ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2020. Т. 27, № 1. С. 127–140

УДК 519.85 DOI 10.33048/daio.2020.27.665

НАХОЖДЕНИЕ ПРИМЕРА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО РАСКРОЯ С МИНИМАЛЬНЫМИ РАЗМЕРАМИ, ДЛЯ КОТОРОГО НАРУШАЕТСЯ ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПРИ ОКРУГЛЕНИИ ВВЕРХ

А. В. Рипатти[a], *В. М. Картак*[b]

Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12, 450008 Уфа, Россия
E-mail: [a]`ripatti@inbox.ru`, [b]`kvmail@mail.ru`

Аннотация. Рассматривается известная одномерная задача раскроя с целью найти целочисленные примеры с минимальным размером материала L, для которых не выполняется свойство округления вверх. Разрывом целочисленности называется разница между точным решением примера задачи раскроя и решением её линейной релаксации, и пример задачи раскроя обладает свойством округления вверх, если его разрыв целочисленности меньше 1. Предлагается новый метод поиска всех примеров с максимальным разрывом целочисленности для фиксированных значений L, длин заготовок и оптимального целочисленного решения. Данный метод позволяет вычислительно доказать, что все примеры с $L \leqslant 15$ обладают свойством округления вверх. Также приведены несколько примеров с $L = 16$, не обладающих таким свойством, что даёт улучшение ранее известного результата $L = 18$. Табл. 2, библиогр. 14.

Ключевые слова: задача раскроя, свойство округления вверх, разрыв целочисленности.

Введение

В классической постановке одномерная задача раскроя материала формулируется следующим образом: некоторые одномерные объекты исходного материала длины L, например, стальные прутки или рулоны бумаги, необходимо разрезать на некоторое количество заготовок m типов так, чтобы минимизировать число разрезаемых единиц материала. Длина заготовки i-го типа задаётся значением l_i, при этом всего заготовок i-го типа требуется b_i штук.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–07–00895).

Далее используется сокращённое обозначение примера задачи раскроя $E = (L, l, b)$, где $l = (l_1, \ldots, l_m)^\top$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)^\top$. Без ограничения общности считаем, что все числа входных данных целые неотрицательные и $L \geqslant l_1 \geqslant \ldots \geqslant l_m > 0$.

Классический подход решения задачи раскроя основан на формулировке Гилмора и Гомори [4]. Каждое подмножество заготовок (которое называется *картой раскроя* или *паттерном*) обозначается вектором $a = (a_1, \ldots, a_m)^\top \in \mathbb{Z}_+^m$, где a_i означает число заготовок типа i в паттерне a. Паттерн a называется *допустимым*, если $a^\top l \leqslant L$. Через $P^f(L, l) = \{a \in \mathbb{Z}_+^m \mid a^\top l \leqslant L\}$ обозначим множество всех допустимых паттернов примера E. Для множества паттернов $P = \{a^1, \ldots, a^r\}$ введём матрицу $A(P)$ размера $m \times r$, столбцы которой заданы паттернами a^i. Тогда задача раскроя может быть сформулирована следующим образом:

$$z(E) := \sum_{i=1}^{r} x_i \to \min \quad \text{при } A(P^f(L,l))x = b,\ x \in \mathbb{Z}_+^r.$$

Обычно в качестве приближённого решения рассматривают *непрерывную релаксацию* задачи раскроя:

$$z_C(E) := \sum_{i=1}^{r} x_i \to \min \quad \text{при } A(P^f(L,l))x^C = b,\ x^C \in \mathbb{R}_+^r.$$

Здесь x называется *оптимальным целым решением*, x^C — *оптимальным непрерывным решением*, а $z(E)$ и $z_C(E)$ — *оптимальными значениями целевой функции*.

Разница $\Delta(E) = z(E) - z_C(E)$ называется *разрывом целочисленности* (gap) примера E. Практический опыт и большое количество вычислений показывают, что для большинства примеров разрыв целочисленности очень мал. Пример E имеет *свойство округления вверх* (integer round-up property, IRUP), если $\Delta(E) < 1$, иначе E называется *non*-IRUP *примером*. Данное обозначение введено Баумом и Троттером [1]. Постепенно наибольший известный разрыв целочисленности увеличивался [2, 3, 5, 9–12, 14]. Наибольший известный на текущий момент разрыв целочисленности равен $\frac{6}{5}$.

Первый известный non-IRUP пример с $L = 3\,397\,386\,355$, найденный Маркотте [9], был довольно большим. Филдхаус [2] привёл non-IRUP пример с $L = 30$. Пример с $L = 18$ в [6] был получен при помощи эквивалентных преобразований (см. также [7, 8]). В [13] дан пример с $L = 16$ и показано, что все примеры с $L \leqslant 10$ обладают свойством IRUP. В данной статье устанавливается точная граница минимально возможного L.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 приводятся некоторые теоретические выкладки, которые относятся к линейно-целочисленной

модели, которая описывается в разд. 2. В разд. 3 приводится улучшенный переборный алгоритм. Результаты вычислительного эксперимента описаны в разд. 4. Наконец, в разд. 5 подводится заключение.

1. Границы для $\Delta(E)$

Пусть дан пример $E = (L, l, b)$ и x^C — его оптимальное непрерывное решение. Пусть $\overline{x}$ — целая часть x^C, а x^* — дробная часть x^C, так что $x^C = \overline{x} + x^*$ и $0 \leqslant x_i^* < 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant r$. Кроме того, $z_C(E) = e^\top \overline{x} + e^\top x^*$, где $e = (1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}_+^m$. После замены b на $\overline{b} = b - A(P^f(L, l))\overline{x}$ получается *задача остатка* $\overline{E} = (L, l, \overline{b})$. Пример E называется *уменьшаемым*, если для него существует оптимальное непрерывное решение с ненулевой целой частью.

Лемма 1. *Дробная часть x^* является оптимальным решением примера $\overline{E}$.*

Доказательство. С одной стороны, $z_C(\overline{E}) \leqslant e^\top x^*$, поскольку x^* является допустимым решением для $A(P^f(L, l)) = \overline{b}$. С другой стороны, $z_C(E) \leqslant e^\top \overline{x} + z_C(\overline{E})$, что эквивалентно тому, что $z_C \geqslant e^\top x^*$. Отсюда $z_C(\overline{E}) = e^\top x^*$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. $\Delta(E) \leqslant \Delta(\overline{E})$.

Доказательство. $\Delta(E) = z(E) - z_C(E) \leqslant (e^\top \overline{x} + z(\overline{E})) - (e^\top \overline{x} + e^\top x^*) = z(\overline{E}) - z_C(\overline{E}) = \Delta(\overline{E})$. Лемма 2 доказана.

Пусть S — линейное m-мерное векторное пространство $\mathbb{R}_+^m$, а $\overline{S} \subset S$ — множество его целых точек (паттернов) с неотрицательными координатами $\mathbb{Z}_+^m$. Рассмотрим множество примеров $\mathbb{E}(L, l) = \{(L, l, b) \mid b \in \mathbb{Z}_+^m\}$, где значения L и l фиксированы. Между $\mathbb{E}(L, l)$ и $\overline{S}$ существует биекция, т. е. каждому паттерну $b \in \overline{S}$ можно поставить в соответствие пример $(L, l, b) \in \mathbb{E}(L, l)$. Кроме того, $P^f(L, l) \subset \overline{S}$ и для всех примеров $E \in \mathbb{E}(L, l)$ множество $P^f(L, l)$ одинаково, поскольку $P^f(L, l)$ зависит только от L и l.

Пусть $H = \{A(P^f(L, l))x \mid x \in \mathbb{R}_+^r, \sum x_i = 1\} \subset S$ — выпуклая оболочка, построенная на множестве допустимых паттернов $P^f(L, l)$. Тогда для любого $E = (L, l, b) \in \mathbb{E}(L, l)$ $z_C(E)$ — это минимальное значение $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такое, что $b \in \alpha H$ (здесь и далее при умножении множества векторов X на скаляр a получается новое множество $aX = \{ax \mid x \in X\}$).

Теорема 1. *Максимальный разрыв целочисленности $\Delta(E)$ возникает среди примеров $E \in \mathbb{E}(L, l)$ с $z_C(E) < m$.*

Доказательство. Рассмотрим пример $E \in \mathbb{E}(L, l)$ с $z_C(E) \geqslant m$. Тогда существует его оптимальное решение x^C с не более чем m ненулевыми коэффициентами. Тогда по принципу Дирихле $x_i^C \geqslant 1$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant r$. Значит, E уменьшаемый. Теорема 1 доказана.

Теорема 1 позволяет найти максимальное $\Delta(E)$ среди $E \in \mathbb{E}(L, l)$ за конечное время, поскольку множеством mH накрыто конечное число точек $\overline{S}$. Однако этот результат можно улучшить.

Теорема 2. *Максимальный разрыв целочисленности* $\Delta(E)$ *возникает среди примеров* $E \in \mathbb{E}(L, l)$ *с* $z(E) \leqslant m$.

Доказательство. Выпуклая оболочка H, построенная на множестве допустимых паттернов $P^f(L, l)$, является многогранником в m-мерном векторном пространстве S. Пусть F — множество фасетов H. Каждый фасет $f \in F$ — это вектор $(f_1, \ldots, f_m)^\top$, состоящий из m линейно независимых паттернов $f_i \in P^f(L, l)$ таких, что H лежит по одну сторону относительно m-мерной гиперплоскости p, проведённой через паттерны $f_1, \ldots, f_m$, при этом p не проходит через начало координат $\mathbf{0}$. Тогда каждый фасет $f \in F$ задаёт подпространство $S'(f) = \{x^\top f \mid x \in \mathbb{R}_+^m\} \subseteq S$, которое является невырожденным m-мерным конусом с вершиной в начале координат $\mathbf{0}$, при этом $\bigcup\limits_{f \in F} S'(f) = S$.

Рассмотрим один из фасетов $f = (f_1, \ldots, f_m)^\top \in F$ и соответствующий ему конус $S'(f)$. Каждой целой точке $b \in S'(f)$ соответствуют пример $E = (L, l, b)$ и единственный вектор x такой, что $x^\top f = b$, который можно преобразовать в оптимальное решение x^C примера E при помощи вставки нулевых элементов. Теперь рассмотрим m-мерный параллелепипед

$$S_1'(f) = \{x^\top f \mid x \in \mathbb{R}_+, \forall [1 \leqslant i \leqslant m](0 \leqslant x_i \leqslant 1)\} \subset S'(f).$$

Все паттерны b внутри $S_1'(f)$ соответствуют примерам E с $z(E) \leqslant m$ (действительно, $b_i \leqslant (\sum f_i)_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, а для $E = (L, l, \sum f_i)$ имеем $z(E) \leqslant m$, так как паттерны $f_1, \ldots, f_m$ соответствуют допустимому решению со значением целевой функции m), и все целые точки $S'(f)$ вне $S_1'(f)$ соответствуют уменьшаемым примерам. Теорема 2 доказана.

Заметим, что теорема 1 не влечёт теорему 2 автоматически, поскольку существуют примеры с $z(E) \geqslant m + 1$ и $z_C(E) < m$.

Используя описанную выше геометрическую интерпретацию, можно очертить некоторые дополнительные границы для $\Delta(E)$.

Лемма 3. *Для всех примеров* E *с* $z(E) \leqslant 2$ *выполняется* $\Delta(E) < 1$.

Таблица 1

Некоторые найденные non-IRUP примеры

L	k	l	b	$\Delta(E)$	
16	3	$(10, 8, 7, 3, 2)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 2)^\top$	1,00000	
16	4	$(10, 8, 7, 5, 3, 2)^\top$	$(2, 1, 1, 1, 1, 2)^\top$	1,00000	
18	3	$(10, 9, 6, 4)^\top$	$(1, 1, 2, 1)^\top$	1,00000	*
18	3	$(12, 9, 7, 4, 3)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 1)^\top$	1,00000	*
18	4	$(10, 9, 7, 6, 4)^\top$	$(1, 1, 2, 2, 2)^\top$	1,03333	
19	4	$(15, 9, 7, 6, 5, 3, 2)^\top$	$(1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)^\top$	1,00000	
20	3	$(12, 10, 9, 3, 2)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 3)^\top$	1,00000	
21	3	$(15, 8, 7, 5, 3, 2)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 1, 2)^\top$	1,00000	
22	3	$(16, 9, 7, 4, 3)^\top$	$(1, 1, 1, 2, 1)^\top$	1,00000	
22	4	$(18, 11, 10, 8, 7, 6, 3, 2)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^\top$	1,01666	
23	3	$(15, 11, 9, 5, 4)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 1)^\top$	1,00000	*
24	3	$(12, 9, 8, 5)^\top$	$(1, 1, 2, 2)^\top$	1,03333	
25	3	$(12, 11, 8, 7, 3)^\top$	$(1, 1, 2, 1, 1)^\top$	1,00000	
26	3	$(14, 13, 10, 6, 4)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 2)^\top$	1,03333	
27	3	$(13, 12, 9, 7, 3)^\top$	$(1, 1, 2, 1, 1)^\top$	1,02778	
28	3	$(19, 12, 7, 4, 3)^\top$	$(1, 1, 2, 1, 2)^\top$	1,02083	
29	3	$(14, 13, 10, 9, 8, 3)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1)^\top$	1,02273	
30	3	$(15, 10, 6)^\top$	$(1, 2, 4)^\top$	1,03333	**

Доказательство. Для $z(E) = 1$ и $\Delta(E) \geqslant 1$ единственный подходящий пример это $E = (L, l, \mathbf{0})$, но для него $z(E) = 0$. Для $z(E) = 2$ и $\Delta(E) \geqslant 1$ точка b, соответствующая примеру $E = (L, l, b)$, должна находиться внутри выпуклой оболочки H, но там все целые точки соответствуют примерам с $z(E) \leqslant 1$. Лемма 3 доказана.

Теорема 3. *Для всех примеров E с $m \leqslant 2$ выполняется $\Delta(E) < 1$. Для $m = 3$ существует пример E_0, для которого $\Delta(E_0) > 1$.*

Доказательство. Для $m \leqslant 2$ по теореме 2 максимальное значение $\Delta(E)$ достигается при $z(E) \leqslant 2$, что по лемме 3 даёт $\Delta(E) < 1$. Для $m = 3$ существует пример $E_0 = (132, (44, 33, 12)^\top, (2, 3, 6)^\top)$ с $\Delta(E_0) = 137/132$ (взят из [14]). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Для всех примеров E с $n = \sum b_i \leqslant 4$ имеем $\Delta(E) < 1$. Существует пример E_1 с $n = 5$, для которого $\Delta(E_1) = 1$.*

Доказательство. $z(E) \leqslant n$. Для $z(E) \leqslant 2$ требуемое выполняется по лемме 3, а для $z(E) = n$ имеем $l_1 + l_m > L$ и пример E уменьшаемый.

Осталось разобрать случай $n = 4$, $z(E) = 3$, когда $l_1 + l_m \leqslant L$. Без ограничения общности считаем, что $b_i = 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Пусть $k_i = \lfloor L/l_i \rfloor$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 4$. Тогда множество $P^f(L, l)$ состоит из паттернов вида

$$(1,0,0,\alpha),\ (0,1,0,\beta),\ (0,0,\gamma,\delta), \quad \text{где } \alpha,\beta,\gamma,\delta \leqslant k_4$$

(любые другие паттерны приводят к тому, что $z(E) \leqslant 2$). Теперь рассмотрим задачу, двойственную исходной:

$$\begin{gathered} \sum y_i \to \max, \\ A(P^f(L,l))^\top y \leqslant \mathbf{1}, \\ y \in \mathbb{R}^4_+. \end{gathered}$$

Одним из допустимых решений будет $y = (1, 1, 1/k_4, 0)$, что даёт нижнюю оценку на $z_C(E) \geqslant 2 + 1/k_4$, откуда $\Delta(E) < 1$.

Для $n = 5$ существует пример $E_1 = (18,\ (10, 9, 6, 4)^\top,\ (1, 1, 2, 1)^\top)$ такой, что $\Delta(E_1) = 1$ (см. табл. 1). Теорема 4 доказана.

2. Линейно-целочисленная модель

Рассмотрим пример $E = (L, l, b)$, в котором содержатся заготовки всевозможных длин: $l = (L, \ldots, 1)$. Если L фиксировано, то l тоже фиксирован. Матрица паттернов $A(P^f(L, l))$, зависящая только от L и l, тоже фиксирована. Количества заготовок каждого типа b будут рассматриваться как переменные.

Далее строится следующая линейно-целочисленная модель:

$$\begin{gathered} k - \sum x_i \to \max, \\ A(P^f(L,l))x = b, \qquad (1) \\ A(P^f(L,l))y = b, \qquad (2) \\ \sum y_i = k, \\ x \in \mathbb{R}^r_+,\ y \in \mathbb{Z}^r_+,\ b \in \mathbb{Z}^m_+, \end{gathered}$$

где k — фиксированное значение целевой функции задачи раскроя $z(E)$, x — оптимальное непрерывное решение, а y — оптимальное целое решение.

Нужно удостовериться, что k действительно является оптимальным значением целевой функции $z(E)$, т. е. значение вектора b таково, что для системы уравнений (2) решение с $\sum y_i < k$ невозможно. Для этого рассмотрим множество всех целых решений, составленных из $k - 1$ паттернов $P^f(L, l)$:

$$C_{k-1}(L,l) := \Big\{ A(P^f(L,l))y' \mid y' \in \mathbb{Z}^r_+,\ \sum y'_i = k-1 \Big\}.$$

Теперь нужно ввести дополнительные ограничения для того, чтобы вектор b не принадлежал $C_{k-1}(L,l)$. Для этого заведём множество булевых переменных w_i^u, которые обращаются в 1, если $b_i \leqslant u$:

$$b_i \geqslant u + 1 - w_i^u(u+1) \quad \forall 0 \leqslant u \leqslant (k-1)L,\ 1 \leqslant i \leqslant m,$$
$$w \in \mathbb{B}^{(k-1)L+1} \times \mathbb{B}^m,$$

где u — некоторая координата по оси i. Поскольку $a_i \leqslant L$ для любого $1 \leqslant i \leqslant m$ и $a \in P^f(L,l)$, то $c_i \leqslant (k-1)L$ для любого $1 \leqslant i \leqslant m$ и $c \in C_{k-1}(L,l)$.

Тогда для обеспечения условия $\sum y_i \geqslant k$ достаточно ввести следующие ограничения:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i^{c_i} \leqslant m - 1 \quad \forall c \in C_{k-1}(L,l).$$

Последнее ограничение работает следующим образом: для фиксированного $c \in C_{k-1}(L,l)$ если $b_i \leqslant c_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, то $\sum\limits_{i=1}^{m} w_i^{c_i} = m$, и существует целочисленное решение со значением целевой функции меньше k.

Для малых значений L и k предложенная модель достаточно мала, поэтому её можно решить за приемлемое время. Однако модель можно уменьшить согласно следующему наблюдению: l можно заменить на $(L-1,\dots,1)$, поскольку любое число дополнительных заготовок длины L не меняет значения $\Delta(E)$. Кроме того, модель можно дополнительно уменьшить, если вместо множества допустимых паттернов $P^f(E)$ рассматривать множество *неулучшаемых* допустимых паттернов

$$P_*^f(L,l) = \{a \in \mathbb{Z}_+^m \mid a^\top l \leqslant L,\ a^\top l + l_m > L\}, \tag{3}$$

при этом множество $C_{k-1}(L,l)$ значительно сократится. Также нужно дополнительно изменить равенства (1) и (2) на неравенства со знаком $\geqslant$.

С помощью данной модели, можно найти примеры с максимальным разрывом целочисленности для фиксированных L и k и с использованием теоремы 2 построить нижнюю оценку L non-IRUP примеров, решив модель для всех $k < L$ для некоторых фиксированных L.

3. Переборный алгоритм

Описанную в разд. 2 модель можно улучшить, рассмотрев структуру множества $C_{k-1}(L,l) \subset \mathbb{Z}_+^m$.

Любому $c \in C_{k-1}(L,l)$ соответствует пример $E = (L,l,c)$, для которого $z(E) \in \{0,\dots,k-1\}$ по построению множества $C_{k-1}(L,l)$. И напротив,

любому $c' \notin C_{k-1}(L,l)$, $c' \in \mathbb{Z}_+^m$, соответствует пример $E' = (L,l,c')$, для которого $z(E') \geqslant k$.

Для интересующих нас примеров $E = (L,l,b)$ с $z(E) = k$ и как можно большим значением $\Delta(E)$ выполняется следующее: $b \notin C_{k-1}(L,l)$ и для каждого $1 \leqslant i \leqslant m$ либо $b_i = 0$, либо $b - e^i \in C_{k-1}(L,l)$ (здесь и далее $e^i \in \mathbb{Z}_+^m$ — паттерн, для которого $e^i_i = 1$ и $e^i_j = 0$ для любого $1 \leqslant j \leqslant m$, $j \neq i$). Действительно, если для паттерна b' с $z((L,l,b')) = k$ указанные свойства не выполняются, можно, уменьшая координаты, «прижать» его к множеству $C_{k-1}(L,l)$, при этом значение $\Delta(E)$ не уменьшится. Назовём паттерны b с данными свойствами *граничными* (border), и пусть $B_k(L,l)$ — множество всех таких паттернов. По сути линейно-целочисленная модель из разд. 2 в качестве решения находит один из граничных паттернов, однако множество $B_k(L,l)$ там задано неявно. Далее множество паттернов $B_k(L,l)$ строится в явном виде.

Назовём паттерн b *чувствительным* (sensitive), если при увеличении числа заготовок любого типа на единицу оптимальное значение целой целевой функции увеличивается, т. е. $z((L,l,b)) < z((L,l,b+e^i))$ для любого $1 \leqslant i \leqslant m$. Пусть $S_{k-1}(L,l)$ — множество всех чувствительных паттернов b, для которых $z((L,l,b)) = k-1$. Очевидно, $S_{k-1}(L,l) \subseteq C_{k-1}(L,l)$. Тогда все паттерны из множества

$$B'_k(L,l) = \{s + e^m \mid s \in S_{k-1}(L,l)\}$$

граничные для $C_{k-1}(L,l)$. Действительно, для любого $s \in B'_k(L,l)$ имеем $z((L,l,s)) = k$, $s - e^m \in C_{k-1}(L,l)$ по построению, а для любого $1 \leqslant i < m$ имеем либо $s_i = 0$, либо $s - e^i \in C_{k-1}(L,l)$, поскольку

$$z((L,l,s-e^i)) \leqslant z((L,l,s-e^m)) = k-1$$

в силу $l_i \geqslant l_m$: заготовку l_i в $(L,l,s-e^m)$ можно заменить заготовкой l_m без увеличения оптимального значения целой целевой функции.

Все граничные паттерны b с $b_m > 0$ можно преобразовать в чувствительные паттерны путём уменьшения b_m на единицу. Таким образом, между паттернами $b \in B_k(L,l)$ с $b_m > 0$ и паттернами $s \in S_{k-1}(L,l)$ можно построить взаимно однозначное соответствие. Для паттернов $b \in B_k(L,l)$ с $b_m = 0$ задачу можно свести к $(m-1)$-мерной. Таким образом,

$$B_k(L,l) = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} \{(s_1,\ldots,s_{i-1},s_i+1,0,\ldots,0) \mid s \in S_{k-1}(L,(l_1,\ldots,l_i))\}.$$

Между элементами множеств $S_{k-1}(L,l)$ и $C_{k-1}(L,(l_1,\ldots,l_{m-1}))$ также можно построить взаимно однозначное соответствие. Действительно, для любого $s \in S_{k-1}(L,l)$ если отбросить из s последний элемент, то получится паттерн $s' \in C_{k-1}(L,(l_1,\ldots,l_{m-1}))$. И обратно, рассмотрим

паттерн $c \in C_{k-1}(L, (l_1, \dots, l_{m-1}))$, тогда паттерн $c' = (c_1, \dots, c_{m-1}, x)$ принадлежит $S_{k-1}(L, l)$ для некоторого $0 \leqslant x \leqslant \lfloor ((k-1)L - e^\top c)/l_m \rfloor$.

Для построения множества чувствительных паттернов $S_{k-1}(L, l)$ предлагается следующий алгоритм. Будем итеративно строить $S_i(L, l)$ для всех $1 \leqslant i < k$.

Очевидно, что $S_0(L, l) = \{\mathbf{0}\}$, а $S_1(L, l) = P_*^f(L, l)$ (3). Для перехода от $S_i(L, l)$ к $S_{i+1}(L, l)$ используется структура данных под названием ассоциативный массив, которая хранит множество пар «ключ, значение» (все ключи попарно различны) и позволяет делать следующие операции: добавить пару, найти значение по ключу (или определить, что пары с данным ключом нет), модифицировать значение по ключу и вернуть список всех сохранённых пар. Алгоритм выглядит следующим образом.

Создать пустой ассоциативный массив A.
for all $s \in S_i(L, l)$ **do**
    for all $a \in P_*^f(L, l)$ **do**
        $x \leftarrow (s_1 + a_1, \dots, s_{m-1} + a_{m-1})$
        $y \leftarrow s_m + a_m$
        if (в A нет ключа x) **then**
            добавить в A пару (x, y)
        else
            $A[x] \leftarrow \max(A[x], y)$
        end if
    end for
end for
$S_{i+1}(L, l) = \{(x_1, \dots, x_{m-1}, y) \mid (x, y) \in A\}$

Таким образом, для решения изначальной задачи достаточно построить множества $S_{k-1}(L, (L, \dots, i))$ для всех $1 \leqslant i \leqslant m$, на их основе сформировать множество граничных паттернов $B_k(L, (L, \dots, 1))$, после чего для каждого паттерна $b \in B_k(L, (L, \dots, 1))$ рассмотреть пример $E = (L, (L, \dots, 1), b)$ и для него найти значение $z_C(E)$. Максимум из значений $k - z_C(E)$ по всем таким примерам E будет искомым ответом.

Пространство перебора можно уменьшить, если рассматривать только чувствительные паттерны для $l = (L - i, \dots, i)$ для $1 \leqslant i \leqslant \lfloor L/2 \rfloor$. Кроме того, вектор длин заготовок $l = (L - 1, \dots, 1)$ можно не рассматривать, поскольку паттерны из $S_{k-1}(L, (L-1, \dots, 1))$ лежат в одной плоскости и соответствуют примерам E с $\Delta(E) = 0$, а соответствующие им граничные паттерны задают примеры E' с $\Delta(E') = (L - 1)/L < 1$.

Таблица 2

Результаты вычислительного эксперимента

L	$(L-1)/L$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6+$
4	0,75000	0,50000					
5	0,80000	0,50000	0,50000				
6	0,83333	0,66667	0,83333	0,83333			
7	0,85714	0,66667	0,75000	0,75000	0,75000		
8	0,87500	0,75000	0,87500	0,87500	0,87500	0,87500	
9	0,88889	0,75000	0,88889	0,88889	0,88889	0,88889	0,88889
10	0,90000	0,80000	0,90000	0,90000	0,90000	0,90000	0,90000
11	0,90909	0,80000	0,90909	0,91667	0,91667	0,91667	0,91667
12	0,91667	0,83333	0,91667	0,93750	0,93750	0,93750	0,93750
13	0,92308	0,83333	0,92308	0,93333	0,93333	0,93333	0,93333
14	0,92857	0,85714	0,92857	0,94444	0,94444	0,94444	0,94444
15	0,93333	0,85714	0,93333	0,96667	0,96667	0,96667	0,96667
16	0,93750	0,87500	0,93750	**1,00000**	**1,00000**	**1,00000**	
17	0,94118	0,87500	0,94118	0,96667	0,97222	0,97222	
18	0,94444	0,88889	0,94444	**1,00000**	**1,03333**	**1,03333**	
19	0,94737	0,88889	0,94737	0,97727	**1,00000**		
20	0,95000	0,90000	0,95000	**1,00000**	**1,00000**		
21	0,95238	0,90000	0,95238	**1,00000**	**1,00000**		
22	0,95455	0,90909	0,95455	**1,00000**	**1,01667**		
23	0,95652	0,90909	0,95652	**1,00000**			
24	0,95833	0,91667	0,95833	**1,03333**			
25	0,96000	0,91667	0,96000	**1,00000**			
26	0,96154	0,92308	0,96154	**1,03333**			
27	0,96296	0,92308	0,96296	**1,02778**			
28	0,96429	0,92857	0,96429	**1,02083**			
29	0,96552	0,92857	0,96552	**1,02273**			
30	0,96667	0,93333	0,96667	**1,03333**			

4. Вычислительные результаты

Описанные в разд. 2 и 3 алгоритмы были реализованы на C++ с использованием CPLEX 12.7. Программы были запущены на машине Intel Core i7-5820K 4,2 ГГц с 6 ядрами и 32 Гбайт оперативной памяти.

Результаты эксперимента для переборного алгоритма, описанного в разд. 3, приведены в табл. 2. Поскольку рассматривались лишь векторы l вида $(L-2, \ldots, 2)$ и меньше, перебор был запущен только для значений $k \leqslant L-3$. Случаи $L \leqslant 15$ были рассмотрены полностью, для всех них максимальный найденный разрыв целочисленности оказался меньше 1. Общее время вычислений для $L = 15$ составило около 18 часов. Для $L \leqslant 10$ результаты были проверены при помощи модели, описанной

в разд. 2, для $l = (L-1, \dots, 1)$, а для $L \leqslant 12$ — при помощи этой же модели, но в качестве l был рассмотрен вектор $(L-2, \dots, 2)$.

Для $16 \leqslant L \leqslant 30$ были проведены частичные вычисления, среди которых были найдены non-IRUP примеры. Некоторые из этих non-IRUP примеров приведены в табл. 1. Примеры, отмеченные звёздочкой, являются non-IRUP примерами для теоремы 4, а пример, отмеченный двумя звёздочками, является non-IRUP примером для теоремы 3.

5. Заключение

В статье предложена геометрическая интерпретация, в рамках которой очерчены границы параметров примеров задачи раскроя E, для которых $\Delta(E) < 1$. Таким образом, показано, что все примеры E с $m \leqslant 2$ и $n = \sum b_i \leqslant 4$ имеют свойство IRUP. Эти границы точны, так как для $m = 3$ и $n = 5$ приведены примеры E с $\Delta(E) \geqslant 1$.

Также предложены линейно-целочисленная модель и переборный алгоритм, позволяющие находить примеры с максимальным разрывом целочисленности, когда значения L, l и $k = z(E)$ фиксированы. Удалось вычислительно доказать, что все примеры задачи раскроя с $L \leqslant 15$ имеют свойство IRUP. В то же время, были найдены примеры E с $L = 16$, для которых $\Delta(E) = 1$, что даёт точную границу на минимальное значение L, для которого существуют non-IRUP примеры. Также в ходе вычислений были обнаружены non-IRUP примеры с $n = 5$, что позволило получить точную границу для минимального значения n, для которого существуют non-IRUP примеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Baum S., Trotter Jr L.** Integer rounding for polymatroid and branching optimization problems // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1981. Vol. 2, No. 4. P. 416–425.
2. **Fieldhouse M.** The duality gap in trim problems // SICUP Bull. 1990. Vol. 5, No. 4. P. 4–5.
3. **Gau T.** Counter-examples to the IRU property // SICUP Bull. 1994. Vol. 12, No. 3.
4. **Gilmore P. C., Gomory R. E.** A linear programming approach to the cutting-stock problem // Oper. Res. 1961. Vol. 9, No. 6. P. 849–859.
5. **Kartak V. M.** Sufficient conditions for the integer round-up property to be violated for the linear cutting stock problem // Autom. Remote Control. 2004. Vol. 65, No. 3. P. 407–412.
6. **Kartak V. M., Ripatti A. V., Scheithauer G., Kurz S.** Minimal proper non-IRUP instances of the one-dimensional cutting stock problem // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 187. P. 120–129.

7. **Kartak V. M., Ripatti A. V.** The minimum raster set problem and its application to the d-dimensional orthogonal packing problem // Eur. J. Oper. Res. 2018. Vol. 271, No. 1. P. 33–39.
8. **Kartak V. M., Ripatti A. V.** Large proper gaps in bin packing and dual bin packing problems // J. Global Optim. 2019. Vol. 74, No. 3. P. 467–476.
9. **Marcotte O.** An instance of the cutting stock problem for which the rounding property does not hold // Oper. Res. Lett. 1986. Vol. 4, No. 5. P. 239–243.
10. **Rietz J., Dempe S.** Large gaps in one-dimensional cutting stock problems // Discrete Appl. Math. 2008. Vol. 156, No. 10. P. 1929–1935.
11. **Rietz J., Scheithauer G., Terno J.** Families of non-IRUP instances of the one-dimensional cutting stock problem // Discrete Appl. Math. 2002. Vol. 121, No. 1. P. 229–245.
12. **Rietz J., Scheithauer G., Terno J.** Tighter bounds for the gap and non-IRUP constructions in the one-dimensional cutting stock problem // Optimization. 2002. Vol. 51, No. 6. P. 927–963.
13. **Ripatti A. V., Kartak V. M.** Bounds for non-IRUP instances of Cutting Stock Problem with minimal capacity // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (Rev. Sel. Pap. 18th Int. Conf., Ekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019). Cham: Springer, 2019. P. 79–85. (Commun. Comput. Inform. Sci.; Vol. 1090).
14. **Scheithauer G., Terno J.** About the gap between the optimal values of the integer and continuous relaxation one-dimensional cutting stock problem // Operations Research Proceedings 1991 (Pap. 20th Annual Meeting DGOR, Hohenheim, Germany, Sept. 4–6, 1991). Heidelberg: Springer, 1992. P. 439–444.

Рипатти Артём Валерьевич
Картак Вадим Михайлович

Статья поступила
27 июня 2019 г.

После доработки —
18 сентября 2019 г.

Принята к публикации
27 ноября 2019 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2020. Vol. 27, No. 1. P. 127–140

UDC 519.85 DOI 10.33048/daio.2020.27.665

CONSTRUCTING AN INSTANCE OF THE CUTTING STOCK PROBLEM OF MINIMUM SIZE WHICH DOES NOT POSSESS THE INTEGER ROUND-UP PROPERTY

A. V. Ripatti[a] and *V. M. Kartak*[b]

Ufa State Aviation Technical University,
12 Karl Marx Street, 450008 Ufa, Russia
E-mail: [a]`ripatti@inbox.ru`, [b]`kvmail@mail.ru`

Abstract. We consider the well-known one-dimensional cutting stock problem in order to find some integer instances with the minimal length L of a stock material for which the round-up property is not satisfied. The difference between the exact solution of an instance of a cutting stock problem and the solution of its linear relaxation is called the *integrality gap*. Some instance of a cutting problem has the *integer round-up property* (IRUP) if its integrality gap is less than 1. We present a new method for exhaustive search over the instances with maximal integrality gap when the values of L, the lengths of demanded pieces, and the optimal integer solution are fixed. This method allows us to prove by computing that all instances with $L \leqslant 15$ have the round-up property. Also some instances are given with $L = 16$ not-possessing this property, which gives an improvement of the best known result $L = 18$. Tab. 2, bibliogr. 14.

Keywords: cutting stock problem, integer round-up property, integrality gap.

REFERENCES

1. **S. Baum** and **L. Trotter, Jr.,** Integer rounding for polymatroid and branching optimization problems, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **2** (4), 416–425 (1981).
2. **M. Fieldhouse,** The duality gap in trim problems, *SICUP Bulletin* **5** (4), 4–5 (1990).

This research is supported by Russian Foundation for Basic Research (Project 19–07–00895).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (1), 196–204 (2020), DOI 10.1134/S1990478920010184.

3. **T. Gau,** Counterexamples to the IRU property, *SICUP Bulletin* **12** (3) (1994).
4. **P. C. Gilmore** and **R. E. Gomory,** A linear programming approach to the cutting-stock problem, *Oper. Res.* **9** (6), 849–859 (1961).
5. **V. M. Kartak,** Sufficient conditions for the integer round-up property to be violated for the linear cutting stock problem, *Automat. Remote Control* **65** (3), 407–412 (2004).
6. **V. M. Kartak, A. V. Ripatti, G. Scheithauer,** and **S. Kurz,** Minimal proper non-IRUP instances of the one-dimensional cutting stock problem, *Discrete Appl. Math.* **187**, 120–129 (2015).
7. **V. M. Kartak** and **A. V. Ripatti,** The minimum raster set problem and its application to the D-dimensional orthogonal packing problem, *Eur. J. Oper. Res.* **271** (1), 33–39 (2018).
8. **V. M. Kartak** and **A. V. Ripatti,** Large proper gaps in bin packing and dual bin packing problems, *J. Global Optim.* **74** (3), 467–476 (2019).
9. **O. Marcotte,** An instance of the cutting stock problem for which the rounding property does not hold, *Oper. Res. Lett.* **4** (5), 239–243 (1986).
10. **J. Rietz** and **S. Dempe,** Large gaps in one-dimensional cutting stock problems, *Discrete Appl. Math.* **156** (10), 1929–1935 (2008).
11. **J. Rietz, G. Scheithauer,** and **J. Terno,** Families of non-IRUP Instances of the one-dimensional cutting stock problem, *Discrete Appl. Math.* **121** (1), 229–245 (2002).
12. **J. Rietz, G. Scheithauer,** and **J. Terno,** Tighter bounds for the gap and non-IRUP constructions in the one-dimensional cutting stock problem, *Optimization* **51** (6), 927–963 (2002).
13. **A. V. Ripatti** and **V. M. Kartak,** Bounds for non-IRUP instances of cutting stock problem with minimal capacity, in *Communications in Computer and Information Science*, Vol. 1090: *Rev. Sel. Pap. 18th Int. Conf., Ekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019* (Springer, Cham, 2019), pp. 79–85.
14. **G. Scheithauer** and **J. Terno,** About the gap between the optimal values of the integer and continuous relaxation one-dimensional cutting stock problem, in *Operations Research (Proc. 20th Annual Meeting DGOR, Hohenheim, Germany, Sept. 4–6, 1991)* (Springer, Heidelberg, 1992), pp. 439–444.

Artem V. Ripatti
Vadim M. Kartak

Received June 27, 2019
Revised September 18, 2019
Accepted November 27, 2019