$ , то получаем задачу потокового равновесия с *фиксированным* спросом, где вектор фиксированного спроса задан компонентами  $\gamma_w$ ,  $w \in W$ . С другой стороны, в классической задаче потокового равновесия с *эластичным* спросом  $\gamma_w = 0$  и  $\Gamma_w = \infty$  для всех  $w \in W$ .

В дальнейшем полагаем, что каждая функция затрат по дуге  $c_a$  зависит только от потока по этой дуге  $f_a$ ,  $a \in A$ , каждая функция допустимых затрат  $h_w$  зависит только от своего спроса  $y_w$ ,  $w \in W$ . Тогда

отображения  $G$  и  $H$  потенциальны и для любых  $a \in A$  и  $w \in W$  существуют функции

$$\mu_a(f_a) = \int_0^{f_a} c_a(t)dt, \quad \sigma_w(y_w) = \int_0^{y_w} h_w(t)dt.$$

В этом случае вариационное неравенство (4) представляет собой условие оптимальности для следующей оптимизационной задачи:

$$\min_{u \in U} \rightarrow \psi(u), \quad (5)$$

где  $u = (x, y)$ ,  $\psi(x, y) = \sum_{a \in A} \mu_a(f_a) - \sum_{w \in W} \sigma_w(y_w)$ , а функция  $f_a$ ,  $a \in A$ , определена в (3). Иначе говоря, каждое решение задачи (5) является решением задачи (4). Обратное утверждение истинно, если, например, отображения  $G$  и  $-H$  монотонны.

Отметим, что допустимое множество  $U$  представляет собой произведение множеств типа симплексов. Кроме того, свойство потенциальности отображений  $G$  и  $H$  представляет дополнительные блочные свойства задачи, которые будут использованы в разд. 2.

## 2. Первый метод частичной линеаризации с неточным поиском направления

В [6] предложен вариант метода частичной линеаризации для задачи потокового равновесия с эластичным спросом с точным вычислением направления спуска.

Предполагаем, что  $h_w(y) = h_w(y_w)$ ,  $h_w$  — невозрастающие функции для всех  $w \in W$ . Решение вспомогательной задачи поиска направления в методе частичной линеаризации выглядит следующим образом. Пусть на  $k$ -й итерации ( $k = 0, 1, \dots$ ) основного процесса имеем вектор потоков по путям  $x^k$  и вектор спроса  $y^k$ . Вычислим значения функций затрат по путям  $g_p(x^k)$  для всех  $p \in P_w$ ,  $w \in W$ . Требуется найти вектор  $(\bar{x}^k, \bar{y}^k) \in U$  — решение линеаризованного вариационного неравенства:

$$\sum_{w \in W} \left[ \sum_{p \in P_w} g_p(x^k)(x_p - \bar{x}_p^k) - h_w(\bar{y}_w^k)(y_w - \bar{y}_w^k) \right] \geq 0 \quad \forall (x, y) \in U, \quad (6)$$

или эквивалентной задачи оптимизации

$$\min_{(x, y) \in U} \rightarrow \sum_{w \in W} \left[ \sum_{p \in P_w} g_p(x^k)x_p - \sigma_w(y_w) \right], \quad (7)$$

где  $h_w(y_w) = \sigma'_w(y_w)$ . В дальнейшем предполагаем, что все функции  $\sigma_w$  удовлетворяют условию Липшица. Эти задачи могут быть расщеплены

на множество независимых подзадач, по одной для каждой О/D-пары. Алгоритм для их решения имеет следующую простую схему (см. [6]).

### Алгоритм 1

Для некоторой О/D-пары  $w \in W$  найдём множество кратчайших путей  $\bar{P}_w^k$  по значению функций  $g_p(x^k)$ . Обозначим  $\tilde{\lambda}_w = g_p(x^k)$ ,  $p \in \bar{P}_w^k$ . Тогда возможны следующие три случая.

- 1) Если  $h_w(\gamma_w) \leq \tilde{\lambda}_w$ , то положим  $\bar{y}_w^k = \gamma_w$ .
- 2) Если  $h_w(\Gamma_w) \geq \tilde{\lambda}_w$ , то положим  $\bar{y}_w^k = \Gamma_w$ .
- 3) В остальных случаях  $h_w(\Gamma_w) < \lambda_w < h_w(\gamma_w)$ ; тогда найдём величину спроса  $\bar{y}_w^k \in [\gamma_w, \Gamma_w]$  такую, что  $h_w(\bar{y}_w^k) = \tilde{\lambda}_w$ .

Произвольно распределим величину спроса  $\bar{y}_w^k$  среди путей  $p \in \bar{P}_w^k$  (можно назначить весь спрос на один путь). Положим  $\bar{x}_p^k = 0$  для любого  $p \in P_w \setminus \bar{P}_w^k$ .

Применение алгоритма 1 для всех О/D-пар даёт точное решение задач (6) и (7).

В [7] предложен вариант метода условного градиента с неточным вычислением направления спуска. В данном разделе, комбинируя эти два подхода, мы предлагаем вариант метода частичной линеаризации, в котором вспомогательная задача поиска направления решается неточно.

Последовательно применяя алгоритм 1 в итерационной точке  $(x^k, y^k)$ , постараемся найти «достаточно хорошее» направление спуска, удовлетворяющее условию

$$\sum_{w \in W^k} \left[ \sum_{p \in P_w} g_p(x^k)(x_p^k - \bar{x}_p^k) - h_w(y_w^k)(y_w^k - \bar{y}_w^k) \right] \geq \delta. \quad (8)$$

Здесь  $W^k \subset W$ ,  $\delta > 0$  — заданная точность. Если достаточно хорошее решение найти не удалось даже при  $W^k = W$ , то следует уменьшать величину  $\delta$ .

Заполним недостающие компоненты вектора  $(\bar{x}^k, \bar{y}^k)$  нулями:

$$\bar{x}_p^k = 0, p \in P_w, w \in W \setminus W^k, \quad \bar{y}_w^k = 0, w \in W \setminus W^k.$$

Сформулируем первый вариант метода частичной линеаризации с неточным решением подзадачи выбора направления для решения задачи потокового равновесия.

### Метод частичной линеаризации с неточным поиском направления 1 (PLI1)

ШАГ 0. Задать начальную точку  $u^0 \in U$ , последовательность  $\{\delta_l\} \searrow 0$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , числа  $\theta \in (0, 1)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ . Положить  $l = 1$ .

ШАГ 1. Положить  $k = 0$ ,  $v^k = u^{l-1}$ ,  $(x^k, y^k) = v^k$ .

ШАГ 2. Последовательно применяя алгоритм 1 для  $w \in W$ , найти подмножество O/D-пар  $W^k \subset W$  и вектор  $(\bar{x}^k, \bar{y}^k) \in U$  такие, что выполняется условие (8). Если это невозможно, то положить  $u^l = v^k$ ,  $l = l + 1$  и перейти к шагу 1.

ШАГ 3. Положить  $\bar{v}^k = (\bar{x}^k, \bar{y}^k)$ ,  $d^k = \bar{v}^k - v^k$ . Найти наименьшее неотрицательное целое  $m$  такое, что

$$\psi(v^k + \theta^m d^k) - \psi(v^k) \leq \beta \theta^m \langle \psi'(v^k), d^k \rangle. \quad (9)$$

Положить  $\lambda_k = \theta^m$ ,  $v^{k+1} = v^k + \lambda_k d^k$ ,  $k = k + 1$  и перейти к шагу 2.

Предлагаемый вариант метода имеет двухуровневую схему: на внутреннем уровне минимизируется значение целевой функции при заданном уровне погрешности  $\delta$ , а на внешнем — эта погрешность уменьшается. Сформулируем свойства сходимости предложенного варианта метода, следуя [7].

Легко увидеть, что процедура линейного поиска на шаге 3 метода PLI1 конечна (см. также лемму 4 из [7]). Действительно, предположим, что это не так. Тогда условие (9) никогда не будет выполнено. Получим

$$\theta^{-m} [\psi(v^k + \theta^m d^k) - \psi(v^k)] > \beta \langle \psi'(v^k), d^k \rangle$$

для всех  $m \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , имеем

$$\langle \psi'(v^k), d^k \rangle \geq \beta \langle \psi'(v^k), d^k \rangle,$$

откуда  $\langle \psi'(v^k), d^k \rangle \geq 0$ . Получили противоречие с условием (8).

Далее докажем конечность внутреннего процесса метода, представленного шагами 2–3 (см. также предложение 3 из [7]).

**Лемма 1.** Внутренний итерационный процесс метода PLI1 (шаги 2–3) конечен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что последовательность  $\{v^k\}$  бесконечна при некотором значении  $l$ . В силу (9) имеем

$$\psi^* \leq \psi(v^k), \quad \psi(v^{k+1}) \leq \psi(v^k) - \beta \delta_l \lambda_k,$$

поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ . Заметим, что последовательности  $\{v^k\}$  и  $\{\bar{v}^k\}$  ограничены, а значит, ограничена и последовательность  $\{d^k\}$ . Возьмём подпоследовательности  $\{v^{k_s}\}$ , сходящуюся к некоторой предельной точке  $\bar{v}$ , и  $\{d^{k_s}\}$ , сходящуюся к некоторой предельной точке  $\bar{d}$  при  $s \rightarrow \infty$ . В силу (8) получим

$$\langle \psi'(\bar{v}), \bar{d} \rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \langle \psi'(v^{k_s}), d^{k_s} \rangle \leq -\delta_l. \quad (10)$$

В то же время (9) не выполнено для величины шага  $\lambda_k/\theta$ . Для  $k = k_s$  имеем

$$(\lambda_{k_s}/\theta)^{-1}[\psi(v^{k_s} + (\lambda_k/\theta)d^{k_s}) - \psi(v^{k_s})] > \beta\langle\psi'(v^{k_s}), d^{k_s}\rangle.$$

Переходя к пределу при  $s \rightarrow \infty$ , получим

$$\langle\psi'(\bar{v}), \bar{d}\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (\lambda_{k_s}/\theta)^{-1}[\psi(v^{k_s} + (\lambda_k/\theta)d^{k_s}) - \psi(v^{k_s})] \geq \beta\langle\psi'(\bar{v}), \bar{d}\rangle,$$

следовательно,  $(1 - \beta)\langle\psi'(\bar{v}), \bar{d}\rangle \geq 0$ , что противоречит (10). Лемма 1 доказана.

**Теорема 1.** Последовательность  $\{u^l\}$ , полученная методом РЛИ1, имеет предельные точки, все они являются решениями вариационного неравенства (4). Если, кроме того, функция  $\psi$  выпукла, то они являются также решениями задачи оптимизации (5).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** (см. теорему 2 из [7]). Прежде всего отметим, что по построению последовательности  $\{u^l\}$  и  $\{\bar{u}^l\}$  ограничены и имеют предельные точки. Кроме того,  $\psi(u^*) \leq \psi(u^{l+1}) \leq \psi(u^l)$ , поэтому существует предел  $\lim_{l \rightarrow \infty} \psi(u^l) = \psi'$ . Возьмём любую предельную точку  $u' = (x', y')$  последовательности  $\{u^l\}$  и обозначим через  $\{u^{ls}\}$  подпоследовательность, сходящуюся к этой точке. Возьмём любую предельную точку  $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y})$  последовательности  $\{\bar{u}^l\}$ , обозначим через  $\{\bar{u}^{ls}\}$  подпоследовательность, сходящуюся к этой точке. Далее по построению в силу условия возврата с внутреннего уровня метода на внешний уровень на шаге 2 для всех  $l > 0$  имеем

$$\langle G(x^l), x^l - \bar{x}^l \rangle - \langle H(y^l), y^l - \bar{y}^l \rangle < \delta_l \quad (11)$$

для точки  $\bar{u}^l = (\bar{x}^l, \bar{y}^l)$ , которая является точным решением задачи (6) или (7), т. е.

$$\langle G(x^l), x - \bar{x}^l \rangle - \langle H(\bar{y}^l), y - \bar{y}^l \rangle \geq 0 \quad \forall (x, y) \in U. \quad (12)$$

В силу невозрастания функций  $h_w$  для всех  $w \in W$  из (11) получим

$$\langle G(x^l), x^l - \bar{x}^l \rangle - \langle H(\bar{y}^l), y^l - \bar{y}^l \rangle < \delta_l.$$

Суммируя два последних неравенства и переходя к пределу при  $s \rightarrow \infty$ , получим

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow \infty} [\langle G(x^{ls}), x - x^{ls} \rangle - \langle H(\bar{y}^{ls}), y - y^{ls} \rangle] \\ & = \langle G(x'), x - x' \rangle - \langle H(\bar{y}), y - y' \rangle \geq 0 \quad \forall (x, y) \in U. \end{aligned} \quad (13)$$

Покажем, что  $h_w(\bar{y}_w) = h_w(y'_w)$  для всех  $w \in W$ . Предположим, напротив, что  $h_w(\bar{y}_w) \neq h_w(y'_w)$  хотя бы для одной пары  $w \in W$ , при этом очевидно, что

$$\langle h_w(\bar{y}_w) - h_w(y'_w), \bar{y}_w - y'_w \rangle < 0 \quad (14)$$



для этой  $w \in W$ . Тогда, с одной стороны, переходя к пределу при  $s \rightarrow \infty$  в (11) и учитывая (14), имеем

$$\langle G(x'), x' - \bar{x} \rangle - \langle H(\bar{y}), y' - \bar{y} \rangle < 0.$$

С другой стороны, переходя к пределу при  $s \rightarrow \infty$  в (12) и полагая  $y = y'$ , получим

$$\langle G(x'), x' - \bar{x} \rangle - \langle H(\bar{y}), y' - \bar{y} \rangle \geq 0;$$

противоречие, поэтому  $h_w(\bar{y}_w) = h_w(y'_w)$  для всех  $w \in W$  и из (13) имеем

$$\langle G(x'), x - x' \rangle - \langle H(y'), y - y' \rangle \geq 0 \quad \forall (x, y) \in U.$$

Следовательно, точка  $u' = (x', y')$  является решением вариационного неравенства (4). Если функция  $\psi$  выпукла, то эта точка также является решением задачи оптимизации (5). Теорема 1 доказана.

В данном разделе для неточного поиска направления мы решали вспомогательные задачи не для всех О/D-пар  $w \in W$ . Метод частичной линеаризации позволяет применять и другие способы неточного поиска направления, один из которых будет рассмотрен в разд. 3.

### 3. Второй метод частичной линеаризации с неточным поиском направления

Выберем погрешность решения  $\varepsilon > 0$ .

**Алгоритм 2** отличается от алгоритма 1 только в следующем случае.

3) Как и ранее, имеем  $h_w(\Gamma_w) < \tilde{\lambda}_w < h_w(\gamma_w)$ . Найти такой отрезок  $[\bar{y}'_w, \bar{y}''_w]$ , что  $|\bar{y}''_w - \bar{y}'_w| < \varepsilon$  и  $h_w(y'') \leq \tilde{\lambda}_w \leq h(y')$ , после чего положить  $\bar{y}^k_w = (\bar{y}''_w + \bar{y}'_w)/2$ .

Обозначим через  $\bar{u}^k$  неточное решение задач (6) или (7), полученное алгоритмом 2. В дальнейшем будем обозначать точное решение этой задачи через  $\tilde{u}^k$ .

Поскольку направление спуска определяется неточно, нам нужен критерий, насколько хорошим является полученное направление. Для заданной погрешности  $\delta > 0$  будем использовать оценку, подобную (8):

$$\sum_{w \in W} \left[ \sum_{p \in P_w} g_p(x^k)(x_p^k - \bar{x}_p^k) - h_w(y^k)(y_w^k - \bar{y}_w^k) \right] \geq \delta. \quad (15)$$

Сформулируем соответствующий вариант метода частичной линеаризации.

### Метод частичной линеаризации с неточным поиском направления 2 (PLI2)

ШАГ 0. Выбрать начальную точку  $u^0 \in U$ , задать последовательности  $\{\delta_l\} \searrow 0$ ,  $\{\varepsilon_l\} \searrow 0$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , а также числа  $\theta \in (0, 1)$ ,  $\beta \in (0, 1)$ . Положить  $l = 1$ .

ШАГ 1. Положить  $k = 0$ ,  $v^k = u^{l-1}$ ,  $(x^k, y^k) = v^k$ .

ШАГ 2. Последовательно применяя алгоритм 2 для всех  $w \in W$ , найти точку  $\bar{v}^k = (\bar{x}^k, \bar{y}^k)$ . Если условие (15) при  $\delta = \delta_l$  не выполняется, то положить  $u^l = v^k$ ,  $\bar{u}^l = \bar{v}^k$ ,  $l = l + 1$  и перейти к шагу 1.

ШАГ 3. Положить  $d^k = \bar{v}^k - v^k$ . Найти минимальное неотрицательное целое  $m$ , удовлетворяющее условию

$$\psi(v^k + \theta^m d^k) - \psi(v^k) \leq \beta \theta^m \langle \psi'(v^k), d^k \rangle. \quad (16)$$

Положить  $\lambda_k = \theta^m$ ,  $v^{k+1} = v^k + \lambda_k d^k$ ,  $k = k + 1$  и перейти к шагу 2.

Из условия (15) следует, что

$$\langle \psi'(v^k), d^k \rangle \leq -\delta_l. \quad (17)$$

Как и ранее, легко показать, что процедура линейного поиска на шаге 3 метода PLI2 конечна. Действительно, предположим противное, при этом условие (16) никогда не выполнится. Тогда

$$\theta^{-m} [\psi(v^k + \theta^m d^k) - \psi(v^k)] > \beta \langle \psi'(v^k), d^k \rangle$$

для всех  $m \rightarrow \infty$ . Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , имеем

$$\langle \psi'(v^k), d^k \rangle \geq \beta \langle \psi'(v^k), d^k \rangle,$$

поэтому  $\langle \psi'(v^k), d^k \rangle \geq 0$ . Получили противоречие с условием (17).

Теперь докажем конечность внутреннего процесса (шаги 2–3).

**Лемма 2.** Внутренний итерационный процесс метода PLI2 (шаги 2–3) конечен.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что при некотором  $l$  последовательность  $\{v^k\}$  бесконечна. В силу (16) имеем

$$\psi^* \leq \psi(v^k), \quad \psi(v^{k+1}) \leq \psi(v^k) - \beta \delta_l \lambda_k,$$

поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0$ . Обе последовательности  $\{v^k\}$  и  $\{\bar{v}^k\}$  ограничены, поэтому ограничена и последовательность  $\{d^k\}$ . Возьмём подпоследовательности  $\{v^{k_s}\}$ , сходящуюся к некоторой точке  $\bar{v}$ , и  $\{d^{k_s}\}$ , сходящуюся к некоторой точке  $\bar{d}$  при  $s \rightarrow \infty$ . В силу (17) имеем

$$\langle \psi'(\bar{v}), \bar{d} \rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \langle \psi'(v^{k_s}), d^{k_s} \rangle \leq -\delta_l. \quad (18)$$

В то же время (16) не выполняется для величины шага  $\lambda_k/\theta$ . Для  $k = k_s$  имеем

$$(\lambda_{k_s}/\theta)^{-1}[\psi(v^{k_s} + (\lambda_k/\theta)d^{k_s}) - \psi(v^{k_s})] > \beta\langle\psi'(v^{k_s}), d^{k_s}\rangle.$$

Переходя к пределу при  $s \rightarrow \infty$ , получим

$$\langle\psi'(\bar{v}), \bar{d}\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} (\lambda_{k_s}/\theta)^{-1}[\psi(v^{k_s} + (\lambda_k/\theta)d^{k_s}) - \psi(v^{k_s})] \geq \beta\langle\psi'(\bar{v}), \bar{d}\rangle,$$

отсюда  $(1 - \beta)\langle\psi'(\bar{v}), \bar{d}\rangle \geq 0$ , что противоречит (18). Лемма 2 доказана.

**Теорема 2.** Последовательность  $\{u^l\}$ , полученная методом PLI2, имеет предельные точки, все они являются решениями вариационного неравенства (4). Если дополнительно функция  $\psi$  выпукла, то они также являются решениями задачи оптимизации (5).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Отметим вначале, что по построению последовательности  $\{u^l\}$  и  $\{\bar{u}^l\}$  ограничены и имеют предельные точки. Кроме того,  $\psi(u^*) \leq \psi(u^{l+1}) \leq \psi(u^l)$ , поэтому существует предел  $\lim_{l \rightarrow \infty} \psi(u^l) = \psi'$ .

Возьмём любую предельную точку  $u' = (x', y')$  последовательности  $\{u^l\}$ , обозначим через  $\{u^{l_s}\}$  подпоследовательность, сходящуюся к этой точке. Возьмём также любую предельную точку  $\bar{u} = (\bar{x}, \bar{y})$  последовательности  $\{\bar{u}^l\}$ , обозначим через  $\{\bar{u}^{l_s}\}$  подпоследовательность, сходящуюся к этой точке.

Введём следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \tilde{U}(u^l, \bar{u}^l) = \Big\{ (x, y) \in U \mid \\ \sum_{p \in P_w} g_p(x^l)(\bar{x}_p^l - x_p) - [\sigma_w(\bar{y}_w^l) - \sigma_w(y_w)] > 0 \ \forall w \in W \Big\}. \end{aligned}$$

Это множество точек, в которых значение целевой функции вспомогательной задачи (7) меньше, чем значение целевой функции для неточного решения  $\bar{u}^l = (\bar{x}^l, \bar{y}^l)$  этой задачи. Отметим, что

$$\begin{aligned} \max_{u \in U} \left( \sum_{p \in P_w} g_p(x^l)(\bar{x}_p^l - x_p) - [\sigma_w(\bar{y}_w^l) - \sigma_w(y_w)] \right) \\ = \sum_{p \in P_w} g_p(x^l)(\bar{x}_p^l - \tilde{x}_p^l) - [\sigma_w(\bar{y}_w^l) - \sigma_w(\tilde{y}_w^l)] \\ \leq C_1 \varepsilon_l / 2 + L_{\sigma_w} \varepsilon_l / 2 = (C_1 + L_{\sigma_w}) \varepsilon_l / 2, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\tilde{u}^l = (\tilde{x}^l, \tilde{y}^l)$  — точное решение задач (6) и (7),  $L_{\sigma_w}$  — константы Липшица функций  $\sigma_w$ ,  $w \in W$ ,  $C_1$  — константа такая, что  $g_p(x) \leq C_1$  для всех  $(x, y) \in U$ ,  $p \in P_w$ ,  $w \in W$ .

Далее, когда условие возврата с внутреннего уровня на внешний на шаге 2 выполнено (т. е. условие (15) нарушено), для всех  $l > 0$  имеем

$$\langle G(x^l), x^l - \bar{x}^l \rangle - \langle H(y^l), y^l - \bar{y}^l \rangle < \delta_l. \quad (20)$$

В силу невозрастания функций  $h_w$ ,  $w \in W$ , выполнено неравенство

$$\langle G(x^l), x^l - \bar{x}^l \rangle - \langle H(\bar{y}^l), y^l - \bar{y}^l \rangle < \delta_l.$$

С другой стороны, по построению

$$\langle G(x^l), x - \bar{x}^l \rangle - \langle H(\bar{y}^l), y - \bar{y}^l \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U \setminus \widetilde{U}(u^l, \bar{u}^l). \quad (21)$$

Объединяя последние два неравенства, для всех  $l > 0$  получим

$$\langle G(x^l), x - x^l \rangle - \langle H(\bar{y}^l), y - y^l \rangle \geq -\delta_l \quad \forall u \in U \setminus \widetilde{U}(u^l, \bar{u}^l). \quad (22)$$

Переходя в (22) к пределу при  $s \rightarrow \infty$ , в силу (19) имеем  $\widetilde{U}(u', \bar{u}) = \emptyset$ , поэтому

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow \infty} [\langle G(x^{ls}), x - x^{ls} \rangle - \langle H(y^{ls}), y - y^{ls} \rangle] \\ &= \langle G(x'), x - x' \rangle - \langle H(\bar{y}), y - y' \rangle \geq 0 \quad \forall (x, y) \in U. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь покажем, что  $h_w(\bar{y}_w) = h_w(y'_w)$  для всех  $w \in W$ . Предположим напротив, что  $h_w(\bar{y}_w) \neq h_w(y'_w)$  хотя бы для одной пары  $w \in W$ , при этом очевидно, что

$$\langle h_w(\bar{y}_w) - h_w(y'_w), \bar{y}_w - y'_w \rangle < 0 \quad (24)$$

для этой  $w \in W$ . Тогда, с одной стороны, переходя к пределу при  $s \rightarrow \infty$  в (20) и учитывая (24), имеем

$$\langle G(x'), x' - \bar{x} \rangle - \langle H(\bar{y}), y' - \bar{y} \rangle < 0.$$

С другой стороны, переходя к пределу при  $s \rightarrow \infty$  в (21) и полагая  $y = y'$ , получим

$$\langle G(x'), x' - \bar{x} \rangle - \langle H(\bar{y}), y' - \bar{y} \rangle \geq 0;$$

противоречие, поэтому  $h_w(\bar{y}_w) = h_w(y'_w)$  для всех  $w \in W$  и из (23) имеем

$$\langle G(x'), x - x' \rangle - \langle H(y'), y - y' \rangle \geq 0 \quad \forall (x, y) \in U.$$

Следовательно, точка  $u' = (x', y')$  является решением вариационного неравенства (4). Если функция  $\psi$  выпукла, то эта точка также является решением задачи оптимизации (5). Теорема 2 доказана.

В разд. 4 приводим результаты тестовых расчётов.

#### 4. Предварительные численные тесты

Было проведено численное сравнение двух модификаций метода частичной линеаризации с неточным поиском направления (PLI1 и PLI2) и обычной версии метода (PL).

Поскольку в первой модификации направление поиска на каждой итерации могло рассчитываться не по всему множеству O/D-пар, а только по некоторому подмножеству, сравнение производилось по общему количеству O/D-пар, участвовавших в расчётах направления, т. е. по сумме мощностей всех множеств  $W^k$ . Для заданного  $\Delta > 0$  критерий останова имеет вид  $\langle \psi'(u^k), u^k - z^k \rangle \leq \Delta$ , где  $z^k$  — решение задачи

$$\min_{z \in U} \rightarrow \langle \psi'(u^k), z \rangle.$$

Параметрами для неточного поиска длины шага были  $\theta = 0,5$  и  $\beta = 0,5$ .

Таблица 1

Результаты для примера 1

$\Delta$	PLI1		PL
	$\delta_l = 1/(l+1)$	$\delta_l = 5/(l+1)$	
0,1	19721	17346	$5747 \times 5$
0,05	42112	41318	$11644 \times 5$
0,01	207385	186861	$60149 \times 5$

**Пример 1.** Рассматривается сеть из [16], в которой все дуги считаются обходными (функция затрат по дуге зависит только от потока по этой дуге).

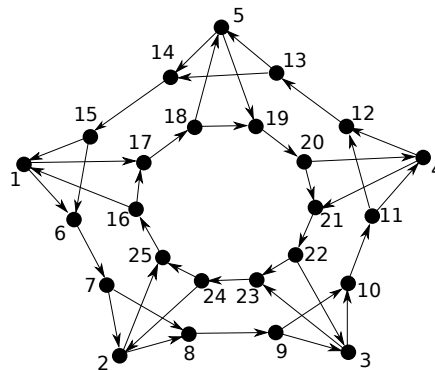


Рис. 1. Сеть 1 (Бертсекас — Гафни), 25 узлов, 5 O/D-пар: (1-4), (2-5), (3-1), (4-2), (5-3)

Функции затрат по дугам равны  $c_a(f_a) = 1 + 0,5f_a$ ,  $a \in A$ , функции допустимых затрат для О/D-пар суть  $h_w(y_w) = 30 - 0,5y_w$ ,  $w \in W$ . Нижние границы спроса  $\gamma_w$ ,  $w \in W$ , заданы вектором (2, 4, 6, 8, 10), верхние границы спроса  $\Gamma_w$ ,  $w \in W$ , все равны 50. Результаты расчётов для примера 1 представлены в табл. 1 при разных значениях точности  $\Delta$  и нескольких вариантах построения последовательности  $\{\delta_k\}$ .

Таблица 2

Результаты для примера 2

$\Delta$	PLI1		PL
	$\delta_l = 1/(l+1)$	$\delta_l = 5/(l+1)$	
0,1	15985	15254	8418×3
0,05	32580	30279	17575×3
0,01	150053	146650	88563×3

**Пример 2.** Сеть 2 — слегка изменённая сеть из [17]. О/D-пары соединены пунктиром. Нижние границы спроса  $\gamma_w$ ,  $w \in W$ , заданы вектором (5, 5, 5). Остальные параметры такие же, как в примере 1. Результаты расчётов для примера 2 представлены в табл. 2.

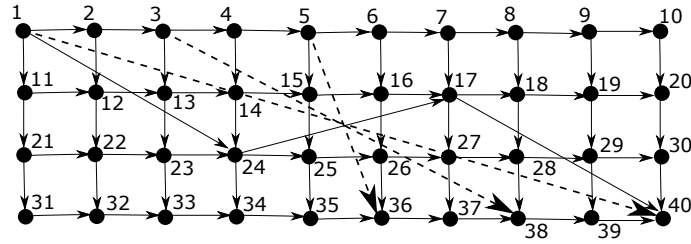


Рис. 2. Сеть 2 (Нагурней), 40 узлов,  
3 О/D-пары: (1–40), (3–38), (5–36)

**Пример 3.** Далее было проведено сравнение второй модификации метода частичной линеаризации (PLI2) с обычной версией метода (PL). Здесь функции допустимых затрат имеют вид  $h_w(y_w) = 30 - 0,5y_w - 0,5y_w^2$ ,  $w \in W$ , параметры метода равны  $\delta_1 = 10$ ,  $\delta_{l+1} = 0,9\delta_l$ ,  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\varepsilon_{l+1} = \max\{0,0001; 0,9\varepsilon_l\}$ , а точность вычислений  $\Delta = 0,1$ . Были проведены расчёты для двух предыдущих примеров сетей и для третьей случайно сгенерированной сети, содержащей 20 узлов, 108 дуг, 20 О/D-пар. Эта модификация сравнивается с базовым точным методом по общему количеству итераций и по среднему количеству вычислений значений функций допустимых затрат на одну итерацию. Результаты приведены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты для примера 3

	PLI2		PL	
	количество итераций	вычислений функций на итерацию	количество итераций	вычислений функций на итерацию
Сеть 1	4860	35	5057	48
Сеть 2	4500	36	4603	50
Сеть 3	45073	97	46200	135

Заключение

В работе сформулированы и обоснованы модификации метода частичной линеаризации для задачи потокового равновесия. Эти модификации характеризуются неточным вычислением направления спуска. Предварительные тестовые расчёты на модельных примерах показывают численную эффективность предложенных модификаций по сравнению с точной версией метода. В частности, эти модификации являются более гибкими в выборе параметров. По нашему мнению, данный подход является перспективным для дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Dafermos S.** Traffic equilibrium and variational inequalities // Transp. Sci. 1980. Vol. 14, No. 1. P. 42–54.
2. **Dafermos S.** The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand // Networks. 1982. Vol. 12, No. 1. P. 57–72.
3. **Nagurney A.** Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. 444 p.
4. **Patriksson M.** The traffic assignment problem: models and methods. Mineola, NY: Dover Publ., 2015. 240 p.
5. **Magnanti T. L.** Models and algorithms for predicting urban traffic equilibria // Transportation Planning Models. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 153–185.
6. **Konnov I. V., Pinyagina O. V.** Partial linearization method for network equilibrium problems with elastic demands // Discrete Optimization and Operations Research (DOOR 2016). Proc. 9th Int. Conf. (Vladivostok, Russia, Sep. 19–23, 2016). Heidelberg: Springer, 2016. P. 418–429. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).
7. **Konnov I. V.** Simplified versions of the conditional gradient method // Optimization. 2018. Vol. 67, No. 12. P. 2275–2290.
8. **Mine H., Fukushima M.** A minimization method for the sum of a convex function and a continuously differentiable function // J. Optim. Theor. Appl. 1981. Vol. 33. P. 9–23.

9. **Patriksson M.** Cost approximation: a unified framework of descent algorithms for nonlinear programs // *SIAM J. Optim.* 1998. Vol. 8. P. 561–582.
10. **Patriksson M.** Nonlinear programming and variational inequality problems: A unified approach. Dordrecht: Kluwer, 1999. 348 p.
11. **Bredies K., Lorenz D. A., Maass P.** A generalized conditional gradient method and its connection to an iterative shrinkage method // *Comput. Optim. Appl.* 2009. Vol. 42. P. 173–193.
12. **Scutari G., Facchinei F., Song P., Palomar D. P., Pang J.-S.** Decomposition by partial linearization: Parallel optimization of multi-agent systems // *IEEE Trans. Signal Process.* 2014. Vol. 62. P. 641–656.
13. **Konnov I. V.** On auction equilibrium models with network applications // *NETNOMICS: Economic Research and Electronic Networking*. 2015. Vol. 16, No. 1. P. 107–125.
14. **Pinyagina O. V.** On a network equilibrium problem with mixed demand // *Discrete Optimization and Operations Research (DOOR 2016)*. Proc. 9th Int. Conf. (Vladivostok, Russia, Sep. 19–23, 2016). Heidelberg: Springer, 2016. P. 578–583. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).
15. **Пинягина О. В.** Задача потокового равновесия со смешанным спросом // *Дискрет. анализ и исслед. операций*. 2017. Т. 24, № 4. С. 77–94.
16. **Bertsekas D. P., Gafni E. M.** Projection methods for variational inequalities with application to the traffic assignment problem // *Nondifferential and Variational Techniques in Optimization*. Heidelberg: Springer, 1982. P. 139–159.
17. **Nagurney A. B.** Comparative tests of multimodal traffic equilibrium methods // *Transp. Res., Part B: Methodological*. 1984. Vol. 18, No. 1. P. 469–485.

Коннов Игорь Васильевич  
Лайтинен Эрки  
Пинягина Ольга Владиславовна

Статья поступила  
23 апреля 2019 г.  
После доработки —  
5 ноября 2019 г.  
Принята к публикации  
27 ноября 2019 г.



## INEXACT PARTIAL LINEARIZATION METHODS FOR NETWORK EQUILIBRIUM PROBLEMS

I. V. Konnov<sup>1,a</sup>, E. Laitinen<sup>2,b</sup>, and O. V. Pinyagina<sup>1,c</sup>

<sup>1</sup> Kazan Federal University,  
18 Kremlyovskaya Street, 420008 Kazan, Russia

<sup>2</sup> Oulu University,  
1 Pentti Kaiteran Street, 90014 Oulu, Finland

E-mail: <sup>a</sup>konn-igor@ya.ru, <sup>b</sup>erkki.laitinen@oulu.fi,  
<sup>c</sup>olga.piniaguina@kpfu.ru

**Abstract.** We propose some simplified modifications of the partial linearization method for network equilibrium problems with mixed demand. In these modifications, the auxiliary direction choice problem is solved approximately. In the modifications, the basic convergence properties of the original method are preserved, while the inexact solution of the auxiliary problems reduces the computational efforts. Preliminary numerical tests show the advantages and efficiency of our approach as compared with the exact variant of the method. Tab. 3, illustr. 2, bibliogr. 17.

**Keywords:** network equilibrium problem, partial linearization method, descent direction, inexact solution.

## REFERENCES

1. S. Dafermos, Traffic equilibrium and variational inequalities, *Transp. Sci.* **14** (1), 42–54 (1980).
2. S. Dafermos, The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand, *Networks* **12** (1), 57–72 (1982).
3. A. Nagurney, *Network Economics: A Variational Inequality Approach* (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999).

---

The first author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 19–01–00431). The results of the first author in this work were obtained within the state assignment of the Ministry of Science and Education of Russia (Project 1.460.2016/1.4). The first and second authors were supported by grant 315471 from Academy of Finland.

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (1), 92–103 (2020), DOI 10.1134/S199047892001010X.

4. **M. Patriksson**, *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods* (Dover, Mineola, NY, 2015).
5. **T. L. Magnanti**, Models and algorithms for predicting urban traffic equilibria, in *Transportation Planning Models* (North-Holland, Amsterdam, 1984), pp. 153–185.
6. **I. Konnov** and **O. Pinyagina**, Partial linearization method for network equilibrium problems with elastic demands, in *Discrete Optimization and Operations Research (Proc. 9th Int. Conf. DOOR-2016, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016)* (Springer, Heidelberg, 2016), pp. 418–429.
7. **I. V. Konnov**, Simplified versions of the conditional gradient method, *Optimization* **67** (12), 2275–2290 (2018).
8. **H. Mine** and **M. Fukushima**, A minimization method for the sum of a convex function and a continuously differentiable function, *J. Optim. Theor. Appl.* **33**, 9–23 (1981).
9. **M. Patriksson**, Cost approximation: A unified framework of descent algorithms for nonlinear programs, *SIAM J. Optim.* **8**, 561–582 (1998).
10. **M. Patriksson**, *Nonlinear Programming and Variational Inequality Problems: A Unified Approach* (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999).
11. **K. Bredies**, **D. A. Lorenz**, and **P. Maass**, A generalized conditional gradient method and its connection to an iterative shrinkage method, *Comput. Optim. Appl.* **42**, 173–193 (2009).
12. **G. Scutari**, **F. Facchinei**, **P. Song**, **D. P. Palomar**, and **J.-S. Pang**, Decomposition by partial linearization: Parallel optimization of multi-agent systems, *IEEE Trans. Signal Process.* **62**, 641–656 (2014).
13. **I. V. Konnov**, On auction equilibrium models with network applications, *NETNOMICS: Econ. Res. Electron. Networking* **16** (1), 107–125 (2015).
14. **O. Pinyagina**, On a network equilibrium problem with mixed demand, *Discrete Optimization and Operations Research (Proc. 9th Int. Conf. DOOR-2016, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016)* (Springer, Heidelberg, 2016), pp. 578–583.
15. **O. V. Pinyagina**, The network equilibrium problem with mixed demand, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **24** (4), 77–94 (2017) [*J. Appl. Ind. Math.* **11** (4), 554–563 (2017)].
16. **D. P. Bertsekas** and **E. M. Gafni**, Projection methods for variational inequalities with application to the traffic assignment problem, in *Nondifferential and Variational Techniques in Optimization* (Springer, Heidelberg, 1982), pp. 139–159.
17. **A. B. Nagurney**, Comparative tests of multimodal traffic equilibrium methods, *Transp. Res., Part B: Methodological* **18** (1), 469–485 (1984).

Igor' V. Konnov  
 Erkki Laitinen  
 Olga V. Pinyagina

Received April 23, 2019  
 Revised November 5, 2019  
 Accepted November 27, 2019