ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2020. Т. 27, № 3. С. 28–52

УДК 519.8 DOI 10.33048/daio.2020.27.677

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ С АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКОЙ ТОЧНОСТИ 2/3 ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ОБ m КОММИВОЯЖЁРАХ НА МАКСИМУМ

А. Н. Глебов[1,2,a], *С. Г. Токтохоева*[2,b]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

[2] Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: [a] angle@math.nsc.ru, [b] s.toktokhoeva@ya.ru

Аннотация. В 2005 г. Капланом и др. был разработан полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой точности 2/3 для несимметричного случая задачи коммивояжёра на максимум. В 2014 г. Глебов, Замбалаева и Скретнева получили алгоритм с такой же оценкой точности и кубической оценкой временно́й сложности для несимметричного случая задачи о двух коммивояжёрах на максимум, где требуется найти два рёберно не пересекающихся гамильтоновых цикла максимального суммарного веса в полном взвешенном n-вершинном ориентированном графе. Целью настоящей работы является построение аналогичного алгоритма для более общей задачи об m коммивояжёрах на максимум в несимметричном случае и обоснование для этого алгоритма оценки точности, асимптотически стремящейся к 2/3 с ростом m, и оценки временно́й сложности $O(mn^3)$. Ил. 2, библиогр. 29.

Ключевые слова: гамильтонов цикл, задача коммивояжёра, задача нескольких коммивояжёров, приближённый алгоритм, гарантированная оценка точности.

Введение

Уже в течение 40 лет наряду с классической задачей коммивояжёра (TSP — Travelling Salesman Problem) в работах многих авторов рассматривается её естественное обобщение, каким является задача об m коммивояжёрах (m-PSP — m-Peripatetic Salesman Problem), где требуется найти m гамильтоновых циклов, не имеющих общих рёбер, с минимальным

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18–01–00353, 18–01–00747).

(задача m-PSP-min) или максимальным (m-PSP-max) суммарным весом рёбер в полном взвешенном графе.

Впервые проблема m-PSP была упомянута Кларупом в [1] и с тех пор исследовалась разными авторами в симметричном и несимметричном (задача m-APSP) случаях, для произвольной [2,3], метрической [4–6] и евклидовой [7, 8] весовых функций, а также в специальных постановках, когда веса рёбер графа принимают значения из заданного интервала или конечного числового множества [3,9–12]. В [10,11,13] был изучен вариант задачи, когда для каждого гамильтонова цикла задана своя весовая функция, и были разработаны приближённые алгоритмы для этого случая.

К числу наиболее значимых приложений можно отнести задачу о выборе маршрутов обходчиков [14], когда для группы из m сторожей требуется найти систему замкнутых маршрутов без общих участков, чтобы добиться наибольшего охвата охраняемой территории. В работах Де Корта [15] приводятся постановки задач из области сетевого дизайна, когда для повышения надёжности сети требуется покрыть её узлы системой непересекающихся цикловых соединений, а также приложения в области теории расписаний с элементами маршрутизации, когда каждая работа должна выполняться на каждой машине дважды, однако недопустимо оба раза выполнять работы в одном и том же порядке.

Все содержательные постановки задачи m-PSP (как на минимум, так и на максимум) NP-трудны, что вытекает из установленной Де Кортом [15–17] NP-полноты задачи о существовании двух рёберно не пересекающихся гамильтоновых циклов в графе. В связи с этим основные направления исследований связаны с выявлением полиномиально разрешимых случаев этих задач, разработкой эвристических приближённых алгоритмов, вероятностных алгоритмов, а также полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности, асимптотически точных алгоритмов и полиномиальных аппроксимационных схем.

Де Брей и Волегант [18] выделили некоторые полиномиально разрешимые случаи задачи 2-PSP. Де Корт [15–17] указал верхние и нижние оценки для метода ветвей и границ в задаче 2-PSP. Наибольшее количество результатов было получено в области построения полиномиальных приближённых алгоритмов с гарантированными оценками точности для задач m-PSP-min и m-PSP-max. Так, для задачи 2-PSP-min в метрическом случае Агеев и Пяткин [5] разработали полиномиальный 2-приближённый алгоритм. Для симметричного варианта задачи 2-PSP-max в [2, 3] были построены полиномиальные алгоритмы с гарантированными оценками 3/4 и 7/9. В [9] было получено несколько полиномиальных приближённых алгоритмов, включая алгоритм с оценкой точности 6/5, для специального случая задачи 2-PSP-min, когда веса рёбер графа принимают значения 1 и 2 (задача 2-PSP(1,2)-min). В [10,11] задача 2-PSP(1,2)-min исследовалась в случае, когда весовые функции двух гамильтоновых циклов различны. Для этой версии задачи были разработаны полиномиальные алгоритмы с оценками точности 7/5 [10] и 4/3 [11]. Для метрического варианта задачи m-PSP-max (при произвольном m) в [6] был получен полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой 5/6, а для евклидовой задачи m-PSP-max в [8] построен асимптотически точный полиномиальный алгоритм. Подробный обзор полученных в указанном направлении результатов приводится в [19, 20]. Отметим, что большинство этих результатов относится к симметричному случаю задачи m-PSP.

Изучение несимметричных постановок задач коммивояжёра и нескольких коммивояжёров оказалось сопряжено с гораздо бóльшими трудностями, чем исследование их симметричных аналогов. Достаточно упомянуть, что среди известных приближённых алгоритмов для задачи ATSP-max до сих пор одним из лучших является алгоритм из [21], имеющий априорную оценку точности 2/3, в то время как для симметричной задачи TSP-max ещё в 1984 г. Сердюковым [22] был разработан достаточно простой в применении полиномиальный алгоритм с гарантированной оценкой 3/4, а в последние годы для этой задачи были предложены алгоритмы с оценками точности 25/33 [23], 7/9 [24] и 4/5 [25]. Важная особенность разработанного в [21] 2/3-приближённого алгоритма для задачи ATSP-max состоит в том, что этот алгоритм не является чисто комбинаторным, а использует идеи и методы, характерные для задач линейного программирования. Разработанный в [26] полиномиальный алгоритм для задачи 2-APSP-max также имеет оценку точности 2/3, однако основывается на чисто комбинаторных подходах. Предложенные в [26] методы были затем использованы авторами настоящей статьи в [27] для разработки полиномиального 3/5-приближённого алгоритм для задачи 3-APSP-max.

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы, используя некоторые процедуры из алгоритмов, описанных в [26, 27], и дополняя их новыми процедурами преобразования частичных туров и построения гамильтоновых циклов, получить для задачи m-APSP-max с произвольным значением $m \geqslant 2$ полиномиальный приближённый алгоритм, имеющий гарантированную оценку точности, не меньшую 3/5 и асимптотически стремящуюся к 2/3 с ростом m. Будет показано, что описанный ниже алгоритм $A_{2/3-\varepsilon}$ обладает такой оценкой точности, корректно работает при наличии во входном графе не менее $45(m-1)$ вершин и имеет оценку временнóй сложности $O(mn^3)$. Следует отметить, что указанный алгоритм, как и алгоритмы из [26, 27], находит такое приближённое решение задачи m-APSP-max, при котором различные гамильтоновы циклы не имеют общих дуг, однако встречные дуги вида (X, Y) и (Y, X) могут содержаться в двух различных гамильтоновых циклах.

1. Основные определения и обозначения

Далее через $G = G(V, E, w)$ будем обозначать полный ориентированный взвешенный n-вершинный граф, подаваемый на вход задачи m-APSP-max, имеющий множество вершин V, множество дуг E и неотрицательную весовую функцию дуг $w\colon E \to \mathbb{R}^+$. Для каждого подграфа G' в G через $w(G')$ обозначим суммарный вес дуг в G'.

Несимметричная задача m-APSP-max *об* m *коммивояжёрах на максимум* состоит в отыскании в орграфе G набора из m ориентированных гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_m$, имеющих максимальный суммарный вес и не содержащих общих дуг:

$$w(H_1) + w(H_2) + \cdots + w(H_m) \to \max .$$

При этом допускается, что если какой-то цикл H_i содержит дугу (X, Y), то другой цикл H_j может содержать встречную дугу (Y, X). Через w^* обозначим вес оптимального решения задачи m-APSP-max.

Для каждой вершины v орграфа G (или его подграфа G') будем использовать следующие обозначения:

$d^+(v)$ — *полустепень захода* v, т. е. число входящих в вершину v дуг орграфа G (G');

$d^-(v)$ — *полустепень исхода* v, т. е. число исходящих из v дуг орграфа G (G');

$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$ — *степень вершины* v в G (G').

Будем называть подграф G' орграфа G (k, k)-*регулярным*, если для каждой его вершины v выполняется тождество $d^+(v) = d^-(v) = k$. Через $G_{k,k}$ обозначим остовный (k, k)-регулярный подграф максимального веса в G. Поскольку подграф в G, образованный объединением m гамильтоновых циклов из оптимального решения задачи m-APSP-max, является (m, m)-регулярным, то $w(G_{m,m}) \geqslant w^*$.

Назовём *сдвоенным треугольником* $(2, 2)$-регулярный орграф, состоящий из трёх вершин A, B, C и шести дуг (A, B), (B, A), (B, C), (C, B), (C, A), (A, C) (т. е. полный ориентированный граф на трёх вершинах). *Ориентированным* 2-*фактором* (или просто 2-*фактором*) в орграфе G будем называть любой его остовный $(1, 1)$-регулярный подграф, т. е. набор вершинно не пересекающихся ориентированных циклов, покрывающих все вершины G. Под *частичным туром* (или просто *туром*) в орграфе G (или в его подграфе G') будем понимать набор вершинно не пересекающихся ориентированных цепей, покрывающих все вершины орграфа. Любую цепь тура, состоящую из одной вершины, будем называть *тривиальной цепью* или *синглом*, а цепь, состоящую из более чем одной вершины, *нетривиальной*. Будем использовать обозначения $|T|$ и $p(T)$ для числа рёбер и числа цепей в частичном туре T соответственно. Из определения следует, что для любого частичного тура T в орграфе G' выполняется равенство

$$|T| + p(T) = |V(G')|.$$

Ясно, что из любого ориентированного 2-фактора удалением некоторых дуг можно получить частичный тур, а из любого частичного тура можно получить ориентированный гамильтонов цикл, добавляя дуги между концами цепей этого тура.

Для взвешенного орграфа $G = (V, E, w)$ определим его *двудольную модель* D как (неориентированный) взвешенный двудольный граф с долями V и V', где $V' = \{v' \mid v \in V\}$ — множество дубликатов вершин из V, и с множеством рёбер $E(D) = \{XY' \mid (X, Y) \in E\}$, где вес ребра определяется формулой $w(XY') = w(X, Y)$. Из данного определения следует, что $w(G) = w(D)$ и орграф G является (k, k)-регулярным тогда и только тогда, когда его двудольная модель D является k-регулярным графом.

2. Используемые процедуры из предшествующих алгоритмов

Как уже отмечалось, описанный далее алгоритм $A_{2/3-\varepsilon}$ основывается на некоторых процедурах из алгоритма $A_{3/5}$ для задачи 3-APSP-max [27] и алгоритма $A_{2/3}$ для задачи 2-APSP-max, разработанного в [26]. Упомянутые процедуры позволяют отыскивать в орграфах специального вида частичные туры достаточно большого рёберного веса, у которых количество цепей ограничено снизу линейной функцией от числа вершин. Так, процедура $P_{2/3}$ из алгоритма $A_{2/3}$ за время $O(n^3)$ находит в $(2, 2)$-регулярном n-вершинном взвешенном орграфе $G_{2,2}$ частичные туры $T^1_{2/3}$ и $T^2_{2/3}$, суммарный вес которых не меньше $\frac{2}{3}w(G_{2,2})$, а количество цепей в туре $T^2_{2/3}$ не меньше $n/5$. В нашем алгоритме $A_{2/3-\varepsilon}$ помимо процедуры $P_{2/3}$ будет использоваться основанная на ней процедура $P'_{2/3}$, описание которой приводится в разд. 4. Основное отличие процедуры $P'_{2/3}$ от $P_{2/3}$ состоит в том, что оба построенных ею частичных тура имеют ограничение снизу на число составляющих их цепей. При этом суммарный вес туров также не меньше $\frac{2}{3}w(G_{2,2})$.

Предложенная в алгоритме $A_{3/5}$ [27] процедура $P_{3/5}$ позволяет найти во взвешенном $(3, 3)$-регулярном n-вершинном орграфе $G_{3,3}$ частичные туры $T^1_{3/5}$, $T^2_{3/5}$ и $T^3_{3/5}$, суммарный вес которых не меньше $\frac{3}{5}w(G_{3,3})$. При этом тур $T^2_{3/5}$ состоит не менее чем из $n/6$ цепей, а тур $T^3_{3/5}$ — не менее чем из $n/4$ цепей. Время работы процедуры $P_{3/5}$ ограничено $O(n^3)$.

Ещё одна используемая нами процедура — это разработанный Габовым алгоритм [28] для отыскания во взвешенном n-вершинном неориентированном графе G подграфа максимального веса с заданными степенями вершин $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Время работы алгоритма Габова оценивается как $O\Big(n^2 \sum\limits_{i=1}^{n} d_i\Big)$. В нашем случае алгоритм Габова будет применяться для отыскания m-регулярного подграфа максимального веса в двудольной модели D орграфа G. Данному подграфу соответствует (m, m)-регулярный подграф максимального веса в орграфе G. Ясно, что в таком случае время работы алгоритма Габова не превосходит $O(mn^3)$.

Также нами будет использоваться алгоритм из [29], позволяющий разбить множество рёбер D-регулярного двудольного графа $H = (V_H, E_H)$ на D совершенных паросочетаний за время $O(|E_H| \log D)$. Применение этого алгоритма к двудольному m-регулярному $2n$-вершинному графу позволяет разбить его множество рёбер на m совершенных паросочетаний за время $O(mn \log m)$.

3. Описание алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$ и основной результат работы

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Представленный ниже алгоритм $A_{2/3-\varepsilon}$ находит в полном взвешенном n-вершинном орграфе $G = G(V, E, w)$, где $n \geqslant 45(m-1)$, набор из m рёберно не пересекающихся гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_m$, суммарный вес которых составляет не менее $\frac{2}{3}w^*$ при чётном m и не менее $\big(\frac{2}{3} - \frac{1}{5m}\big)w^*$ при нечётном m. Трудоёмкость алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$ оценивается как $O(mn^3)$.*

Доказательство этой теоремы составляет содержание следующих трёх разделов статьи. Начнём с описания алгоритма.

Алгоритм $A_{2/3-\varepsilon}$ для задачи m-APSP-max

Фаза 1. Построим двудольную модель D входного орграфа $G = (V, E, w)$. При помощи алгоритма Габова [28] за время $O(mn^3)$ найдём в D остовный m-регулярный подграф D_m максимального веса. Выделим в G соответствующий ему (m, m)-регулярный подграф $G_{m,m}$ максимального веса. Согласно сделанным выше замечаниям имеем $w(G_{m,m}) \geqslant w^*$.

Фаза 2. Разобьём множество дуг орграфа $G_{m,m}$ на m ориентированных 2-факторов $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Для этого используем двудольную модель орграфа $G_{m,m}$, т. е. полученный на фазе 1 алгоритма m-регулярный двудольный граф D_m. Разобьём множество рёбер D_m на m совершенных паросочетаний при помощи алгоритма из [29] за время $O(mn \log m)$. В орграфе $G_{m,m}$ найденным паросочетаниям соответствуют искомые рёберно не пересекающиеся 2-факторы $F_1, F_2, \ldots, F_m$.

Далее, в зависимости от чётности m, группируем 2-факторы $F_1, F_2, \ldots, F_m$ следующим образом:

• если m чётно, то каждую пару 2-факторов F_{2i-1}, F_{2i}, $i = 1, \ldots, m/2$, объединяем в $(2,2)$-регулярный орграф $G^i_{2,2}$;

• если m нечётно, то три 2-фактора с наименьшим весом объединяем в $(3,3)$-регулярный орграф $G_{3,3}$, а оставшиеся $m-3$ 2-факторов группируем по два (произвольным образом) в $(2,2)$-регулярные орграфы $G^i_{2,2}$, где $i = 1, \ldots, (m-3)/2$.

Фаза 3. Формируем в орграфе $G_{m,m}$ m рёберно не пересекающихся частичных туров $T_1, T_2, \ldots, T_m$ со следующими свойствами:

$$p(T_2) \geqslant \frac{n}{6}, \quad p(T_i) \geqslant \frac{n}{15}, \quad i = 3, \ldots, m.$$

Для построения частичных туров применяем к полученным на фазе 2 регулярным орграфам $G^i_{2,2}$ и $G_{3,3}$ процедуры $P_{2/3}$, $P'_{2/3}$ и $P_{3/5}$ следующим образом:

• если m чётно, то с помощью процедуры $P_{2/3}$ находим в орграфе $G^1_{2,2}$ частичные туры T_1 и T_2, а в каждом из орграфов $G^i_{2,2}$, $i = 2, \ldots, m/2$, находим пару частичных туров T_{2i-1}, T_{2i} с помощью процедуры $P'_{2/3}$, описанной в разд. 4;

• если m нечётно, то, применяя к $(3,3)$-регулярному орграфу $G_{3,3}$ процедуру $P_{3/5}$, находим частичные туры T_1, T_2, T_3, а для всех $(2,2)$-регулярных орграфов $G^i_{2,2}$, $i = 1, \ldots, (m-3)/2$, применяем процедуру $P'_{2/3}$. В результате получаем набор из m рёберно не пересекающихся частичных туров $T_1, T_2, \ldots, T_m$.

Фаза 4. Достраиваем полученные на фазе 3 частичные туры $T_1, T_2, \ldots, T_m$ до рёберно не пересекающихся гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_m$, применяя процедуру «Замыкание(T_1–T_m)», описанную в разд. 5. Предъявляем набор гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_m$ в качестве искомого приближённого решения задачи m-APSP-max.

4. Модифицированная процедура построения двух частичных туров

В этом разделе описывается процедура $P'_{2/3}$ и дополняющая её процедура «Выравнивание(T'_1–T'_3)». Обе эти процедуры основаны на процедуре $P_{2/3}$ из [26], работу которой мы сейчас рассмотрим более подробно.

Процедура $P_{2/3}$ получает на вход взвешенный $(2,2)$-регулярный орграф $G_{2,2}$ и находит в каждой его компоненте связности K^i пару рёберно не пересекающихся частичных туров $T_1(i)$, $T_2(i)$. После этого процедура объединяет туры, построенные в разных компонентах связности, и подаёт на выход два полученных частичных тура

$$T_1 = \bigcup_{i=1}^{l} T_1(i), \quad T_2 = \bigcup_{i=1}^{l} T_2(i),$$

где l — число компонент связности орграфа $G_{2,2}$.

Построение частичных туров происходит по-разному в компонентах связности $G_{2,2}$. Каждая компонента K^i относится к одному из трёх типов:

1) K^i не содержит встречных дуг (циклов длины 2);

2) K^i содержит цикл длины 2, но не является сдвоенным треугольником;

3) K^i является сдвоенным треугольником.

Для каждой компоненты K^i типа 1 или 3 процедура $P_{2/3}$ находит в K^i пару частичных туров $T_1(i)$, $T_2(i)$ с суммарным весом дуг не менее $\frac{2}{3}w(K^i)$ и количеством цепей в каждом туре не менее $n_i/5$, где n_i — число вершин в K^i. Если же компонента связности K^i относится к типу 2, то процедура $P_{2/3}$ сначала разбивает множество дуг K^i на три частичных тура T'_1, T'_2, T'_3 с помощью вспомогательной процедуры «Ациклическая 3-раскраска(K)», затем специальным образом преобразует эти туры, обеспечивая выполнение неравенства $p(T'_2) \geqslant p(T'_1) \geqslant n_i/5$, и, наконец, выбирает в качестве $T_1(i)$, $T_2(i)$ два тура из T'_1, T'_2, T'_3, имеющих наибольший вес. В этом случае также выполняется оценка

$$w(T_1(i)) + w(T_2(i)) \geqslant \frac{2}{3} w(K^i),$$

однако только один из полученных туров имеет гарантированную оценку снизу на число составляющих его цепей.

Этого оказывается достаточно для того, чтобы обеспечить возможность соединения двух частичных туров в непересекающиеся гамильтоновы циклы, но недостаточно для последовательного построения m рёберно не пересекающихся гамильтоновых циклов в алгоритме $A_{2/3-\varepsilon}$. Поэтому мы вынуждены модифицировать процедуру $P_{2/3}$ таким образом, чтобы оба построенных ею частичных тура имели ограничение снизу на число составляющих их цепей. Для этого в случае, когда хотя бы один из трёх полученных процедурой «Ациклическая 3-раскраска(K)» частичных туров содержит недостаточное количество цепей (менее $\frac{n_i}{15}$), будем увеличивать их число, перенося часть рёбер из этого тура в другой, содержащий большее количество цепей. Для этого будем применять описанную далее вспомогательную процедуру «Выравнивание(T'_1–T'_3)».

Процедура $P'_{2/3}$. На вход подаётся $(2,2)$-регулярный орграф $G_{2,2}$. Выделяем в $G_{2,2}$ все компоненты связности: $K^1, K^2, \ldots, K^l$.

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, l$ находим в K^i два рёберно не пересекающихся частичных тура $T_1(i)$, $T_2(i)$ со следующими свойствами:

$$w(T_1(i)) + w(T_2(i)) \geqslant \frac{2}{3} w(K^i), \quad p(T_j(i)) \geqslant \frac{n_i}{15}, \quad j = 1, 2.$$

Для этого к каждой компоненте K^i, $i = 1, 2, \ldots, l$, применяем процедуру $P_{2/3}$. При этом если K^i относится к типу 2, то к построенным процедурой «Ациклическая 3-раскраска(K^i)» частичным турам T_1', T_2', T_3' дополнительно применяем процедуру «Выравнивание(T_1'–T_3')».

После того как частичные туры $T_1(i), T_2(i)$ во всех компонентах связности орграфа $G_{2,2}$ построены, определяем рёберно не пересекающиеся частичные туры T_1, T_2 в $G_{2,2}$, полагая $T_j = \bigcup\limits_{i=1}^{l} T_j(i)$, $j = 1, 2$. При этом выполняются неравенства

$$w(T_1) + w(T_2) \geqslant \frac{2}{3} w(G_{2,2}), \quad p(T_j) \geqslant \frac{n}{15}, \quad j = 1, 2.$$

Подаём туры T_1 и T_2 на выход процедуры $P_{2/3}'$.

Далее опишем процедуру «Выравнивание(T_1'–T_3')». Эта процедура получает на входе три частичных тура T_1', T_2', T_3', построенных в компоненте связности K типа 2 процедурой «Ациклическая 3-раскраска(K)». Указанные туры образуют разбиение множества дуг K. Упорядочим туры по неубыванию числа цепей:

$$p(T_1') \leqslant p(T_2') \leqslant p(T_3').$$

Далее предполагается, что если после какого-то из описанных ниже преобразований частичных туров в ходе работы процедуры «Выравнивание (T_1'–T_3')» это неравенство нарушается, то процедура переобозначает туры таким образом, чтобы неравенство выполнялось. Цель процедуры состоит в том, чтобы обеспечить выполнение условия

$$\frac{n}{15} \leqslant p(T_1') \leqslant p(T_2') \leqslant p(T_3'),$$

где n — число вершин в K.

При описании процедуры «Выравнивание(T_1'–T_3')» нами будут использоваться следующие понятия. Пусть T — частичный тур в компоненте связности K. Назовём дугу $e \in E(K) \setminus E(T)$ *хорошей* для тура T, если при её добавлении к T получается частичный тур, и *плохой* иначе.

Лемма 1. *Число плохих дуг для тура T в K не превосходит* $3|T|$.

Доказательство. Дуга $e \in E(K) \setminus E(T)$ плоха для тура T, если она имеет общую начальную, либо конечную, вершину с какой-то дугой $e_t \in E(T)$ (в этом случае будем говорить, что дуга e_t *делает* дугу e плохой), либо если e ведёт из конца какой-то нетривиальной цепи тура T в начало этой цепи (будем называть такие дуги *цикловыми* для T). Так как компонента K является $(2,2)$-регулярным орграфом, каждая дуга $e_t = (x, y) \in E(T)$ делает плохими две нецикловые дуги из $E(K) \setminus E(T)$: одну исходящую из вершины x дугу и одну входящую в вершину y дугу. При этом число цикловых плохих дуг не превосходит числа нетривиальных цепей в T, которое, в свою очередь, не превосходит числа дуг тура T. Отсюда следует, что число всех плохих дуг не превосходит $2|T| + |T| = 3|T|$. Лемма 1 доказана.

Перенос хорошей дуги из тура T'_i в тур T'_j или более сложный обмен рёбрами между турами назовём *улучшающим преобразованием* для набора частичных туров T'_1, T'_2, T'_3, если после выполнения преобразования параметры $p(T'_1)$ и $p(T'_1) - p(T'_3)$ не уменьшаются и хотя бы один из них строго увеличивается (тем самым происходит выравнивание числа цепей в турах). В частности, перенос хорошей дуги из T'_i в T'_j является улучшающим преобразованием, если до переноса выполняется неравенство $p(T'_j) - p(T'_i) > 1$. В этом случае после переноса либо параметр $p(T'_1)$ увеличивается на 1, либо $p(T'_3)$ уменьшается на 1.

Будем считать, что тур T'_i состоит из дуг цвета i в процедуре «Ациклическая 3-раскраска(K)». Также можно считать, что $n > 15$, иначе неравенства $p(T'_i) \geqslant \frac{n}{15}$, $i = 1, 2, 3$, заведомо выполняются. Назовём вершину v компоненты K *регулярной*, если для неё имеются входящая и исходящая дуги цвета 1 (т. е. v является внутренней вершиной некоторой цепи тура T'_1), и *нерегулярной* в противном случае.

Лемма 2. *Если $p(T'_1) < \frac{n}{15}$, то в туре T'_1 найдётся дуга, оба конца которой регулярны и соединены рёбрами из $T'_2 \cup T'_3$ только с регулярными вершинами* (*направления этих рёбер не имеют значения*).

Доказательство. Предположим противное: для каждой дуги из T'_1, оба конца которой регулярны, хотя бы один из концов этой дуги соединён ребром из $T'_2 \cup T'_3$ с нерегулярной вершиной. Оценим с двух сторон количество $e_{\text{р-н}}$ таких рёбер из $T'_2 \cup T'_3$, которые соединяют регулярную вершину с нерегулярной. Поскольку нерегулярными вершинами в K являются только начала и концы цепей из T'_1, число всех регулярных вершин оценивается снизу как $n_{\text{рег}} \geqslant n - 2p(T'_1)$. Если цепь тура T'_1 содержит r регулярных вершин, то по предположению из них исходит не менее

$\frac{r-1}{2}$ рёбер в нерегулярные вершины. Следовательно,

$$e_{\text{р-н}} \geqslant \frac{n_{\text{рег}} - p(T_1')}{2} \geqslant \frac{n - 3p(T_1')}{2}.$$

С другой стороны, параметр $e_{\text{р-н}}$ не превосходит числа таких концов рёбер из $T_2' \cup T_3'$, которые инцидентны нерегулярным вершинам, т. е. не превосходит мощности множества пар

$$I_{\text{н}} = \{(e, v) \mid e \in E(T_2') \cup E(T_3'),\quad v\text{ — нерегулярная вершина, инцидентная } e\}.$$

Общее количество концов рёбер из $T_2' \cup T_3'$ равно

$$2(|T_2'| + |T_3'|) = 2(2n - |T_1'|) = 2(n + p(T_1')),$$

из них ровно $2n_{\text{рег}}$ инцидентны регулярным вершинам, поэтому

$$e_{\text{р-н}} \leqslant |I_{\text{н}}| = 2(n + p(T_1')) - 2n_{\text{рег}} \leqslant 2(n + p(T_1')) - 2(n - 2p(T_1')) = 6p(T_1').$$

Таким образом, получаем

$$\frac{n - 3p(T_1')}{2} \leqslant e_{\text{р-н}} \leqslant 6p(T_1'),$$

откуда $p(T_1') \geqslant \frac{n}{15}$. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

Выравнивание(T_1'–T_3'). Если $p(T_1') \geqslant \frac{n}{15}$, то сразу подаём на выход процедуры набор частичных туров T_1', T_2', T_3'. Пусть $p(T_1') < \frac{n}{15}$. Пока это неравенство выполняется, будем осуществлять улучшающие преобразования частичных туров. При $p(T_3') > \frac{9n}{16}$ переходим на этап 1, иначе — на этап 2.

Этап 1. Пока $p(T_3') > \frac{9n}{16}$, будем выполнять улучшающий перенос дуги из одного из туров T_1', T_2' в тур T_3'. При этом если в какой-то момент окажется, что $p(T_1') \geqslant \frac{n}{15}$, то процедура завершает работу. Иначе она достигает выполнения неравенства $p(T_3') \leqslant \frac{9n}{16}$ и переходит на этап 2.

Покажем, что указанный перенос дуги возможен. Согласно лемме 1 в турах T_1' и T_2' имеется не более $3|T_3'|$ плохих дуг для тура T_3'. Из неравенства $p(T_3') > \frac{9n}{16}$ следует, что $|T_3'| < n - \frac{9n}{16} = \frac{7n}{16}$ и $3|T_3'| < \frac{21n}{16}$. В то же время имеем

$$|T_1'| + |T_2'| = 2n - |T_3'| > 2n - \frac{7n}{16} = \frac{25n}{16} > 3|T_3'|,$$

что гарантирует наличие хорошей дуги для тура T_3' в $T_1' \cup T_2'$. Поскольку

$$p(T_1') + p(T_2') + p(T_3') = (n - |T_1'|) + (n - |T_2'|) + (n - |T_3'|) = 3n - 2n = n$$

и $p(T_1') \geqslant 1$, то $p(T_2') < \frac{7n}{16} - 1$. Из неравенства

$$p(T_3') - p(T_2') > \frac{9n}{16} - \frac{7n}{16} + 1 = \frac{2n}{16} + 1$$

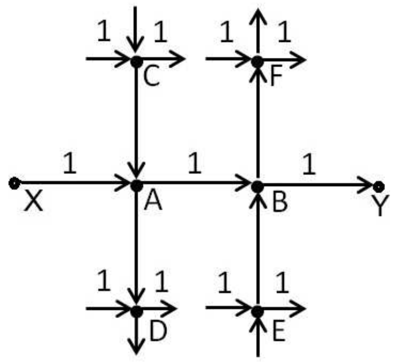

Рис. 1

следует, что перенос хорошей дуги в тур T_3' является улучшающим преобразованием для набора частичных туров T_1', T_2', T_3'.

Этап 2. Пока $p(T_1') < \frac{n}{15}$ и $p(T_3') \leqslant \frac{9n}{16}$, будем выполнять описанную ниже перекраску дуг (обмен рёбер между турами), увеличивая параметр $p(T_1')$. Согласно лемме 2 в туре T_1' найдётся дуга (A, B), оба конца которой регулярны и соединены рёбрами из $T_2' \cup T_3'$ только с регулярными вершинами (рис. 1).

Для того чтобы увеличить количество цепей в туре T_1', перекрасим некоторые дуги так, чтобы хотя бы одна дуга цвета 1 окрасилась цветом 2 или 3. Сначала предположим, что дуги (A, D) и (E, B) на рис. 1 окрашены в один цвет, например, в цвет 2. Перекрасим дугу (A, B) в цвет 3. Этому может помешать только возникновение одноцветного цикла $(A, B, F, \ldots, C, A)$, все дуги которого окрашены цветом 3. В последнем случае дополнительно перекрасим дугу (B, F) в цвет 2. Такое преобразование осуществимо всегда, за исключением случая, когда $F = A$ и перекраска дуги (B, A) в цвет 2 приводит к образованию одноцветного цикла $(B, A, D, \ldots, E, B)$ цвета 2. Если $D \neq E$, то окрасим дуги (E, B), (B, A) и (A, D) цветом 3, а дугу (A, B) — цветом 2.

Пусть $D = E$. Рассмотрим дуги (X, A) и (B, Y) цвета 1. Поскольку $X \neq Y$, вершина D отлична хотя бы от одной из вершин X или Y. Предположим, что $D \neq X$. Если из вершины X не исходит дуга цвета 2, то оставляем цвета дуг (A, B), (B, A), (A, D) и (D, B) исходными, а дугу (X, A) перекрашиваем в цвет 2. Если из X исходит дуга цвета 2, то из неё не исходит дуга цвета 3. В этом случае перекрасим дуги (X, A) и (A, D) в цвет 3, а дугу (B, A) — в 2. Пусть $D = X$. Тогда $D \neq Y$. Теперь осуществляем аналогичную перекраску с участием дуги (B, Y): если в вершину Y не входит дуга цвета 2, то перекрасим (B, Y) в 2, а если в Y не входит дуга цвета 3, то перекрасим (B,Y) и (D,B) в 3, а (B,A) — в 2.

Теперь рассмотрим случай, когда дуги (A,D) и (E,B) окрашены в разные цвета: (A,D) — в цвет 2, а (E,B) — в цвет 3. Перекрасим дугу (E,B) в цвет 2. Если при этом образуется цикл $(B,F,\ldots,E,B)$ цвета 2, то дополнительно перекрасим дугу (B,F) в цвет 3. Далее действуем, как в предыдущем случае (цвета дуг (A,D) и (E,B) теперь совпадают).

Покажем, что описанный обмен дугами между турами, при котором какая-то дуга тура T_1' переносится в T_2' или T_3', является улучшающим преобразованием. Заметим, что при любом варианте такого обмена из тура T_1' удаляется ровно одна дуга, а в каком-то из туров T_2' или T_3' становится на одну дугу больше, либо в одном из этих туров становится на две дуги больше, а в другом — на одну меньше. Отсюда следует, что параметр $p(T_3')$ либо не увеличивается, либо возрастает на 1. Остаётся показать, что $p(T_1')$ увеличивается на 1. Для этого требуется проверить, что до выполнения обмена выполняется неравенство $p(T_2') - p(T_1') > 2$ (поскольку в процессе обмена число цепей в каком-то из туров T_2' или T_3' может уменьшиться на 2). Из неравенств $p(T_1') < \frac{n}{15}$ и $p(T_3') \leqslant \frac{9n}{16}$ следует, что $p(T_2') > n - \frac{n}{15} - \frac{9n}{16}$, поэтому выполняется неравенство

$$p(T_2') - p(T_1') > \frac{7n}{16} - \frac{2n}{15} = \frac{73n}{15 \cdot 16} > 2,$$

так как $n > 15$.

Если после обмена между турами начинает выполняться неравенство $p(T_1') \geqslant \frac{n}{15}$, то процедура завершает работу. В противном случае если $p(T_3') \leqslant \frac{9n}{16}$, то совершается новое улучшающее преобразование на этапе 2. Если же в результате обмена параметр $p(T_3')$ увеличивается на 1 и становится больше $\frac{9n}{16}$, то производится один улучшающий перенос дуги из этапа 1, после чего процедура возвращается на этап 2.

Таким образом, после завершения работы процедуры «Выравнивание (T_1'–T_3')» туры T_1', T_2' и T_3' в K преобразуются в три частичных тура, каждый из которых содержит не менее $n/15$ цепей. Следовательно, для каждой компоненты связности K^i орграфа $G_{2,2}$ оба построенных в ней процедурой $P_{2/3}'$ частичных тура $T_1(i)$, $T_2(i)$ состоят не менее чем из $n_i/15$ цепей, поэтому выполняются неравенства $p(T_j) \geqslant \frac{n}{15}$, $j = 1, 2$.

Трудоёмкость процедуры «Выравнивание(T_1'–T_3')» составляет $O(n^2)$, так как совершается не более $O(n)$ улучшающих преобразований, на поиск и выполнение каждого из которых затрачивается время $O(n)$. Следовательно, трудоёмкость процедуры $P_{2/3}'$ определяется временем работы процедуры $P_{2/3}$ и оценивается как $O(n^3)$.

5. Замыкание частичных туров в гамильтоновы циклы

В этом разделе представлена финальная процедура алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$, которая получает на входе набор рёберно не пересекающихся частичных туров $T_1, T_2, \ldots, T_m$, построенных на фазе 3 алгоритма. Независимо от чётности m для туров $T_2, T_3, \ldots, T_m$ выполняются оценки

$$p(T_2) \geqslant \frac{n}{6}, \quad p(T_i) \geqslant \frac{n}{15}, \quad i = 3, 4, \ldots, m.$$

Поскольку $n \geqslant 45(m-1)$, справедливы неравенства

$$p(T_2) \geqslant 4, \quad p(T_i) \geqslant 3(m-1), \quad i = 3, 4, \ldots, m.$$

Описанная ниже процедура «Замыкание(T_1–T_m)» дополняет частичные туры $T_1, T_2, \ldots, T_m$ до рёберно не пересекающихся гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_m$ в орграфе G. При этом выполняется неравенство

$$w(H_1) + w(H_2) + \cdots + w(H_m) \geqslant w(T_1) + w(T_2) + \cdots + w(T_m).$$

Замыкание(T_1–T_m). Формируем гамильтоновы циклы по порядку начиная с H_1. Для замыкания тура T_1 в цикл H_1 используем любые дуги исходного графа G, соединяющие цепи тура T_1 в циклическом порядке. Если какая-то из этих дуг принадлежит другому частичному туру T_i, то перебрасываем её в цикл H_1. При этом число цепей в туре T_i увеличивается, что только облегчает его последующее замыкание.

Далее с помощью процедуры, разработанной в [26], за время $O(n)$ дополняем тур T_2 до гамильтонова цикла H_2, не имеющего общих дуг с уже построенным циклом H_1. Как показано в [26], такое преобразование осуществимо, если тур T_2 содержит не менее четырёх цепей.

Пусть $3 \leqslant k \leqslant m$. Далее описывается процедура замыкания частичного тура T_k в гамильтонов цикл H_k при условии, что $k-1$ гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$ уже построены.

Из приведённых выше неравенств следует, что частичный тур T_k содержит не менее $3(m-1)$ цепей. Будем называть дуги гамильтоновых циклов $H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$ *запрещёнными* при построении цикла H_k, а все остальные дуги орграфа G — *допустимыми*. Заметим, что для каждой начальной вершины цепи тура T_k имеется $k-1$ входящих запрещённых дуг, а для каждой концевой вершины имеется $k-1$ исходящих запрещённых дуг. Будем соединять цепи тура T_k допустимыми дугами, пока количество цепей не станет равным $3(k-1)$. Это можно сделать, так как если число цепей превосходит $3(k-1)$, то из концевой вершины каждой цепи исходит не менее $3(k-1)$ дуг в начальные вершины других цепей, причём не более чем $k-1$ из этих дуг могут быть запрещёнными. Пусть полученный частичный тур состоит из цепей $P_1, P_2, \ldots, P_{3k-4}, P_{3k-3}$, где $P_i = (s_i, \ldots, t_i)$ при $i = 1, 2, \ldots, 3k-3$.

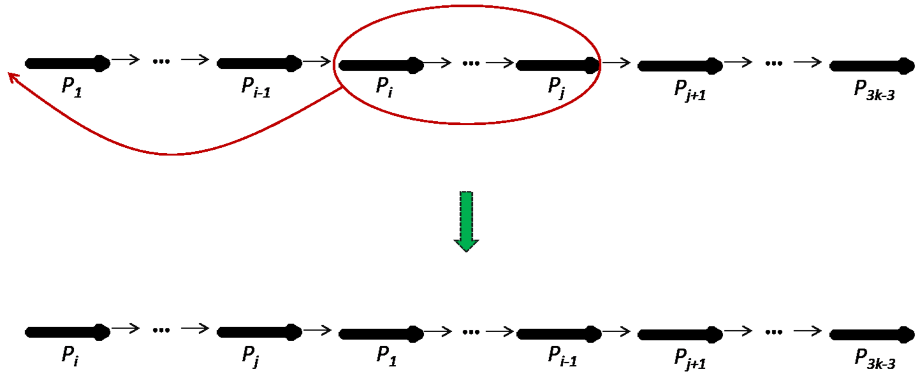

Рис. 2. (P_i, P_j)-перестановка

Докажем, что все цепи удастся соединить в одну цепь, не имеющую общих дуг с уже построенными гамильтоновыми циклами. Заметим, что если несколько цепей уже соединены в одну, то к её концу нельзя добавить не более чем $k-1$ из оставшихся цепей, поэтому удастся соединить в одну цепь P' какие-то $2k-2$ цепей. Без ограничения общности будем считать, что $P' = P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_{2k-3} \to P_{2k-2}$. Докажем, что оставшиеся цепи удастся добавить к P', вставляя их либо между некоторыми двумя цепями, либо в начало или конец цепи P'. Действительно, всего в P' имеется $2k-1$ позиций для вставки следующей цепи P_{2k-1}, при этом не более чем $2(k-1)$ из этих позиций могут быть запрещёнными (считается, что позиция между цепями P_i и P_{i+1} запрещена для вставки цепи P_{2k-1}, если какая-то из дуг (t_i, s_{2k-1}) или (t_{2k-1}, s_{i+1}) запрещённая). Таким образом, удаётся добавить к P' цепь P_{2k-1}, а затем и все остальные цепи, так как количество позиций для вставки каждой следующей цепи увеличивается, а число запрещённых позиций всегда не превосходит $2(k-1)$. В результате получаем одну гамильтонову цепь P. Остаётся перестроить цепь P в гамильтонов цикл H_k, рёберно не пересекающийся с уже построенными циклами $H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$. Без потери общности считаем, что $P = P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_{3k-4} \to P_{3k-3}$.

Пусть $2 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3k-4$. Назовём (P_i, P_j)-*перестановкой* следующее переупорядочение цепей внутри P (см. рис. 2):

$$(P_1, P_2, \ldots, P_{3k-3}) \to (P_i, P_{i+1}, \ldots, P_j, P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{j+1}, \ldots, P_{3k-3}).$$

Будем называть перестановку *успешной*, если дуги (t_j, s_1), (t_{i-1}, s_{j+1}) и (t_{3k-3}, s_i) допустимы, т. е. при добавлении к полученной цепи дуги (t_{3k-3}, s_i) получается гамильтонов цикл H_k, не имеющий общих дуг с циклами $H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$. Далее выполняются следующие шаги, пока не удастся сделать успешную перестановку.

Шаг 0. Если дуга (t_{3k-3}, s_1) допустима, то добавляем её к P и получаем гамильтонов цикл H_k. Иначе переходим на шаг 1.

Шаг l $(1 \leqslant l \leqslant k-2)$. Считаем, что к началу шага l следующие дуги запрещены (иначе цикл H_k был построен на одном из предыдущих шагов):

- (t_{3k-3}, s_1), (t_{3k-4}, s_1), $\ldots$, $(t_{3(k-1)-l+1}, s_1)$ — l дуг, входящих в вершину s_1;
- (t_{3k-3}, s_1), (t_{3k-3}, s_2), $\ldots$, (t_{3k-3}, s_l) — l дуг, исходящих из вершины t_{3k-3}.

Рассмотрим множество перестановок A_l, состоящее из всех (P_{l+1}, P_j)-перестановок, где $j = l+1, \ldots, 3(k-1)-l$. В этом множестве найдётся успешная перестановка, если при некотором $j \in \{l+1, \ldots, 3(k-1)-l\}$ дуги (t_j, s_1), (t_l, s_{j+1}) и (t_{3k-3}, s_{l+1}) допустимы. Покажем, что если дуга (t_{3k-3}, s_{l+1}) допустима, то в A_l найдётся успешная перестановка. Заметим, что среди l известных к началу шага l запрещённых дуг, входящих в s_1, нет дуг из множества $\{(t_j, s_1) \mid j = l+1, \ldots, 3(k-1)-l\}$, поэтому в этом множестве запрещёнными являются не более $k-1-l$ дуг. Среди дуг множества $\{(t_l, s_{j+1}) \mid j = l+1, \ldots, 3(k-1)-l\}$ запрещены не более чем $k-1$ дуг. Таким образом, не более чем $(k-1-l)+(k-1) = 2(k-1)-l$ перестановок из A_l могут быть неуспешными из-за запрещённости дуги, принадлежащей одному из указанных множеств. Если дуга (t_{3k-3}, s_{l+1}) допустима, то в A_l найдётся успешная перестановка, так как общее количество перестановок в A_l равно $3(k-1)-2l$ и

$$3(k-1)-2l-(2(k-1)-l) = k-1-l \geqslant k-1-(k-2) = 1.$$

Выполняя эту перестановку, получаем искомый гамильтонов цикл H_k.

Пусть дуга (t_{3k-3}, s_{l+1}) запрещена. Рассмотрим множество перестановок B_l, состоящее из всех $(P_i, P_{3(k-1)-l})$-перестановок, где $i = l+2, \ldots, 3(k-1)-l$. В этом множестве найдётся успешная перестановка, если при некотором $i \in \{l+2, \ldots, 3(k-1)-l\}$ дуги $(t_{3(k-1)-l}, s_1)$, $(t_{i-1}, s_{3(k-1)-l+1})$ и (t_{3k-3}, s_i) допустимы. Покажем, что если дуга $(t_{3(k-1)-l}, s_1)$ допустима, то в B_l найдётся успешная перестановка. Заметим, что на данный момент известно l запрещённых дуг, входящих в вершину s_1, и уже $l+1$ запрещённых дуг, исходящих из t_{3k-3} (с учётом дуги (t_{3k-3}, s_{l+1})). Ни одна из этих дуг не принадлежит множеству $\{(t_{3k-3}, s_i) \mid i = l+2, \ldots, 3(k-1)-l\}$. Поэтому в указанном множестве запрещёнными являются не более чем $k-1-(l+1)$ дуг. В множестве $\{(t_{i-1}, s_{3(k-1)-l+1}) \mid i = l+2, \ldots, 3(k-1)-l\}$ запрещены не более $k-1$ дуг. Следовательно, не более чем $2(k-1)-l-1$ перестановок из множества B_l могут быть неуспешными из-за запрещённости дуги, принадлежащей одному из указанных множеств. Если дуга $(t_{3(k-1)-l}, s_1)$ допустима, то в B_l найдётся успешная перестановка, поскольку общее количество перестановок в B_l

равно $3(k-1)-2l-1$ и

$$3(k-1)-2l-1-(2(k-1)-l-1)=k-1-l \geqslant k-1-(k-2)=1.$$

Выполняя эту перестановку, получаем искомый гамильтонов цикл H_k.

Если дуга $(t_{3(k-1)-l}, s_1)$ запрещённая, то переходим на шаг $l+1$.

Если выполнены все шаги с 0 по $k-2$, но среди рассмотренных перестановок не оказалось ни одной успешной, то имеем следующие запрещённые дуги:

- (t_{3k-3}, s_1), (t_{3k-4}, s_1), $\dots$, (t_{2k}, s_1), (t_{2k-1}, s_1) — $k-1$ дуг, входящих в вершину s_1;
- (t_{3k-3}, s_1), (t_{3k-3}, s_2), $\dots$, (t_{3k-3}, s_{k-2}), (t_{3k-3}, s_{k-1}) — $k-1$ дуг, исходящих из вершины t_{3k-3}.

Отсюда следует, что все остальные входящие в s_1 и исходящие из t_{3k-3} дуги допустимы.

Рассмотрим множество перестановок C, состоящее из всех (P_i, P_{2k-2})-перестановок, где $i=k, k+1, \dots, 2k-2$. В этом множестве найдётся успешная перестановка, если при некотором $i \in \{k, k+1, \dots, 2k-2\}$ дуги (t_{2k-2}, s_1), (t_{i-1}, s_{2k-1}) и (t_{3k-3}, s_i) допустимы. Из сделанных выше предположений следует, что дуга (t_{2k-2}, s_1) и все дуги (t_{3k-3}, s_i), где $i=k, k+1, \dots, 2k-2$, допустимы. Следовательно, если ни одна перестановка из множества C не успешна, то запрещёнными будут следующие $k-1$ входящих в вершину s_{2k-1} дуг: (t_{i-1}, s_{2k-1}), $i=k, k+1, \dots, 2k-2$. Это означает, что все другие входящие в вершину s_{2k-1} дуги допустимы.

Теперь можем соединить все цепи тура T_k кроме P_{k-1} в один цикл:

$$\begin{aligned}(P_1 \to P_2 \to \dots \to P_{k-2} \to P_{2k-1} \to P_{2k} \to \dots \\ \to P_{3k-3} \to P_k \to P_{k+1} \to \dots \to P_{2k-2} \to P_1),\end{aligned}$$

так как дуги (t_{k-2}, s_{2k-1}), (t_{3k-3}, s_k) и (t_{2k-2}, s_1) допустимы. Цепь P_{k-1} также можно вставить в этот цикл между какими-то двумя его цепями, поскольку среди $3k-4$ позиций для вставки запрещёнными являются не более чем $2(k-1)$ позиций и $3k-4 > 2(k-1)$ при $k \geqslant 3$. Таким образом, получаем гамильтонов цикл H_k, не имеющий общих рёбер с уже построенными гамильтоновыми циклами.

Заметим, что при построении каждого гамильтонова цикла соединение всех цепей тура T_k в гамильтонову цепь P производится за время $O(mn)$, а этап преобразования цепи P в гамильтонов цикл также выполняется за время $O(mn)$, поскольку просматривается порядка $m^2 < mn$ возможных перестановок цепей. Таким образом, трудоёмкость построения m гамильтоновых циклов процедурой «Замыкание(T_1–T_m)» оценивается как $O(m^2 n)$.

6. Оценка точности и трудоёмкости алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$

Докажем, что алгоритм $A_{2/3-\varepsilon}$ обладает оценкой точности $2/3$ при чётных m и оценкой $\frac{2}{3}-\frac{1}{5m}$ при нечётных m. На фазе 1 в орграфе G находится подграф $G_{m,m}$, вес которого не меньше веса оптимального решения задачи m-APSP-max. Далее в $G_{m,m}$ строятся рёберно не пересекающиеся частичные туры $T_1, T_2, \ldots, T_m$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: m чётно. В этом случае каждая из пар частичных туров, полученных процедурами $P_{2/3}$ или $P'_{2/3}$, имеет вес не меньше, чем $2/3$ от веса соответствующего $(2,2)$-регулярного орграфа $G^i_{2,2}$, поэтому выполняется цепочка неравенств

$$w(T_1)+\cdots+w(T_m) \geqslant \frac{2}{3}\big(w\big(G^1_{2,2}\big)+\cdots+w\big(G^{m/2}_{2,2}\big)\big)=\frac{2}{3}w(G_{m,m})\geqslant \frac{2}{3}w^*.$$

Случай 2: m нечётно. В этом случае для частичных туров $T_1, T_2, \ldots, T_m$ выполняются неравенства

$$w(T_1)+w(T_2)+w(T_3)\geqslant \frac{3}{5}w(G_{3,3}),$$
$$w(T_4)+\cdots+w(T_m)\geqslant \frac{2}{3}\big(w\big(G^1_{2,2}\big)+\cdots+w\big(G^{(m-3)/2}_{2,2}\big)\big).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} w(T_1)&+w(T_2)+\cdots+w(T_m)\\ &\geqslant \frac{3}{5}w(G_{3,3})+\frac{2}{3}\big(w\big(G^1_{2,2}\big)+\cdots+w\big(G^{(m-3)/2}_{2,2}\big)\big)\\ &=\frac{2}{3}w(G_{m,m})-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)w(G_{3,3})=\frac{2}{3}w(G_{m,m})-\frac{1}{15}w(G_{3,3}). \end{aligned}$$

Так как орграф $G_{3,3}$ образован тремя самыми «лёгкими» 2-факторами в $G_{m,m}$ (см. фазу 2 алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$), справедливо неравенство $w(G_{3,3})\leqslant \frac{3}{m}w(G_{m,m})$. Отсюда следует, что

$$w(T_1)+w(T_2)+\cdots+w(T_m)\geqslant\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5m}\right)w(G_{m,m})\geqslant\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5m}\right)w^*.$$

На фазе 4 алгоритма частичные туры T_1, T_2, $\ldots$, T_m дополняются до рёберно не пересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, $\ldots$, H_m с помощью процедуры «Замыкание(T_1–T_m)». При этом суммарный вес циклов может только возрастать, т. е. выполняется неравенство

$$w(H_1)+w(H_2)+\cdots+w(H_m)\geqslant w(T_1)+w(T_2)+\cdots+w(T_m).$$

Следовательно, при чётном m вес найденного алгоритмом $A_{2/3-\varepsilon}$ приближённого решения задачи m-APSP-max не меньше $\frac{2}{3}w^*$, а при нечётном m — не меньше $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5m}\right)w^*$.

Оценим трудоёмкость алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$. Фаза 1 выполняется за время $O(mn^3)$, определяемое применением алгоритма Габова из [28]. Трудоёмкость фазы 2 определяется временем работы алгоритма из [29] и оценивается как $O(mn \log m)$. На фазе 3 не более чем $m/2$ раз применяются процедуры, время работы каждой из которых не превосходит $O(n^3)$. Поэтому трудоёмкость фазы 3 оценивается как $O(mn^3)$. Наконец, время выполнения фазы 4 не превосходит $O(m^2 n)$. Учитывая, что $m < n$, можно сделать вывод о том, что общее время работы алгоритма $A_{2/3-\varepsilon}$ оценивается как $O(mn^3)$. Теорема 1 доказана.

Заключение

Нетрудно видеть, что отличие оценки точности полученного нами алгоритма от $2/3$ при нечётных значениях m вызвано однократным применением процедуры $P_{3/5}$ из [27] на фазе 3 алгоритма. Это отличие не представляется непреодолимым и обусловлено лишь спецификой избранного подхода по разбиению (m, m)-регулярного орграфа $G_{m,m}$ на $(2, 2)$-регулярные подграфы и применению процедур из известных алгоритмов. Поэтому целью дальнейших исследований может стать разработка для задачи m-APSP-max полиномиального алгоритма, имеющего гарантированную оценку точности $2/3$ при любых значениях $m \geqslant 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Krarup J.** The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: Methods and applications. Proc. NATO Adv. Study Inst. (Versailles, France, 1974). Dordrecht: Reidel, 1975. P. 173–178. (NATO Adv. Study Inst. Ser., Ser. C: Math. Phys. Sci.; Vol. 19).
2. **Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Полиномиальный алгоритм с оценкой 3/4 для нахождения двух рёберно не пересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 11–20.
3. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 4. С. 17–48.
4. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М.** Приближённые алгоритмы для нахождения двух рёберно не пересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2004. Т. 11, № 1. С. 11–25.
5. **Агеев А. А., Пяткин А. В.** Приближённый алгоритм решения метрической задачи о двух коммивояжёрах с оценкой точности 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 4. С. 3–20.

6. **Glebov A. N., Gordeeva A. V.** An algorithm with approximation ratio 5/6 for the Metric Maximum m-PSP // Discrete Optimization and Operations Research. Proc. 9th Int. Conf. DOOR 2016 (Vladivostok, Russia, Sep. 19–23, 2016). Heidelberg: Springer, 2016. P. 159–170. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9869).
7. **Гимади Э. Х.** Асимптотически точный алгоритм отыскания одного и двух рёберно не пересекающихся маршрутов коммивояжёра максимального веса в евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 23–32.
8. **Бабурин А. Е., Гимади Э. Х.** Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 12–24.
9. **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Глебов А. Н.** Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14, № 2. С. 41–61.
10. **Глебов А. Н., Гордеева А. В., Замбалаева Д. Ж.** Алгоритм с оценкой 7/5 для задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 296–309.
11. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж.** Приближённый алгоритм решения задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 5. С. 11–37.
12. **Гимади Э. Х., Ивонина Е. В.** Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2012. Т. 19, № 1. С. 17–32.
13. **Гордеева А. В.** Полиномиальные алгоритмы с гарантированными оценками точности для метрической задачи о двух коммивояжёрах на максимум. Выпускная дипломная работа специалиста. Новосибирск: НГУ, 2010.
14. **Wolfler Calvo R., Cordone R.** A heuristic approach to the overnight security service problem // Comput. Oper. Res. 2003. Vol. 30. P. 1269–1287.
15. **De Kort J. B. J. M.** A branch and bound algorithm for symmetric 2-PSP // Eur. J. Oper. Res. 1993. Vol. 70. P. 229–243.
16. **De Kort J. B. J. M.** Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. 1991. Vol. 22, No. 1. P. 113–122.
17. **De Kort J. B. J. M.** Bounds for the symmetric 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1992. Vol. 23, No. 4. P. 357–367.
18. **De Brey M. J. D., Volgenant A.** Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1997. Vol. 39, No. 3. P. 275–293.
19. The traveling salesman problem and its variations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.
20. **Gimadi E. Kh.** Approximation efficient algorithms with performance guarantees for some hard routing problems // Proc. II Int. Conf. “Optimization and Applications”, OPTIMA–2011 (Petrovac, Montenegro, Sept. 25–Oct. 2, 2011). Moscow: VTs RAN, 2011. P. 98–101.

21. **Kaplan H., Lewenstein M., Shafrir N., Sviridenko M.** Approximation algorithms for asymmetric TSP by decomposing directed regular multigraphs // J. ACM. 2005. Vol. 52, No. 4. P. 602–626.
22. **Сердюков А. И.** Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжёра на максимум // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 25. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. С. 80–86.
23. **Hassin R., Rubinstein S.** Better approximations for max TSP // Inf. Process. Lett. 2000. Vol. 75, No. 4. P. 181–186.
24. **Paluch K., Mucha M., Madry A.** A 7/9-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization: Algorithms and Techniques. Proc. 12th Int. Workshop, APPROX 2009 and 13th Int. Workshop RANDOM 2009 (Berkeley, CA, USA, Aug. 21–23, 2009). Heidelberg: Springer, 2009. P. 298–311. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 5687).
25. **Dudycz S., Marcinkowski J., Paluch K., Rybicki B. A.** A 4/5-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem // Integer Programming and Combinatorial Optimization. Proc. 19th Int. Conf. IPCO 2017 (Waterloo, ON, Canada, June 26–28, 2017). Cham: Springer, 2017. P. 173–185. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 10328).
26. **Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж., Скретнева А. А.** 2/3-Приближённый алгоритм для несимметричной задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 6. С. 11–20.
27. **Глебов А. Н., Токтохоева С. Г.** Полиномиальный 3/5-приближённый алгоритм для несимметричной задачи о трёх коммивояжёрах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26, № 2. С. 30–59.
28. **Gabow H. N.** An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems // Proc. 15th Annu. ACM Symp. Theory of Comput. (Boston, USA, April 25–27, 1983). New York: ACM, 1983. P. 448–456.
29. **Cole R., Ost K., Schirra S.** Edge-coloring bipartite multigraphs in $O(E \times \log D)$ time // Combinatorica. 2001. Vol. 21, No. 1. P. 5–12.

Глебов Алексей Николаевич
Токтохоева Сурэна Гармажаповна

Статья поступила
2 декабря 2019 г.
После доработки —
9 мая 2020 г.
Принята к публикации
25 мая 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2020. Vol. 27, No. 3. P. 28–52

UDC 519.8 DOI 10.33048/daio.2020.27.677

A POLYNOMIAL ALGORITHM WITH ASYMPTOTIC RATIO 2/3 FOR THE ASYMMETRIC MAXIMIZATION VERSION OF THE m-PSP

A. N. Glebov[1,2,a] and *S. G. Toktokhoeva*[2,b]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
[2] Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: [a] `angle@math.nsc.ru`, [b] `s.toktokhoeva@ya.ru`

Abstract. In 2005, Kaplan et al. presented a polynomial-time algorithm with guaranteed approximation ratio 2/3 for the maximization version of the asymmetric TSP. In 2014, Glebov, Skretneva, and Zambalaeva constructed a similar algorithm with approximation ratio 2/3 and cubic runtime for the maximization version of the asymmetric 2-PSP (2-APSP-max), where it is required to find two edge-disjoint Hamiltonian cycles of maximum total weight in a complete directed weighted graph. The goal of this paper is to construct a similar algorithm for the more general m-APSP-max in the asymmetric case and justify an approximation ratio for this algorithm that tends to 2/3 as n grows and the runtime complexity estimate $O(mn^3)$. Illustr. 2, bibliogr. 29.

Keywords: Hamiltonian cycle, Traveling Salesman Problem, m-Peripatetic Salesman Problem, approximation algorithm, guaranteed approximation ratio.

REFERENCES

1. **J. Krarup,** The peripatetic salesman and some related unsolved problems, in *Combinatorial Programming: Methods and Applications* (Proc. NATO Adv. Study Inst., Versailles, France, Sept. 2–13, 1974) (Reidel, Dordrecht, 1975), pp. 173–178 (NATO Adv. Study Inst. Ser., Vol. 19).

This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Projects 18–01–00353, 18–01–00747).

English ver.: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (3), 456–469 (2020), DOI 10.1134/S1990478920030079.

2. **A. A. Ageev, A. E. Baburin,** and **Eh. Kh. Gimadi,** A 3/4 approximation algorithm for finding two disjoint Hamiltonian cycles of maximum weight, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **13** (2), 11–20 (2006) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **1** (2), 142–147 (2007)].
3. **A. N. Glebov** and **D. Zh. Zambalaeva,** A polynomial algorithm with approximation ratio 7/9 for the maximum 2-peripatetic salesmen problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **18** (4), 17–48 (2011) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (1), 69–89 (2012)].
4. **A. E. Baburin, Eh. Kh. Gimadi,** and **N. M. Korkishko,** Approximation algorithms for finding two edge-disjoint Hamiltonian cycles of minimal total weight, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **11** (1), 11–25 (2004) [Russian].
5. **A. A. Ageev** and **A. V. Pyatkin,** A 2-approximation algorithm for the metric 2-peripatetic salesman problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **16** (4), 3–20 (2009) [Russian].
6. **A. N. Glebov** and **A. V. Gordeeva,** An algorithm with approximation ratio 5/6 for the metric maximum m-PSP, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016) (Springer, Cham, 2016), pp. 159–170 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
7. **Eh. Kh. Gimadi,** Asymptotically optimal algorithm for finding one and two edge-disjoint traveling salesman routes of maximal weight in Euclidean space, *Tr. Inst. Mat. Mekh.* **14** (2), 23–32 (2008) [Russian] [*Proc. Steklov Inst. Math.* **263**, Suppl. 2, S57–S67 (2008)].
8. **A. E. Baburin** and **Eh. Kh. Gimadi,** On the asymptotic optimality of an algorithm for solving the maximum m-PSP in a multidimensional Euclidean space, *Tr. Inst. Mat. Mekh.* **16** (3), 12–24 (2010) [Russian] [*Proc. Steklov Inst. Math.* **272**, Suppl. 1, S1–S13 (2011)].
9. **Eh. Kh. Gimadi, Yu. V. Glazkov,** and **A. N. Glebov,** Approximation algorithms for solving the 2-peripatetic salesman problem on a complete graph with edge weights 1 and 2, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **14** (2), 41–61 (2007) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **3** (1), 46–60 (2009)].
10. **A. N. Glebov, A. V. Gordeeva,** and **D. Zh. Zambalaeva,** An algorithm with approximation ratio 7/5 for the minimum 2-peripatetic salesmen problem with different weight functions, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **8**, 296–309 (2011) [Russian].
11. **A. N. Glebov** and **D. Zh. Zambalaeva,** An approximation algorithm for the minimum 2-peripatetic salesmen problem with different weight functions, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **18** (5), 11–37 (2011) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (2), 167–183 (2012)].
12. **Eh. Kh. Gimadi** and **E. V. Ivonina,** Approximation algorithms for the maximum 2-peripatetic salesman problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **19** (1), 17–32 (2012) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (3), 295–305 (2012)].
13. **A. V. Gordeeva,** Polynomial algorithms with guaranteed estimates for the metric maximum 2-peripatetic salesman problem, *Grad. Thesis* (NGU, Novosibirsk, 2010).

14. R. Wolfler Calvo and **R. Cordone,** A heuristic approach to the overnight security service problem, *Comput. Oper. Res.* **30**, 1269–1287 (2003).

15. J. B. J. M. De Kort, A branch and bound algorithm for symmetric 2-PSP, *Eur. J. Oper. Res.* **70**, 229–243 (1993).

16. J. B. J. M. De Kort, Lower bounds for symmetric K-PSP, *Optimization* **22** (1), 113–122 (1991).

17. J. B. J. M. De Kort, Upper bounds for the symmetric 2-PSP, *Optimization* **23** (4), 357–367 (1992).

18. M. J. D. De Brey and **A. Volgenant,** Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem, *Optimization* **39** (3), 275–293 (1997).

19. *The Traveling Salesman Problem and Its Variations* (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002).

20. Eh. Kh. Gimadi, Approximation efficient algorithms with performance guarantees for some hard routing problems, in *Proc. II Int. Conf. "Optimization and Applications", Petrovac, Montenegro, Sept. 25–Oct. 2, 2011* (VTs RAN, Moscow, 2011), pp. 98–101.

21. H. Kaplan, M. Lewenstein, N. Shafrir, and **M. Sviridenko,** Approximation algorithms for asymmetric TSP by decomposing directed regular multigraphs, *J. ACM* **52** (4), 602–626 (2005).

22. A. I. Serdyukov, An algorithm with an estimate for the traveling salesman problem of the maximum, in *Control Systems,* Vol. 25 (Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1984), pp. 80–86 [Russian].

23. R. Hassin and **S. Rubinstein,** Better approximations for max TSP, *Inf. Process. Lett.* **75** (4), 181–186 (2000).

24. K. Paluch, M. Mucha, and **A. Madry,** A 7/9-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem, in *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization: Algorithms and Techniques* (Proc. 12th Int. Workshop and 13th Int. Workshop, Berkeley, CA, USA, Aug. 21–23, 2009) (Springer, Heidelberg, 2009), pp. 298–311 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 5687).

25. S. Dudycz, J. Marcinkowski, K. Paluch, and **B. A. Rybicki,** A 4/5-approximation algorithm for the maximum traveling salesman problem, in *Integer Programming and Combinatorial Optimization* (Proc. 19th Int. Conf. IPCO 2017, Waterloo, ON, Canada, June 26–28, 2017) (Springer, Cham, 2017), pp. 173–185 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 10328).

26. A. N. Glebov, D. Zh. Zambalaeva, and **A. A. Skretneva,** A 2/3-approximation algorithm for the maximum asymmetric 2-peripatetic salesman problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **21** (6), 11–20 (2014) [Russian].

27. A. N. Glebov and **S. G. Toktokhoeva,** A polynomial 3/5-approximate algorithm for the asymmetric maximization version of 3-PSP, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **26** (2), 30–59 (2019) [Russian].

28. H. N. Gabow, An efficient reduction technique for degree-restricted subgraph and bidirected network flow problems, in *Proc. 15th Annu. ACM Symp. Theory of Comput., Boston, USA, April 25–27, 1983* (ACM, New York, 1983), pp. 448–456.

29. R. Cole, K. Ost, and **S. Schirra,** Edge-coloring bipartite multigraphs in $O(E \log D)$ time, *Combinatorica* **21** (1), 5–12 (2001).

Alexey N. Glebov
Surena G. Toktokhoeva

Received December 2, 2019
Revised May 9, 2020
Accepted May 25, 2020