ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2020. Т. 27, № 3. С. 53–70

УДК 519.854.2 DOI 10.33048/daio.2020.27.681

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ OPEN SHOP С МАРШРУТИЗАЦИЕЙ НА ДВУХ ВЕРШИНАХ С ЕДИНИЧНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ОПЕРАЦИЙ

М. О. Головачёв[1,a], *А. В. Пяткин*[2,1,b]

[1] Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

[2] Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Ак. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: [a] `mik-golovachev2@mail.ru`, [b] `artem@math.nsc.ru`

Аннотация. В задаче Open Shop с маршрутизацией n работ расположены в вершинах рёберно-взвешенного графа $G = (V, E)$, а m машин в начальный момент времени находятся в особой вершине, называемой депо. Машины должны выполнить все работы в произвольном порядке так, чтобы в каждый момент времени каждая машина выполняла не более одной работы и каждая работа выполнялась не более чем одной машиной. Требуется минимизировать длину расписания, т. е. время возвращения последней машины в депо. Известно, что эта задача NP-трудна, даже если граф содержит всего две вершины и число машин равно двум. В этой работе рассматривается частный случай данной задачи на двухвершинном графе, где длительности всех операций, а также перемещения между вершинами равны 1. Выдвигается гипотеза, что данная задача полиномиально разрешима, т. е. длина расписания зависит только от распределения работ по вершинам графа и может быть найдена за время $O(\log mn)$. Строятся новые оценки на длину расписания в зависимости от распределения работ в случае $m = n$. Табл. 2, библиогр. 15.

Ключевые слова: задача Open Shop с маршрутизацией, операция единичной длительности, сложность, расписание, полиномиальное время, оценка длины расписания.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект № 0314–2019–0014) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–01–00045).

Введение

Задача Open Shop является одной из классических задач теории расписаний. В ней имеются множества машин M и работ J мощности m и n соответственно. Для каждой машины i и работы j известно время выполнения p_{ij} операции j-й работы на i-й машине. Требуется найти расписание минимальной длины, в котором все работы выполняются на всех машинах в произвольном порядке так, чтобы в каждый момент времени каждая машина выполняла не более одной работы и каждая работа выполнялась бы не более чем на одной машине. При этом считается, что все работы расположены в одном месте, т. е. время переключения машины с выполнения одной работы на другую равно 0. В задаче Open Shop с маршрутизацией данное условие изменяется, а именно, работы располагаются в вершинах некоторого рёберно-взвешенного графа $G = (V, E)$, где вес ребра равен времени, затрачиваемому машиной на перемещение из одной вершины в другую (если две работы находятся в одной вершине, то переключение с одной из них на другую происходит мгновенно). В начальный момент времени все машины находятся в особой вершине, которая называется *депо*. Длина расписания в задаче Open Shop с маршрутизацией равна времени возвращения последней машины в депо по исполнению всех работ (либо моменту завершения всех работ в депо). Таким образом, задача Open Shop с маршрутизацией обобщает сразу две NP-трудные задачи: Open Shop и метрическую задачу коммивояжёра.

Задача Open Shop была впервые поставлена в [1], где была показана её полиномиальная разрешимость при $m = 2$ и NP-трудность при $m \geqslant 3$. Известно, что при произвольном числе машин m не существует c-приближённого алгоритма для $c < 5/4$, если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ [2]. Если все операции имеют единичную длительность (т. е. все $p_{ij} = 1$), то эта задача эквивалентна рёберной раскраске двудольного графа, которая строится за полиномиальное время (самый быстрый известный алгоритм её решения можно найти в [3]). Задача Open Shop с маршрутизацией была поставлена в [4]; её NP-трудность даже в случае $m = 2$ и $G = K_2$ была доказана в [5]. Для этого частного случая в [6] построена FPTAS, а наилучший возможный $6/5$-приближённый алгоритм по отношению к стандартной нижней оценке был предложен в [4]. Если прерывания разрешены, то задача Open Shop с маршрутизацией остаётся NP-трудной для $G = K_2$ и произвольного m, но полиномиально разрешима при $m = 2$ [7] (отметим, что задача Open Shop с прерываниями полиномиально разрешима для произвольного m [1]). В случае единичной длительности операций задача Open Shop с маршрутизацией является FPT [8,9], если в качестве фиксированного параметра выбрать $m+|V|$. Однако вопрос о сложности

задачи с единичной длительностью операций с произвольным числом машин m остаётся открытым даже при $G = K_2$.

Отметим, что ранее также рассматривалась задача Open Shop с перемещениями работ [10–12], однако несмотря на известную «симметрию» между машинами и работами в задаче Open Shop наличие депо делает задачу Open Shop с маршрутизацией существенно отличной от задачи Open Shop с перемещениями работ.

В данной статье рассматривается задача Open Shop с маршрутизацией при $G = K_2$ с единичными длительностями операций и перемещения между вершинами, причём числа машин и работ совпадают, т. е. $m = n$. Предварительная версия результатов по этой задаче докладывалась на конференции MOTOR-2019 [13], где был представлен ряд оценок на длину оптимального расписания в зависимости от нагрузки вершин. В настоящей работе получены следующие улучшения. Во-первых, существенно усилено условие несуществования расписания длины $n + 3$ (теорема 3 из [13]). Во-вторых, разработан достаточно удобный критерий существования расписания длины $n+3$, который позволяет избежать построения и анализа громоздких таблиц; это существенно упростило доказательство теорем 4 и 5 из [13] и позволило доказать новые оценки.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 вводятся основные определения и обозначения и формулируется исследуемая задача. В разд. 2 для полноты изложения представлен ряд простых результатов из [13]. В разд. 3 и 4 доказываются новые критерии существования и несуществования расписания длины $n+3$ соответственно. На базе этих результатов в разд. 5 доказываются теоремы о длине оптимального расписания для новых значений параметров распределения нагрузки на вершины.

1. Основные определения и обозначения

Под *целочисленным интервалом* будем понимать множество $[\alpha, \beta] = \{\alpha, \alpha + 1, \ldots, \beta\}$, где $\alpha \leqslant \beta$ — целые числа. Обозначим через a число работ в депо, а через b — число работ во второй вершине. Очевидно, что $a + b = n$. Можно считать, что в депо находятся работы $J_1, \ldots, J_a$, а во второй вершине — работы $J_{a+1}, \ldots, J_n$. В случае единичных длительностей работ удобно представлять расписание в виде таблицы размера $m \times n$ натуральных чисел, где число k в ячейке (i, j) означает, что машина M_i выполняет работу J_j с момента времени $k - 1$ до момента k. Пусть t_{ij} обозначает содержимое ячейки (i, j) таблицы. Тогда будем говорить, что таблица определяет *корректное расписание длины* K, если выполняются следующие условия:

(1°) $t_{ij} \in [1, K]$ при $j \in [1, a]$ и $t_{ij} \in [2, K - 1]$ при $j \in [a + 1, n]$,

(2°) $t_{ij_1} \neq t_{ij_2}$ и $t_{i_1 j} \neq t_{i_2 j}$ для любых $i_1 \neq i_2$ и $j_1 \neq j_2$,

(3°) для любых $i \in [1, m]$, $j_1 \in [1, a]$, $j_2 \in [a+1, n]$ выполняется неравенство $|t_{ij_1} - t_{ij_2}| \geqslant 2$.

Будем называть столбцы $1, \ldots, a$ (соответствующие работам из депо) *левой частью* таблицы, а столбцы $a+1, \ldots, n$ — *правой частью* таблицы.

Квадратная таблица, удовлетворяющая условию (2°), называется *латинским квадратом*. Обозначим через $L(i, j)$ латинский квадрат со стороной $j - i + 1$, в каждой строке которого присутствуют числа $i, \ldots, j$. Отметим, что идея применения латинских квадратов для задачи Open Shop с единичными длительностями операций возникла в работе [14].

Обозначим через K^* минимальную длину расписания. Тогда из условий (1°) и (2°) следует неравенство $K^* \geqslant m + 2$, а из условий (2°) и (3°) получаем $K^* \geqslant n + 2$. В итоге имеем следующую нижнюю оценку:

$$K^* \geqslant \max\{m, n\} + 2. \tag{1}$$

С другой стороны, в работах [8, 9] была доказана верхняя оценка

$$K^* \leqslant \max\{m, n\} + 4. \tag{2}$$

Для рассматриваемого нами случая $m = n$ из оценок (1) и (2) следует, что оптимальна длина расписания $K^* = n + s$, где $s \in \{2, 3, 4\}$, а значит, нужно охарактеризовать эти три случая в зависимости от значений a и b. Таким образом, основным объектом изучения является следующая

Задача 1. *Рассматривается задача Open Shop с маршрутизацией на графе $G = K_2$ с числом $m = n$ машин и работ, причём a работ расположены в депо, а $b = n - a$ работ — во второй вершине. Длительности всех операций, а также перемещения между вершинами равны 1. Определить, какому из трёх равенств $K^* = n+2$ или $K^* = n+3$ или $K^* = n+4$ удовлетворяет длина оптимального расписания.*

Заметим, что если $K^* \leqslant n + 3$, то каждая машина совершает ровно одну поездку во вторую вершину и обратно.

2. Простые случаи

Все результаты этого раздела были доказаны в [13]. Здесь их краткие доказательства приводятся лишь для полноты изложения.

Следующая теорема даёт критерий достижимости нижней оценки (1) в случае $m = n$.

Теорема 1. *В задаче 1 имеем $K^* = n + 2$ тогда и только тогда, когда $a \equiv 0 \pmod{b}$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $k = \frac{a}{b}$, т. е. $n = (k+1)b$. Рассмотрим латинский квадрат $L(1, k+1)$, полученный k циклическими сдвигами строки $(1, \ldots, k+1)$. Назовём все ячейки ниже основной

диагонали красными, ячейки последнего столбца жёлтыми, а остальные ячейки зелёными. Тогда для всех $t \in \{1, \ldots, k+1\}$ заменим каждую ячейку, содержащую t, латинским квадратом $L((t-1)b+1, tb)$, если эта ячейка зелёная, латинским квадратом $L((t-1)b+2, tb+1)$, если она жёлтая, и латинским квадратом $L((t-1)b+3, tb+2)$, если она красная. Нетрудно убедиться, что в каждой строке число в жёлтой ячейке больше числа в зелёной ячейке, но меньше числа в красной ячейке, а в каждом столбце в левой части таблицы число в зелёной ячейке меньше числа в красной ячейке. Из этого наблюдения следует корректность построенного расписания длины $K^* = n+2$.

Необходимость. Если $K^* = n+2$, то в правой части таблицы каждый столбец содержит все числа из интервала $[2, n+1]$. В частности, число 2 встречается в b строках в правой части таблицы. Поскольку все машины должны работать без простоев (не считая перемещений между вершинами), в этих строках в правой части таблицы должны быть также все числа из интервала $[3, b+1]$, т. е. образуется латинский квадрат $L(2, b+1)$. Аналогично строки, содержащие $b+2$ в правой части таблицы, образуют квадрат $L(b+2, 2b+1)$, и т. д. Однако это возможно, лишь если $n \equiv 0 \pmod b$, а значит, и $a \equiv 0 \pmod b$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если* $a \equiv b-1 \pmod b$ *или* $a \equiv 0 \pmod{b+1}$, *то* $K^* = n+3$.

Доказательство. Добавим новую машину и работу в депо или вторую вершину соответственно и применим теорему 1. Следствие 1 доказано.

Другим полностью исследованным случаем является $a < b$.

Теорема 2. *Пусть* $a < b$. *Тогда оптимальная длина расписания равна* $K^* = n+3$, *если* $b - a = 1$, *или* $a = 1$, $b = 3$, *или* $a = 2$, $b = 4$, *и* $K^* = n+4$ *во всех остальных случаях.*

Доказательство. Предположим, что $K^* = n+3$, т. е. каждая машина имеет не более одного простоя. Поскольку каждая машина должна выполнить b работ во второй вершине и вернуться назад, она должна прибыть во вторую вершину не позднее времени $a+2$ и не может уехать оттуда раньше времени $b+1$. Поэтому в левой части таблицы все числа либо не больше $a+1$, либо не меньше $b+3$, т. е. всего имеется $2a+2$ вариантов чисел. Поскольку в каждом столбце все числа различны, имеем $2a+2 \geqslant a+b$, а значит, $b-a \leqslant 2$. Пусть $b = a+2$. Так как в левой части таблицы $a(a+b) = a(2a+2)$ ячеек, каждое из $2a+2$ доступных чисел должно встречаться там ровно a раз. В частности, это верно для чисел $a+1$ и $b+3$. Но это означает, что имеется a машин, которые приезжают во вторую вершину в момент времени $a+2$ (уже имея один простой

Таблица 1

Расписания для случаев а) $a = 1$, $b = 3$ **и б)** $a = 2$, $b = 4$

а)

1	3	5	6
2	6	4	5
7	2	3	4
6	4	2	3

б)

1	2	6	4	8	7
3	1	7	6	5	8
2	3	8	7	6	5
8	9	2	3	4	6
7	8	5	2	3	4
9	7	4	5	2	3

в депо, т. е. далее они должны работать без простоев), и a машин, которые покидают вторую вершину в момент времени $b+1 = a+3$ (а это означает, что они работали без простоев). Тогда в момент $a+2$ не менее $2a$ машин работали одновременно во второй вершине, а значит, $2a \leqslant b = a+2$, т. е. $a \leqslant 2$.

Чтобы завершить доказательство, отметим, что в случае $a = b - 1$ равенство $K^* = n+3$ вытекает из следствия 1, а корректные расписания длины $K^* = n + 3$ для случаев $a = 1$, $b = 3$ и $a = 2$, $b = 4$ приведены в табл. 1(а) и 1(б) соответственно. Теорема 2 доказана.

Поэтому далее полагаем, что $a > b$.

3. Условия существования расписаний длины $n + 3$

В [13] основным методом доказательства существования расписания длины $n+3$ было непосредственное построение соответствующей таблицы и доказательство того факта, что задаваемое ей расписание корректно. Ниже доказывается лемма, которая позволит обойтись без явного построения таблиц.

Пусть для каждого $i = 1, \dots, n = a + b$ заданы некоторые множества натуральных чисел L_i и R_i. Будем говорить, что система этих множеств (a, b)-*корректна*, если выполнены следующие условия:

(a) $L_i \subset [1, n+3]$, $R_i \subset [2, n+2]$, причём $|L_i| = a$, $|R_i| = b$ для каждого $i \in [1, n]$,

(b) каждое $j \in [1, n + 3]$ встречается не более чем в a множествах L_i, а каждое $j \in [2, n + 2]$ встречается не более чем в b множествах R_i,

(c) для любых $i \in [1, n]$, $x \in L_i$, $y \in R_i$ выполняется неравенство $|x - y| \geqslant 2$.

Лемма 1. *В задаче* 1 *расписание длины* $K^* = n+3$ *существует тогда и только тогда, когда существует* (a, b)*-корректная система множеств.*

Доказательство. Необходимость. Если расписание существует, то определим L_i и R_i как множество всех чисел, встречающихся в строке i в левой и правой частях таблицы соответственно. Тогда условие (a)

следует из условий (1°) и (2°) для строк, (b) следует из условия (2°) для столбцов, а (c) следует из условий (3°). Таким образом, система множеств (a, b)-корректна.

Достаточность. Пусть имеется (a, b)-корректная система множеств L_i, R_i, где $i \in [1, n]$. Рассмотрим вспомогательные двудольные графы $H_a = (M, A; E_a)$ и $H_b = (M, B; E_b)$, где

$$M = [1, n], \quad A = [1, n+3], \quad B = [2, n+2].$$

Пусть $i \in M$, $p \in A$ и $q \in B$. Положим $ip \in E_a$ тогда и только тогда, когда $p \in L_i$, а $iq \in E_b$ тогда и только тогда, когда $q \in R_i$. Из условий (a) и (b) следует, что H_a и H_b являются двудольными графами максимальных степеней a и b соответственно, причём в каждом графе все вершины доли M имеют максимальную степень. По теореме Кёнига [15] существуют правильные раскраски их рёбер $f\colon E_a \to [1, a]$ и $g\colon E_b \to [1, b]$. Из правильности раскраски и максимальности степени каждой вершины $i \in M$ следует, что к i примыкают рёбра всех цветов $1, \ldots, a$ в раскраске f и всех цветов $1, \ldots, b$ в раскраске g. Построим таблицу по следующему правилу. Для каждого $i \in [1, n]$ и $j \in [1, a]$ найдём такое p, что $f(ip) = j$, и положим $t_{ij} = p$, а для $j \in [1, b]$ найдём такое q, что $g(iq) = j$, и положим $t_{i,j+a} = q$.

Покажем, что полученная таблица задаёт корректное расписание длины $K^* = n+3$. Действительно, условие (1°) следует из определения множеств A и B, а условие (3°) — из условия (c), так как каждая ячейка i-й строки содержит лишь цвета из L_i в левой части таблицы и цвета из R_i в правой части таблицы. Выполнение условия (2°) для строк очевидно. Допустим, (2°) нарушается для столбцов, т. е. $t_{i_1 j} = t_{i_2 j} = p$ для некоторых $i_1 \neq i_2$. Это означает, что к вершине p соответствующего графа примыкают рёбра $i_1 p$ и $i_2 p$, раскрашенные цветом j, что противоречит правильности раскраски.

Таким образом, построенная таблица задаёт корректное расписание длины $K^* = n + 3$. Лемма 1 доказана.

Лемма 1 позволяет легко применять индукцию для доказательства существования расписаний длины $n + 3$, что довольно затруднительно сделать при явном построении таблиц.

Лемма 2. *Если для некоторых $a > b$ в задаче 1 существует расписание длины $a + b + 3$, то и для $a' = a + b$, $b' = b$ существует расписание длины $a' + b' + 3$.*

Доказательство. По лемме 1 существует (a, b)-корректная система множеств L_i, R_i, где $i \in [1, a + b]$. Построим (a', b')-корректную систему

множеств L'_i, R'_i, где $i \in [1, a+2b]$, следующим образом. Положим

$$L'_i = L_i \cup [a+b+4, a+2b+3], \quad R'_i = R_i \quad \text{при } i \in [1, a+b],$$

$$L'_i = [1, a+b], \quad R'_i = [a+b+3, a+2b+2] \quad \text{при } i \in [a+b+1, a+2b].$$

Нетрудно проверить, что эта система (a', b')-корректна, а значит, по лемме 1 существует расписание длины $a+2b+3 = a'+b'+3$. Лемма 2 доказана.

Пусть задано некоторое $R \subset [2, n+2]$, причём α и β — максимальное и минимальное числа в R. Назовём *естественным дополнением* R множество $\widehat{R} = [1, n+3] \setminus [\alpha-1, \beta+1]$.

Утверждение 1. *В любой (a, b)-корректной паре условие $L_i \subset \widehat{R}_i$ выполняется для каждого $i \in [1, n]$.*

Доказательство. Предположим, что найдутся такие $\alpha < \beta < \gamma$, что $\alpha, \gamma \in R_i$ и $\beta \in L_i$ для некоторого $i \in [1, n]$. Тогда условие (c) запрещает как минимум $b+4$ чисел для L_i из $a+b+3$ возможных, а значит, $|L_i| \leqslant a-1$, что противоречит условию (a). Утверждение 1 доказано.

Следующая теорема объединяет теоремы 4 и 5 из [13] при значительно более простом доказательстве.

Теорема 3. *Если $a = kb+l$, причём $k \geqslant l-1$ и $l \geqslant 1$, то существует оптимальное расписание длины $K^* = n+3$.*

Доказательство. По лемме 2 достаточно доказать теорему 3 для $k = l-1$. В этом случае $n = (k+1)(b+1)$. Рассмотрим семейство целочисленных интервалов $J_1, \ldots, J_{k+1}$, где $J_1 = [2, b+2]$, а для всех $j \in [2, k+1]$ положим $J_j = [(j-1)b+j+2, jb+j+2]$. Нетрудно видеть, что эти интервалы попарно не пересекаются, а их объединение есть $[2, n+2] \setminus \{b+3\}$. Пусть $i = p(b+1)+q+1$, где $p \in [0, k]$, $q \in [0, b]$. Тогда зададим $L_i = \widehat{J}_{p+1}$ и $R_i = J_{p+1} \setminus \{c_i\}$, где $c_i = i+1$ при $p = 0$ и $c_i = i+2$ при $p \geqslant 1$. Другими словами, система R_i содержит все подмножества, получаемые из интервалов J_j удалением одного элемента.

Убедимся, что построенная система (a, b)-корректна. Условия (a) и (c) следуют из того, что мощность всех J_j равна $b+1$, и из определения естественного дополнения. Число $b+3$ не входит ни в одно R_i, а также отсутствует в $2b+2$ множествах из L_i (а именно, при $p = 0$ и $p = 1$). Любое $j \in [2, n+2] \setminus \{b+3\}$ лежит ровно в одном интервале J_p, а значит, по построению оно принадлежит ровно b множествам R_i и ровно $n-(b+1) = a-1$ множествам L_i. Наконец, числа 1 и $n+3$ отсутствуют в $\widehat{J}_1$ и $\widehat{J}_{k+1}$ соответственно, а значит, они также встречаются в $n-(b+1) = a-1$ множествах L_i. Таким образом, система (a, b)-корректна, и по лемме 1 существует расписание длины $n+3$. Теорема 3 доказана.

4. Условия несуществования расписания длины $n+3$

В теореме 3 из [13] было доказано, что не существует допустимого расписания длины $n+3$ при $a=b+l$, где $l \geqslant 3$ и $b \geqslant 2l+1$. Следующая теорема значительно усиливает это условие.

Теорема 4. *Если $a=kb+l$, где $k \geqslant 1$, $l \in [k+2, b-2]$ и $b > \frac{(l-k)l}{l-k-1}$, то оптимальное расписание имеет длину $K^* = n+4$.*

Доказательство. Пусть $t = l-k = a-(b+1)k$. По условию $t \in [2, b-k-2]$. Предположим, что $K^* = n+3$. Тогда по лемме 1 существует (a,b)-корректная система множеств L_i, R_i, $i \in [1,n]$. Для любых $p, q \in [2, n+2]$, $p \leqslant q$ положим $x_p = |\{i \mid p \in R_i\}|$ (число R_i, содержащих p) и обозначим через $a_{[p,q]}$ число R_i, минимальный элемент которых лежит в интервале $[p,q]$. Ясно, что для любой системы попарно не пересекающихся интервалов $I_1, \ldots, I_s \subseteq [2, n+2]$ выполняется неравенство

$$\sum_{j=1}^{s} a_{I_j} \leqslant n. \tag{3}$$

Для краткости будем писать a_p вместо $a_{[p,p]}$. Из условия (b) следует, что все $x_p \leqslant b$.

С одной стороны, из условия (a) следует, что

$$\sum_{p=2}^{n+2}(b-x_p) = (n+1)b - \sum_{p=2}^{n+2} x_p = (n+1)b - \sum_{i=1}^{n} |R_i| = b. \tag{4}$$

С другой стороны, ввиду утверждения 1 и условия (a) разность между максимальным и минимальным элементами в каждом R_i равна либо b, либо $b-1$. Положим

$$I = \bigcup_{j=0}^{k+1} [bj+j+2, bj+j+1+t].$$

Очевидно, что $|I| = (k+2)t$. Имеем

$$x_2 = a_2, \quad x_3 \leqslant a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad x_{t+1} \leqslant a_2 + \cdots + a_{t+1}. \tag{5}$$

Для каждого $j \in [1,k]$ выполняется

$$x_{jb+j+2} \leqslant a_{(j-1)b+j+2} + \cdots + a_{(j-1)b+j+t} + a_{[(j-1)b+j+t+1, jb+j+2]}, \tag{6}$$

$$x_{jb+j+3} \leqslant a_{(j-1)b+j+3} + \cdots + a_{(j-1)b+j+t} + a_{[(j-1)b+j+t+1, jb+j+2]} + a_{jb+j+3}, \tag{7}$$

$$\cdots$$

$$x_{jb+j+t+1} \leqslant a_{[(j-1)b+j+t+1, jb+j+2]} + a_{jb+j+3} + \cdots + a_{jb+j+t+1}. \tag{8}$$

Наконец, поскольку $n = (k+1)b + l = (k+1)b + k + t$, то

$$x_{(k+1)b+k+3} \leqslant a_{kb+k+3} + \dots + a_{kb+k+t+1} + a_{[kb+k+t+2,n+2]}, \tag{9}$$
$$x_{(k+1)b+k+4} \leqslant a_{kb+k+4} + \dots + a_{kb+k+t+1} + a_{[kb+k+t+2,n+2]}, \tag{10}$$
$$\dots$$
$$x_{(k+1)b+k+t+2} \leqslant a_{[kb+k+t+2,n+2]}. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что в правых частях неравенств (5)–(11) каждое из имеющихся чисел $a_{[p,q]}$ встречается ровно t раз, а соответствующие им интервалы не пересекаются. Используя (3) и (4), получим

$$b = \sum_{p=2}^{n+2}(b - x_p) \geqslant \sum_{p\in I}(b - x_p) \geqslant b|I| - tn = t((k+2)b - n) = (l-k)(b-l),$$

откуда вытекает, что $b(l-k-1) \leqslant (l-k)l$; противоречие условию теоремы. Теорема 4 доказана.

Следствие 2. *Пусть $a = kb + l$. Если $b > 2k+4$, то $K^* = n+4$ при всех $l \in [k+2, b-2]$; если $b = 2k+4$, то $K^* = n+4$ при всех $l \in [k+3, b-3]$.*

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что $K^* = n + 4$, если $b(l-k-1) > l(l-k)$, т. е. при $f(l) := l^2 - (k+b)l + kb + b < 0$. Корнями уравнения $f(l) = 0$ являются

$$l_{\min}, l_{\max} = \frac{k + b \pm \sqrt{(k+b)^2 - 4b(k+1)}}{2} = \frac{k + b \pm \sqrt{(b-k-4)^2 + 4b - 8k - 16}}{2}.$$

Следовательно, при $b > 2k+4$ получим

$$l_{\max} > (k + b + (b-k-4))/2 = b - 2,$$
$$l_{\min} < (k + b - (b-k-4))/2 = k + 2.$$

Значит, при всех $l \in [k+2, b-2]$ по теореме 4 имеем $K^* = n+4$. Если же $b = 2k+4$, то $l_{\max} = b-2$ и $l_{\min} = k+2$, а значит, строгое неравенство $f(l) < 0$ имеет место при $l \in [k+3, b-3]$. Следствие 2 доказано.

Следствие 2 показывает, что оценка на k из теоремы 3, вообще говоря, не может быть улучшена при достаточно больших b. Однако при малых b улучшения возможны, как показано в следующем разделе.

5. Новые расписания длины $n+3$

Сначала покажем неулучшаемость следствия 2 при $b = 2k+4$.

Теорема 5. *Пусть $a = kb + l$, где $k \geqslant 1$, $l = k+2$ и $b = 2k+4$. Тогда оптимальное расписание имеет длину $K^* = n+3$.*

Доказательство. По лемме 1 достаточно построить (a, b)-корректную систему множеств L_i, R_i, где $i \in [1, n]$ и $n = a + b = (k + 2)(2k + 3)$. Пусть

$$I_j = [(j-1)b + 3 - j, jb + 2 - j] \quad \text{при } j \in [1, k+2],$$

$$J_j = [(j-1)b + 2 + j, jb + 2 + j] \setminus \{jb + 2 - j\} \quad \text{при } j \in [1, k+1].$$

Пусть $i = (k + 2)j + p$, где $0 \leqslant p \leqslant k + 1$. Если $j < k + 2$, положим $R_i = I_{j+1}$; в противном случае $R_i = J_{j-k-1}$. Другими словами, система множеств R_i содержит по $k + 2$ копий каждого из множеств I_j и J_j. Положим $L_i = \widehat{R}_i \setminus C_i$ для всех $i \in [1, n]$, где $C_i = \{n+3\}$ при $i \in [1, k+2]$, $C_i = \{1\}$ при $i \in [k + 3, (k + 2)^2]$ и $C_i = \varnothing$ при $i > (k + 2)^2$.

Покажем (a, b)-корректность построенной системы. Положим $A = \{jb+2-j \mid j \in [1, k+1]\}$. Выполнение условий (a) и (c) следует непосредственно из построения и определения естественного дополнения. Для доказательства условия (b) заметим, что объединение всех I_j образует мультимножество $[2, n + 2] \cup A$, а $\bigcup_{j=1}^{k+1} J_j = [3, n + 1] \setminus A$. Отсюда следует, что числа 2 и $n + 2$ встречаются в множествах R_i ровно $k + 2$ раз, а все числа из отрезка $[3, n + 1]$ — ровно $2k + 4 = b$ раз. Значит, в множествах L_i все числа из отрезка $[2, n+2]$ встречаются не более чем $n-b = a$ раз. Наконец, числа 1 и $n+3$ отсутствуют в L_i при $i \in [1, (k+2)^2]$ и $i \in [1, k+2] \cup [(k+2)(k+1)+1, (k+2)^2]$ соответственно, т. е. каждое из них также встречается не более чем в $a = n - b = n - 2k - 4$ множествах L_i. Таким образом, условие (b) выполнено. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть* $a = kb + l$, *где* $k \geqslant 1$, $l = b - 2$ *и* $b = 2k + 4$. *Тогда оптимальное расписание имеет длину* $K^* = n + 3$.

Доказательство. Имеем $n = a+b = (k+1)(2k+6)$. Построим (a, b)-корректную систему множеств L_i, R_i, $i = 1, \ldots, n$, следующим образом. Для каждого $j \in [0, k]$ система содержит

$$2k + 2 - 2j \text{ копий } R_i = [jb + 2, (j + 1)b + 1],\ L_i = \widehat{R}_i \setminus \{n + 3\},$$

$$2 \text{ копии } R_i = [jb + 2j + 3, (j + 1)b + 2j + 3] \setminus \{(j + 1)b + 1\},\ L_i = \widehat{R}_i,$$

$$2j + 2 \text{ копий } R_i = [(j + 1)b + 1, (j + 2)b],\ L_i = \widehat{R}_i \setminus \{1\}.$$

Положим $A = \{jb + 2(j + 1) \mid j \in [0, k + 1]\} = \{2, b + 4, \ldots, n + 2 = (k + 1)b + 2(k + 2)\}$. Нетрудно проверить, что все числа из множества A встречаются в множествах R_i по $2k + 2$ раз, а все числа из $[2, n + 2] \setminus A$ встречаются в множествах R_i по $2k + 4$ раз. При этом каждое из чисел отрезка $[1, n + 3]$ отсутствует как минимум в $2k + 4 = b$ множествах L_i. Отсюда следует (a, b)-корректность построенной системы, и по лемме 1 получаем $K^* = n + 3$. Теорема 6 доказана.

Аналогичные утверждения можно доказать для $b = 2k + 3$.

Теорема 7. *Пусть $a = kb + l$, где $k \geqslant 1$, $l \in \{k + 2, b - 2\}$ и $b = 2k + 3$. Тогда оптимальное расписание имеет длину $K^* = n + 3$.*

Доказательство. Приведём конструкции (a, b)-корректных систем множеств L_i, R_i для каждого из этих случаев.

Случай $l = k + 2$. Заметим, что $n = a + b = (k + 1)b + k + 2 = (k + 2)^2 + (k + 1)^2$. Положим

$$I_j = [jb + 2 - j, (j + 1)b + 2 - j] \quad \text{при } j \in [0, k + 1],$$
$$J_j = [jb + 3 + j, (j + 1)b + 3 + j] \quad \text{при } j \in [0, k].$$

Тогда система R_i содержит j копий $I_j \setminus \{jb+2-j\}$, которым соответствуют $L_i = \widehat{R}_i \setminus \{1\}$, и $k+2-j$ копий $I_j \setminus \{(j+1)b+2-j\}$, которым соответствуют $L_i = \widehat{R}_i \setminus \{n + 3\}$ при $j \in [0, k + 1]$, а также j копий $J_j \setminus \{(j + 1)b + 2 - j\}$ с $L_i = \widehat{R}_i$ и $k + 1 - j$ копий $J_j \setminus \{(j + 1)b + 3 - j\}$ с $L_i = \widehat{R}_i$ при $j \in [0, k]$.

Как и в предыдущих теоремах, для доказательства (a, b)-корректности достаточно проверить условие (b). Нетрудно видеть, что каждое I_j порождает $k+2$ множеств R_i, а каждое J_j порождает $k+1$ множеств R_i. Заметим, что объединение всех J_j образует множество $[3, n+1]$, а объединение всех I_j — мультимножество $[2, n+2]$, в котором числа $(j+1)b+2-j$ и $(j + 1)b + 1 - j$ при всех $j \in [1, k]$ встречаются дважды. Поэтому все числа из интервала $[3, n + 1]$, кроме вышеуказанных, встречаются ровно в $(k + 1) + (k + 2) = 2k + 3 = b$ множествах R_i. При этом число $(j + 1)b + 2 - j$ отсутствует в $k + 2 - j$ множествах R_i, порождённых I_j, и в j множествах R_i, порождённых J_j, а число $(j+1)b+1-j$ отсутствует в $j + 1$ множествах R_i, порождённых I_{j+1}, и в $k + 1 - j$ множествах R_i, порождённых J_j. Значит, каждое из этих чисел также встречается ровно в b множествах R_i. Следовательно, все числа из интервала $[2, n + 2]$ встречаются не более чем в $n - b = a$ множествах L_i. Очевидно, что 2 и $n + 1$ встречаются в системе R_i соответственно $k + 2$ и $k + 1$ раз, а числа 1 и $n + 3$ отсутствуют как минимум в $((k + 2)^2 + (k + 2))/2 > b$ множествах L_i. Таким образом, система (a, b)-корректна, и по лемме 1 получаем $K^* = n + 3$.

Случай $l = b - 2 = 2k + 1$. Имеем $n = (k + 1)b + 2k + 1$. Для каждого $j \in [0, k]$ система содержит

$$2k + 1 - 2j \text{ копий } R_i = [jb + 2, (j + 1)b + 1],\ L_i = \widehat{R}_i \setminus \{n + 3\},$$
$$2j + 2 \text{ копий } R_i = [(j + 1)b + 1, (j + 2)b],\ L_i = \widehat{R}_i \setminus \{1\},$$
$$t \text{ копий } R_i = [jb + 2j + 3, (j + 1)b + 2j + 3] \setminus \{(j + 1)b + 1\},\ L_i = \widehat{R}_i,$$

Таблица 2

$(29,8)$**-корректная система**

i	R_i	L_i
$1,2,3,4$	$[2,9]$	$[11,39]$
$5,6,7,8$	$[3,11]\setminus\{9\}$	$\{1\}\cup[13,40]$
$9,10,11,12$	$[9,16]$	$[2,7]\cup[18,40]$
$13,14,15,16$	$[12,20]\setminus\{16\}$	$[1,10]\cup[22,40]$
$17,18,19,20$	$[16,23]$	$[1,14]\cup[25,39]$
$21,22,23,24$	$[21,29]\setminus\{23\}$	$[1,19]\cup[31,40]$
$25,26,27,28$	$[23,30]$	$[1,21]\cup[32,39]$
$29,30$	$[30,37]$	$[1,28]\cup\{40\}$
$31,32$	$[30,38]\setminus\{i\}$	$[1,28]\cup\{40\}$
$33,34,35,36,37$	$[31,39]\setminus\{i\}$	$[1,29]$

где $t=2$ при $j<k$ и $t=1$ при $j=k$. Доказательство (a,b)-корректности этой системы проводится так же, как в теореме 5, и поэтому опускается. Теорема 7 доказана.

В [13] было доказано, что если $b\leqslant 6$, то при всех $a>b$ имеет место равенство $K^*=n+3$. Новые результаты позволяют получить полную характеризацию оптимальной длины расписания для всех $b\leqslant 8$.

Теорема 8. *Если* $b\leqslant 8$ *и* $a>b$, *то* $K^*\leqslant n+3$ *для всех пар* (a,b) *кроме* $b=7$, $a\in[10,12]$ *и* $b=8$, $a\in[11,14]\cup\{21\}$.

Доказательство. Пусть $a=kb+l$, где $k\geqslant 1$ и $l<b$. Невозможность построения расписания длины $n+3$ для случаев $b=7$, $a\in[10,12]$ и $b=8$, $a\in[11,14]\cup\{21\}$ вытекает из следствия 2. Покажем, что $K^*\leqslant n+3$ в остальных случаях. Если $l=0$, то $K^*=n+2$ по теореме 1. Случаи $l\leqslant 2$ и $l=b-1$ следуют из теоремы 3 и следствия 1 соответственно. При $b\leqslant 4$ других вариантов нет. При $b=5$ единственным вариантом, не подпадающим под условия теоремы 3, является $l=3$ и $k=1$, который следует из теоремы 7. При $b=6$ варианты $l=3$, $k=1$ и $l=4$, $k=1$ следуют из теорем 5 и 6 соответственно, а вариант $l=4$, $k=2$ — из леммы 2. Аналогично при $b=7$ варианты $l=4$, $k=2$ и $l=5$, $k=2$ следуют из теоремы 7, а вариант $l=5$, $k=3$ — из леммы 2. Наконец, при $b=8$ теоремы 5 и 6 разрешают случаи $l=4$, $k=2$ и $l=6$, $k=2$, а лемма 2 — случаи $l=6$, $k\in\{3,4\}$. Остаётся последний вариант $l=5$, $k=3$, т. е. $a=29$, $b=8$. Для этого случая $(29,8)$-корректная система (что проверяется непосредственно) приведена в табл. 2. Теорема 8 доказана.

Заключение

В работе доказаны новые условия существования и несуществования расписания длины $n+3$ в задаче Open Shop с маршрутизацией на двухвершинном графе с единичными длительностями работ и перемещений, а также с одинаковым числом работ и машин. Данные условия позволили существенно продвинуться на пути доказательства полиномиальной разрешимости этой задачи. Показано, что при достаточно больших b длина расписания равна $n+4$ при $l \in [k+2, b-2]$, где k и l — это частное и остаток от деления a на b. Остаётся открытым вопрос длины расписания при малых b и $l \in [k+2, b-2]$. Также остаётся открытым вопрос построения функции, которая за время $O(\log n)$ выдавала бы время завершения любой операции.

Отметим, что введённая в работе концепция (a, b)-корректных систем множеств может быть обобщена на случай произвольного целочисленного времени перемещения τ. Для этого достаточно в условии (с) заменить 2 на $1+\tau$. Тогда лемма 1 даст критерий существования расписания длины $n + 2\tau + 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gonzalez T., Sahni S.** Open shop scheduling to minimize finish time // J. ACM. 1976. Vol. 23, No. 4. P. 665–679.
2. **Williamson D. P., Hall L. A., Hoogeveen J. A., Hurkens C. A. J., Lenstra J. K., Sevast'janov S. V., Shmoys D. B.** Short shop schedules // Oper. Res. 1997. Vol. 45. P. 288–294.
3. **Cole R., Ost K., Schirra S.** Edge-coloring bipartite multigraphs in $O(E \times \log D)$ time // Combinatorica. 2001. Vol. 21, No. 1. P. 5–12.
4. **Averbakh I., Berman O., Chernykh I.** A 6/5-approximation algorithm for the two-machine routing open shop problem on a 2-node network // Eur. J. Oper. Res. 2005. Vol. 166, No. 1. P. 3–24.
5. **Averbakh I., Berman O., Chernykh I.** The routing open-shop problem on a network: Complexity and approximation // Eur. J. Oper. Res. 2006. Vol. 173, No. 2. P. 521–539.
6. **Кононов А. В.** О цеховой задаче открытого типа на двух машинах с маршрутизацией в двухвершинной сети // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 2. С. 54–74.
7. **Пяткин А. В., Чёрных И. Д.** Задача Open Shop с маршрутизацией на двухвершинной сети и разрешением прерываний // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 3. С. 65–78.
8. **Van Bevern R., Pyatkin A. V.** Completing partial schedules for open shop with unit processing times and routing // Computer Science – Theory and Applications. Proc. 11th Int. Computer Science Symp. in Russia (St. Petersburg, Russia, June 9–13, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 73–87. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9691).

9. **Van Bevern R., Pyatkin A. V., Sevastyanov S. V.** An algorithm with parameterized complexity of constructing the optimal schedule for the routing open shop problem with unit execution times // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 42–84.
10. **Brucker P., Knust S., Cheng T. C. E., Shakhlevich N. V.** Complexity results for flow-shop and open-shop scheduling problems with transportation delays // Ann. Oper. Res. 2004. Vol. 129. P. 81–106.
11. **Lushchakova I., Soper A., Strusevich V.** Transporting jobs through a two-machine open shop // Naval Res. Logistics. 2009. Vol. 56. P. 1–18.
12. **Strusevich V.** A heuristic for the two-machine open-shop scheduling problem with transportation times // Discrete Appl. Math. 1999. Vol. 93, No. 2. P. 287–304.
13. **Golovachev M. O., Pyatkin A. V.** Routing Open Shop with two nodes, unit processing times and equal number of jobs and machines // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Proc. 18th Int. Conf. (Yekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019). Cham: Springer, 2019. P. 264–276. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 11548).
14. **Bräsel H., Kluge D., Werner F.** A polynomial algorithm for the $[n/m/0, t_{ij} = 1, \mathrm{tree}/C_{\max}]$ open shop problem // Eur. J. Oper. Res. 1994. Vol. 72, No. 1. P. 125–134.
15. **Diestel R.** Graph theory. Heidelberg: Springer, 2016.

Головачёв Михаил Олегович
Пяткин Артём Валерьевич

Статья поступила
10 января 2020 г.
После доработки —
20 апреля 2020 г.
Принята к публикации
25 мая 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2020. Vol. 27, No. 3. P. 53–70

UDC 519.854.2 DOI 10.33048/daio.2020.27.681

ON A ROUTING OPEN SHOP PROBLEM ON TWO NODES WITH UNIT PROCESSING TIMES

M. O. Golovachev[1,a] and *A. V. Pyatkin*[2,1,b]

[1] Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia

[2] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: [a] `mik-golovachev2@mail.ru`, [b] `artem@math.nsc.ru`

Abstract. The routing Open Shop Problem deals with n jobs located in the nodes of an edge-weighted graph $G = (V, E)$ and m machines that are initially in a special node called *depot*. The machines must process all jobs in arbitrary order so that each machine processes at most one job at any one time and each job is processed by at most one machine at any one time. The goal is to minimize the makespan; i. e., the time when the last machine returns to the depot. This problem is known to be NP-hard even for the two machines and the graph containing only two nodes. In this article we consider the particular case of the problem with a 2-node graph, unit processing time of each job, and unit travel time between every two nodes. The conjecture is made that the problem is polynomially solvable in this case; i. e., the makespan depends only on the number of machines and the loads of the nodes and can be calculated in time $O(\log mn)$. We provide some new bounds on the makespan in the case of $m = n$ depending on the loads distribution. Tab. 2, bibliogr. 15.

Keywords: routing Open Shop Problem, unit processing time, complexity, scheduling, polynomial time, makespan bound.

This research is supported by the Program for Fundamental Scientific Research of SB RAS (Project 0314–2019–0014) and Russian Foundation for Basic Research (Project 20–01–00045).

English ver.: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (3), 470–479 (2020), DOI 10.1134/S1990478920030060.

REFERENCES

1. **T. Gonzalez** and **S. Sahni,** Open shop scheduling to minimize finish time, *J. ACM* **23** (4), 665–679 (1976).
2. **D. P. Williamson, L. A. Hall, J. A. Hoogeveen, C. A. J. Hurkens, J. K. Lenstra, S. V. Sevast'janov,** and **D. B. Shmoys,** Short shop schedules, *Oper. Res.* **45**, 288–294 (1997).
3. **R. Cole, K. Ost,** and **S. Schirra,** Edge-coloring bipartite multigraphs in $O(E \log D)$ time, *Combinatorica* **21** (1), 5–12 (2001).
4. **I. Averbakh, O. Berman,** and **I. Chernykh,** A 6/5-approximation algorithm for the two-machine routing open shop problem on a 2-node network, *Eur. J. Oper. Res.* **166** (1), 3–24 (2005).
5. **I. Averbakh, O. Berman,** and **I. Chernykh,** The routing open-shop problem on a network: Complexity and approximation, *Eur. J. Oper. Res.* **173** (2), 521–539 (2006).
6. **A. V. Kononov,** On the routing open shop problem with two machines on a two-vertex network, *Diskretn. Analiz Issled. Oper.* **19** (2), 54–74 (2012) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (3), 318–331 (2012)].
7. **A. V. Pyatkin** and **I. D. Chernykh,** The open shop problem with routing at a two-node network and allowed preemption, *Diskretn. Analiz Issled. Oper.* **19** (3), 65–78 (2012) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (3), 346–354 (2012)].
8. **R. van Bevern** and **A. V. Pyatkin,** Completing partial schedules for open shop with unit processing times and routing, in *Computer Science – Theory and Applications* (Proc. 11th Int. Computer Science Symp. in Russia, St. Petersburg, Russia, June 9–13, 2016) (Springer, Cham, 2016), pp. 73–87 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9691).
9. **R. van Bevern, A. V. Pyatkin,** and **S. V. Sevastyanov,** An algorithm with parameterized complexity of constructing the optimal schedule for the routing open shop problem with unit execution times, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **16**, 42–84 (2019).
10. **P. Brucker, S. Knust, T. C. E. Cheng,** and **N. V. Shakhlevich,** Complexity results for flow-shop and open-shop scheduling problems with transportation delays, *Ann. Oper. Res.* **129**, 81–106 (2004).
11. **I. Lushchakova, A. Soper,** and **V. Strusevich,** Transporting jobs through a two-machine open shop, *Naval Res. Logistics* **56**, 1–18 (2009).
12. **V. Strusevich,** A heuristic for the two-machine open-shop scheduling problem with transportation times, *Discrete Appl. Math.* **93** (2), 287–304 (1999).
13. **M. O. Golovachev** and **A. V. Pyatkin,** Routing Open Shop with two nodes, unit processing times and equal number of jobs and machines, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (Proc. 18th Int. Conf., Yekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019) (Springer, Cham, 2019), pp. 264–276 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 11548).
14. **H. Bräsel, D. Kluge,** and **F. Werner,** A polynomial algorithm for the $[n/m/0, t_{ij} = 1, \text{tree}/C_{\max}]$ open shop problem, *Eur. J. Oper. Res.* **72** (1), 125–134 (1994).

15. R. Diestel, Graph theory (Springer, Heidelberg, 2016).

Mikhail O. Golovachev
Artem V. Pyatkin

Received January 10, 2020
Revised April 20, 2020
Accepted May 25, 2020