ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2020. Т. 27, № 3. С. 109–125

УДК 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2020.27.683

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НАД КОНЕЧНОЙ ЦЕПЬЮ

А. Д. Яшунский

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4, 125047 Москва, Россия

E-mail: `yashunsky@keldysh.ru`

Аннотация. Рассматриваются преобразования независимых случайных величин над конечным линейно упорядоченным множеством (цепью) операциями максимума и минимума. Исследуется вопрос о возможности аппроксимации произвольного вероятностного распределения над цепью путём (возможно, многократного) применения операций максимума и минимума к независимым случайным величинам, имеющим распределения из некоторого заданного множества. Найдены условия, при которых аппроксимация заведомо невозможна и при которых она становится возможной. Ил. 3, библиогр. 9.

Ключевые слова: конечная цепь, линейно упорядоченное множество, случайная величина, распределение, аппроксимация.

Введение

Одной из задач математической кибернетики, в которой рассматриваются преобразования дискретных случайных величин, является порождение случайных величин с требуемыми распределениями путём применения дискретных детерминированных операций к независимым случайным величинам, имеющим распределения из некоторого начального множества. Исследования в этой области ведутся по меньшей мере с 1960-х гг., а наибольшего продвижения удалось достичь в изучении преобразователей рациональных вероятностных распределений (см., например, [1, 2], а также обзор в [3]).

Помимо задачи о точном выражении требуемого распределения можно рассматривать ослабленный «аппроксимационный» вариант: построение распределений, сколь угодно точно приближающих требуемое. Один из первых результатов в этой задаче принадлежит Р. Л. Схиртладзе, который показал в [4], что применение операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания к независимым одинаково распределённым невырожденным бернуллиевским случайным величинам позволяет аппроксимировать любую бернуллиевскую случайную величину с любой наперёд заданной точностью. В дальнейшем этот результат был усилен в [5] и независимо в [6], где показано, что такими же возможностями обладает система преобразующих функций, состоящая только из конъюнкции и дизъюнкции. Интерес к этим задачам в настоящее время обусловлен в том числе тем, что преобразования бернуллиевских случайных величин с помощью конъюнкций и дизъюнкций оказываются удобной моделью для описания «биохимических» вычислительных систем (см. [7]).

Одним из естественных обобщений конъюнкции и дизъюнкции на случай k-элементного множества являются операции минимума и максимума относительно линейного порядка на элементах. Для такой системы операций в [8, 9] рассматривалась задача о точном выражении рациональных вероятностных распределений. Настоящая работа дополняет эти исследования рассмотрением задачи аппроксимации распределений для той же системы, т. е. фактически обобщая результаты [4–6] на случай k-элементного множества.

1. Определения и простейшие свойства

Будем рассматривать случайные величины со значениями в множестве $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$. *Распределение* такой случайной величины — вектор $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_{k-1})$, компоненты которого удовлетворяют условиям $\sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i = 1$ и $p_i \geqslant 0$, $i = 0, \dots, k-1$. Множество распределений образует в $\mathbb{R}^k$ симплекс, который будем обозначать $\mathbf{S}^{(k)}$. Вершины симплекса $\mathbf{S}^{(k)}$ обозначим через $\mathbf{e}^{(0)} = (1, 0, \dots, 0)$, …, $\mathbf{e}^{(k-1)} = (0, \dots, 0, 1)$. *Носителем* распределения $\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(k)}$ называется множество $\mu(\mathbf{p}) = \{i \in E_k \mid p_i > 0\} \subseteq E_k$.

Пусть множество E_k — цепь, т. е. его элементы упорядочены линейно ($0 < 1 < \dots < k-1$), а $x \vee y$ и $x \wedge y$ — соответствующие этому порядку операции максимума и минимума. Если X и Y — независимые случайные величины над E_k, имеющие распределения $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ соответственно, то $X \vee Y$ и $X \wedge Y$ — также случайные величины над E_k, распределения которых будем обозначать через $\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q}$ и $\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q}$. Для компонент этих распределений несложно вывести следующие формулы:

$$(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q})_i = \sum_{j \vee l = i} p_j q_l = p_i q_i + \sum_{j=0}^{i-1} p_j q_i + \sum_{l=0}^{i-1} p_i q_l, \tag{1}$$

$$(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q})_i = \sum_{j \wedge l = i} p_j q_l = p_i q_i + \sum_{j=i+1}^{k-1} p_j q_i + \sum_{l=i+1}^{k-1} p_i q_l,$$

где суммы считаются равными нулю, если верхний индекс меньше нижнего. Таким образом, $\widehat{\vee}$ и $\widehat{\wedge}$ являются вектор-функциями из $(\mathbf{S}^{(k)})^2$ в $\mathbf{S}^{(k)}$; будем говорить, что они *индуцированы* функциями $\vee$ и $\wedge$ соответственно. Отметим, что так же, как и $\vee, \wedge$, операции $\widehat{\vee}, \widehat{\wedge}$ коммутативны и ассоциативны.

Аналогично тому, как минимум и максимум обобщают булевы конъюнкцию и дизъюнкцию, можно обобщить на E_k булево отрицание, рассмотрев функцию $r(x) = k - 1 - x$. Тогда для введённых на E_k функций имеет место аналог двойственности булевых конъюнкции и дизъюнкции:

$$r(x \wedge y) = r(x) \vee r(y), \quad r(x \vee y) = r(x) \wedge r(y). \tag{2}$$

Функция $\widehat{r}\colon \mathbf{S}^{(k)} \to \mathbf{S}^{(k)}$, индуцированная $r(x)$, удовлетворяет равенствам $(\widehat{r}(\mathbf{p}))_i = p_{k-1-i}$, $i \in E_k$. Непосредственно проверяются (см. теорему 1 в [9]) аналогичные (2) соотношения двойственности для индуцированных функций:

$$\widehat{r}(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q}) = \widehat{r}(\mathbf{p}) \mathbin{\widehat{\vee}} \widehat{r}(\mathbf{q}), \quad \widehat{r}(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q}) = \widehat{r}(\mathbf{p}) \mathbin{\widehat{\wedge}} \widehat{r}(\mathbf{q}). \tag{3}$$

Поскольку распределения на E_k являются также элементами $\mathbb{R}^k$, для них определены операции сложения и умножения на число, результат которых в общем случае может уже не лежать в $\mathbf{S}^{(k)}$. Тем не менее, для любых распределений $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{S}^{(k)}$ и любого числа $\alpha \in [0; 1]$ выпуклая комбинация $\alpha\mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{q}$ также является распределением. Можно рассматривать выпуклые комбинации нескольких распределений. Определим *выпуклую оболочку* распределений $\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(s)}$:

$$\operatorname{Conv}(\mathbf{p}^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}^{(s)}) = \left\{ \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \mathbf{p}^{(j)} \mid \sum_{j=1}^{s} \alpha_j = 1,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_s \geqslant 0 \right\}.$$

Отметим, что $\mathbf{S}^{(k)} = \operatorname{Conv}(\mathbf{e}^{(0)}, \ldots, \mathbf{e}^{(k-1)})$, а коэффициенты в представлении распределения $\mathbf{p} = (p_0, \ldots, p_{k-1})$ в качестве выпуклой комбинации распределений $\mathbf{e}^{(0)}, \ldots, \mathbf{e}^{(k-1)}$ равны $p_0, \ldots, p_{k-1}$.

Имеет место дистрибутивность операций $\widehat{\vee}, \widehat{\wedge}$ относительно взятия выпуклой комбинации распределений, а именно:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \mathbf{p}^{(j)} \right) \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q} &= \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (\mathbf{p}^{(j)} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q}), \\ \left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j \mathbf{p}^{(j)} \right) \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q} &= \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (\mathbf{p}^{(j)} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q}). \end{aligned} \tag{4}$$

Применение операций $\widehat{\vee}, \widehat{\wedge}$ к начальным распределениям позволяет выражать новые распределения, которые затем могут быть также использованы для дальнейшего порождения распределений. Наименьшее по включению множество распределений, замкнутое относительно операций $\widehat{\wedge}, \widehat{\vee}$, содержащее заданное множество $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{S}^{(k)}$ и включающее все свои предельные точки, будем обозначать через $W(\mathbf{G})$. В терминологии работы [3] множество $W(\mathbf{G})$ — аппроксимационная алгебра распределений, порождённая $\mathbf{G}$, замкнутая относительно операций, индуцированных $\wedge, \vee$. Содержательно множество $W(\mathbf{G})$ описывает распределения, которые могут быть приближены с любой наперёд заданной точностью путём применения операций $\wedge, \vee$ к независимым случайным величинам с распределениями из $\mathbf{G}$. В случае одноэлементного множества $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}\}$ вместо $W(\{\mathbf{g}\})$ будем писать $W(\mathbf{g})$.

Несложно проверить, что $W(\mathbf{G})$ является оператором замыкания на множествах распределений. В терминах оператора W результаты из [4] могут быть сформулированы следующим образом: если $\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(2)}$ и $\mu(\mathbf{p}) = E_2$, то $W(\{\mathbf{p}, \widehat{r}(\mathbf{p})\}) = \mathbf{S}^{(2)}$. В [5, 6] этот результат усилен до $W(\mathbf{p}) = \mathbf{S}^{(2)}$. Наша дальнейшая цель заключается в исследовании свойств замыканий $W(\mathbf{G})$ для $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{S}^{(k)}$ при $k > 2$.

2. Ограничения возможности аппроксимации распределений

В данном разделе мы покажем, что при $k > 2$ существуют нетривиальные подмножества распределений, замкнутые относительно оператора W. В случае $k = 2$, как следует из результатов в [5], замкнутыми будут только подмножества $\{\mathbf{e}^{(0)}\}$, $\{\mathbf{e}^{(1)}\}$, $\{\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{e}^{(1)}\}$ и $\mathbf{S}^{(2)}$.

Определим на распределениях $\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(k)}$ числовые функции $S_{<i}(\mathbf{p})$ и $S_{\geqslant i}(\mathbf{p})$ для всех $i \in E_k$ следующим образом:

$$S_{<i}(\mathbf{p}) = p_0 + \cdots + p_{i-1}, \quad S_{\geqslant i}(\mathbf{p}) = p_i + \cdots + p_{k-1}.$$

Будем считать по определению, что $S_{<0}(\mathbf{p}) = 0$. При всех $i \in E_k$ выполнены соотношения $S_{<i}(\mathbf{p}) + S_{\geqslant i}(\mathbf{p}) = 1$, а также $S_{<i}(\widehat{r}(\mathbf{p})) = S_{\geqslant k-i}(\mathbf{p})$ и $S_{<i}(\mathbf{p}) = S_{\geqslant k-i}(\widehat{r}(\mathbf{p}))$. Фактически $S_{<i}(\mathbf{p})$ и $S_{\geqslant i}(\mathbf{p})$ выражают вероятности того, что случайная величина с распределением $\mathbf{p}$ принимает значение, меньшее и соответственно не меньшее чем i.

Следующая лемма может быть как непосредственно проверена с использованием равенств (1), так и выведена из вероятностной интерпретации функции $S_{<i}(\mathbf{p})$ и определения операции $\widehat{\vee}$.

Лемма 1. *Если* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{S}^{(k)}$ *и* $i \in E_k$, *то* $S_{<i}(\mathbf{p} \,\widehat{\vee}\, \mathbf{q}) = S_{<i}(\mathbf{p}) S_{<i}(\mathbf{q})$.

Из соотношений двойственности (3) легко вытекает аналогичное лемме 1 утверждение относительно $S_{\geqslant i}(\mathbf{p})$.

Следствие 1. *Если* $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{S}^{(k)}$ *и* $i \in E_k$, *то* $S_{\geqslant i}(\mathbf{p} \,\widehat{\wedge}\, \mathbf{q}) = S_{\geqslant i}(\mathbf{p}) S_{\geqslant i}(\mathbf{q})$.

Для числа $\alpha > 1$ и индекса $i \in E_k$ определим следующие множества:

$$\mathbf{L}(i,\alpha) = \{\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(k)} \mid S_{<i}(\mathbf{p}) \leqslant (S_{<i+1}(\mathbf{p}))^\alpha\},$$
$$\mathbf{U}(i,\alpha) = \{\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(k)} \mid S_{\geqslant i+1}(\mathbf{p}) \leqslant (S_{\geqslant i}(\mathbf{p}))^\alpha\}.$$

Возникающее в формулах выше при $i = k-1$ значение $S_{\geqslant k}(\mathbf{p})$ полагаем по определению равным 0, а значение $S_{<k}(\mathbf{p})$, также по определению, равным 1. С учётом этих доопределений получаем, что множества $\mathbf{L}(0,\alpha)$, $\mathbf{L}(k-1,\alpha)$, $\mathbf{U}(0,\alpha)$ и $\mathbf{U}(k-1,\alpha)$ совпадают с $\mathbf{S}^{(k)}$ при любом $\alpha > 1$. Все остальные множества (с индексами $i \in \{1,\ldots,k-2\}$), определённые при $k > 2$, отличны от $\mathbf{S}^{(k)}$, так как заведомо не содержат распределений $(p,0,\ldots,0,1-p)$ при $0 < p < 1$.

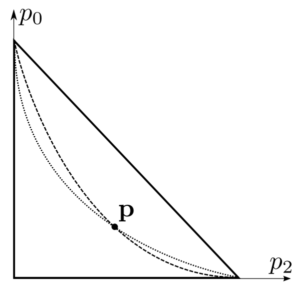

Рис. 1. Верхняя граница множества $\mathbf{L}(1,\alpha)$ (штриховой пунктир) и множества $\mathbf{U}(1,\alpha)$ (точечный пунктир), содержащих заданное распределение $\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(3)}$

Примеры нетривиальных множеств $\mathbf{L}(1,\alpha), \mathbf{U}(1,\alpha) \subset \mathbf{S}^{(3)}$, содержащих заданное распределение $\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(3)}$, изображены на рис. 1 в проекции симплекса $\mathbf{S}^{(3)}$ на плоскость (p_0, p_2). Оба множества представляют собой криволинейные треугольники, у которых две стороны совпадают с координатными осями, а третья задаётся уравнением $S_{<1}(\mathbf{p}) = (S_{<2}(\mathbf{p}))^\alpha$ или $S_{\geqslant 2}(\mathbf{p}) = (S_{\geqslant 1}(\mathbf{p}))^\alpha$ соответственно.

Множества $\mathbf{L}(i,\alpha)$ и $\mathbf{U}(k-i-1,\alpha)$ двойственны относительно отображения $\widehat{r}$ в следующем смысле:

$$\begin{aligned}\{\widehat{r}(\mathbf{p}) \mid \mathbf{p} \in \mathbf{L}(i,\alpha)\} &= \{\widehat{r}(\mathbf{p}) \mid S_{<i}(\mathbf{p}) \leqslant (S_{<i+1}(\mathbf{p}))^\alpha\} \\ &= \{\widehat{r}(\mathbf{p}) \mid S_{\geqslant k-i}(\widehat{r}(\mathbf{p})) \leqslant (S_{\geqslant k-i-1}(\widehat{r}(\mathbf{p})))^\alpha\} \\ &= \{\mathbf{q} \mid S_{\geqslant k-i-1+1}(\mathbf{q}) \leqslant (S_{\geqslant k-i-1}(\mathbf{q}))^\alpha\} = \mathbf{U}(k-i-1,\alpha).\end{aligned}$$

Покажем, что оба семейства множеств замкнуты относительно W.

Теорема 1. *Для любых $\alpha > 1$ и $i \in E_k$ выполнены соотношения $W(\mathbf{L}(i,\alpha)) = \mathbf{L}(i,\alpha)$ и $W(\mathbf{U}(i,\alpha)) = \mathbf{U}(i,\alpha)$.*

Доказательство. Поскольку множества $\mathbf{L}(i,\alpha)$ и $\mathbf{U}(k-i-1,\alpha)$ двойственны, равно как и функции $\widehat{\vee}$ и $\widehat{\wedge}$, достаточно доказать утверждение теоремы только для одного из множеств; будем доказывать его для $\mathbf{L}(i,\alpha)$. Из определения $\mathbf{L}(i,\alpha)$ очевидно, что оно содержит все свои предельные точки. Пусть заданы $\alpha > 1$, $i \in E_k$ и распределения $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbf{L}(i,\alpha)$. Покажем, что тогда $\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q} \in \mathbf{L}(i,\alpha)$ и $\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q} \in \mathbf{L}(i,\alpha)$.

Из леммы 1 и определения множества $\mathbf{L}(i,\alpha)$ получаем

$$\begin{aligned} S_{<i}(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q}) = S_{<i}(\mathbf{p})S_{<i}(\mathbf{q}) &\leqslant (S_{<i+1}(\mathbf{p}))^\alpha (S_{<i+1}(\mathbf{q}))^\alpha \\ &= (S_{<i+1}(\mathbf{p})S_{<i+1}(\mathbf{q}))^\alpha = (S_{<i+1}(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q}))^\alpha, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q} \in \mathbf{L}(i,\alpha)$. Покажем теперь, что $\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q} \in \mathbf{L}(i,\alpha)$.

По следствию 1 и свойствам функций $S_{<i}$, $S_{\geqslant i}$ имеем

$$\begin{aligned} S_{<i}(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q}) &= 1 - S_{\geqslant i}(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q}) = 1 - S_{\geqslant i}(\mathbf{p})S_{\geqslant i}(\mathbf{q}) \\ &= 1 - (1 - S_{<i}(\mathbf{p}))(1 - S_{<i}(\mathbf{q})) = 1 - 1 + S_{<i}(\mathbf{p}) + (1 - S_{<i}(\mathbf{p}))S_{<i}(\mathbf{q}) \\ &\leqslant S_{<i}(\mathbf{p}) + (1 - S_{<i}(\mathbf{p}))(S_{<i+1}(\mathbf{q}))^\alpha = (S_{<i+1}(\mathbf{q}))^\alpha + (1 - (S_{<i+1}(\mathbf{q}))^\alpha)S_{<i}(\mathbf{p}) \\ &\leqslant (S_{<i+1}(\mathbf{q}))^\alpha + (1 - (S_{<i+1}(\mathbf{q}))^\alpha)(S_{<i+1}(\mathbf{p}))^\alpha. \end{aligned}$$

Вместе с тем, также из свойств функций $S_{<i}$, $S_{\geqslant i}$ вытекает, что

$$\begin{aligned} S_{<i+1}(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{q}) &= 1 - (1 - S_{\geqslant i+1}(\mathbf{p}))(1 - S_{\geqslant i+1}(\mathbf{q})) \\ &= S_{<i+1}(\mathbf{q}) + (1 - (S_{<i+1}(\mathbf{q}))S_{<i+1}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что выполнено неравенство

$$\begin{aligned} (S_{<i+1}(\mathbf{q}))^\alpha &+ (1 - (S_{<i+1}(\mathbf{q}))^\alpha)(S_{<i+1}(\mathbf{p}))^\alpha \\ &\leqslant (S_{<i+1}(\mathbf{q}) + (1 - (S_{<i+1}(\mathbf{q}))S_{<i+1}(\mathbf{p}))^\alpha. \qquad (5) \end{aligned}$$

Обозначим $S_{<i+1}(\mathbf{q})$ через a, $S_{<i+1}(\mathbf{p})$ через t и рассмотрим функцию

$$f(t) = a + (1-a)t - (a^\alpha + (1-a^\alpha)t^\alpha)^{1/\alpha},$$

в которой $a \in [0;1]$ — параметр, а $t \in [0;1]$ — переменная, при этом $\alpha > 1$ по условию теоремы. Тогда выполнение неравенства (5) равносильно неотрицательности функции $f(t)$ на отрезке $[0;1]$ при всех значениях параметра $a \in [0;1]$.

Легко видеть, что $f(0) = f(1) = 0$. Найдём первые две производные $f(t)$:

$$f'(t) = (1-a) - (a^\alpha + (1-a^\alpha)t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-a^\alpha)t^{\alpha-1},$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= -(1-a^\alpha)((a^\alpha + (1-a^\alpha)t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}t^{\alpha-1})' \\ &= -(1-a^\alpha)\Big(\Big(\frac{1}{\alpha}-1\Big)(a^\alpha + (1-a^\alpha)t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}(1-a^\alpha)\alpha t^{\alpha-1}t^{\alpha-1} \end{aligned}$$

$$+ (a^\alpha + (1-a^\alpha)t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}(\alpha-1)t^{\alpha-2}\Big)$$

$$= -(1-a^\alpha)(a^\alpha + (1-a^\alpha)t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}t^{\alpha-2}(\alpha-1)(-(1-a^\alpha)t^\alpha + a^\alpha + (1-a^\alpha)t^\alpha)$$

$$= -(\alpha-1)(1-a^\alpha)a^\alpha t^{\alpha-2}(a^\alpha + (1-a^\alpha)t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}.$$

Поскольку при $t \in (0;1)$ выполнено $f''(t) < 0$, получаем $f(t) \geqslant 0$, что и требовалось доказать. Теорема 1 доказана.

Следствие 2. *Если* $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}^{(1)}, \ldots, \mathbf{g}^{(s)}\} \subset \mathbf{S}^{(k)}$ *и найдётся такое* $i \in \{1, 2, \ldots, k-2\}$, *что* $g_i^{(j)} > 0$ *при всех* $j = 1, \ldots, s$, *то* $W(\mathbf{G}) \neq \mathbf{S}^{(k)}$.

Доказательство. Пусть $i \in \{1, 2, \ldots, k-2\}$ удовлетворяет условиям утверждения. Тогда положим

$$\alpha = \min_{j=1,\ldots,s} \frac{\log S_{<i}(\mathbf{g}^{(j)})}{\log S_{<i+1}(\mathbf{g}^{(j)})}.$$

Из условий $g_i^{(j)} > 0$ для $j = 1, \ldots, s$ вытекает, что $S_{<i}(\mathbf{g}^{(j)}) < S_{<i+1}(\mathbf{g}^{(j)})$, а это, в свою очередь, влечёт $\alpha > 1$. По определению α справедливо $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{L}(i, \alpha)$, в силу чего $W(\mathbf{G}) \subseteq W(\mathbf{L}(i, \alpha)) = \mathbf{L}(i, \alpha) \subset \mathbf{S}^{(k)}$. Поскольку последнее включение строгое, следствие 2 доказано.

Из следствия 2, в частности, следует, что при $k > 2$ никакой конечный набор распределений, носители которых совпадают с E_k, не позволяет аппроксимировать произвольное распределение. Кроме того из сохранения любых подмножеств E_k операциями $\vee, \wedge$ получается, что при $k > 2$ любое распределение $\mathbf{g} \in \mathbf{S}^{(k)}$ удовлетворяет неравенству $W(\mathbf{g}) \neq \mathbf{S}^{(k)}$.

Отметим, что по заданному набору распределений $\mathbf{G}$, удовлетворяющему условиям следствия 2, можно также построить множество $\mathbf{U}(i, \beta)$, содержащее $\mathbf{G}$, и тем самым ещё сильнее ограничить множество аппроксимируемых распределений, поскольку будет иметь место включение $W(\mathbf{G}) \subseteq \mathbf{L}(i, \alpha) \cap \mathbf{U}(i, \beta)$.

3. Аппроксимируемые распределения

Результаты разд. 2 показывают, что в отличие от случая $k = 2$ в общем случае одноэлементное множество начальных распределений не позволяет аппроксимировать произвольное распределение. Тем не менее, даже одноэлементное множество порождает достаточно обширное подмножество заведомо аппроксимируемых распределений.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(k)}$ *удовлетворяет равенству* $\mu(\mathbf{p}) = E_k$. *Тогда* $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i-1)}, \mathbf{e}^{(i)}) \subseteq W(\mathbf{p})$ *для всех* $i \in E_k \setminus \{0\}$.

Доказательство. Следующие ниже рассуждения основаны на построении последовательности распределений, элементы которой по очереди приближают все отрезки $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i-1)}, \mathbf{e}^{(i)})$ для $i = 1, \ldots, k-1$. Фактически с ростом номера элементы последовательности «перемещаются» вдоль некоторой кривой, проходящей достаточно близко от фигурирующих в формулировке теоремы рёбер симплекса $\mathbf{S}^{(k)}$. Эскиз этой «траектории» в случае $k = 4$ представлен на рис. 2; пунктиром показана «траектория» последовательности, приближающей распределение $\mathbf{e}^{(0)}$.

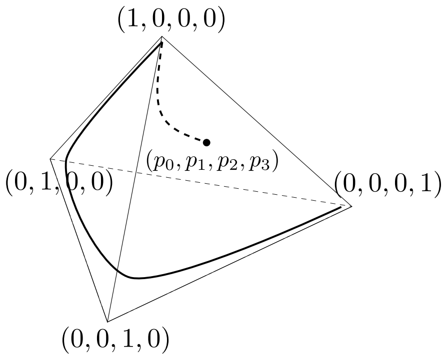

Рис. 2. «Траектории» приближения распределений в доказательстве теоремы 2

Положим $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{p}$ и далее определим $\mathbf{g}^{(m+1)} = \mathbf{g}^{(m)} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{p}$. Тогда, очевидно, $\mathbf{g}^{(m)} \in W(\mathbf{p})$. В силу следствия 1 для всех $i \in E_k$ выполнено

$$S_{\geqslant i}(\mathbf{g}^{(m+1)}) = S_{\geqslant i}(\mathbf{g}^{(m)}) S_{\geqslant i}(\mathbf{p}) = \cdots = (S_{\geqslant i}(\mathbf{p}))^{m+1}. \tag{6}$$

По условию теоремы $\mu(\mathbf{p}) = E_k$, поэтому для всех $i \neq 0$ имеет место $S_{\geqslant i}(\mathbf{p}) < 1$, откуда получаем, что $S_{\geqslant i}(\mathbf{g}^{(m)}) = (S_{\geqslant i}(\mathbf{p}))^m \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $i \in E_k \setminus \{0\}$. Таким образом, последовательность $\mathbf{g}^{(m)}$ сходится к $\mathbf{e}^{(0)}$ при $m \to \infty$, что, естественно, влечёт $\mathbf{e}^{(0)} \in W(\mathbf{p})$.

Покажем, что для любого $\alpha > 1$ найдётся такой номер m_0, что при всех $i \in E_k$ и $m \geqslant m_0$ выполнено $\mathbf{g}^{(m)} \in \mathbf{L}(i, \alpha)$. Пусть $\alpha > 1$ фиксировано. Для каждого $i \in E_k \setminus \{0\}$ положим $\beta_i = \frac{\log S_{\geqslant i}(\mathbf{p})}{\log S_{\geqslant i-1}(\mathbf{p})}$. Поскольку $\mu(\mathbf{p}) = E_k$, выполнено $S_{\geqslant i-1}(\mathbf{p}) - S_{\geqslant i}(\mathbf{p}) = p_{i-1} > 0$, откуда $1 \geqslant S_{\geqslant i-1}(\mathbf{p}) > S_{\geqslant i}(\mathbf{p})$, что влечёт $0 \geqslant \log S_{\geqslant i-1}(\mathbf{p}) > \log S_{\geqslant i}(\mathbf{p})$ и, следовательно, $\beta_i > 1$ при всех $i \in E_k \setminus \{0\}$. В силу выбора значений β_i для всех $i \in E_k \setminus \{0\}$ выполнено равенство $S_{\geqslant i}(\mathbf{p}) = (S_{\geqslant i-1}(\mathbf{p}))^{\beta_i}$. Вместе с соотношениями (6) из этого получаем, что при всех m

$$S_{\geqslant i}(\mathbf{g}^{(m)}) = (S_{\geqslant i}(\mathbf{p}))^m = (S_{\geqslant i-1}(\mathbf{p}))^{\beta_i m} = (S_{\geqslant i-1}(\mathbf{g}^{(m)}))^{\beta_i}. \tag{7}$$

Рассмотрим функции $f_i(t) = (1-t^{\beta_i})^\alpha - 1 + t$ при $t \in [0;1]$. Производная функции $f_i(t)$ по переменной t равна

$$f_i'(t) = \alpha(1-t^{\beta_i})^{\alpha-1}\beta_i(-t^{\beta_i-1}) + 1.$$

Из условий $\alpha > 1$ и $\beta_i > 1$ получаем, что $f_i'(0) = 1$, при этом $f_i(0) = 0$, а следовательно, для достаточно малых значений переменной $t > 0$ имеет место $f_i(t) > 0$. Иначе говоря, для каждого $i \in E_k \setminus \{0\}$ найдётся такое T_i, что $f_i(t) > 0$ при $t \in (0; T_i)$. Полагая $T = \min\limits_{i \in E_k \setminus \{0\}} T_i$, для всех $i \in E_k \setminus \{0\}$ при $t \in (0; T)$ имеем неравенство $f_i(t) > 0$, эквивалентное

$$(1-t^{\beta_i})^\alpha > 1 - t. \tag{8}$$

Для последовательности $\mathbf{g}^{(m)}$, как показано ранее, $S_{\geqslant i}(\mathbf{g}^{(m)}) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $i \in E_k \setminus \{0\}$, поэтому найдётся такое m_0, что для всех $i \in E_k \setminus \{0\}$ при $m \geqslant m_0$ выполнено $S_{\geqslant i}(\mathbf{g}^{(m)}) < T$. Тогда для каждого $i = 2, 3, \ldots, k-1$, подставляя $S_{\geqslant i-1}(\mathbf{g}^{(m)})$ в неравенство (8) вместо переменной t, получаем

$$(1 - (S_{\geqslant i-1}(\mathbf{g}^{(m)}))^{\beta_i})^\alpha > 1 - S_{\geqslant i-1}(\mathbf{g}^{(m)}).$$

Принимая во внимание (7) и соотношение $S_{<i}(\mathbf{g}^{(m)}) + S_{\geqslant i}(\mathbf{g}^{(m)}) = 1$, приходим к неравенству

$$(S_{<i}(\mathbf{g}^{(m)}))^\alpha > S_{<i-1}(\mathbf{g}^{(m)}),$$

выполненному для $i = 2, 3, \ldots, k-1$, что, очевидно, эквивалентно выполнению неравенства $S_{<i}(\mathbf{g}^{(m)}) < (S_{<i+1}(\mathbf{g}^{(m)}))^\alpha$ для $i = 1, 2, \ldots, k-2$, а это означает принадлежность $\mathbf{g}^{(m)} \in \mathbf{L}(i, \alpha)$ для соответствующих значений i. Поскольку $\mathbf{L}(0, \alpha) = \mathbf{L}(k-1, \alpha) = \mathbf{S}^{(k)}$, включение $\mathbf{g}^{(m)} \in \mathbf{L}(i, \alpha)$ имеет место для всех $i \in E_k$.

Покажем, что для любых $\Delta > 0$, $i \in E_k \setminus \{0\}$ и $\mathbf{q} \in \mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i-1)}, \mathbf{e}^{(i)})$ найдётся такое распределение $\mathbf{q}' \in W(\mathbf{p})$, что $\max\limits_{j \in E_k} |q_j - q_j'| < \Delta$. Отсюда сразу будет следовать, что $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i-1)}, \mathbf{e}^{(i)}) \subseteq W(\mathbf{p})$.

Пусть далее $\Delta > 0$ фиксировано; без ограничения общности можно считать, что $\Delta < 1$, так как иначе в качестве распределения $\mathbf{q}'$ можно взять любой элемент из $W(\mathbf{p})$. Выберем $\alpha > \frac{\log(\Delta/6)}{\log(1-\Delta/6)}$, тогда из неравенств $0 < \Delta < 1$ вытекает, что $\alpha > 1$. При этом в силу определения α будет выполнено неравенство

$$1 - \Delta/6 < (\Delta/6)^{1/\alpha}. \tag{9}$$

Как показано выше, для выбранного $\alpha > 1$ найдётся такой номер m_0, что $\mathbf{g}^{(m)} \in \mathbf{L}(i, \alpha)$ при $m \geqslant m_0$ для всех $i \in E_k$. Кроме того, $\mathbf{g}^{(m)} \to \mathbf{e}^{(0)}$

при $m \to \infty$, поэтому существует такой номер $m_1 > m_0$, что

$$\max_{i \in E_k} \left| g_i^{(m_1)} - e_i^{(0)} \right| < \Delta/6.$$

Обозначим $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{(m_1)}$ и далее определим последовательность распределений, положив $\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h} \in W(\mathbf{p})$ и $\mathbf{h}^{(n+1)} = \mathbf{h}^{(n)} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{h} \in W(\mathbf{p})$. Из леммы 1 вытекает, что для $i \in E_k$ выполнено

$$S_{<i}(\mathbf{h}^{(n+1)}) = S_{<i}(\mathbf{h}^{(n)}) S_{<i}(\mathbf{h}) = \dots = (S_{<i}(\mathbf{h}))^{n+1},$$

откуда следует, что $S_{<i}(\mathbf{h}^{(n)})$ монотонно убывают к 0 при $n \to \infty$ для всех $i \in E_k$. Отметим, что в силу условия $h_{k-1} < \Delta/6$, вытекающего из выбора $\mathbf{h}$, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} S_{<i}(\mathbf{h}^{(n)}) - S_{<i}(\mathbf{h}^{(n+1)}) &= (S_{<i}(\mathbf{h}))^n - (S_{<i}(\mathbf{h}))^{n+1} \\ &= (S_{<i}(\mathbf{h}))^n (1 - S_{<i}(\mathbf{h})) \leqslant h_{k-1} < \Delta/6, \end{aligned} \tag{10}$$

т. е. с увеличением номера n на единицу каждая из величин $S_{<i}(\mathbf{h}^{(n)})$ для $i \in E_k$ уменьшается не более чем на $\Delta/6$.

Покажем, что для каждого $j \in E_k \setminus \{0\}$ найдётся номер n_j, для которого выполнены неравенства

$$S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n_j)}) < \Delta/3, \quad h_{j-1}^{(n_j)} > 1 - \Delta/2, \quad S_{\geqslant j}(\mathbf{h}^{(n_j)}) < \Delta/6, \tag{11}$$

т. е. фактически $\mathbf{h}^{(n_j)}$ приближает распределение $\mathbf{e}^{(j-1)}$ с покоординатной точностью не менее $\Delta/2$. В качестве значения n_1 можно взять 0, так как $\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h}$, и при этом выполнено $1 - h_0 < \Delta/6$, что влечёт как неравенство $h_0 > 1 - \Delta/6 > 1 - \Delta/2$, так и неравенство $S_{\geqslant 1}(\mathbf{h}) < \Delta/6$. Пусть далее $j > 1$.

В силу выбора $\mathbf{h}$ и построения последовательности $\mathbf{h}^{(n)}$ для всех n выполнены соотношения $S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n)}) \leqslant (S_{<j}(\mathbf{h}^{(n)}))^{\alpha}$, откуда

$$S_{<j}(\mathbf{h}^{(n)}) \geqslant (S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n)}))^{1/\alpha}.$$

Рассмотрим такие номера n, что $S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n)}) > \Delta/6$. Тогда для этих n также выполнены соотношения

$$S_{\geqslant j}(\mathbf{h}^{(n)}) = 1 - S_{<j}(\mathbf{h}^{(n)}) \leqslant 1 - (S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n)}))^{1/\alpha} < 1 - (\Delta/6)^{1/\alpha},$$

что в силу условия (9), которому удовлетворяет α, влечёт для соответствующих n неравенство

$$S_{\geqslant j}(\mathbf{h}^{(n)}) < 1 - (1 - \Delta/6) = \Delta/6.$$

Пусть n_j таково, что $S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n_j)}) > \Delta/6$, а $S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n_j+1)}) < \Delta/6$. Тогда из неравенства (10) следует, что $\Delta/6 < S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n_j)}) < \Delta/3$. Вместе с тем, по ранее доказанному также имеет место неравенство $S_{\geqslant j}(\mathbf{h}^{(n_j)}) < \Delta/6$. Отсюда

$$h_{j-1}^{(n_j)} = 1 - S_{\geqslant j}(\mathbf{h}^{(n_j)}) - S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n_j)}) > 1 - \Delta/6 - \Delta/3 = 1 - \Delta/2.$$

Таким образом, для выбранного n_j неравенства (11) выполнены. Отметим, что из монотонного убывания последовательностей $S_{<j}(\mathbf{h}^{(n)})$ с ростом n вытекают соотношения $n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$.

Пусть далее задано некоторое распределение $\mathbf{q} = \eta\mathbf{e}^{(j-1)} + (1-\eta)\mathbf{e}^{(j)} \in \operatorname{Conv}(\mathbf{e}^{(j-1)}, \mathbf{e}^{(j)})$, где $j \in E_k \setminus \{0\}$ и $\eta \in [0;1]$ фиксированы. Покажем, что в построенной последовательности распределений $\mathbf{h}^{(n)}$ найдётся распределение $\mathbf{q}'$, удовлетворяющее неравенству $\max\limits_{i\in E_k} |q_i - q_i'| < \Delta$.

Заметим, что для любого $i \in E_k$ и любого номера n в силу неравенств (10) выполнено

$$\begin{aligned} \left|h_i^{(n)} - h_i^{(n+1)}\right| &= |S_{<i+1}(\mathbf{h}^{(n)}) - S_{<i}(\mathbf{h}^{(n)}) - (S_{<i+1}(\mathbf{h}^{(n+1)}) - S_{<i}(\mathbf{h}^{(n+1)}))| \\ &\leqslant |S_{<i+1}(\mathbf{h}^{(n)}) - S_{<i+1}(\mathbf{h}^{(n+1)})| + |S_{<i}(\mathbf{h}^{(n)}) - S_{<i}(\mathbf{h}^{(n+1)})| < \Delta/3. \quad (12) \end{aligned}$$

Рассмотрим распределения $\mathbf{h}^{(n)}$ с номерами $n_j \leqslant n \leqslant n_{j+1}$. Из выбора номеров n_j вытекает, что $h_{j-1}^{(n_j)} > 1 - \Delta/2$ и $h_{j-1}^{(n_{j+1})} \leqslant S_{<j}(\mathbf{h}^{n_{j+1}}) < \Delta/3$. Вместе с неравенством (12) это означает, что значения $h_{j-1}^{(n)}$ при $n_j \leqslant n \leqslant n_{j+1}$ образуют $\Delta/2$-сеть на отрезке $[0;1]$, а значит, для заданного значения $\eta \in [0;1]$, обязательно найдётся такой номер n', $n_j \leqslant n' \leqslant n_{j+1}$, что $\left|h_{j-1}^{(n')} - \eta\right| < \Delta/2$. Кроме того, будут выполнены следующие соотношения:

$$\begin{gathered} S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n')}) \leqslant S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n_j)}) < \Delta/3, \\ S_{\geqslant j+1}(\mathbf{h}^{(n')}) = 1 - S_{<j+1}(\mathbf{h}^{(n')}) \\ \leqslant 1 - S_{<j+1}(\mathbf{h}^{(n_{j+1})}) = S_{\geqslant j+1}(\mathbf{h}^{(n_{j+1})}) < \Delta/6, \end{gathered}$$

из которых вытекает, что

$$\begin{aligned} \left|1-\eta-h_j^{(n')}\right| &= \left|\sum_{i=0}^{k-1} h_i^{(n')} - \eta - h_j^{(n')}\right| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{j-2} h_i^{(n')}\right| + \left|h_{j-1}^{(n')} - \eta\right| + \left|\sum_{i=j+1}^{k-1} h_i^{(n')}\right| \\ &= S_{<j-1}(\mathbf{h}^{(n')}) + \left|h_{j-1}^{(n')} - \eta\right| + S_{\geqslant j+1}(\mathbf{h}^{(n')}) < \Delta/3 + \Delta/2 + \Delta/6 = \Delta. \end{aligned}$$

Итак,

$$\max_{i\in E_k} \left|q_i - h_i^{(n')}\right| < \max\{\Delta/6, \Delta/2, \Delta, \Delta/3\} = \Delta,$$

а значит, $\mathbf{h}^{(n')}$ можно взять в качестве искомого распределения $\mathbf{q}'$. В силу произвольности $j \in \{1, \dots, k-1\}$, $\mu \in [0; 1]$ и величины $\Delta > 0$ теорема 2 доказана.

Очевидно, что вместе с $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i-1)}, \mathbf{e}^{(i)})$ в множестве $W(\mathbf{p})$ также лежат множества

$$\{\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{h} \mid \mathbf{h} \in \mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i-1)}, \mathbf{e}^{(i)})\}, \quad \{\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{h} \mid \mathbf{h} \in \mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i-1)}, \mathbf{e}^{(i)})\}.$$

В случае распределений на трёхэлементном множестве соотношения (4) позволяют получить более простое описание заведомо аппроксимируемых распределений.

Следствие 3. *Пусть* $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2) \in \mathbf{S}^{(3)}$ *и* $\mu(\mathbf{p}) = E_3$. *Тогда* $W(\mathbf{p}) \supset \{(g_0, g_1, g_2) \mid g_0 \leqslant p_0,\ g_2 \leqslant p_2\}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{g} = (g_0, g_1, g_2)$ таково, что $g_0 \leqslant p_0$ и $g_2 \leqslant p_2$. Покажем, что $\mathbf{g} \in W(\mathbf{p})$. Положим $\eta = \frac{g_0}{p_0}$, $\theta = \frac{g_2}{p_2}$. По условию следствия выполнены неравенства $0 \leqslant \eta$, $\theta \leqslant 1$. Тогда из теоремы 2 следует, что

$$\mathbf{q} = \eta \mathbf{e}^{(0)} + (1-\eta)\mathbf{e}^{(1)} \in W(\mathbf{p}), \quad \mathbf{r} = (1-\theta)\mathbf{e}^{(1)} + \theta \mathbf{e}^{(2)} \in W(\mathbf{p}).$$

Рассмотрим $(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q}) \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{r} \in W(\mathbf{p})$. Поскольку $\mathbf{p} = p_0\mathbf{e}^{(0)} + p_1\mathbf{e}^{(1)} + p_2\mathbf{e}^{(2)}$, с помощью соотношений (4) получаем

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{q}) \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{r} &= ((p_0\mathbf{e}^{(0)} + p_1\mathbf{e}^{(1)} + p_2\mathbf{g}^{(2)}) \mathbin{\widehat{\vee}} (\eta\mathbf{e}^{(0)} + (1-\eta)\mathbf{e}^{(1)})) \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{r} \\
&= (p_0\eta\mathbf{e}^{(0)} + p_0(1-\eta)\mathbf{e}^{(1)} + p_1\mathbf{e}^{(1)} + p_2\mathbf{e}^{(2)}) \mathbin{\widehat{\wedge}} ((1-\theta)\mathbf{e}^{(1)} + \theta\mathbf{e}^{(2)}) \\
&= p_0\eta\mathbf{e}^{(0)} + (p_0 - p_0\eta + p_1)\mathbf{e}^{(1)} + p_2(1-\theta)\mathbf{e}^{(1)} + p_2\theta\mathbf{e}^{(2)} \\
&= g_0\mathbf{e}^{(0)} + (p_0 + p_1 + p_2 - g_0 - g_2)\mathbf{e}^{(1)} + g_2\mathbf{e}^{(2)} \\
&= g_0\mathbf{e}^{(0)} + g_1\mathbf{e}^{(1)} + g_2\mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{g}.
\end{aligned}$$

Следствие 3 доказано.

Для заданного распределения $\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(3)}$, удовлетворяющего $\mu(\mathbf{p}) = E_3$, положим $\mathbf{G}_0 = \{(g_0, g_1, g_2) \mid g_0 \leqslant p_0,\ g_2 \leqslant p_2\}$ и

$$\mathbf{G}_{n+1} = \{\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{g} \mid \mathbf{g} \in \mathbf{G}_n\} \cup \mathbf{G}_n \cup \{\mathbf{p} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{g} \mid \mathbf{g} \in \mathbf{G}_n\}.$$

Тогда из следствия 3 легко вытекает, что $\mathbf{G}_n \subseteq W(\mathbf{p})$ при всех n. По-видимому, при условии $\mu(\mathbf{p}) = E_3$ в действительности имеет место равенство $W(\mathbf{p}) = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{G}_n$, однако доказать это пока не удалось. Пример множества $\mathbf{G}_4$, получающегося таким образом, изображён на рис. 3.

Аппроксимация произвольных распределений становится возможной, если в множество начальных распределений включать такие, у которых носитель отличен от E_k. Следующая теорема является в определённом

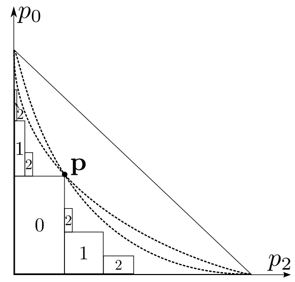

Рис. 3. Множество $\mathbf{G}_2$, построенное по распределению $\mathbf{p}$: прямоугольники подписаны минимальным номером множества $\mathbf{G}_i$, $i = 0, 1, 2$, в которое они входят; пунктиром показаны границы минимальных множеств $\mathbf{L}(1, \alpha)$ и $\mathbf{U}(1, \alpha)$, содержащих $\mathbf{p}$.

смысле «аппроксимационным» аналогом теоремы 5 из [9] о точной выразимости рациональных распределений. В её доказательстве используются идеи, аналогичные теореме 27 из [3].

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{p} \in \mathbf{S}^{(k)}$ *удовлетворяет* $\mu(\mathbf{p}) = \{0, k-1\}$. *Тогда* $W(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}^{(0)}, \ldots, \mathbf{e}^{(k-1)}\}) = \mathbf{S}^{(k)}$.

Доказательство. Для краткости множество $W(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}^{(0)}, \ldots, \mathbf{e}^{(k-1)}\})$ обозначим через $\mathbf{W}$.

Операции $\wedge, \vee$ сохраняют множество $\{0, k-1\}$, и имеет место несложно устанавливаемый изоморфизм множества $\{0, k-1\}$ множеству E_2, при котором операции $\wedge, \vee$ на $\{0, k-1\}$ переходят в соответствующие операции на E_2. Из теоремы 2 следует, что распределение из $\mathbf{S}^{(2)}$ с носителем, равным E_2, позволяет аппроксимировать любое распределение из $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{e}^{(1)})$, а значит, (в силу описанного выше изоморфизма) имеют место включения $\mathbf{W} \supseteq W(\mathbf{p}) \supseteq \mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{e}^{(k-1)})$.

Далее докажем индукцией по l, что $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i_1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(i_l)}) \subseteq \mathbf{W}$ для любых $i_1, \ldots, i_l$. Основание индукции (случай $l = 1$) тривиально обеспечивается тем, что $\mathbf{e}^{(0)}, \ldots, \mathbf{e}^{(k-1)} \in \mathbf{W}$. Пусть утверждение верно для $l = L$. Покажем, что оно также выполняется и для $l = L + 1$. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 < i_2 < \cdots < i_{L+1}$. Поскольку доказано, что $\mathbf{e}^{(i_{L+1})} \in \mathbf{W}$ и $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{e}^{(k-1)}) \subseteq \mathbf{W}$, а по предположению индукции также выполнено $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i_1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(i_L)}) \subseteq \mathbf{W}$, согласно (4) получаем

$$\mathbf{W} \supseteq \{\mathbf{q} \mathbin{\widehat{\vee}} (\mathbf{r} \mathbin{\widehat{\wedge}} \mathbf{e}^{(i_{L+1})}) \mid \mathbf{q} \in \mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i_1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(i_L)}),\, \mathbf{r} \in \mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{e}^{(k-1)})\}$$
$$= \{\mathbf{q} \mathbin{\widehat{\vee}} \mathbf{r}' \mid \mathbf{q} \in \mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i_1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(i_L)}),\, \mathbf{r}' \in \mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{e}^{(i_{L+1})})\}$$
$$= \left\{ \left(\sum_{j=1}^{L} \alpha_j \mathbf{e}^{(i_j)} \right) \mathbin{\widehat{\vee}} (\beta \mathbf{e}^{(0)} + (1-\beta)\mathbf{e}^{(i_{L+1})}) \mid \alpha_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{L} \alpha_j = 1,\, \beta \in [0; 1] \right\}.$$

Полученное выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\left(\sum_{j=1}^{L}\alpha_j\mathbf{e}^{(i_j)}\right)\widehat{\vee}\left(\beta\mathbf{e}^{(0)}+(1-\beta)\mathbf{e}^{(i_{L+1})}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{L}\beta\alpha_j(\mathbf{e}^{(i_j)}\,\widehat{\vee}\,\mathbf{e}^{(0)})+\alpha_j(1-\beta)(\mathbf{e}^{(i_j)}\,\widehat{\vee}\,\mathbf{e}^{(i_{L+1})})$$

$$=\sum_{j=1}^{L}\beta\alpha_j\mathbf{e}^{(i_j)}+\alpha_j(1-\beta)\mathbf{e}^{(i_{L+1})}=(1-\beta)\mathbf{e}^{(i_{L+1})}+\sum_{j=1}^{L}\beta\alpha_j\mathbf{e}^{(i_j)},\qquad(13)$$

откуда легко видеть, что при всевозможных $\alpha_1,\ldots,\alpha_L,\beta\in[0;1]$ таких, что $\sum\limits_{j=1}^{L}\alpha_j=1$, множество распределений, заданное (13), есть в точности $\mathrm{Conv}(\mathbf{e}^{(i_1)},\ldots,\mathbf{e}^{(i_{L+1})})$. Шаг индукции завершён. Теорема 3 доказана.

Из теорем 2 и 3, а также транзитивности замыкания W дополнительно вытекает

Следствие 4. *Пусть $\mathbf{p},\mathbf{q}\in\mathbf{S}^{(k)}$ удовлетворяют $\mu(\mathbf{p})=\{0,k-1\}$ и $\mu(\mathbf{q})=E_k$ соответственно. Тогда $W(\{\mathbf{p},\mathbf{q}\})=\mathbf{S}^{(k)}$.*

Заключение

Доказанные в работе теоремы позволяют для широкого класса множеств начальных распределений $\mathbf{G}$ проверять возможность аппроксимации произвольного распределения, т. е. выполнение (или невыполнение) равенства $W(\mathbf{G})=\mathbf{S}^{(k)}$. Вместе с тем, вопрос о полном описании $W(\mathbf{G})$ для произвольного множества $\mathbf{G}$ остаётся открытым, даже если ограничиться рассмотрением конечных множеств $\mathbf{G}$.

Автор выражает благодарность О. М. Касим-Заде за внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Салимов Ф. И.** Конечная порождённость алгебр распределений // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 2. С. 43–50.
2. **Колпаков Р. М.** Замкнутые классы конечных распределений рациональных вероятностей // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 3. С. 16–31.
3. **Яшунский А. Д.** Алгебры вероятностных распределений на конечных множествах // Тр. МИАН. 2018. Т. 301. С. 320–335.

4. **Схиртладзе Р. Л.** О методе построения булевой величины с заданным распределением вероятностей // Дискрет. анализ. Вып. 7. Новосибирск: Наука, 1966. С. 71–80.
5. **Яшунский А. Д.** О преобразованиях вероятности бесповторными булевыми формулами // Мат. XVI Междунар. шк.-семин. «Синтез и сложность управляющих систем» (Санкт-Петербург, Россия, 26–30 июня 2006 г.). М.: Мех.-мат. фак. МГУ, 2006. С. 150–155.
6. **Zhou H., Loh P.-L., Bruck J.** The synthesis and analysis of stochastic switching circuits. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2012. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1209.0715).
7. **Wilhelm D., Bruck J., Qian L.** Probabilistic switching circuits in DNA // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2018. Vol. 115. P. 903–908.
8. **Lee D., Bruck J.** Generating probability distributions using multivalued stochastic relay circuits // Proc. 2011 IEEE Int. Symp. Information Theory (St. Petersburg, Russia, July 31–Aug. 5, 2011). Piscataway: IEEE, 2011. P. 308–312.
9. **Lee D. T., Bruck J.** Algorithms for generating probabilities with multivalued stochastic relay circuits // IEEE Trans. Comput. 2015. Vol. 64, No. 12. P. 3376–3388.

Яшунский Алексей Дмитриевич

Статья поступила
23 февраля 2020 г.
После доработки —
23 февраля 2020 г.
Принята к публикации
25 мая 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2020. Vol. 27, No. 3. P. 109–125

UDC 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2020.27.683

ON THE APPROXIMATION OF RANDOM VARIABLES ON A FINITE CHAIN

A. D. Yashunsky

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS,
4 Miusskaya Square, 125047 Moscow, Russia

E-mail: `yashunsky@keldysh.ru`

Abstract. We consider the transformations of independent random variables over a linearly ordered finite set (a chain) by the join and meet operations. We investigate the possibility of approximating an arbitrary probability distribution on a chain by means of a (possibly iterated) application of the join and meet operations to independent random variables with distributions from a given set. We establish some conditions under which the approximation is impossible and the conditions when it becomes possible. Illustr. 3, bibliogr. 9.

Keywords: finite chain, linearly ordered set, random variable, distribution, approximation.

REFERENCES

1. **F. I. Salimov,** Finite generability of distribution algebras, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **4** (2), 43–50 (1997) [Russian].
2. **R. M. Kolpakov,** Closed classes of finite distributions of rational probabilities, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **11** (3), 16–31 (2004) [Russian].
3. **A. D. Yashunsky,** Algebras of probability distributions on finite sets, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **301**, 320–335 (2018) [Russian] [*Proc. Steklov Inst. Math.* **301**, 304–318 (2018).
4. **R. L. Shirtladze,** Om a method for constructing a Boolean value with a given probability distribution, in *Discrete Analysis,* Vol. 7 (Nauka, Novosibirsk, 1966), pp. 71–80 [Russian].
5. **A. D. Yashunsky,** On probability transformations by read-once Boolean formulas, in *Proc. XVI Int. School and Seminar "Synthesis and Complexity of Control Systems", St. Petersburg, Russia, June 26–30, 2006* (Mekh.-Mat. Fak. MGU, Moscow, 2006), pp. 150–155 [Russian].

English ver.: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (3), 581–591 (2020), DOI 10.1134/S1990478920030163.

6. **H. Zhou, P.-L. Loh,** and **J. Bruck,** The synthesis and analysis of stochastic switching circuits (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2012) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1209.0715).
7. **D. Wilhelm, J. Bruck,** and **L. Qian,** Probabilistic switching circuits in DNA, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **115**, 903–908 (2018).
8. **D. Lee** and **J. Bruck,** Generating probability distributions using multivalued stochastic relay circuits, in *Proc. 2011 IEEE Int. Symp. Inf. Theory, St. Petersburg, Russia, July 31–Aug. 5, 2011* (IEEE, Piscataway, 2011), pp. 308–312.
9. **D. T. Lee** and **J. Bruck,** Algorithms for generating probabilities with multivalued stochastic relay circuits, *IEEE Trans. Comput.* **64** (12), 3376–3388 (2015).

Aleksey D. Yashunsky

Received February 23, 2020
Revised February 23, 2020
Accepted May 25, 2020