ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2020. Т. 27, № 2. С. 65–89

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2020.27.657

NP-ПОЛНОТА ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ ДОМИНИРУЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ В КЛАССЕ КУБИЧЕСКИХ ПЛАНАРНЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Я. А. Ловеров[a], *Ю. Л. Орлович*[b]

Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь

E-mail: [a]`loverov@bsu.by`, [b]`orlovich@bsu.by`

Аннотация. Известно, что как в классе кубических планарных графов, так и в классе кубических двудольных графов задача о независимом доминирующем множестве NP-полна. Вопрос о вычислительной сложности данной задачи в пересечении вышеупомянутых классов является открытым. В настоящей работе доказывается, что в классе кубических планарных двудольных графов задача о независимом доминирующем множестве также NP-полна. Табл. 1, ил. 7, библиогр. 19.

Ключевые слова: независимое доминирующее множество, кубический граф, планарный граф, двудольный граф, NP-полнота.

Введение

Начиная примерно с середины 1970-х гг. интенсивно исследуются вопросы вычислительной сложности и сложности аппроксимации задач, связанных с графовыми инвариантами, формулируемыми в терминах окружений множеств вершин. К таким инвариантам относятся параметры, так или иначе связанные с понятием доминирования в графах — числа доминирования [1], независимого доминирования [2], связного доминирования [3], тотального доминирования [4], ирридантности [5], совершенного доминирования [6], окрестностные числа [7, 8] и др. Указанные параметры доминирования широко изучаются в теории графов, находя практическое применение в задачах помехоустойчивого кодирования, составления оптимальных расписаний, задачах о покрытиях и размещениях. Теория доминирования инициировала исследование структурных

Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф20УКА–005).

и алгоритмических свойств графов и привела ко многим важным результатам в этом направлении. Достаточно подробный обзор результатов, полученных до 1998 г., представлен в [9, 10]. Современное состояние теории доминирования отражено в [11–14].

Целью статьи является ответ на остававшийся до настоящего времени открытым [14] вопрос о сложностном статусе задачи о независимом доминирующем множестве в классе кубических планарных двудольных графов, а именно доказательство её NP-полноты в указанном классе.

Напомним, что подмножество вершин графа называется *доминирующим*, если любая не принадлежащая ему вершина графа смежна хотя бы с одной вершиной, содержащейся в этом подмножестве. Доминирующее множество называется *минимальным*, если никакое его собственное подмножество не является доминирующим.

С понятием доминирования тесно связано другое фундаментальное понятие теории графов — независимость. *Независимым множеством* графа называется множество его попарно не смежных вершин. Независимое множество называется *максимальным*, если оно не является собственным подмножеством другого независимого множества. Независимое множество наибольшей мощности в графе G называется *наибольшим* независимым множеством графа, а его мощность — *числом независимости* графа и обозначается через $\alpha(G)$. Подмножество вершин графа называется *независимым доминирующим*, если оно является одновременно как независимым, так и доминирующим множеством этого графа.

Нетрудно показать, что для графа G и множества $I \subseteq V(G)$ следующие утверждения эквивалентны [15, 16]:

(1) I — максимальное независимое множество графа G;

(2) I — независимое доминирующее множество графа G;

(3) I — одновременно максимальное независимое и минимальное доминирующее множество графа G.

Таким образом, независимые доминирующие множества вершин графа — это его максимальные независимые множества. Наименьшая из мощностей независимых доминирующих (т. е. максимальных независимых) множеств называется *числом независимого доминирования* графа G и обозначается через $i(G)$.

Рассмотрим следующие задачи распознавания.

Независимое множество. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что $\alpha(G) \geqslant k$?

Независимое доминирующее множество. Даны граф G и целое число k. Верно ли, что $i(G) \leqslant k$? Другими словами, существует ли такое независимое доминирующее (т. е. максимальное независимое) множество I графа G, что $|I| \leqslant k$?

Известно, что задачи Независимое множество и Независимое доминирующее множество NP-полны в общем случае [17] и остаются NP-полными для многих узких классов графов [9,10,14]. В частности, обе эти задачи NP-полны в классе кубических планарных графов [17,18]. Известно также, что в классе кубических двудольных графов задача Независимое доминирующее множество NP-полна [14], в то время как в классе всех двудольных графов задача Независимое множество разрешима за полиномиальное время [17]. Вопрос о вычислительной сложности задачи Независимое доминирующее множество для пересечения классов кубических планарных графов и кубических двудольных графов, т. е. для класса кубических планарных двудольных графов, был поставлен в [14]. В настоящей статье мы приводим полиномиальное сведéние NP-полной задачи Независимое множество в классе кубических планарных графов к задаче Независимое доминирующее множество в классе кубических планарных двудольных графов и тем самым доказываем NP-полноту последней. Краткое описание ключевых идей доказательства и структуры самой статьи приводится в разд. 1.

Теоретико-графовые понятия и обозначения, не оговорённые специально, можно найти в [19]. Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Пусть дан граф $G = (V(G), E(G))$ с множествами вершин $V(G)$ и рёбер $E(G)$. Число |V(G)| вершин графа G называется его *порядком* и обозначается через $|G|$.

Множество вершин графа G, смежных с вершиной v, называется *окружением вершины* v в графе G и обозначается через $N_G(v)$. *Замкнутым окружением вершины* v в графе G называется множество $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Число $|N_G(v)|$ — *степень вершины* v в графе G. Граф называется *кубическим* (или 3-*регулярным*), если степени всех его вершин равны трём. Максимальная и минимальная из степеней вершин графа G обозначаются через $\Delta(G)$ и $\delta(G)$ соответственно. В вышеперечисленных обозначениях будем опускать индекс или аргумент G всякий раз, когда граф ясен из контекста.

Подграф графа G, порождённый множеством вершин $X \subseteq V(G)$, обозначается через $G(X)$. Положим $G - X = G(V(G) \setminus X)$. Относительно вершины $v \in V(G)$ и множества $X \subseteq V(G)$ будем говорить, что v *не задоминирована* (множеством X), если $v \notin X$ и v не смежна ни с одной вершиной из X.

1. Основной результат и идея его доказательства

Основным результатом, доказательству которого посвящена данная работа, является

Теорема 1. *В классе кубических планарных двудольных графов задача* Независимое доминирующее множество NP-*полна.*

Этот результат мы получаем полиномиальным сведéнием к исследуемой задаче (которая, очевидно, принадлежит классу NP) задачи Независимое множество, рассматриваемой в классе кубических планарных графов и являющейся в нём NP-полной [17]. Указанное сведéние происходит в два этапа, описание и доказательство корректности которых производятся в разд. 2–4 статьи.

В разд. 2 описывается замена каждой вершины произвольного кубического плоского графа G на введённый нами планарный двудольный граф Q (рис. 3). Получаемый в результате такой замены граф H_G оказывается планарным и двудольным. После ряда вспомогательных утверждений 1–4, касающихся свойств независимых доминирующих множеств графа H_G, устанавливается непосредственная связь (утверждение 5) между числом независимого доминирования этого графа и числом независимости исходного графа G, а именно

$$i(H_G) = 15 \cdot |G| - \alpha(G). \tag{1}$$

Отметим, что граф H_G не кубический ($\Delta(H_G) = 3$ и $\delta(H_G) = 2$), но в то же время существует разбиение множества его вершин степени два на $13 \cdot |G|$ пар смежных вершин.

В разд. 3 вводится планарный двудольный граф R порядка 8, для которого $\Delta(R) = 3$ и $\delta(R) = 2$ (рис. 5), и доказываются вспомогательные утверждения 6–9, связанные с независимыми доминирующими множествами этого графа. В частности, устанавливается, что $i(R) = 2$ (утверждение 7). Далее описывается операция «навешивания» графа R на пару смежных вершин (или, что то же самое, на ребро) произвольного графа F. При этом в получаемом в результате такого преобразования графе F' степени этих смежных вершин увеличиваются на 1, а числа $i(F')$ и $i(F)$ оказываются связаны следующим образом (утверждение 10):

$$i(F') = i(F) + i(R) = i(F) + 2. \tag{2}$$

Кроме того, отмечается, что двудольность графа F влечёт двудольность графа F'.

В разд. 4 операция навешивания графа R, введённая в разд. 3, используется для модификации графа H_G, конструкция которого описана в разд. 2. Говоря точнее, производятся навешивания графа R на каждую из $13\cdot|G|$ пар смежных вершин степени два графа H_G, в результате которых оказывается построен кубический планарный двудольный граф M_G. Согласно (2) для числа независимого доминирования графа M_G выполнено

$$i(M_G) = i(H_G) + 13 \cdot |G| \cdot i(R) = i(H_G) + 26 \cdot |G|.$$

Далее, используя (1), окончательно получаем соотношение

$$i(M_G) = 41 \cdot |G| - \alpha(G),$$

которое и завершает наше полиномиальное свéдение.

2. Специальные планарные двудольные графы с $\Delta = 3$ и $\delta = 2$

Пусть G — произвольный кубический плоский граф. Проведём над ним следующие преобразования.

Преобразование 1. Производится замена вершин и рёбер графа G, изображённая на рис. 1.

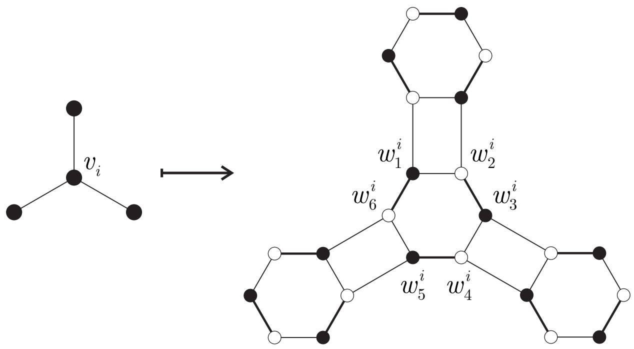

Рис. 1. Замена вершин и рёбер графа G

Каждая вершина v_i графа G заменяется простым циклом длины 6, который будем изображать на плоскости в виде выпуклого шестиугольника. Вершины этого цикла будем обозначать через w_1^i, w_2^i, …, w_6^i в порядке его обхода по часовой стрелке. Кроме того, будем полагать, что вершины w_1^i, w_3^i и w_5^i окрашены в чёрный цвет, а вершины w_2^i, w_4^i и w_6^i — в белый.

Одновременно с этим тройка рёбер, инцидентных вершине v_i, заменяется тремя парами рёбер так, чтобы выполнялись следующие условия:

(а) оба ребра каждой пары смежны ровно с одним из рёбер $w_1^i w_2^i$, $w_3^i w_4^i$, $w_5^i w_6^i$ и не смежны друг с другом;

(б) каждое из рёбер $w_1^i w_2^i$, $w_3^i w_4^i$, $w_5^i w_6^i$ смежно с обоими рёбрами ровно одной пары;

(в) каждое ребро из пары инцидентно вершинам разного цвета.

Нетрудно видеть, что граф, полученный в результате такого преобразования, кубический и имеет плоскую укладку, т. е. планарный. Кроме того, по построению он 2-раскрашиваемый, а следовательно, двудольный.

Преобразование 2. Каждое из рёбер $w_j^i w_{j+1}^i$, где $j = 1, 2, \ldots, 6$, подразбивается двумя новыми вершинами h_j^i и g_{j+1}^i, т. е. удаляется ребро $w_j^i w_{j+1}^i$ и добавляются три новых ребра $w_j^i h_j^i$, $h_j^i g_{j+1}^i$ и $g_{j+1}^i w_{j+1}^i$. Здесь и далее будем считать, что все нижние индексы в обозначениях вершин w, h, g рассматриваются по модулю длины цикла, т. е. по модулю 6, и принадлежат множеству наименьших положительных вычетов по этому модулю, т. е. множеству $\{1, 2, \ldots, 6\}$.

Данное преобразование, очевидно, сохраняет свойства планарности и двудольности.

Преобразование 3. Каждое ребро $h_1^i g_2^i$ заменяется конструкцией, изображённой на рис. 2. Иными словами, из графа удаляется ребро $h_1^i g_2^i$ и производится объединение полученного графа с графом, изображённым на рис. 2.

Это преобразование, как нетрудно убедиться, также сохраняет свойства планарности и двудольности.

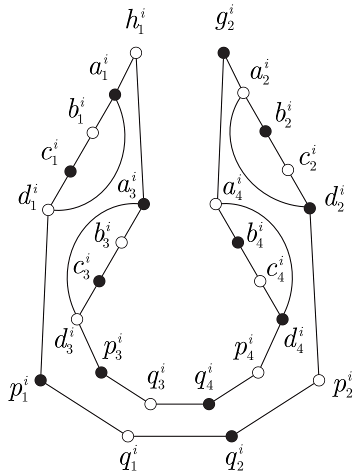

Рис. 2. Конструкция, которой заменяется каждое ребро $h_1^i g_2^i$

Граф, полученный в результате данных преобразований кубического плоского графа G, будем обозначать через H_G. Как уже было отмечено, он планарный и двудольный. Кроме того, каждая его вершина имеет степень либо три, либо два.

Отметим, что вершины v_i графа G биективно соответствуют подграфам Q^i графа H_G, каждый из которых изоморфен графу Q, изображённому на рис. 3. Каждый такой подграф Q^i, где $V(Q^i) = \{u^i \mid u \in V(Q)\}$ и $E(Q^i) = \{u^i v^i \mid uv \in E(Q)\}$, будем называть *составной вершиной* графа H_G. Две составные вершины Q^i и Q^j графа H_G *соседние*, если соответствующие им вершины v_i и v_j смежны в графе G.

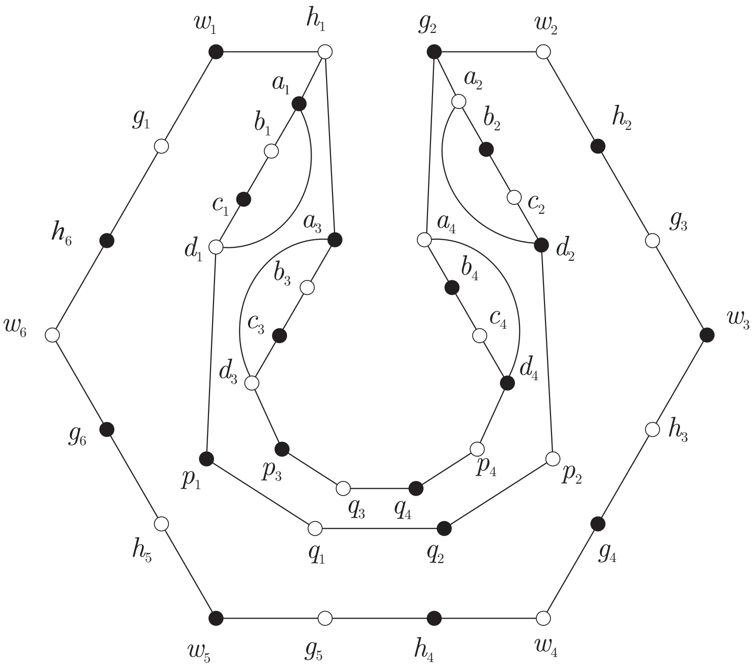

Рис. 3. Граф Q

Пусть Q — произвольная составная вершина графа H_G. Выделим следующие подмножества множества $V(Q)$:

$Z = \{g_i, w_i, h_i \mid 3 \leqslant i \leqslant 6\}$,

$Z' = \{g_1, h_2, g_i, w_i, h_i \mid 3 \leqslant i \leqslant 6\}$,

$B_i = \{b_i, c_i, d_i, p_i, q_i\}$, где $1 \leqslant i \leqslant 4$,

$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$,

$A_1 = \{h_1, a_1, a_3\}$,

$A_2 = \{g_2, a_2, a_4\}$,

$W = \{w_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 6\}$,

$\mathcal{F} = \{w_i, b_j, p_j \mid 1 \leqslant i \leqslant 6,\ 1 \leqslant j \leqslant 4\}$,

$\mathcal{E} = \{g_2, h_i, b_j, p_j \mid 1 \leqslant i \leqslant 6,\ 1 \leqslant j \leqslant 4\}$.

Далее докажем (утверждения 1–3 и следствие 1) некоторые свойства введённых подмножеств и, как следствие, установим (утверждение 4 и следствие 2) важные локальные свойства наименьших независимых доминирующих множеств графа H_G. В первую очередь, нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1 [10, с. 10]**.** *Пусть P_n — простая цепь порядка n. Тогда*

$$i(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Лемма 2. *Пусть $\{v_i \mid i = 1, 2, \ldots, 12\}$ и $\{v_i v_{i+1} \mid i = 1, 2, \ldots, 11\}$ — множество вершин и множество рёбер простой цепи P_{12} соответственно (рис. 4), а X — непустое подмножество множества $\{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$. Тогда $i(P_{12} - X) = 5$.*

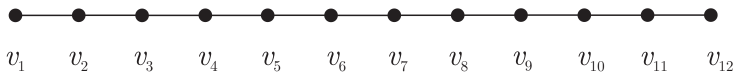

Рис. 4. Простая цепь P_{12}

Доказательство. В результате удаления из графа P_{12} любого непустого подмножества вершин $X \subseteq \{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$ получается несвязный граф, связными компонентами которого являются простые цепи. Поэтому число независимого доминирования графа $P_{12} - X$ есть не что иное, как сумма чисел независимого доминирования его компонент. Учитывая симметрию, сведём в табл. 1 все варианты графов $P_{12} - X$ и, воспользовавшись леммой 1, вычислим для них $i(P_{12} - X)$.

Таблица 1

Подмножества X и числа $i(P_{12} - X)$

Множество вершин X	Симметричное множество	Компоненты графа $P_{12} - X$	Сумма чисел независимого доминирования компонент графа $P_{12} - X$	$i(P_{12}-X)$
$\{v_2\}$	$\{v_{11}\}$	P_1, P_{10}	$1+4$	5
$\{v_5\}$	$\{v_8\}$	P_4, P_7	$2+3$	5
$\{v_2, v_5\}$	$\{v_8, v_{11}\}$	P_1, P_2, P_7	$1+1+3$	5
$\{v_2, v_8\}$	$\{v_5, v_{11}\}$	P_1, P_5, P_4	$1+2+2$	5
$\{v_2, v_{11}\}$	—	P_1, P_8, P_1	$1+3+1$	5
$\{v_5, v_8\}$	—	P_4, P_2, P_4	$2+1+2$	5
$\{v_2, v_5, v_8\}$	$\{v_5, v_8, v_{11}\}$	P_1, P_2, P_2, P_4	$1+1+1+2$	5
$\{v_2, v_5, v_{11}\}$	$\{v_2, v_8, v_{11}\}$	P_1, P_2, P_5, P_1	$1+1+2+1$	5
$\{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$	—	P_1, P_2, P_2, P_2, P_1	$1+1+1+1+1$	5

По табл. 1 нетрудно убедиться в том, что, каким бы ни было непустое подмножество вершин $X \subseteq \{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$, выполнено $i(P_{12} - X) = 5$. Лемма 2 доказана.

Покажем, что множество $Z = \{g_i, w_i, h_i \mid 3 \leqslant i \leqslant 6\} \subseteq V(Q)$ обладает следующим свойством.

Утверждение 1. *Пусть D — произвольное независимое доминирующее множество графа H_G и Q — произвольная составная вершина этого графа. Пусть далее $\{w_1, w_2\} \subseteq D \cap V(Q)$ и $X = \{w_3, w_4, w_5, w_6\} \setminus D \neq \varnothing$. Тогда $|D \cap Z| \geqslant 5$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $Z \setminus X$. Заметим, что

$$D \cap (Z \setminus X) = (D \cap Z) \setminus (D \cap X) = D \cap Z,$$

поскольку $D \cap X = \varnothing$.

Покажем, что множество $D \cap (Z \setminus X) = D \cap Z$ независимое доминирующее в порождённом подграфе $H_G(Z \setminus X)$. Действительно, оно независимо, поскольку D — независимое множество в графе H_G. Предположим, что оно не доминирующее, т. е. существует такая вершина $u \in Z \setminus X$, что $u \notin D \cap (Z \setminus X)$ (а значит, $u \notin D$) и u не смежна ни с одной вершиной из $D \cap Z$.

Поскольку D — доминирующее множество в графе H_G, в этом графе найдётся вершина $v \in D$, смежная с вершиной u. Из сделанного предположения следует, что $v \notin D \cap Z$, поэтому $v \notin Z$.

Заметим, что u принадлежит либо множеству $\{w_3, w_4, w_5, w_6\}$, либо множеству $\{g_3, h_6\}$, поскольку в графе H_G только элементы указанных множеств являются вершинами из Z, которые смежны с вершинами из $V(H_G) \setminus Z$. Однако случай $u \in \{w_3, w_4, w_5, w_6\}$ невозможен. Действительно, так как $u \notin D$, при $u \in \{w_3, w_4, w_5, w_6\}$ имели бы $u \in X$, откуда следовало бы, что $u \notin Z \setminus X$, но $u \in Z \setminus X$ по выбору вершины u. Если же $u \in \{g_3, h_6\}$, то $v \in \{g_1, h_2\}$, что также невозможно, поскольку $v \in D$, а вершины g_1 и h_2 в графе H_G смежны соответственно с вершинами w_1 и w_2, принадлежащими независимому множеству D. Таким образом, заключаем, что исходное предположение неверно, а значит, множество $D \cap Z$ доминирующее в подграфе $H_G(Z \setminus X)$, а поскольку оно независимое, то $D \cap Z$ — независимое доминирующее множество в подграфе $H_G(Z \setminus X)$.

Поскольку множество Z порождает в графе Q (и графе H_G) простую цепь P_{12} с множеством вершин $\{g_i, w_i, h_i \mid 3 \leqslant i \leqslant 6\}$, множество $Z \setminus X$ порождает подграф, полученный удалением из этой цепи непустого подмножества вершин $X \subseteq \{w_3, w_4, w_5, w_6\}$. Из леммы 2 следует, что любое независимое доминирующее множество такого графа имеет мощность не меньше пяти, поэтому $|D \cap Z| \geqslant 5$. Утверждение 1 доказано.

Далее для множества $Z' = \{g_1, h_2, g_i, w_i, h_i \mid 3 \leqslant i \leqslant 6\} \subseteq V(Q)$ докажем следующее свойство.

Утверждение 2. *Пусть D — произвольное независимое доминирующее множество графа H_G и Q — произвольная составная вершина этого графа. Тогда если $w_1 \notin D$ или $w_2 \notin D$, то $|D \cap Z'| \geqslant 5$.*

Доказательство. Пусть $w_1 \notin D$. Рассмотрим в графе Q попарно не пересекающиеся замкнутые окружения $N[g_i]$ вершин g_i, где $1 \leqslant i \leqslant 6$, $i \neq 2$. В каждом из этих множеств должна содержаться хотя бы одна вершина, принадлежащая множеству D (в противном случае хотя бы одна из указанных вершин g_i не задоминирована). Однако $w_1 \notin D$, поэтому утверждение о том, что в каждом множестве содержится некоторая вершина из D, верно и для следующего набора множеств: $N[g_1] \setminus \{w_1\}$, $N[g_3]$, $N[g_4]$, $N[g_5]$ и $N[g_6]$. Поскольку множества из этого набора попарно не пересекаются и их объединение совпадает с Z', заключаем, что $|D \cap Z'| \geqslant 5$.

Случай $w_2 \notin D$ симметричен случаю $w_1 \notin D$ с точностью до замены совокупности $\{N[g_i] \mid 1 \leqslant i \leqslant 6,\ i \neq 2\}$ попарно не пересекающихся множеств $N[g_i]$ совокупностью $\{N[h_j] \mid 2 \leqslant j \leqslant 6\}$ множеств $N[h_j]$ с тем же свойством. Утверждение 2 доказано.

Покажем, что каждое из множеств $B_i = \{b_i, c_i, d_i, p_i, q_i\} \subseteq V(Q)$, где $1 \leqslant i \leqslant 4$, обладает следующим свойством.

Утверждение 3. *Пусть D — произвольное независимое доминирующее множество графа H_G и Q — произвольная составная вершина этого графа. Тогда для любого $i = 1, 2, 3, 4$ выполнено неравенство $|D \cap B_i| \geqslant 2$.*

Доказательство. Для любого $i = 1, 2, 3, 4$ возможны два случая отношений между d_i и D: либо $d_i \in D$, либо $d_i \notin D$.

Если $d_i \in D$, то $b_i \in D$ (в противном случае вершина b_i не задоминирована), поэтому $|D \cap B_i| \geqslant 2$.

Если $d_i \notin D$, то $|D \cap \{b_i, c_i\}| \geqslant 1$ (иначе вершина c_i не задоминирована) и $|D \cap \{p_i, q_i\}| \geqslant 1$ (иначе не задоминирована вершина p_i). В этом случае также имеем $|D \cap B_i| \geqslant 2$. Утверждение 3 доказано.

Поскольку множества B_i попарно не пересекаются, из утверждения 3 вытекает следующее свойство множества $B = \bigcup\limits_{i=1}^{4} B_i \subseteq V(Q)$.

Следствие 1. $|D \cap B| \geqslant 8$.

Относительно множеств $\mathcal{F} = \{w_i, b_j, p_j \mid 1 \leqslant i \leqslant 6,\ 1 \leqslant j \leqslant 4\} \subseteq V(Q)$ и $\mathcal{E} = \{g_2, h_i, b_j, p_j \mid 1 \leqslant i \leqslant 6,\ 1 \leqslant j \leqslant 4\} \subseteq V(Q)$ сделаем

Замечание 1. Множества $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ являются независимыми доминирующими множествами графа Q.

Теперь докажем важные локальные свойства наименьших независимых доминирующих множеств графа H_G, связанные с подмножеством $W = \{w_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 6\} \subseteq V(Q)$.

Утверждение 4. *Пусть I — наименьшее независимое доминирующее множество графа H_G и Q — произвольная составная вершина этого графа. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*
(i) $W \subseteq I$;
(ii) $|I \cap V(Q)| = 14$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Поскольку $W \subseteq I$, воспользовавшись следствием 1, заметим, что $|I \cap V(Q)| \geqslant |W| + |I \cap B| = 6 + 8 = 14$. Рассмотрим введённое ранее независимое доминирующее множество $\mathcal{F}$ графа Q. Нетрудно убедиться, что при $I \cap V(Q) = \mathcal{F}$ имеет место равенство $|I \cap V(Q)| = 14$. Поэтому если для составной вершины Q и некоторого независимого доминирующего множества D графа H_G одновременно выполнены включение $W \subseteq D$ и неравенство $|D \cap V(Q)| > 14$, то множество D не наименьшее.

Действительно, рассмотрим $D' = (D \setminus V(Q)) \cup \mathcal{F}$. Оно, как нетрудно убедиться, является независимым доминирующим множеством для графа H_G, и имеет место включение $W \subseteq D'$. При этом

$$|D'| = |D| - |D \cap V(Q)| + |\mathcal{F}| < |D| - 14 + 14 = |D|,$$

т. е. $|D'| < |D|$.

Таким образом, поскольку I является наименьшим независимым доминирующим множеством и $W \subseteq I$, то $|I \cap V(Q)| = 14$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Предположим обратное: $|I \cap V(Q)| = 14$, но существует хотя бы одна вершина, принадлежащая множеству $W \setminus I$. Следующие четыре случая исчерпывают все возможные варианты расположения вершин w_1 и w_2 относительно множества I.

Случай 1: $w_1, w_2 \in I$. В этом случае имеем

$$|I \cap V(Q)| \geqslant |\{w_1, w_2\}| + |I \cap Z| + |I \cap B|.$$

Поскольку $\{w_3, w_4, w_5, w_6\} \setminus I \neq \varnothing$, применив утверждение 1, получаем $|I \cap Z| \geqslant 5$. По следствию 1 заключаем, что $|I \cap B| \geqslant 8$. Следовательно, $|I \cap V(Q)| \geqslant 2 + 5 + 8 = 15$, т. е. $|I \cap V(Q)| \geqslant 15$.

Случай 2: $w_1 \notin I$, $w_2 \in I$. В этом случае имеем

$$|I \cap V(Q)| \geqslant |\{w_2\}| + |I \cap Z'| + |I \cap B| + |I \cap A_1|,$$

где $A_1 = \{h_1, a_1, a_3\}$. Заметим, что $|I \cap A_1| \geqslant 1$, поскольку в противном случае вершина h_1 не задоминирована, так как $w_1 \notin I$. Применив утверждение 2 и следствие 1, получаем $|I \cap Z'| \geqslant 5$ и $|I \cap B| \geqslant 8$ соответственно. Следовательно, $|I \cap V(Q)| \geqslant 1 + 5 + 8 + 1 = 15$, т. е. $|I \cap V(Q)| \geqslant 15$.

Случай 3: $w_1 \in I$, $w_2 \notin I$. Учитывая симметрию графа Q и рассматривая вместо $A_1 = \{h_1, a_1, a_3\}$ множество $A_2 = \{g_2, a_2, a_4\}$, аналогично приходим к неравенству $|I \cap V(Q)| \geqslant 15$.

Случай 4: $w_1, w_2 \notin I$. В этом случае имеем

$$|I \cap V(Q)| \geqslant |I \cap B| + |I \cap Z'| + |I \cap A_1| + |I \cap A_2|.$$

Применив следствие 1, утверждение 2 и отмеченное в ходе доказательства свойство множеств A_1 и A_2, получаем $|I \cap V(Q)| \geqslant 8+5+1+1 = 15$, т. е. $|I \cap V(Q)| \geqslant 15$.

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев приходим к неравенству $|I \cap V(Q)| \geqslant 15$, которое противоречит условию $|I \cap V(Q)| = 14$. Отсюда заключаем, что сделанное ранее предположение неверно, а значит, $W \subseteq I$. Утверждение 4 доказано.

Составную вершину Q назовём *полной* относительно независимого доминирующего множества D графа H_G, если для подмножества $W \subseteq V(Q)$ выполнено $|W \cap D| = 6$, т. е. $W \subseteq D$. Отметим, что в случае, если D наименьшее, свойство полноты составной вершины Q по утверждению 4 эквивалентно равенству $|D \cap V(Q)| = 14$.

Сделаем следующие замечания.

Замечание 2. Две полные относительно некоторого независимого доминирующего множества D графа H_G составные вершины Q^i и Q^j не могут быть соседними, так как обратное противоречит независимости множества D.

Замечание 3. Пусть D — произвольное независимое доминирующее множество в графе H_G, $\mathcal{Q}_f$ — множество составных вершин Q, полных относительно D. Пусть V_f — множество вершин графа G, соответствующих составным вершинам из $\mathcal{Q}_f$. Тогда V_f — независимое множество в графе G.

Замечание 4. Пусть $\mathcal{Q}$ — произвольное множество составных вершин Q^i графа H_G таких, что соответствующие им вершины v_i графа G образуют независимое множество. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех остальных составных вершин графа H_G и определим множество $D^*(\mathcal{Q})$ следующим образом:

$$D^*(\mathcal{Q}) = \bigcup_{Q^i \in \mathcal{Q}} \mathcal{F}^i \cup \bigcup_{Q^j \in \mathcal{R}} \mathcal{E}^j,$$

где $\mathcal{F}^i = \{v^i \mid v \in \mathcal{F}\} \subseteq V(Q^i)$, $\mathcal{E}^j = \{v^j \mid v \in \mathcal{E}\} \subseteq V(Q^j)$.

Тогда, как нетрудно убедиться по построению множества $D^*(\mathcal{Q})$, оно является независимым доминирующим в графе H_G, и его мощность равна

$$|D^*(\mathcal{Q})| = 14 \cdot |\mathcal{Q}| + 15 \cdot (|G| - |\mathcal{Q}|).$$

Отметим, что для построения множества $D^*(\mathcal{Q})$ в качестве $\mathcal{Q}$ допустимо использовать множество составных вершин графа H_G, полных относительно некоторого независимого доминирующего множества D этого графа. Данный факт следует из замечания 3. Кроме того, в качестве множества $\mathcal{Q}$ может выступать множество составных вершин графа H_G, которые соответствуют вершинам некоторого выбранного независимого множества графа G, поскольку соответствие между составными вершинами графа H_G и вершинами графа G биективно.

Пусть I — наименьшее независимое доминирующее множество графа H_G и Q — произвольная составная вершина этого графа. Тогда из утверждения 4 получаем

Следствие 2. *Следующие два утверждения эквивалентны:*
(i) $|W \cap I| < 6$;
(ii) $|I \cap V(Q)| = 15$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) В ходе доказательства утверждения 4 и рассмотрения всех вариантов расположения вершин w_1 и w_2 относительно множества I было установлено, что при условии $|W \cap I| < 6$ выполнено неравенство $|I \cap V(Q)| \geqslant 15$. Рассмотрим введённое ранее независимое доминирующее множество $\mathcal{E}$ графа Q. Нетрудно убедиться, что при $I \cap V(Q) = \mathcal{E}$ имеет место равенство $|I \cap V(Q)| = 15$. Поэтому если для некоторой составной вершины Q и независимого доминирующего множества D графа H_G одновременно выполнены неравенства $|W \cap D| < 6$ и $|D \cap V(Q)| > 15$, то множество D не является наименьшим.

Предположим напротив, что D наименьшее. Обозначим через $\mathcal{Q}_f$ множество полных относительно D составных вершин. По утверждению 4 для каждой составной вершины $Q \in \mathcal{Q}_f$ выполнено $|D \cap V(Q)| = 14$. Через $\mathcal{Q}_e$ обозначим множество всех остальных составных вершин графа H_G, т. е. составных вершин Q таких, что $|D \cap V(Q)| \geqslant 15$. Предположим, что для некоторых составных вершин $Q \in \mathcal{Q}_e$ имеет место строгое неравенство $|D \cap V(Q)| > 15$. Отсюда $|D| > 14 \cdot |\mathcal{Q}_f| + 15 \cdot |\mathcal{Q}_e|$.

Рассмотрим множество $D^*(\mathcal{Q}_f)$, определяемое в замечании 4. Оно является независимым доминирующим для графа H_G, причём $|D^*(\mathcal{Q}_f)| = 14 \cdot |\mathcal{Q}_f| + 15 \cdot |\mathcal{Q}_e|$, поэтому $|D^*(\mathcal{Q}_f)| < |D|$. Следовательно, независимое доминирующее множество D не будет наименьшим. Полученное противоречие доказывает, что неравенство $|W \cap I| < 6$ влечёт равенство $|I \cap V(Q)| = 15$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Действительно, предположим, что это не выполняется, т. е. что для некоторой составной вершины Q одновременно выполнены равенство $|I \cap V(Q)| = 15$ и неравенство $|W \cap I| \geqslant 6$. Поскольку $|W| = 6$, из последнего неравенства следует, что $W \subseteq I$ для данной составной вершины Q, поэтому согласно утверждению 4 $|I \cap V(Q)| = 14$; противоречие. Таким образом, из того, что $|I \cap V(Q)| = 15$, следует, что $|W \cap I| < 6$. Следствие 2 доказано.

Составную вершину Q назовём *неполной* относительно независимого доминирующего множества D графа H_G, если она не является полной относительно него. Отметим, что в случае, если D наименьшее, свойство неполноты составной вершины Q по следствию 2 эквивалентно равенству $|D \cap V(Q)| = 15$.

Неполную относительно D составную вершину Q назовём *пустой* (относительно D), если для подмножества $W \subseteq V(Q)$ выполнено $W \cap D = \varnothing$. Наименьшее независимое доминирующее множество I графа H_G назовём *дихотомическим* независимым доминирующим, если относительно него любая составная вершина Q является либо полной, либо пустой.

Следствие 3. *В графе H_G существует дихотомическое независимое доминирующее множество.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное наименьшее независимое доминирующее множество I графа H_G. Пусть $\mathcal{Q}_f$ — множество полных относительно I составных вершин, $\mathcal{Q}_e$ — множество неполных относительно I составных вершин. По утверждению 4 и следствию 2 из него имеем $|I| = 14 \cdot |\mathcal{Q}_f| + 15 \cdot |\mathcal{Q}_e|$.

Тогда множество $D^*(\mathcal{Q}_f)$, определяемое в замечании 4, является независимым доминирующим множеством графа H_G, при этом

$$|D^*(\mathcal{Q}_f)| = 14 \cdot |\mathcal{Q}_f| + 15 \cdot |\mathcal{Q}_e| = |I|,$$

т. е. $D^*(\mathcal{Q}_f)$ наименьшее, и любая составная вершина Q графа H_G, как можно видеть по определению множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$, относительно множества $D^*(\mathcal{Q}_f)$ является либо полной, либо пустой. Следствие 3 доказано.

Утверждение 5. *Для графа H_G имеет место равенство*

$$i(H_G) = 15 \cdot |G| - \alpha(G).$$

Доказательство. Пусть V_α — наибольшее независимое множество графа G, а $\mathcal{Q}_{V_\alpha}$ — множество составных вершин графа H_G, соответствующих вершинам из V_α. Рассмотрим в графе H_G множество $D^*(\mathcal{Q}_{V_\alpha})$, определяемое замечанием 4. Оно является независимым доминирующим в графе H_G, и его мощность равна

$$\begin{aligned} |D^*(\mathcal{Q}_{V_\alpha})| &= |\mathcal{F}| \cdot |V_\alpha| + |\mathcal{E}| \cdot |V(G) \setminus V_\alpha| \\ &= 14 \cdot \alpha(G) + 15 \cdot (|G| - \alpha(G)) = 15 \cdot |G| - \alpha(G), \end{aligned}$$

поэтому $i(H_G) \leqslant 15 \cdot |G| - \alpha(G)$.

Пусть теперь I — дихотомическое независимое доминирующее множество графа H_G (существование множества I доказано в следствии 3) и k — число составных вершин, полных относительно него. Тогда

$$|I| = 14 \cdot k + 15 \cdot (|G| - k) = 15 \cdot |G| - k.$$

В силу замечания 3 множество V_f вершин графа G, соответствующих полным относительно I составным вершинам, независимо в графе G. Следовательно, $|V_f| \leqslant \alpha(G)$, но $|V_f| = k$, поэтому $k \leqslant \alpha(G)$. Поскольку $i(H_G) = |I| = 15 \cdot |G| - k$, получаем $i(H_G) \geqslant 15 \cdot |G| - \alpha(G)$.

Из доказанных неравенств для $i(H_G)$ следует требуемое равенство. Утверждение 5 доказано.

Отметим, что из утверждения 5 и того факта, что планарный двудольный граф H_G с $\Delta(H_G) = 3$ и $\delta(H_G) = 2$ можно построить за полиномиальное от порядка графа G время, следует, что построено полиномиальное сведéние задачи Независимое множество в классе кубических планарных графов к задаче Независимое доминирующее множество в классе планарных двудольных графов с $\Delta = 3$ и $\delta = 2$. Поскольку первая задача в классе кубических планарных графов NP-полна [17] и, очевидно, остаётся таковой в классе связных кубических планарных графов, а вторая принадлежит классу NP, получаем следующий результат, который может представлять самостоятельный интерес.

Теорема 2. *В классе связных планарных двудольных графов с* $\Delta = 3$ *и* $\delta = 2$ *задача* Независимое доминирующее множество NP-*полна.*

3. Переход к кубическим планарным двудольным графам

Хотелось бы некоторым образом модифицировать каждую составную вершину Q графа H_G так, чтобы полученный в результате такой модификации граф был кубическим, планарным и двудольным. С этой целью введём в рассмотрение планарный двудольный граф R, изображённый на рис. 5.

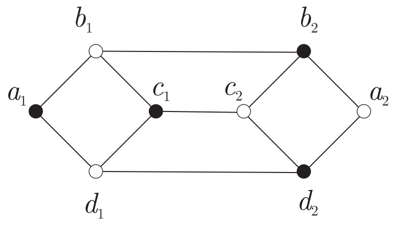

Рис. 5. Граф R

Рассмотрим свойства независимых доминирующих множеств графа R.

Утверждение 6. *Пусть D — произвольное независимое доминирующее множество графа R. Тогда $|D \cap \{a_i, b_i, c_i, d_i\}| \geqslant 1$ для $i = 1, 2$.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$. Предположим обратное: пусть $D \cap \{a_1, b_1, c_1, d_1\} = \varnothing$. Тогда вершина a_1 не задоминирована; противоречие. Утверждение 6 доказано.

Утверждение 7. $i(R) = 2$.

Доказательство. Из утверждения 6 следует, что $i(R) \geqslant 2$. Очевидно, что множество $\{b_1, d_2\}$ является независимым доминирующим для графа R, откуда $i(R) \leqslant 2$. Следовательно, $i(R) = 2$. Утверждение 7 доказано.

Утверждение 8. *Пусть D — независимое доминирующее множество графа R такое, что $a_i \in D$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Тогда $|D| \geqslant 3$.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$, т. е. $a_1 \in D$. Тогда ровно одна из вершин c_1, c_2 также принадлежит множеству D, иначе вершина c_1 не задоминирована.

Если $c_1 \in D$, то по утверждению 6 имеем $|D \cap \{a_2, b_2, c_2, d_2\}| \geqslant 1$. Поскольку $|D \cap \{a_1, b_1, c_1, d_1\}| = |\{a_1, c_1\}| = 2$, заключаем, что в этом случае $|D| \geqslant 3$.

Если $c_2 \in D$, то $a_2 \in D$, так как в противном случае вершина a_2 не задоминирована. Так как $\{a_1, c_2, a_2\} \subseteq D$, заключаем, что и в этом случае $|D| \geqslant 3$. Утверждение 8 доказано.

Утверждение 9. *Пусть L — граф, изоморфный графу $R - a_2$. Тогда $i(L) = 2$.*

Доказательство. Пусть D — некоторое независимое доминирующее множество графа $R - a_2$. Заметим, что $|D \cap \{b_2, c_2, d_2\}| \geqslant 1$. Действительно, если это не выполнено, то либо одна из вершин b_2, c_2 не задоминирована, либо смежные вершины b_1 и c_1 принадлежат независимому множеству D. И то, и другое невозможно. По утверждению 6 $|D \cap \{a_1, b_1, c_1, d_1\}| \geqslant 1$, откуда с учётом только что доказанного заключаем, что $|D| \geqslant 2$, поэтому $i(R - a_2) \geqslant 2$.

Нетрудно убедиться, что множество $\{b_1, d_2\}$ является независимым доминирующим для графа $R - a_2$, откуда $i(R - a_2) \leqslant 2$. С учётом ранее доказанного неравенства получаем требуемое $i(R - a_2) = 2$. Утверждение 9 доказано.

Следующие две леммы приводятся без доказательств в силу своей простоты.

Лемма 3. *Пусть F — произвольный граф, D — его независимое доминирующее множество, u — вершина графа F такая, что $u \notin D$. Тогда множество D является независимым доминирующим для графа $F - u$.*

Лемма 4. *Пусть F — произвольный граф, C — дизъюнктное объединение некоторых из его связных компонент, D — независимое доминирующее множество графа F. Тогда множество $D \cap V(C)$ является независимым доминирующим для подграфа C.*

Пусть F — произвольный граф, uv — его ребро. Добавим к дизъюнктному объединению $F \cup R$ графов F и R рёбра ua_1, va_2. Данную операцию назовём *навешиванием графа* R на ребро uv. Отметим, что в случае если граф F двудольный, то в результате навешивания графа R на любое ребро $uv \in E(F)$ получается двудольный граф (рис. 6).

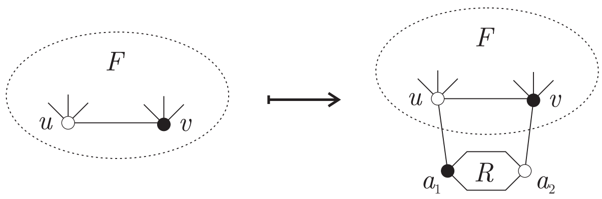

Рис. 6. Операция навешивания графа R на ребро $uv \in E(F)$

Утверждение 10. *Пусть граф F' получен из произвольного графа F навешиванием графа R на ребро $uv \in E(F)$. Тогда*

$$i(F') = i(F) + i(R) = i(F) + 2.$$

Доказательство. Пусть I — наименьшее независимое доминирующее множество графа F, а $T = \{b_1, d_2\}$ — наименьшее независимое доминирующее множество графа R. Тогда множество $I \cup T$ является независимым множеством графа F', поскольку ни одна вершина из множества $V(F)$, а следовательно, и независимого множества I, не смежна ни с одной вершиной независимого множества T. Кроме того, множество $I \cup T$ доминирующее для графа F'. Действительно, любая вершина из $V(R)$ либо принадлежит T (а следовательно, и множеству $I \cup T$), либо смежна с некоторой вершиной из T (а значит, и вершиной из множества $I \cup T$). Любая вершина из $V(F)$ либо принадлежит I (тем самым и множеству $I \cup T$), либо смежна с некоторой вершиной из множества I (а следовательно, и вершиной из множества $I \cup T$). Поскольку $V(F') = V(F) \cup V(R)$, множество $I \cup T$ доминирующее для графа F'.

Таким образом, множество $I \cup T$ является независимым доминирующим для графа F', откуда

$$i(F') \leqslant |I \cup T| = |I| + |T| = i(F) + i(R) = i(F) + 2,$$

т. е.

$$i(F') \leqslant i(F) + 2.$$

Пусть теперь J — наименьшее независимое доминирующее множество графа F'. Тогда для вершин u и v графа F' возможны следующие три случая:

1) ровно одна из вершин u, v принадлежит множеству J;

2) ни одна из вершин u, v не принадлежит множеству J, и выполнены соотношения $N_F(u) \cap J \neq \varnothing$ и $N_F(v) \cap J \neq \varnothing$;

3) ни одна из вершин u, v не принадлежит множеству J, и выполнено $N_F(u) \cap J = \varnothing$ или $N_F(v) \cap J = \varnothing$.

Рассмотрим по отдельности каждый из этих случаев.

Случай 1. Без ограничения общности предположим, что $u \in J$. Это значит, что $a_1 \notin J$ и $v \notin J$.

Дважды воспользуемся леммой 3. Получим, что множество J является независимым доминирующим для графа $F' - \{a_1, v\}$, который имеет несколько связных компонент, одна из которых представляет собой граф $R - a_1$, а дизъюнктное объединение остальных образует граф $F - v$.

Согласно лемме 4 множество $J \cap V(R - a_1)$ независимое доминирующее для графа $R - a_1$, откуда с учётом утверждения 9 следует, что $|J \cap V(R - a_1)| \geqslant 2$.

Снова по лемме 4 множество $J \cap V(F - v)$ независимое доминирующее для графа $F - v$, но $u \in J$ и u смежна с v в графе F, поэтому множество $J \cap V(F - v)$ является независимым доминирующим и для графа F. Отсюда следует, что $|J \cap V(F - v)| \geqslant i(F)$

Заметим, что поскольку $a_1 \notin J$ и $v \notin J$, имеют место равенства

$$J \cap V(R - a_1) = J \cap V(R), \quad J \cap V(F - v) = J \cap V(F).$$

Тогда

$$\begin{aligned} i(F') &= |J| = |J \cap V(F)| + |J \cap V(R)| \\ &= |J \cap V(F - v)| + |J \cap V(R - a_1)| \geqslant i(F) + i(R - a_1) = i(F) + 2, \end{aligned}$$

т. е. $i(F') \geqslant i(F) + 2$.

Случай 2. Поскольку $u \notin J$ и $v \notin J$, дважды воспользуемся леммой 3. Получим, что множество J является независимым доминирующим для графа $F' - \{u, v\}$, который имеет несколько связных компонент, одна из которых представляет собой граф R, а дизъюнктное объединение остальных образует граф $F - \{u, v\}$.

Согласно лемме 4 множество $J \cap V(R)$ независимое доминирующее для графа R, поэтому с учётом утверждения 7 выполнено $|J \cap V(R)| \geqslant 2$.

Снова по лемме 4 множество $J \cap V(F - \{u, v\})$ является независимым доминирующим для графа $F - \{u, v\}$. Но по условию $N_F(u) \cap J \neq \varnothing$

и $N_F(v) \cap J \neq \varnothing$, что означает, что в $J \cap V(F - \{u,v\})$ есть как вершина, смежная с u, так и вершина, смежная с v. Поэтому множество $J \cap V(F - \{u,v\})$ независимое доминирующее и для графа F. Отсюда следует, что $|J \cap V(F - \{u,v\})| \geqslant i(F)$.

Заметим, что поскольку $u \notin J$ и $v \notin J$, имеет место равенство

$$J \cap V(F - \{u,v\}) = J \cap V(F).$$

Тогда

$$\begin{aligned} i(F') = |J| &= |J \cap V(F)| + |J \cap V(R)| \\ &= |J \cap V(F - \{u,v\})| + |J \cap V(R)| \geqslant i(F) + i(R) = i(F) + 2, \end{aligned}$$

т. е. $i(F') \geqslant i(F) + 2$.

Случай 3. Без ограничения общности предположим, что выполнено соотношение $N_F(u) \cap J = \varnothing$.

Поскольку $u \notin J$ и $v \notin J$, дважды воспользуемся леммой 3. Получим, что множество J является независимым доминирующим для графа $F' - \{u,v\}$, который имеет несколько связных компонент, одна из которых представляет собой граф R, а дизъюнктное объединение остальных образует граф $F - \{u,v\}$.

По лемме 4 множество $J \cap V(R)$ независимое доминирующее для графа R. Так как вершина u в графе F' смежна с некоторой вершиной из множества J, но у неё нет смежных вершин в множестве $J \cap V(F)$, заключаем, что вершина a_1 принадлежит множеству J. Далее поскольку $a_1 \in J \cap V(R)$, из утверждения 8 следует, что $|J \cap V(R)| \geqslant 3$.

Снова по лемме 4 множество $J \cap V(F - \{u,v\})$ независимое доминирующее для графа $F - \{u,v\}$. Отметим, что так как $u \notin J$ и $v \notin J$, имеет место равенство $J \cap V(F - \{u,v\}) = J \cap V(F)$. Далее заметим, что множество $\widetilde{J} = (J \cap V(F)) \cup \{u\}$ является независимым доминирующим для графа F. Действительно, оно независимо, поскольку, как было отмечено ранее, вершина u не смежна ни с одной вершиной независимого множества $J \cap V(F)$. Множество $\widetilde{J}$ также доминирующее для графа F, поскольку оно доминирующее для графа $F - \{u,v\}$, а вершина u смежна с вершиной v. Отсюда следует, что $|\widetilde{J}| \geqslant i(F)$.

Теперь заметим, что множество $\widetilde{J} \cup T$, где $T = \{b_1, d_2\}$, является независимым доминирующим для графа F', и, более того, наименьшим независимым доминирующим, поскольку

$$\begin{aligned} |\widetilde{J} \cup T| = |J \cap V(F)| + |\{u\}| + |T| = |J \cap V(F)| + 1 + 2 \\ \leqslant |J \cap V(F)| + |J \cap V(R)| = |J| = i(F'), \end{aligned}$$

откуда заключаем, что $|\widetilde{J} \cup T| = i(F')$. Следовательно,

$$i(F') = |\widetilde{J}| + |T| \geqslant i(F) + i(R) = i(F) + 2,$$

т. е. $i(F') \geqslant i(F) + 2$.

Таким образом, в каждом из рассмотренных случаев получаем

$$i(F') \geqslant i(F) + 2.$$

Поскольку ранее было доказано соотношение $i(F') \leqslant i(F) + 2$, окончательно имеем $i(F') = i(F) + 2$. Утверждение 10 доказано.

4. Кубические планарные двудольные графы

Результаты, полученные в разд. 3, и в частности, утверждение 10, позволяют модифицировать конструкцию составной вершины Q, описанную в разд. 2, и установить сложность задачи Независимое доминирующее множество в классе кубических планарных двудольных графов.

Пусть G — произвольный кубический планарный граф, по которому построен граф H_G. Пусть Q — составная вершина графа H_G. Применим операцию навешивания графа R на каждое из следующих тринадцати рёбер графа Q: b_1c_1, p_1q_1, p_2q_2, b_2c_2, b_3c_3, p_3q_3, p_4q_4, b_4c_4, h_2g_3, h_3g_4, h_4g_5, h_5g_6, h_6g_1. Полученная в результате конструкция схематично изображена на рис. 7.

Проделаем описанные навешивания графа R в каждой составной вершине Q графа H_G. В результате будет получен граф M_G, обладающий следующими свойствами:

1. Планарность. Граф H_G, как было отмечено ранее, планарный, а навешивания планарного графа R не нарушают свойства планарности.

2. Двудольность. Ранее было отмечено, что граф H_G двудольный и навешивания графа R на рёбра двудольного графа не нарушают свойства двудольности.

3. 3-регулярность. Описанные навешивания графа R, в котором только вершины a_1 и a_2 имеют степень два, применяются к парам смежных вершин графа H_G, которые имеют степень два. Нетрудно убедиться, что все вершины степени два как в графе R, так и в графе H_G, в результате будут иметь степень три. Степени всех других вершин графов R и H_G равны трём и не меняются.

4. $i(M_G) = i(H_G) + 26 \cdot |G|$. В каждой составной вершине производится 13 навешиваний, каждое из которых по утверждению 10 увеличивает число независимого доминирования на 2. Число составных вершин в графе H_G равно $|G|$.

5. $i(M_G) = 41 \cdot |G| - \alpha(G)$. По утверждению 5 имеем $i(H_G) = 15 \cdot |G| - \alpha(G)$, откуда согласно свойству 4 и получаем равенство

$$i(M_G) = (26 + 15) \cdot |G| - \alpha(G) = 41 \cdot |G| - \alpha(G).$$

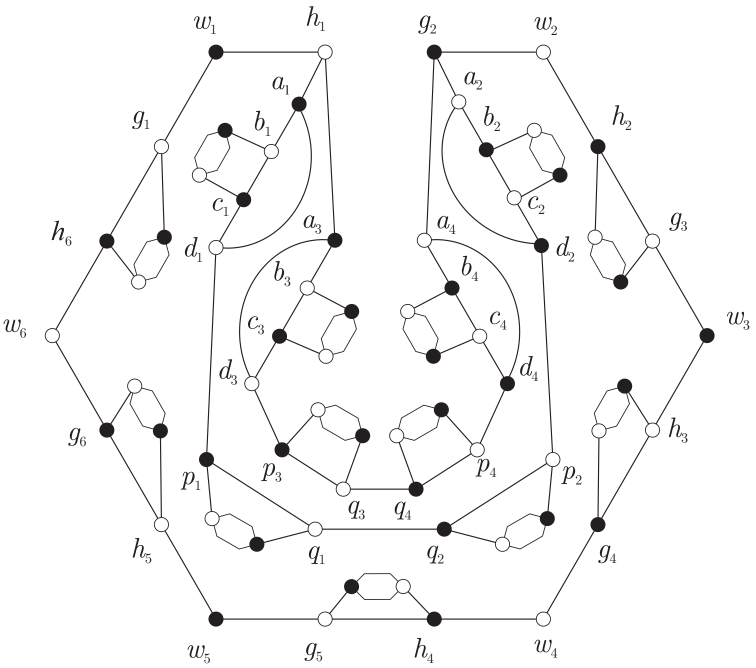

Рис. 7. Результат навешиваний графа R на тринадцать рёбер графа Q

Кроме того, граф M_G можно построить по графу H_G за полиномиальное от порядка последнего время. Поскольку граф H_G можно построить за полиномиальное от порядка графа G время, граф M_G также можно построить за полиномиальное от порядка графа G время.

Таким образом, получено полиномиальное сведе́ние задачи Независимое множество в классе кубических планарных графов к задаче Независимое доминирующее множество в классе кубических планарных двудольных графов, что и доказывает теорему 1.

Заключение

Известно, что для каждого кубического графа числа вершинной и рёберной связности совпадают [19, с. 148, упр. 2]. Кроме того, достаточно известным является тот факт, что кубические двудольные графы не содержат мостов [19, с. 148, упр. 3]. Таким образом, каждый связный кубический двудольный граф заведомо 2-связен. В частности, если кубический плоский граф G связный, то построенный по нему в разд. 4 кубический планарный двудольный граф M_G 2-связен. При этом легко видеть, что граф M_G не является 3-связным. Тем самым нетрудно убедиться, что результат теоремы 1 верен для кубических планарных двудольных графов, число вершинной связности которых равно двум.

Естественный интерес вызывает вопрос о сложностном статусе задачи Независимое доминирующее множество в классе 3-связных кубических планарных двудольных графов. Ответ на этот вопрос, а также поиск сужений, т. е. подклассов класса кубических планарных двудольных графов, для которых рассматриваемая задача остаётся NP-полной, может служить продолжением исследований по данной тематике.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту, замечания и советы которого способствовали улучшению текста работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ore O.** Theory of graphs. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1962. 284 p.
2. **Cockayne E. J., Hedetniemi S. T.** Independence graphs // Congr. Numerantium. 1974. Vol. 10. P. 471–491.
3. **Sampathkumar E., Walikar H. B.** The connected domination number of a graph // J. Math. Phys. Sci. 1979. Vol. 13. P. 607–613.
4. **Cockayne E. J., Dawes R. M., Hedetniemi S. T.** Total domination in graphs // Networks. 1980. Vol. 10. P. 211–219.
5. **Bollobás B., Cockayne E. J.** Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance // J. Graph Theory. 1979. Vol. 3, No. 3. P. 241–249.
6. **Cockayne E. J., Hartnell B. L., Hedetniemi S. T., Laskar R.** Perfect domination in graphs // J. Comb. Inf. Syst. Sci. 1993. Vol. 18. P. 136–148.
7. **Sampathkumar E., Neeralagi P. S.** The neighbourhood number of a graph // Indian J. Pure Appl. Math. 1985. Vol. 16. P. 126–132.
8. **Sampathkumar E., Neeralagi P. S.** Independent, perfect and connected neighbourhood numbers of a graph // J. Comb. Inf. Syst. Sci. 1994. Vol. 19. P. 139–145.
9. **Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J.** Domination in graphs: Advanced topics. New York: Marcel Dekker, 1998. 520 p.
10. **Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J.** Fundamentals of domination in graphs. New York: Marcel Dekker, 1998. 457 p.
11. **Du D.-Z., Wan P.-J.** Connected dominating set: Theory and applications. New York: Springer, 2013. 216 p.
12. **Goddard W., Henning M. A.** Independent domination in graphs: A survey and recent results // Discrete Math. 2013. Vol. 313. P. 839–854.
13. **Henning M., Yeo A.** Total domination in graphs. New York: Springer, 2013. 192 p.
14. **Liu C.-H., Poon S.-H., Lin J.-Y.** Independent dominating set problem revisited // Theor. Comput. Sci. 2015. Vol. 562. P. 1–22.
15. **Berge C.** Graphs and hypergraphs. Amsterdam: North-Holland, 1973. 528 p.

16. **Topp J.** Domination, independence and irredundance in graphs. Warsaw: Inst. Mat. PAN, 1995. 98 p. (Diss. Math.; Vol. 342).
17. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
18. **Manlove D. F.** On the algorithmic complexity of twelve covering and independence parameters of graphs // Discrete Appl. Math. 1999. Vol. 91. P. 155–175.
19. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.

Ловеров Ярослав Анатольевич
Орлович Юрий Леонидович

Статья поступила
11 апреля 2019 г.
После доработки —
20 декабря 2019 г.
Принята к публикации
13 января 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2020. Vol. 27, No. 2. P. 65–89

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2020.27.657

NP-COMPLETENESS OF THE INDEPENDENT DOMINATING SET PROBLEM IN THE CLASS OF CUBIC PLANAR BIPARTITE GRAPHS

Ya. A. Loverov[a] and *Yu. L. Orlovich*[b]

Belarusian State University,
Nezavisimosti Avenue, 4, 220030 Minsk, Belarus
E-mail: [a]`loverov@bsu.by`, [b]`orlovich@bsu.by`

Abstract. It is known that the independent dominating set problem is NP-complete both in the class of cubic planar graphs and in the class of cubic bipartite graphs. The question about the computational complexity of the problem in the intersection of these graph classes has remained open. In this article, we prove that the independent dominating set problem is NP-complete in the class of cubic planar bipartite graphs. Tab. 1, illustr. 7, bibliogr. 19.

Keywords: independent dominating set, cubic graph, planar graph, bipartite graph, NP-completeness.

REFERENCES

1. **O. Ore,** *Theory of Graphs* (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1962).
2. **E. J. Cockayne** and **S. T. Hedetniemi,** Independence graphs, *Congr. Numerantium* **10**, 471–491 (1974).
3. **E. Sampathkumar** and **H. B. Walikar,** The connected domination number of a graph, *J. Math. Phys. Sci.* **13**, 607–613 (1979).
4. **E. J. Cockayne, R. M. Dawes,** and **S. T. Hedetniemi,** Total domination in graphs, *Networks* **10**, 211–219 (1980).
5. **B. Bollobás** and **E. J. Cockayne,** Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance, *J. Graph Theory* **3** (3), 241–249 (1979).
6. **E. J. Cockayne, B. L. Hartnell, S. T. Hedetniemi,** and **R. Laskar,** Perfect domination in graphs, *J. Comb. Inf. Syst. Sci.* **18**, 136–148 (1993).

This research is supported by the Belorussian Republic Foundation for Basic Research (Project Ф20УКА–005).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (2), 352–366 (2020), DOI 10.1134/S1990478920020131.

7. **E. Sampathkumar** and **P. S. Neeralagi,** The neighbourhood number of a graph, *Indian J. Pure Appl. Math.* **16**, 126–132 (1985).
8. **E. Sampathkumar** and **P. S. Neeralagi,** Independent, perfect and connected neighbourhood numbers of a graph, *J. Comb. Inf. Syst. Sci.* **19**, 139–145 (1994).
9. **T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi,** and **P. J. Slater,** *Domination in Graphs: Advanced Topics* (Marcel Dekker, New York, 1998).
10. **T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi,** and **P. J. Slater,** *Fundamentals of Domination in Graphs* (Marcel Dekker, New York, 1998).
11. **D.-Z. Du** and **P.-J. Wan,** *Connected Dominating Set: Theory and Applications* (Springer, New York, 2013).
12. **W. Goddard** and **M. A. Henning,** Independent domination in graphs: A survey and recent results, *Discrete Math.* **313**, 839–854 (2013).
13. **M. Henning** and **A. Yeo,** *Total Domination in Graphs* (Springer, New York, 2013).
14. **C.-H. Liu, S.-H. Poon,** and **J.-Y. Lin,** Independent dominating set problem revisited, *Theor. Comput. Sci.* **562**, 1–22 (2015).
15. **C. Berge,** *Graphs and Hypergraphs* (North-Holland, Amsterdam, 1973).
16. **J. Topp,** *Domination, Independence and Irredundance in Graphs* (Inst. Mat. PAN, Warsaw, 1995) (Diss. Math., Vol. 342) 1995.
17. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).
18. **D. F. Manlove,** On the algorithmic complexity of twelve covering and independence parameters of graphs, *Discrete Appl. Math.* **91**, 155–175 (1999).
19. **V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov,** and **R. I. Tyshkevich,** *Lectures on Graph Theory* (Nauka, Moscow, 1990 [Russian]; B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994).

Yaroslav A. Loverov
Yury L. Orlovich

Received April 11, 2019
Revised December 20, 2019
Accepted January 13, 2020