ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2020. Т. 27, № 3. С. 71–87

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2020.27.668

ЭФФЕКТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О ВЗВЕШЕННОЙ ВЕРШИННОЙ РАСКРАСКЕ ДЛЯ НЕКОТОРОГО НАСЛЕДСТВЕННОГО КЛАССА ГРАФОВ С 5-ВЕРШИННЫМИ ЗАПРЕТАМИ

Д. В. Грибанов[1,2,a], *Д. С. Малышев*[1,2,b], *Д. Б. Мокеев*[2,1,c]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

[2] Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия

E-mail: [a]`dimitry.gribanov@gmail.com`, [b]`dsmalyshev@rambler.ru`, [c]`mokeevdb@gmail.com`

Аннотация. Рассматривается задача минимизации количества цветов в раскрасках вершин задаваемого графа так, что каждой вершине назначаются цвета, число которых равно задаваемому весу вершины, причём смежным вершинам назначаются различные цвета. Для всех наследственных классов, определяемых парой связных 5-вершинных порождённых запретов, кроме четырёх случаев, известна вычислительная сложность варианта задачи о взвешенной вершинной раскраске с единичными весами. В настоящей работе доказывается полиномиальная разрешимость от суммы весов вершин для данной задачи и пересечения двух из четырёх открытых случаев. Авторы надеются, что этот результат будет способствовать прояснению вычислительного статуса задачи о вершинной раскраске в упомянутых открытых случаях. Ил. 1, библиогр. 18.

Ключевые слова: задача о взвешенной вершинной раскраске, наследственный класс, вычислительная сложность.

Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. неориентированные, непомеченные графы без петель и кратных рёбер.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–31–20001-мол-а-вед).

Задача о взвешенной вершинной раскраске (далее кратко *задача* ВВР) для заданных графа $G = (V, E)$ и функции $w\colon V \to \mathbb{N}$ состоит в том, чтобы определить такое минимальное число k (обозначаемое через $\chi_w(G)$), что существует отображение $c\colon V \to 2^{\{1,2,\ldots,k\}}$, для которого $|c(v)| = w(v)$ для любого $v \in V$ и $c(u) \cap c(v) = \varnothing$ для любого $uv \in E$. Невзвешенный вариант (т. е. с единичными весами вершин) задачи ВВР называется *задачей о вершинной раскраске* (далее — задача ВР). Иными словами, задача ВР состоит в том, чтобы определить минимальное количество множеств попарно не смежных вершин (называемых *независимыми*), на которые можно разбить множество вершин заданного графа. *Кликой* в графе называется подмножество попарно смежных вершин. Задачи ВР и ВВР являются классическими NP-полными задачами на графах [1].

Классом графов называется множество графов, замкнутое относительно изоморфизма. Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{Y}$, и это записывается так: $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$. Графы из класса $\mathcal{X}$ называются также *$\mathcal{Y}$-свободными.*

Задача ВР полиномиально разрешима для класса $\mathrm{Free}(\{H\})$, если H — порождённый подграф графа P_4 или графа $P_3 + K_1$, иначе она NP-полна в данном классе [2]. Однако при запрещении двух порождённых подграфов полную сложностную классификацию получить уже не удаётся. Так, например, для всех наследственных классов, определяемых запретами с не более чем 4 вершинами каждый, кроме трёх, известен вычислительный статус задачи о вершинной раскраске [3]. Для оставшихся трёх случаев данный статус не известен, но для них удаётся построить полиномиальные приближённые алгоритмы [4]. Некоторые недавние результаты о сложности задачи ВР в наследственных классах, определяемых запретами маленького размера, представлены в [5–14].

В [9–14] рассматривалась алгоритмическая сложность задачи ВР для пары связных запрещённых порождённых фрагментов, каждый на 5 вершинах. В настоящее время сложность задачи ВР представляет открытый вопрос для следующих четырёх пар такого рода:

- $\{K_{1,3}, \mathrm{butterfly}\}$,
- $\{P_5, H\}$, где $H \in \{K_{2,3}, \mathrm{crown}, W_4\}$.

К сожалению, ни для одного из данных четырёх случаев не удалось прояснить статус задачи ВР. Поэтому возникла мысль рассмотреть пересечения соответствующих наследственных классов и для них попытаться построить полиномиальные алгоритмы. Возможно, это поможет разработать полиномиальные алгоритмы для решения задачи ВР в исходных классах. В данной работе доказывается, что задача ВВР разрешима

за полиномиальное от суммы весов время для класса $\{P_5, K_{2,3}, W_4\}$-свободных графов. Следовательно, задача ВР разрешима за полиномиальное время для графов класса $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}, W_4\})$.

1. Используемые обозначения

Через $N(x)$ будем обозначать окрестность вершины x. Простой путь, простой цикл и пустой графы на n вершинах обозначим через P_n, C_n, O_n соответственно. Через $K_{p,q}$ обозначается полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле. Через W_4 обозначим граф, получаемый из 4-цикла добавлением одной вершины и четырёх рёбер, каждое из которых инцидентно добавленной вершине и своей вершине 4-цикла.

Графы butterfly и crown изображены на рис. 1.

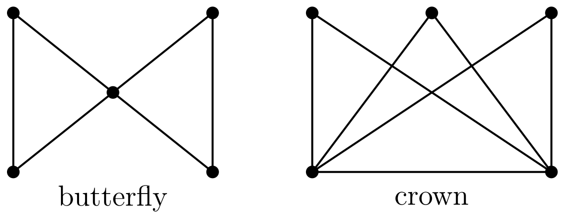

Рис. 1

Пусть G — граф и $V' \subseteq V(G)$. Тогда $G[V']$ — подграф графа G, индуцированный подмножеством вершин V', а $G \setminus V'$ — результат удаления из графа G всех элементов множества V' (вместе со всеми инцидентными им рёбрами). Через $\overline{G}$ обозначается дополнение к графу G.

Пусть A и B — непустые непересекающиеся подмножества множества вершин некоторого графа $G = (V, E)$. Обозначение $A * B$ означает, что не существует такого ребра $vu \in E$, для которого $v \in A$, $u \in B$, а $A \bullet B$ означает, что $vu \in E$ для любых $v \in A$, $u \in B$.

2. Атомарные графы, совершенные графы и их значение

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф. Подмножество $M \subseteq V$ называется *модулем* в графе G, если каждая вершина из $V \setminus M$ либо смежна со всеми вершинами из M, либо несмежна ни с одним из них. Очевидно, что пустое множество, каждая вершина графа и множество всех его вершин образуют модули. Модуль M называется *нетривиальным* в графе G, если выполнено неравенство $1 < |M| < |V(G)|$.

Пусть (G, w) — входные данные в задаче ВВР, а M — нетривиальный модуль графа G. По тройке (G, M, w) образуем пару (G', w'). В графе G

удалим все вершины модуля M, затем добавим вершину x и рёбра, соединяющие x со всеми вершинами подграфа $G \setminus M$, с которыми ранее были смежны вершины модуля M, и получим граф G'. Назначим $w'(v) = w(v)$ для каждой вершины $v \in V(G') \setminus \{x\}$ и $w'(x) = \chi_w(G[M])$ для вершины x. Очевидно, что $|V(G')| < |V(G)|$ и $\chi_{w'}(G') = \chi_w(G)$ (см., например, [14]). Оказывается, что для произвольного графа с n вершинами и m рёбрами все максимальные по включению нетривиальные модули попарно не пересекаются и все они могут быть вычислены за время $O(n+m)$ [15].

Клика Q в графе G называется *разделяющей*, если число компонент связности графа $G \setminus Q$ больше числа компонент связности графа G. Пусть $A \sqcup B$ — произвольное разбиение множества вершин графа $G \setminus Q$ на части $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, причём множество вершин каждой компоненты связности графа целиком вложено или в A, или в B. Тогда для любых входных данных (G, w) задачи ВВР имеем

$$\chi_w(G) = \max(\chi_w(G[A \cup Q]), \chi_w(G[B \cup Q]))$$

(см., например, [16]). Процедура разделения $V(G \setminus Q)$ на две части может быть представлена в виде бинарного дерева, которое определяется не единственным образом. Некоторое такого рода дерево для графа с n вершинами и m рёбрами может быть найдено за время $O(n \cdot m)$ [16].

Связный граф без разделяющих клик и нетривиальных модулей называется *атомарным*. Очевидно, что справедлива

Лемма 1. *Задача* ВВР *в любом наследственном классе полиномиально сводится к той же задаче для атомарных графов из данного класса.*

Граф называется *графом Бержа*, если он принадлежит классу

$$\mathrm{Free}(\{C_{2i+1} \mid i > 1\} \cup \{\overline{C}_{2i+1} \mid i > 1\}).$$

Граф называется *совершенным*, если его хроматическое и кликовое числа равны и это верно для любого его порождённого подграфа. В [17] было доказано, что граф совершенен тогда и только тогда, когда он является графом Бержа. Известен следующий результат (см. [18]), который оформим в виде леммы.

Лемма 2. *Задача* ВВР *полиномиально разрешима для совершенных графов.*

Нетрудно видеть, что $C_5 = \overline{C}_5$ и каждый $\{P_5, K_{2,3}, W_4, C_5, \overline{C}_7\}$-свободный граф совершенен. Действительно, запрет порождённого подграфа P_5 запрещает ещё и каждый цикл C_k, где $k \geqslant 6$. Граф $\overline{W}_4$ имеет три компоненты связности, две из которых изоморфны P_2, а одна изоморфна графу P_1, поэтому запрет порождённого подграфа $\overline{W}_4$ запрещает ещё и каждый граф $\overline{C}_k$, где $k \geqslant 8$.

В следующих двух разделах будут доказаны результаты о структуре атомарных $\{P_5, K_{2,3}, W_4\}$-свободных графов, содержащих либо порождённый подграф $\overline{C}_7$, либо порождённый подграф C_5.

3. Атомарные $\{P_5, K_{2,3}, W_4\}$-свободные графы, содержащие дополнение порождённого 7-цикла

Пусть H — атомарный $\{P_5, K_{2,3}, W_4\}$-свободный граф, который содержит порождённый подграф $\overline{C}_7$. Поскольку удобнее работать с дополнением графа H, рассмотрим граф $G \triangleq \overline{H}$, в котором имеется порождённый подграф C_7.

Лемма 3. *Граф $G = (V, E)$ изоморфен 7-циклу или содержит порождённый 5-цикл.*

Доказательство. Допустим, что граф G является $\{C_5\}$-свободным. Поскольку G также $\{\overline{W}_4\}$-свободен, каждая вершина графа G смежна с некоторыми двумя вершинами цикла $C_7 \triangleq (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$. Далее индексы вершин данного цикла понимаем по модулю 7. Пусть $u \notin V(C_7)$ и $\{v_i, v_{i+1} \ldots, v_{i+k}\}$ — наибольшее по количеству множество соседей u на 7-цикле, состоящее из последовательных вершин цикла. Предположим, что $1 < k < 7$. Тем самым $uv_{i-1} \notin E$ и $uv_{i+k+1} \notin E$, иначе противоречие с выбором множества. Имеем $uv_{i-2} \notin E$ и $uv_{i+k+2} \notin E$, иначе v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, u или v_{i+k+2}, v_{i+k+1}, v_{i+k}, v_{i+k-1}, u порождают $\overline{P}_5$, поэтому $k \neq 6$. Имеем $uv_{i-3} \notin E$ и $uv_{i+k+3} \notin E$, иначе v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, u или v_{i+k+3}, v_{i+k+2}, v_{i+k+1}, v_{i+k}, u порождают C_5, тем самым $k \neq 5$. Значит, $k \in \{2, 3, 4\}$ и $N(u) \cap V(C_7) = \{v_i, v_{i+1} \ldots, v_{i+k}\}$, поэтому граф G не $\{\overline{K}_{2,3}\}$-свободен. Значит, либо $k = 7$, либо u не может быть смежна с двумя последовательными вершинами 7-цикла. Поскольку G $\{C_5\}$-свободен, в последнем случае $N(u) \cap V(C_7) = \{v_i, v_{i+2}\}$ для некоторого i.

Напомним, что граф H не содержит нетривиальных модулей. Следовательно, их не содержит граф G. Так как G $\{\overline{P}_5\}$-свободен, каждая вершина, смежная со всеми вершинами 7-цикла, должна быть смежна с каждой вершиной, имеющей ровно двух соседей на 7-цикле. Предположим, что $u \notin V(C_7)$, $N(u) \cap V(C_7) = \{v_i, v_{i+2}\}$ и множество $\{u, v_{i+1}\}$ не является модулем. Тогда существует вершина

$$u' \notin V(C_7), \quad N(u') \cap V(C_7) = \{v_j, v_{j+2}\},$$

для которой $uu' \in E$, $v_{i+1}u' \notin E$ или $uu' \notin E$, $v_{i+1}u' \in E$. Второй случай возможен только при $j = i \pm 1$. Тогда u, v_i, u', v_{i+3}, v_{i+5} или u, v_{i-1}, u', v_{i+2}, v_{i+4} порождают подграф $\overline{W}_4$. Рассмотрим первый случай. Тогда $j \notin \{i-1, i+1\}$ и $j \notin \{i-2, i+2\}$, так как иначе u, u', v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4} или u, u', v_{i-2}, v_{i-1}, v_i порождают подграф $\overline{P}_5$. Вместе с тем,

$j \notin \{i-3, i+3\}$, иначе v_{i-3}, u', u, v_{i+2}, v_{i+3} или v_{i-1}, v_i, u, u', v_{i+5} порождают подграф C_5. Имеем $j \neq i$, поскольку иначе $u, u', v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+4}$ порождают подграф $\overline{W}_4$; противоречие. Значит, не существует вершины, не принадлежащей 7-циклу и имеющей ровно двух соседей на нём. Тем самым множество $V(C_7)$ является модулем. Значит, G изоморфен 7-циклу. Лемма 3 доказана.

4. Атомарные $\{P_5, K_{2,3}, W_4\}$-свободные графы, содержащие порождённый 5-цикл

Пусть $G = (V, E)$ — атомарный $\{P_5, K_{2,3}, W_4\}$-свободный граф, в котором имеется порождённый цикл $C_5 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Всюду далее индексы вершин данного цикла понимаются по модулю 5. Применительно к графу G введём следующие обозначения:

- $X_i \triangleq \{x \notin V(C_5) \mid N(x) \cap V(C_5) = \{v_i, v_{i+2}\}\}$,
- $Y_i \triangleq \{y \notin V(C_5) \mid N(y) \cap V(C_5) = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}\}$,
- $Z_i \triangleq \{z \notin V(C_5) \mid N(z) \cap V(C_5) = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}\}$,
- $T_i \triangleq \{t \notin V(C_5) \mid N(t) \cap V(C_5) = \{v_i, v_{i+2}, v_{i+3}\}\}$,
- W — множество вершин, смежных сразу со всеми вершинами 5-цикла $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$,
- $S \triangleq V \setminus \left\langle V(C_5) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{5} (X_i \cup Y_i \cup Z_i \cup T_i) \cup W \right\rangle$.

Далее будут сформулированы и доказаны несколько утверждений о структуре множеств X_i, Y_i, Z_i, T_i и W, а также рёбер между ними.

Лемма 4. *Любая вершина, не принадлежащая 5-циклу и смежная с одной или несколькими его вершинами, принадлежит множеству*

$$\bigcup_{i=1}^{5} (X_i \cup Y_i \cup Z_i \cup T_i) \cup W.$$

Доказательство. Если вершина не входит в множество $V(C_5) \cup S$, то она не может быть смежна ровно с одной или ровно с двумя смежными вершинами 5-цикла, так как граф G $\{P_5\}$-свободен. Поэтому данная вершина принадлежит множеству

$$\bigcup_{i=1}^{5} (X_i \cup Y_i \cup Z_i \cup T_i) \cup W.$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *При любом i множества X_i, Y_i, Z_i, T_i и W являются кликами.*

Доказательство. Любые две вершины множества X_i должны быть смежны, иначе они вместе с вершинами v_i, v_{i+1}, v_{i+2} порождают подграф $K_{2,3}$. Любые две вершины множества Y_i должны быть смежны, иначе они вместе с вершинами v_i, v_{i+1}, v_{i+2} порождают подграф W_4. То же самое верно и для множеств Z_i и W. Любые две вершины множества T_i должны быть смежны, иначе они вместе с вершинами v_{i+4}, v_i, v_{i+3} порождают подграф $K_{2,3}$. Лемма 5 доказана.

В следующей лемме рассмотрим множества X_1–X_5.

Лемма 6. *Если множество X_i непусто, то*

$$X_i * (Y_i \cup Y_{i+2} \cup Y_{i+3} \cup Z_i \cup Z_{i+4} \cup T_{i+3} \cup T_{i+4} \cup W),$$
$$X_i \bullet (X_{i+1} \cup X_{i+4} \cup Y_{i+1} \cup Y_{i+4} \cup Z_{i+2} \cup T_i \cup T_{i+2}),$$
$$Z_{i+1} = Z_{i+3} = T_{i+1} = \varnothing.$$

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент множества X_i. Если $xy \in E$, $y \in Y_i$, то y, x, v_i, v_{i+1}, v_{i+2} порождают подграф W_4. Значит, $X_i * Y_i$. Если $xy \in E$, $y \in Y_{i+2}$, то v_{i+3}, y, x, v_i, v_{i+1} порождают подграф P_5. Значит, $X_i * Y_{i+2}$. Аналогично $X_i * Y_{i+3}$. Действительно, если $xy \in E$ для некоторой вершины $y \in Y_{i+3}$, то v_{i+4}, y, x, v_{i+2}, v_{i+1}. Если $xz \in E$, $z \in Z_i$, то z, x, v_i, v_{i+1}, v_{i+2} порождают подграф W_4. Значит, $X_i * Z_i$. Аналогично $X_i * Z_{i+4}$. Действительно, если $xz \in E$ для некоторой вершины $z \in Z_{i+4}$, то z, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, x порождают W_4. Если $xt \in E$, $t \in T_{i+3}$, то x, v_{i+1}, v_{i+3}, t, v_{i+2} порождают подграф $K_{2,3}$. Значит, $X_i * T_{i+3}$. Аналогично $X_i * T_{i+4}$. Действительно, если $xt \in E$ для некоторой вершины $t \in T_{i+4}$, то v_i, v_{i+1}, v_{i+4}, x, t порождают подграф $K_{2,3}$. Если $xw \in E$, $w \in W$, то w, x, v_i, v_{i+1}, v_{i+2} порождают подграф W_4. Значит, $X_i * W$.

Если $xx' \notin E$, $x' \in X_{i+1}$, то x, v_i, v_{i+4}, v_{i+3}, x' порождают подграф P_5. Значит, $X_i \bullet X_{i+1}$. Аналогично $X_i \bullet X_{i+4}$. Действительно, если $xx' \notin E$, $x' \in X_{i+4}$, то x', v_{i+4}, v_i, x, v_{i+2} порождают подграф P_5. Если $xy \notin E$, $y \in Y_{i+1}$, то x, v_i, v_{i+4}, v_{i+3}, y порождают подграф P_5. Значит, $X_i \bullet Y_{i+1}$. Аналогично $X_i \bullet Y_{i+4}$. Действительно, если $xy \notin E$, $y \in Y_{i+4}$, то x, v_{i+2}, v_{i+1}, y, v_{i+4} порождают подграф P_5. Если $xz \notin E$, $z \in Z_{i+2}$, то x, v_{i+1}, z, v_i, v_{i+2} порождают подграф $K_{2,3}$. Значит, $X_i \bullet Z_{i+2}$. Если $xt \notin E$, $t \in T_i$, то x, v_{i+1}, t, v_i, v_{i+2} порождают подграф $K_{2,3}$. Значит, $X_i \bullet T_i$. Аналогично $X_i \bullet T_{i+2}$. Действительно, если $xt \notin E$, $t \in T_{i+2}$, то x, v_{i+1}, t, v_i, v_{i+2} порождают подграф $K_{2,3}$.

Если $z \in Z_{i+1}$ и $xz \notin E$, то x, v_i, v_{i+1}, z, v_{i+3} порождают P_5. Если $z \in Z_{i+1}$ и $xz \in E$, то x, v_{i+1}, v_{i+4}, v_i, z порождают $K_{2,3}$. Значит, $Z_{i+1} = \varnothing$. Аналогично $Z_{i+3} = \varnothing$. Действительно, если $z \in Z_{i+3}$ и $xz \notin E$, то x, v_{i+2}, v_{i+1}, z, v_{i+4} порождают P_5, а если $z \in Z_{i+3}$ и $xz \in E$, то x, v_{i+1}, v_{i+3}, z, v_{i+2} порождают P_5. Если $t \in T_{i+1}$ и $xt \in E$, то t, v_i, v_{i+2},

x, v_{i+1} порождают $K_{2,3}$. Если $t \in T_{i+1}$ и $xt \notin E$, то x, v_i, v_{i+1}, t, v_{i+3} порождают P_5. Значит, $T_{i+1} = \varnothing$. Лемма 6 доказана.

В следующей лемме рассмотрим множества Y_1–Y_5.

Лемма 7. *Если множество Y_i непусто, то*

$$Y_i * (Z_{i+2} \cup T_i \cup T_{i+2}),$$
$$Y_i \bullet (Y_{i+1} \cup Y_{i+4} \cup Z_i \cup Z_{i+4} \cup T_{i+1} \cup T_{i+3} \cup T_{i+4} \cup W).$$

Доказательство. Пусть $y \in Y_i$. Если $yz \in E$, $z \in Z_{i+2}$, то y, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, z порождают подграф W_4. Значит, $Y_i * Z_{i+2}$. Если $yt \in E$, $t \in T_i$, то y, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, t порождают подграф W_4. Значит, $Y_i * T_i$. Аналогично $Y_i * T_{i+2}$.

Если $yy' \notin E$, $y' \in Y_{i+1}$, то y, v_i, v_{i+4}, v_{i+3}, y' порождают подграф P_5. Значит, $Y_i \bullet Y_{i+1}$. Аналогично $Y_i \bullet Y_{i+4}$. Если $yz \notin E$, $z \in Z_i$, то v_{i+1}, v_i, y, v_{i+2}, z порождают подграф W_4. Значит, $Y_i \bullet Z_i$. Аналогично $Y_i \bullet Z_{i+4}$. Если $yt \notin E$, $t \in T_{i+1}$, то v_{i+2}, y, v_i, v_{i+4}, t порождают подграф P_5. Значит, $Y_i \bullet T_{i+1}$. Если $yt \notin E$, $t \in T_{i+3}$, то y, v_{i+1}, t, v_{i+3}, v_{i+4} порождают подграф P_5. Значит, $Y_i \bullet T_{i+3}$. Аналогично $Y_i \bullet T_{i+4}$. Если $yw \notin E$, $w \in W$, то v_{i+1}, v_i, y, v_{i+2}, w порождают подграф W_4. Значит, $Y_i \bullet W$. Лемма 7 доказана.

В следующей лемме рассмотрим множества Z_1–Z_5.

Лемма 8. *Если множество Z_i непусто, то*

$$Z_i * (Z_{i+2} \cup Z_{i+3} \cup T_{i+4}), \quad Z_i \bullet (Z_{i+1} \cup Z_{i+4} \cup W),$$
$$T_i = T_{i+1} = T_{i+2} = T_{i+3} = \varnothing.$$

Доказательство. Рассмотрим $z \in Z_i$. Если $zz' \in E$, $z' \in Z_{i+2}$, то z, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, z' порождают подграф W_4. Значит, $Z_i * Z_{i+2}$. Аналогично $Z_i * Z_{i+3}$. Если $zt \in E$, $t \in T_{i+4}$, то v_i, t, v_{i+3}, v_{i+4}, z порождают подграф $K_{2,3}$. Значит, $Z_i * T_{i+4}$.

Если $zz' \notin E$, $z' \in Z_{i+1}$, то v_{i+2}, v_{i+1}, z, v_{i+3}, z' порождают подграф W_4. Значит, $Z_i \bullet Z_{i+1}$. Аналогично $Z_i \bullet Z_{i+4}$. Если $zw \notin E$, $w \in W$, то v_{i+1}, v_i, z, v_{i+2}, w порождают подграф W_4. Значит, $Z_i \bullet W$.

Если $zt \in E$, $t \in T_i$, то z, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, t порождают подграф W_4. Если $zt \notin E$, $t \in T_i$, то z, t, v_{i+4}, v_i, v_{i+3} порождают подграф $K_{2,3}$. Значит, $T_i = \varnothing$. Аналогично $T_{i+3} = \varnothing$. Если $zt \in E$, $t \in T_{i+1}$, то z, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, t порождают подграф W_4. Если $zt \notin E$, $t \in T_{i+1}$, то v_{i+2}, z, v_i, v_{i+4}, t порождают подграф P_5. Значит, $T_{i+1} = \varnothing$. Аналогично $T_{i+2} = \varnothing$. Лемма 8 доказана.

В следующей лемме рассмотрим множества T_1–T_5.

Лемма 9. *Если множество T_i непусто, то*

$$T_i * W, T_i \bullet (T_{i+2} \cup T_{i+3}), \quad T_{i+1} = T_{i+4} = \varnothing.$$

Доказательство. Пусть $t \in T_i$. Если $tw \in E$, $w \in W$, то w, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, t порождают подграф W_4. Значит, $T_i * W$. Если $tt' \notin E$, $t' \in T_{i+2}$, то t, t', v_{i+1}, v_i, v_{i+2} порождают подграф $K_{2,3}$. Значит, $T_i \bullet T_{i+2}$. Аналогично $T_i \bullet T_{i+3}$.

Если $tt' \notin E$, $t' \in T_{i+1}$, то v_{i+4}, t', v_{i+1}, v_{i+2}, t порождают подграф P_5. Если $tt' \in E$, $t' \in T_{i+1}$, то v_i, t', v_{i+2}, t, v_{i+1} порождают подграф $K_{2,3}$. Значит, $T_{i+1} = \varnothing$. Аналогично $T_{i+4} = \varnothing$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Если $|X_i| \geqslant 2$, то для любого $j \in \{i+2, i+3\}$ имеем $X_i * X_j$ или $X_i \bullet X_j$.*

Доказательство. Предположим, напротив, что существуют вершины $x_1, x_2 \in X_i$ и $x' \in X_j$, для которых $x_1x' \in E$, $x_2x' \notin E$. По лемме 5 имеем $x_1x_2 \in E$. Из соображений симметрии можно рассматривать только случай $j = i+2$. Тогда x_2, x_1, x', v_{i+4}, v_{i+3} порождают подграф P_5. Значит, $X_i * X_{i+2}$ или $X_i \bullet X_{i+2}$. Лемма 10 доказана.

В следующих двух леммах формулируются и доказываются достаточные условия того, что $\bigcup\limits_{i=1}^{5} X_i = \bigcup\limits_{i=1}^{5} T_i = \varnothing$.

Лемма 11. *Если некоторый элемент множества $Y_i \neq \varnothing$ не смежен с некоторым элементом множества $Z_{i+1} \cup Z_{i+3} \neq \varnothing$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{5} X_i = \bigcup\limits_{i=1}^{5} T_i = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $y \in Y_i$ и $z \in Z_{i+1}$, причём $yz \notin E$. Случай, когда $z \in Z_{i+3}$, рассматривается аналогично из соображений симметрии. Поскольку $Z_{i+1} \neq \varnothing$, $X_i = X_{i+3} = \varnothing$ по лемме 6. Так как $Z_{i+1} \neq \varnothing$, $T_{i+1} = T_{i+2} = T_{i+3} = T_{i+4} = \varnothing$ по лемме 8.

Предположим, что $x \in X_{i+1}$. Тогда $xy \in E$ и $xz \notin E$ по лемме 6. Тем самым x, y, v_i, v_{i+4}, z порождают подграф P_5, значит, $X_{i+1} = \varnothing$.

Предположим, что $x \in X_{i+2}$. Тогда $xy \notin E$ и $xz \notin E$ по лемме 6. Тем самым $y, v_{i+1}, z, v_{i+4}, x$ порождают подграф P_5, значит, $X_{i+2} = \varnothing$.

Предположим, что $x \in X_{i+4}$. Тогда $xy \in E$ и $xz \in E$ по лемме 6. Тем самым v_{i+3}, z, x, y, v_i порождают подграф P_5, значит, $X_{i+4} = \varnothing$.

Предположим, что $t \in T_i$. Тогда $tz \notin E$, $ty \notin E$ по леммам 7 и 8. Тем самым y, v_i, t, v_{i+3}, z порождают подграф P_5, значит, $T_i = \varnothing$. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Если элемент множества Y_i смежен с элементом множества $Y_{i+2} \cup Y_{i+3}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{5} X_i = \bigcup\limits_{i=1}^{5} T_i = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $y \in Y_i$ и $y' \in Y_{i+2}$ (случай, когда $y' \in Y_{i+3}$, рассматривается аналогично), причём $yy' \in E$.

Если $x \in X_{i+1}$, то $xy \in E$ и $xy' \in E$ по лемме 6. Тогда $y, x, y', v_{i+2}, v_{i+1}$ порождают подграф W_4, поэтому $X_{i+1} = \varnothing$.

Если $x \in X_i$, то $xy \notin E$ и $xy' \notin E$ по лемме 6. Тогда x, v_i, y, y', v_{i+3} порождают подграф P_5, поэтому $X_i = \varnothing$. Аналогично $X_{i+2} = \varnothing$.

Если $x \in X_{i+3}$, то $xy \notin E$ и $xy' \in E$ по лемме 6. Тогда x, y, v_{i+4}, y', v_i порождают подграф $K_{2,3}$, поэтому $X_{i+3} = \varnothing$. Аналогично $X_{i+4} = \varnothing$.

Если $t \in T_{i+2}$, то $ty \notin E$ и $ty' \notin E$ по лемме 7. Тогда t, v_i, y, y', v_{i+3} порождают подграф P_5, поэтому $T_{i+2} = \varnothing$.

Если $t \in T_{i+1}$, то $ty \in E$ и $ty' \in E$ по лемме 7. Тогда $y', t, v_{i+3}, v_{i+2}, y$ порождают подграф W_4, поэтому $T_{i+1} = \varnothing$. Аналогично $T_{i+3} = \varnothing$.

Если $t \in T_i$, то $ty \notin E$ и $ty' \in E$ по лемме 7. Тогда y, v_{i+4}, t, y', v_i порождают подграф $K_{2,3}$, поэтому $T_i = \varnothing$. Аналогично $T_{i+4} = \varnothing$. Лемма 12 доказана.

Далее с использованием ранее доказанных утверждений будет показано, что если $S \neq \varnothing$, то граф G содержит мало вершин.

Лемма 13. *Если $S \neq \varnothing$, то $|V| \leqslant 13$.*

Доказательство. Предположим противное. Обозначим через V' множество вершин, которые не принадлежат S и смежны с вершинами из S. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{P_5\})$, то $V' \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{5} (Z_i \cup T_i) \cup W$. Граф G атомарный, поэтому если $V' \neq \varnothing$, то V' не должно быть кликой, так как иначе она будет разделяющей.

Предположим, что существуют две различные несмежные вершины $u \in V'$ и $v \in V'$, которые смежны с вершинами $a \in S$ и $b \in S$ соответственно. Если вершины u и v не имеют общего соседа в S и $ab \notin E$, то вершины a, b, u, v и некоторые вершины 5-цикла порождают P_k, где $k \geqslant 5$. Если вершины u и v не имеют общего соседа в S и $ab \in E$, то $u, v \in W$, иначе G содержит порождённый подграф P_5. Тогда вершины u и v смежны по лемме 5, поэтому можно считать, что $a = b$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $u \in W$, то $v \in T_i$ по леммам 5 и 8. Тогда a, v_i, v_{i+2}, u, v порождают подграф $K_{2,3}$. Если $u \in T_i$, то по леммам 5, 8 и 9 имеем $v \in W \cup Z_{i+1}$. Случай $v \in W$ был разобран ранее, а случай $v \in Z_{i+1}$ будет разобран далее. Если же $u \in Z_i$, то $v \in Z_{i+2} \cup Z_{i+3} \cup T_{i+4}$ по леммам 5 и 8. Варианты $v \in Z_{i+2}$ и $v \in Z_{i+3}$ симметричны, поэтому рассмотрим только первый из них. Тогда v_i, v_{i+3}, a, v, u порождают подграф $K_{2,3}$. Варианты, когда $u \in Z_i$, $v \in T_{i+4}$ и $u \in T_i$, $v \in Z_{i+1}$, эквивалентны.

Предположим, что $u \in T_i$ и $v \in Z_{i+1}$. Поскольку $T_i \neq \varnothing$, по лемме 9 имеем $T_{i+1} = T_{i+4} = \varnothing$. Так как $Z_{i+1} \neq \varnothing$, $T_{i+2} = T_{i+3} = \varnothing$ по лемме 8. Кроме того из леммы 8 следует, что

$$Z_i = Z_{i+2} = Z_{i+3} = Z_{i+4} = \varnothing,$$

так как иначе $T_i = \varnothing$.

Множество X_i должно быть пустым, поскольку иначе по лемме 6 имеем $Z_{i+1} = \varnothing$. Аналогично множество X_{i+3} должно быть пустым, иначе $Z_{i+1} = \varnothing$ по лемме 6.

Проверим, что $X_{i+1} = X_{i+2} = X_{i+4} = W = \varnothing$. Если $x \in X_{i+1}$, то $xv \notin E$, $xu \notin E$ по лемме 6. Тогда a, u, v_i, v_{i+1}, x порождают подграф P_5. Значит, $X_{i+1} = \varnothing$. Аналогично $X_{i+2} = \varnothing$. Если $x \in X_{i+4}$, то $xu \in E$, $xv \in E$ по лемме 6. Тогда v_{i+2}, a, x, v, u порождают подграф $K_{2,3}$. Значит, $X_{i+4} = \varnothing$. Если $w \in W$, то $vw \in E$, $uw \notin E$ по леммам 8 и 9. Вместе с тем, $aw \notin E$, иначе v_i, v_{i+2}, a, w, u порождают подграф $K_{2,3}$. Тогда $v_{i+4}, w, v_{i+2}, u, a$ порождают подграф P_5, а значит, $W = \varnothing$.

Напомним, что $Z_{i+1} * T_i$ по лемме 8. Если $u' \in T_i$ и $u' \neq u$, то $uu' \in E$ по лемме 5. Тогда $u'a \in E$, иначе u', u, a, v, v_{i+1} порождают подграф P_5. Если $v' \in Z_{i+1}$ и $v' \neq v$, то $vv' \in E$ по лемме 5. Тогда $v'a \in E$, иначе v', v, a, u, v_i порождают подграф P_5. Тем самым если некоторый элемент S смежен с вершиной из T_i или с вершиной из Z_{i+1}, то он смежен сразу со всеми элементами множества $Z_{i+1} \cup T_i$. Следовательно, S — модуль в графе G.

По лемме 11 никакая вершина множества Z_{i+1} не смежна ни с какой вершиной множества $Y_i \cup Y_{i+3}$. По лемме 12 никакая вершина множества Y_j не смежна ни с какой вершиной множества $Y_{j-2} \cup Y_{j+2}$ при любом j. Тем самым по леммам 5 и 7 каждое из множеств Y_1–Y_5 является модулем в графе G. То же самое верно и для множеств Z_{i+1} и T_i. Значит, каждое из множеств S, Y_1–Y_5, Z_{i+1}, T_i содержит не более одного элемента, поэтому $|V| \leqslant 13$. Лемма 13 доказана.

В следующей лемме доказывается важное следствие того факта, что $\bigcup\limits_{i=1}^{5} X_i = \bigcup\limits_{i=1}^{5} T_i = S = \varnothing$.

Лемма 14. *Если* $\bigcup\limits_{i=1}^{5} X_i = \bigcup\limits_{i=1}^{5} T_i = S = \varnothing$, *то граф* G $\{O_3\}$*-свободен.*

Доказательство. Предположим, напротив, что граф G содержит попарно не смежные вершины x, y, z. Из лемм 4, 5, 7 и 8, а также из условия данной леммы следует, что

$$W \cap \{x, y, z\} = V(C_5) \cap \{x, y, z\} = \varnothing.$$

Действительно, $V = \bigcup\limits_{i=1}^{5}(Y_i \cup Z_i) \cup W \cup V(C_5)$ по лемме 4, и при любом i множества Y_i и Z_i, а также W являются кликами по лемме 5. По леммам 7 и 8 имеем $W \bullet Y_i$ и $W \bullet Z_i$ при любом i. Тем самым $W \cap \{x, y, z\} = \varnothing$. Предположим, что $x = v_i$. Тогда $\{y, z\} \subseteq \{v_{i+2}, v_{i+3}\} \cup Z_{i+1} \cup Y_{i+1} \cup Y_{i+2}$, откуда $\{y, z\} \cap \{v_{i+2}, v_{i+3}\} = \varnothing$. По лемме 7 имеем $Z_{i+1} \bullet (Y_{i+1} \cup Y_{i+2})$ и $Y_{i+1} \bullet Y_{i+2}$. Поэтому вершины y и z обязательно будут смежными.

Если каждая из вершин x, y, z имеет ровно трёх соседей на 5-цикле, то по лемме 5 одна из них принадлежит множеству Y_i, а другая — множеству Y_{i+1}, поэтому по лемме 7 они должны быть смежными.

Если вершины x и y имеют ровно по три соседа на 5-цикле, а вершина z имеет ровно четыре соседа на нём, то по леммам 5 и 7 можно считать, что $x \in Y_i$ и $y \in Y_{i+2}$. Отсюда и из леммы 7 следует, что $z \in Z_{i+3}$. Тогда вершины $x, v_{i+1}, z, v_{i+3}, y$ порождают подграф P_5.

Если вершина x имеет ровно трёх соседей на 5-цикле, а вершины y и z имеют ровно по четыре соседа на нём, то по леммам 5 и 8 можно считать, что $y \in Z_i$ и $z \in Z_{i+2}$. Отсюда и из леммы 7 следует, что $x \in Y_{i+4}$. Тогда вершины $y, v_{i+1}, x, v_{i+4}, z$ порождают подграф P_5.

Если каждая из трёх вершин x, y, z имеет ровно по четыре соседа на 5-цикле, то по лемме 5 можно считать, что одна из них принадлежит множеству Z_i, а другая — Z_{i+1}, поэтому по лемме 8 они должны быть смежными. Лемма 14 доказана.

5. Некоторые результаты о сложности задачи ВВР

В [14] были доказаны следующие две леммы.

Лемма 15. *Задача* ВВР *для* $\{O_3\}$*-свободного графа* $G = (V, E)$ *и функции* $w\colon V \to \mathbb{N}$ *может быть решена за время* $O\big(\big(\sum\limits_{v \in V} w(v)\big)^3\big)$.

Лемма 16. *Для любого фиксированного* C *задача* ВВР *решается за полиномиальное от суммы весов вершин время в классе графов с не более чем* C *вершинами.*

6. Основной результат работы

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Задача* ВВР *разрешима за полиномиальное время от суммы весов вершин в классе* $\{P_5, K_{2,3}, W_4\}$*-свободных графов.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}, W_4\})$. По леммам 1, 2 и замечанию после леммы 2 можно считать, что G атомарный и содержит

либо порождённый подграф C_5, либо порождённый подграф $\overline{C}_7$. По леммам 3 и 16 можно предполагать, что G содержит порождённый подграф C_5. По леммам 13 и 16 можно считать, что $S = \varnothing$. Из леммы 6 следует, что при любом i каждая вершина множества $V \setminus (X_{i+2} \cup X_{i+3})$ либо одновременно смежна со всеми вершинами множества X_i, либо не смежна ни с одной из них. По лемме 10 то же верно и для множеств X_{i+2} и X_{i+3}. Следовательно, X_i — модуль в графе G. По леммам 12, 14 и 15 можно считать, что если $Y_i \neq \varnothing$, то $Y_i * (Y_{i+2} \cup Y_{i+3})$. По леммам 11, 14 и 15 можно считать, что если $Y_i \neq \varnothing$ и $Z_{i+1} \cup Z_{i+3} \neq \varnothing$, то $Y_i \bullet (Z_{i+1} \cup Z_{i+3})$. Отсюда и из леммы 7 следует, что при любом i множество Y_i является модулем (напомним, что X_i — модуль при любом i). Так как при любом i множества X_i и Y_i являются модулями, по лемме 8 множество Z_i будет модулем при любом i. Поскольку при любом i множества X_i, Y_i, Z_i являются модулями, по лемме 9 множество T_i будет модулем при любом i. Значит, W — тоже модуль графа G. Поэтому при любом i множества Y_i, Z_i, T_i и W, а также каждое из множеств X_1–X_5 содержат не более одной вершины. Значит, $|V| \leqslant 26$. Отсюда и из леммы 16 следует справедливость настоящей теоремы. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
2. **Král' D., Kratochvíl J., Tuza Z., Woeginger G.** Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Proc. 27th Int. Workshop Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (Boltenhagen, Germany, June 14–16, 2001). Heidelberg: Springer, 2001. P. 254–262. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2204).
3. **Lozin V. V., Malyshev D. S.** Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 216. P. 273–280.
4. **Malyshev D. S.** Polynomial-time approximation algorithms for the coloring problem in some cases // J. Comb. Optim. 2017. Vol. 33, No. 3. P. 809–813.
5. **Dabrowski K., Golovach P. A., Paulusma D.** Colouring of graphs with Ramsey-type forbidden subgraphs // Theor. Comput. Sci. 2014. Vol. 522. P. 34–43.
6. **Dabrowski K., Lozin V. V., Raman R., Ries B.** Colouring vertices of triangle-free graphs without forests // Discrete Math. 2012. Vol. 312, No. 7. P. 1372–1385.
7. **Golovach P. A., Johnson M., Paulusma D., Song J.** A survey on the computational complexity of coloring graphs with forbidden subgraphs // J. Graph Theory. 2017. Vol. 84. P. 331–363.
8. **Golovach P. A., Paulusma D., Ries B.** Coloring graphs characterized by a forbidden subgraph // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 180. P. 101–110.

9. **Hoàng C., Lazzarato D.** Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P}_5)$-free graphs and similar graph classes // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 186. P. 105–111.
10. **Karthick T., Maffray F., Pastor L.** Polynomial cases for the vertex coloring problem // Algorithmica. 2017. Vol. 81, No. 3. P. 1053–1074.
11. **Malyshev D. S.** The coloring problem for classes with two small obstructions // Optim. Lett. 2014. Vol. 8, No. 8. P. 2261–2270.
12. **Malyshev D. S.** Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem // J. Comb. Optim. 2015. Vol. 31, No. 2. P. 833–845.
13. **Malyshev D. S.** The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures // Discrete Appl. Math. 2018. Vol. 247. P. 423–432.
14. **Malyshev D. S., Lobanova O. O.** Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 219. P. 158–166.
15. **Cournier A., Habib M.** A new linear algorithm for modular decomposition // Trees in Algebra and Programming – CAAP'94 (Proc. 19th Int. Colloq., Edinburgh, UK, Apr. 11–13, 1994), Heidelberg: Springer, 1994. P. 68–84. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 787).
16. **Tarjan R. E.** Decomposition by clique separators // Discrete Math. 1985. Vol. 55, No. 2. P. 221–232.
17. **Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R.** The strong perfect graph theorem // Ann. Math. 2006. Vol. 164. P. 51–229.
18. **Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.** Polynomial algorithms for perfect graphs // Ann. Discrete Math. 1984. Vol. 21. P. 325–356.

Грибанов Дмитрий Владимирович
Малышев Дмитрий Сергеевич
Мокеев Дмитрий Борисович

Статья поступила
25 июля 2019 г.
После доработки —
6 января 2020 г.
Принята к публикации
19 февраля 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2020. Vol. 27, No. 3. P. 71–87

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2020.27.668

EFFICIENT SOLVABILITY OF THE WEIGHTED VERTEX COLORING PROBLEM FOR SOME HEREDITARY CLASS OF GRAPHS WITH 5-VERTEX PROHIBITIONS

D. V. Gribanov[1,2,a], *D. S. Malyshev*[1,2,b], and *D. B. Mokeev*[2,1,c]

[1] National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

[2] Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Avenue, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: [a]`dimitry.gribanov@gmail.com`, [b]`dsmalyshev@rambler.ru`,
[c]`mokeevdb@gmail.com`

Abstract. We consider the problem of minimizing the number of colors in the colorings of the vertices of a given graph so that, to each vertex there is assigned some set of colors whose number is equal to the given weight of the vertex; and adjacent vertices receive disjoint sets. For all hereditary classes defined by a pair of forbidden induced connected subgraphs on 5 vertices but four cases, the computational complexity of the weighted vertex coloring problem with unit weights is known. We prove the polynomial solvability on the sum of the vertex weights for this problem and the intersection of two of the four open cases. We hope that our result will be helpful in resolving the computational complexity of the weighted vertex coloring problem in the above-mentioned forbidden subgraphs. Illustr. 1, bibliogr. 18.

Keywords: weighted vertex coloring problem, hereditary class, computational complexity.

REFERENCES

1. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).

This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 18–31–20001-mol-a-ved).

English ver.: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (3), 480–489 (2020), DOI 10.1134/S1990478920030072.

2. **D. Král, J. Kratochvíl, Z. Tuza,** and **G. Woeginger,** Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs, in *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (Proc. 27th Int. Workshop, Boltenhagen, Germany, June 14–16, 2001) (Springer, Heidelberg, 2001), pp. 254–262 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2204)
3. **V. V. Lozin** and **D. S. Malyshev,** Vertex coloring of graphs with few obstructions, *Discrete Appl. Math.* **216**, 273–280 (2017).
4. **D. S. Malyshev,** Polynomial-time approximation algorithms for the coloring problem in some cases, *J. Comb. Optim.* **33** (3), 809–813 (2017).
5. **K. Dabrowski, P. A. Golovach,** and **D. Paulusma,** Colouring of graphs with Ramsey-type forbidden subgraphs, *Theor. Comput. Sci.* **522**, 34–43 (2014).
6. **K. Dabrowski, V. V. Lozin, R. Raman,** and **B. Ries,** Colouring vertices of triangle-free graphs without forests, *Discrete Math.* **312**, 1372–1385 (2012).
7. **P. A. Golovach, M. Johnson, D. Paulusma,** and **J. Song,** A survey on the computational complexity of coloring graphs with forbidden subgraphs, *J. Graph Theory* **84**, 331–363 (2017).
8. **P. A. Golovach, D. Paulusma,** and **B. Ries,** Coloring graphs characterized by a forbidden subgraph, *Discrete Appl. Math.* **180**, 101–110 (2015).
9. **C. Hoàng** and **D. Lazzarato,** Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P}_5)$-free graphs and similar graph classes, *Discrete Appl. Math.* **186**, 105–111 (2015).
10. **T. Karthick, F. Maffray,** and **L. Pastor,** Polynomial cases for the vertex coloring problem, *Algorithmica* **81** (3), 1053–1074 (2017).
11. **D. S. Malyshev,** The coloring problem for classes with two small obstructions, *Optim. Lett.* **8** (8), 2261–2702 (2014).
12. **D. S. Malyshev,** Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem, *J. Comb. Optim.* **31** (2), 833–845 (2015).
13. **D. S. Malyshev,** The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures, *Discrete Appl. Math.* **247**, 423–432 (2018).
14. **D. S. Malyshev** and **O. O. Lobanova,** Two complexity results for the vertex coloring problem, *Discrete Appl. Math.* **219**, 158–166 (2017).
15. **A. Cournier** and **M. Habib,** A new linear algorithm for modular decomposition, in *Trees in Algebra and Programming – CAAP'94* (Proc. 19th Int. Colloq., Edinburgh, UK, Apr. 11–13, 1994) (Springer, Heidelberg, 1994), pp. 68–84 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 787).
16. **R. E. Tarjan,** Decomposition by clique separators, *Discrete Math.* **55** (2), 221–232 (1985).
17. **M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour,** and **R. Thomas,** The strong perfect graph theorem, *Ann. Math.* **164**, 51–229 (2006).

18. **M. Grötschel, L. Lovász,** and **A. Schrijver,** Polynomial algorithms for perfect graphs, *Ann. Discrete Math.* **21**, 325–356 (1984).

Dmitry V. Gribanov
Dmitry S. Malyshev
Dmitry B. Mokeev

Received July 25, 2019
Revised January 6, 2020
Accepted February 19, 2020