

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СУБОПТИМАЛЬНЫХ УПАКОВОК В НЕВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

П. Д. Лебедев<sup>a</sup>, В. Н. Ушаков<sup>b</sup>, А. А. Успенский<sup>c</sup>

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,  
ул. Софьи Ковалевской, 16, 620990 Екатеринбург, Россия

E-mail: <sup>a</sup>pleb@yandex.ru, <sup>b</sup>ushak@imm.uran.ru, <sup>c</sup>uspen@imm.uran.ru

**Аннотация.** Изучается задача о построении оптимальных упаковок наборами конгруэнтных кругов в компактные невыпуклые односвязные плоские множества. В качестве критерия оптимальности рассматривается максимизация радиуса кругов при фиксированном их количестве. Развита теоретическая методика решения задачи, основанная на конструкциях субдифференциального исчисления, и предложен подход к построению субоптимальных упаковок — упаковок, в общем случае близких к оптимальным. Основу разработанных численных алгоритмов составляют итерационные процедуры, учитывающие по существу расположение текущего центра элемента упаковки, центров ближайших к нему соседних элементов и точек границы фигуры. В алгоритмах используется схема суперградиентного подъёма, параметры которого могут варьироваться в зависимости от числа элементов упаковки и геометрии множества. Создан программный комплекс, эффективность работы которого продемонстрирована на примерах численного построения субоптимальных упаковок в невыпуклые фигуры, ограниченные овалом Кассини, гипотрохой и кардиоидой. Ил. 6, библиогр. 37.

**Ключевые слова:** упаковка, максимизация, оптимизация, алгоритм, численная процедура, производная по направлению, супердифференциал, аппроксимация, суперградиентный подъём.

## Введение

При обработке множеств нетривиальной геометрии в теории управления и дифференциальных играх [1, 2], а также при решении широкого спектра практических задач требуется выполнять аппроксимацию множеств наборами унифицированных элементов. Одним из подходов к решению проблемы аппроксимации плоского компактного множества является оптимальная упаковка кругов равного радиуса. В наиболее распространённой постановке задача о построении оптимальной упаковки сводится к нахождению набора из заданного числа конгруэнтных кругов, которые вложены в рассматриваемое множество и не пересекаются попарно по своим внутренним точкам. Критерием оптимальности выбрана максимизация радиуса кругов. Ранее авторы изучали данную проблему для выпуклых фигур [3, 4], но особенно сложной и в то же время актуальной является задача упаковки для невыпуклых множеств (см., например, [5, 6]). В общем случае трудно найти аналитическое выражение для решения данной задачи, это возможно лишь в случае небольшого числа элементов и фигуры простой геометрии как, например, в работе [7]. Поэтому активно развиваются численные методы построения упаковок, которые, строго говоря, неоптимальны, но позволяют оценить, насколько радиус их кругов отличается от максимально возможного (см., например, [8, 9]). Одним из распространённых подходов к решению задач является метод возможных направлений Зонтендейка, активно используемый в [10, 11]. Другой часто встречающейся процедурой является так называемый «жадный» алгоритм оптимизации по группам переменных [12]. Перспективным представляется метод сужающихся окрестностей [13]. Из последних направлений, которые используются партнёрами авторов, можно выделить оптико-геометрический подход [14] и метод «бильярдного» моделирования [15], а также вычислительные алгоритмы, основанные на физической аналогии распространения света [16, 17]. Ранее авторы использовали для решения задачи о построении упаковки процедуры разбиения множества на зоны влияния точек и отыскания максимальной упаковки одного элемента в каждую из зон [18]. В данной статье развиты методы и предложены численные алгоритмы, использующие выявленные свойства негладкой функции, равной максимальному радиусу круга, который может быть расположен с центром в заданной точке, не пересекаясь по внутренним точкам с другими кругами и не выходя за пределы заданной фигуры. В основе методов и численных процедур лежат конструкции субдифференциального исчисления в смысле выпуклого анализа [19, 20]. В работе предложен подход к построению субоптимальных упаковок. Термин «субоптимальность» используется как в многокритериальных, так и в скалярных оптимизационных задачах, при этом он наделён многими смысловыми оттенками. В данном случае

он используется для обозначения решения, отвечающего локальному оптимуму. Кроме того, термин фиксирует предложенное в работе решение как в некотором смысле близкое к оптимальному решению. Оптимальное решение может быть получено направленным на улучшение значения функционала последовательным применением предложенного алгоритма путём бесконечного перебора генерируемых с помощью стохастической процедуры начальных условий. Естественно, что реализуемые на практике конечные переборы решений, отвечающих локальным экстремумам функционала, в общем случае приближают получаемое решение к оптимальному.

Основное применение решения задачи о построении оптимальной упаковки находится при размещении логистических центров [21]. Различные приложения решения рассматриваемой задачи в промышленности указаны, например, в работе [22]. Задача упаковки кругов рассматривалась в упаковочной логистике, химии, медицине и др. [23]. В материаловедении она возникает при моделировании процессов поглощения молекул [24]. С ней связана похожая, в некотором смысле, задача о построении оптимального покрытия множеств, многие методы при решении этих двух задач пересекаются [25].

### 1. Постановка задачи

Пусть задано компактное односвязное множество  $M \subset \mathbb{R}^2$ , в общем случае невыпуклое. Будем рассматривать множества, состоящие из кругов  $O(\mathbf{s}, r) \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\| \leq r\}$  радиуса  $r > 0$ .

**Определение 1.** Будем называть *упаковкой*  $U_n$  в множество  $M$  набор  $O(\mathbf{s}_1, r), O(\mathbf{s}_2, r), \dots, O(\mathbf{s}_n, r)$  из  $n \in \mathbb{N}$  кругов равного радиуса  $r > 0$  такой, что выполняются условия

$$O(\mathbf{s}_i, r) \subseteq M, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$\text{int } O(\mathbf{s}_i, r) \cap \text{int } O(\mathbf{s}_j, r) = \emptyset, \quad i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad (2)$$

где  $\text{int}(\cdot)$  означает объединение внутренних точек множества.

**Задача 1.** Пусть заданы компактное односвязное множество  $M$  и натуральное число  $n$ . Требуется найти упаковку  $U_n^*$  в  $M$  при максимально возможном радиусе  $r$  кругов.

Поскольку строгое решение задачи найти при большом  $n$  практически нереально, в дальнейшем будем говорить о субоптимальных упаковках. Радиус их кругов может быть меньше теоретически возможного максимального, но достаточно близок к нему. В качестве дуальной задачи часто рассматривается задача о нахождении упаковки при максимальном возможном числе элементов  $n$ , но при фиксированном  $r > 0$ .

Обозначим через  $S_n$  набор центров кругов упаковки. Заметим, что если  $n > 1$  и  $S_n \subset M$ , то максимальный радиус кругов упаковки с центрами в точках из  $S_n \subset M$  равен

$$R_M(S) = \min_{i=1, \overline{n}} \varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \quad (3)$$

где

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \triangleq \min(0,5\rho(\mathbf{x}, S_n^{(i)}), \rho(\mathbf{x}, \partial M)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

$S_n^{(i)} \triangleq S_n \setminus \{\mathbf{s}_i\}$ ,  $\partial M$  означает границу множества  $M$ ,

$$\rho(\mathbf{x}, M) \triangleq \min_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|$$

— евклидово расстояние от точки  $\mathbf{x}$  до замкнутого множества  $M$ . Функции  $\varphi^{(i)}(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , можно считать характеристическими в задаче 1, поскольку они определяют максимально возможный радиус кругов с центрами в точках из текущего массива.

Задача 1 сводится к нахождению массива точек  $S$ , для которого минимально значение величины (3).

## 2. Методы решения задачи

В большинстве случаев решение задачи о построении субоптимальной упаковки можно найти только численными методами. Одним из путей является пошаговое изменение координат некоторого начального массива  $S^{(0)}$  центров элементов упаковки. При этом основным элементом процедуры служит максимизация значения функций (4) в точках  $\mathbf{s}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

**Определение 2** [19, с. 37, 38]. Супердифференциалом функции  $u(\mathbf{x})$  с областью определения  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  в точке  $\mathbf{x} \in \text{int } X$  называется выпуклое компактное множество  $D^+u(\mathbf{x})$  в  $\mathbb{R}^2$ , для которого выполняется равенство

$$D^+u(\mathbf{x}) = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^2 (\langle \mathbf{s}, \mathbf{f} \rangle - d^+u(\mathbf{x}, \mathbf{f}) \geq 0)\},$$

где

$$d^+u(\mathbf{x}, \mathbf{f}) \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup\{\delta^{-1}[u(\mathbf{x} + \delta \mathbf{f}') - u(\mathbf{x})] \mid \delta \in (0, \varepsilon), \|\mathbf{f} - \mathbf{f}'\| \leq \varepsilon\},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение векторов.

Если для функции  $u(\mathbf{x})$  в точке  $\mathbf{x}_0$  определён супердифференциал, то это значит, что график функции в некотором смысле хорошо аппроксимируется минимумом по набору линейных функций. В частности, производная

$$\left. \frac{du(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{u(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{g}) - u(\mathbf{x}_0)}{\varepsilon}$$

функции  $u(\mathbf{x})$  по направлению  $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$  (где  $\mathbf{0} \triangleq (0, 0)$ ) в точке  $\mathbf{x}_0$  равна

$$\left. \frac{du(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \min\{\langle \mathbf{g}, \mathbf{d} \rangle \mid \mathbf{d} \in D^+u(\mathbf{x}_0)\}. \quad (5)$$

Подробнее свойства супердифференциала описаны, например, в [20].

**Определение 3.** Множеством значимых точек  $\Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)$  для функции  $\varphi^{(i)}(\cdot)$  в точке  $\mathbf{x} \in M$  назовём

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) = \{ \mathbf{s}_j \in S_n^{(i)} \mid \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\| = 2\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \} \\ \cup \{ \mathbf{m} \in \partial M \mid \|\mathbf{m} - \mathbf{s}_i\| = \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \}. \end{aligned}$$

По сути значимые точки — это либо центры элементов упаковки, которые граничат с кругом  $O(\mathbf{x}, \varphi^{(i)}(\mathbf{x}))$ , либо точки границы фигуры  $M$ , которые лежат на окружности  $O(\mathbf{x}, \varphi^{(i)}(\mathbf{x}))$ .

В [3, 4] исследованы дифференциальные свойства функции  $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$  в точках  $\mathbf{x} \in M$ , для которых  $\mathbf{x} \notin \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M)$ . Из определения 3 следует, что в них и только в них  $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$  отлична от нуля. Показано, что функция  $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$  в окрестностях этих точек локально вогнутая, а её супердифференциал равен

$$D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \text{co } \Phi(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M) \triangleq \left( \frac{\{\mathbf{x}\} - (S_n^{(i)} \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M))}{4\varphi^{(i)}(\mathbf{x})} \right) \\ \cup \left( \frac{\{\mathbf{x}\} - (\partial M \cap \Omega(\mathbf{x}, S_n^{(i)}, M))}{\varphi^{(i)}(\mathbf{x})} \right), \quad (7) \end{aligned}$$

здесь  $\text{co } M$  — выпуклая оболочка множества  $M$ .

**Лемма 1.** Пусть задана точка  $\mathbf{x}^* \in M$  при некотором фиксированном массиве  $S_n^{(i)}$ . Если

$$\mathbf{x}^* \notin \text{co } \Omega(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M), \quad (8)$$

то в точке  $\mathbf{x}^* \in M$  определён супердифференциал  $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$  и

$$\mathbf{0} \notin D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*). \quad (9)$$

**Доказательство.** Допустим, что для некоторой точки  $\mathbf{x}^* \in M$  (8) выполняется, а (9) нет. Тогда, исходя из формулы (6), в множестве найдётся конечное число  $k$  векторов  $\{\mathbf{f}_j\}_{j=1}^k \subseteq \Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$  таких, что  $\mathbf{0}$  представим как их выпуклая комбинация. Можно записать

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathbf{f}_j, \quad (10)$$

где для коэффициентов  $\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , выполняются равенство

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = 1$$

и неравенства

$$\alpha_j \geq 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

По построению в множестве  $\Omega(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$  для каждого вектора  $\mathbf{f}_j \in \Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$  найдётся такой вектор  $\mathbf{g}_j \in \Omega(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$ , что

$$\mathbf{g}_j - \mathbf{x}^* = \beta_j \mathbf{f}_j,$$

где  $\beta_j$  может быть равно или  $\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$  или  $4\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$ , но в любом случае является положительным числом. Тогда с учётом (10) можно записать

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j (\mathbf{g}_j - \mathbf{x}^*)}{\beta_j}. \quad (11)$$

Разделив обе части равенства на  $\sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\beta_j}$ , получим

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^k \lambda_j (\mathbf{g}_j - \mathbf{x}^*), \quad \lambda_j = \frac{\alpha_j}{\beta_j} / \sum_{j=1}^k \frac{\alpha_j}{\beta_j}, \quad j = \overline{1, k},$$

где для коэффициентов  $\lambda_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , справедливо

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j = \overline{1, k}.$$

Перенеся слагаемые с  $\mathbf{x}$  в левую часть равенства (11), запишем

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{g}_j.$$

Отсюда

$$\mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{g}_j,$$

т. е. точка  $\mathbf{x}^*$  может быть представлена как выпуклая комбинация элементов множества  $\Omega(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$ ; противоречие. Значит, выполняется (9). Лемма 1 доказана.

**Определение 4.** Проекцией  $\mathbf{p}(\mathbf{a}, M)$  точки  $\mathbf{a}$  на выпуклое компактное множество  $M$  называется ближайшая к  $\mathbf{a}$  в евклидовой метрике точка из  $M$ .

Заметим, что если множество  $M$  не выпуклое, то ближайших к  $\mathbf{a}$  точек может быть более одной, но в случае выпуклого множества она всегда единственна согласно теореме Моцкина (см. [26]).

**Теорема 1.** Если для точки  $\mathbf{x}^* \in M$  выполняется условие (8), то среди всех векторов из окружности  $\partial O(\mathbf{0}, 1)$  есть ровно один  $\mathbf{g}^*$  такой, что

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \max \left\{ \left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \mid \mathbf{g} \in \partial O(\mathbf{0}, 1) \right\} > 0, \quad (12)$$

при этом

$$\mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*))}{\|\mathbf{p}(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*))\|}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что из (8) согласно лемме 1 следует, что

$$\mathbf{p}(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)) \neq \mathbf{0},$$

значит,

$$\|\mathbf{p}(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*))\| > 0,$$

и правая часть выражения (13) определена.

Покажем, что производная по направлению  $\mathbf{g}^*$  равна

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = \|\mathbf{d}^*\|, \quad (14)$$

где мы обозначили  $\mathbf{d}^* = \mathbf{p}(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*))$ . Действительно, с одной стороны, в супердифференциале есть точка  $\mathbf{d}^* \in D^+u(\mathbf{x}^*)$ , поэтому исходя из формулы (5) и выражения (13), гарантирующего, что угол между векторами  $\mathbf{g}^*$  и  $\mathbf{d}^*$  равен нулю, можно записать

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \leq \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}^* \rangle = \|\mathbf{g}^*\| \cdot \|\mathbf{d}^*\| \cos 0 = \|\mathbf{d}^*\|. \quad (15)$$

С другой стороны, покажем, что в супердифференциале не может быть точки  $\mathbf{d}_0$  такой, что

$$\langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}_0 \rangle < \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}^* \rangle.$$

Рассмотрим прямую  $\Lambda$ , проходящую через точки  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{d}^*$ , а значит, параллельно вектору  $\mathbf{g}^*$ . Из неравенства (17) следует, что ортогональная проекция  $\bar{\mathbf{d}}_0$  на прямую  $\Lambda$  лежит с той же стороны от точки  $\mathbf{d}^*$ , что и начало координат, поэтому для угла между векторами  $\mathbf{d}_0 - \mathbf{d}^*$  и  $-\mathbf{d}^*$  справедлива оценка

$$\angle(\mathbf{d}_0 - \mathbf{d}^*, -\mathbf{d}^*) < \frac{\pi}{2}.$$

Значит, на отрезке  $[\mathbf{d}_0, \mathbf{d}^*]$  в достаточно малой окрестности точки  $\mathbf{d}^*$  можно найти точку  $\hat{\mathbf{d}}_0$ , которая лежит ближе к началу координат чем  $\mathbf{d}^*$ . В то же время супердифференциал функции — выпуклое множество (см. [20]). Следовательно, выполняется включение

$$\hat{\mathbf{d}}_0 \in [\mathbf{d}_0, \mathbf{d}^*] \subset D^+u(\mathbf{x}^*).$$

Значит, точка  $\mathbf{d}^*$  не является ближайшей к началу координат в множестве  $D^+u(\mathbf{x}^*)$ . Это противоречит определению 4 проекции. Полученное противоречие доказывает истинность неравенства

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}^*} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \geq \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}^* \rangle. \quad (16)$$

Из неравенств (15) и (16) вытекает равенство (14).

Покажем, что для любого вектора  $\mathbf{g} \in \partial O(\mathbf{0}, 1)$  при  $\mathbf{g} \neq \mathbf{g}^*$  имеет место

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} < \langle \mathbf{g}^*, \mathbf{d}^* \rangle. \quad (17)$$

Обозначим через  $\alpha = \angle(\mathbf{g}^*, \mathbf{g})$  угол между векторами  $\mathbf{g}$  и  $\mathbf{g}^*$ , по условию  $\alpha \in (0, \pi]$ . Из формулы (5) вытекает оценка

$$\left. \frac{d\varphi^{(i)}(\mathbf{x})}{d\mathbf{g}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \langle \mathbf{g}, \mathbf{d}^* \rangle = \|\mathbf{g}\| \cdot \|\mathbf{d}^*\| \cos \alpha = \|\mathbf{d}^*\| \cos \alpha < 1,$$

которая совпадает с (17).

Из равенства (14) и неравенства (17) (которое выполняется для всех векторов  $\mathbf{g}$  при  $\|\mathbf{g}\| = 1$  и  $\mathbf{g} \neq \mathbf{g}^*$ ) следует формула (12). Теорема 1 доказана.

**Замечание.** Супердифференциал  $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{x}^*)$  совпадает с выпуклой оболочкой множества  $\Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$ , определённого по формуле (7). Поэтому ближайший к началу координат вектор в супердифференциале найти относительно легко: это либо вектор  $\mathbf{f}^* \in \Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$ , либо ортогональная проекция точки  $\mathbf{0}$  на отрезок  $[\bar{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{f}}]$ , где  $\bar{\mathbf{f}}, \hat{\mathbf{f}} \in \Phi(\mathbf{x}^*, S_n^{(i)}, M)$ .

### 3. Численная реализация алгоритмов

Для поэтапного увеличения  $R_M(S_n)$  авторами реализован алгоритм, который имитирует отталкивание точки  $\mathbf{s}_i$  от двух множеств. Первое множество — это объединение ближайших к ней элементов из  $S_n^{(i)}$ , второе — множество  $\Omega_{\partial M}(\mathbf{s}_i)$  ближайших к  $\mathbf{s}_i$  точек границы  $\partial M$  невыпуклого компакта  $M$ . В общем случае  $\Omega_{\partial M}(\mathbf{s}_i)$  может состоять из более чем одного элемента. Схема опирается на теорему 1 и реализует процедуру



итеративного приближения центра элемента упаковки  $\mathbf{s}_i$  к точке локального максимума характеристической функции  $\varphi^{(i)}(\cdot)$ . Алгоритм следует отнести к схемам численной оптимизации на базе супер- и субградиентных методов, аналогичных использованным в [27]. Похожие алгоритмы рассмотрены, например, в [29, 30].

Пусть на шаге работы алгоритма с номером  $k$  массив центров элементов упаковки равен  $S_n$ . Поскольку каждая из функций  $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , супердифференцируема на множестве  $M$  (кроме точек  $\partial M$  и  $S_n^{(i)}$ ), для вычисления координат точки в новом массиве центров можно использовать метод суперградиентного подъёма, аналогичный методу субградиентного спуска. Для этого сначала в каждой точке  $\mathbf{s}_i \in S_n$  вычисляется супердифференциал  $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$  по формуле (6). Затем строится массив  $\{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^n$  векторов, ориентированных по направлению максимального роста  $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , по формуле

$$\mathbf{g}_i = \begin{cases} \frac{\mathbf{p}(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i))}{\|\mathbf{p}(\mathbf{0}, D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i))\|}, & \text{если } \mathbf{0} \notin D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \\ \mathbf{0}, & \text{если } \mathbf{0} \in D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i), \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (18)$$

Далее строится массив  $\hat{S}_n = \{\hat{\mathbf{s}}_i\}_{i=1}^n$  новых значений центров элементов упаковки по формуле

$$\hat{\mathbf{s}}_i = \begin{cases} \mathbf{s}_i + \gamma_k \mathbf{g}_i, & \text{если } \mathbf{s}_i + \gamma_k \mathbf{g}_i \in M, \\ \mathbf{s}_i, & \text{если } \mathbf{s}_i + \gamma_k \mathbf{g}_i \notin M, \end{cases} \quad i = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Заметим, что в (18) все получаемые векторы имеют норму 0, если текущий центр упаковки принадлежит выпуклой оболочке его значимых точек, а значит, производные функции  $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$  по всем направлениям не положительны. В противном случае векторы  $\mathbf{g}_i$  имеют норму, равную 1. Длина вектора, равного сдвигу от  $\mathbf{s}_i$  к  $\hat{\mathbf{s}}_i$ , пропорциональна коэффициенту  $\gamma_k$ . Для обеспечения сходимости алгоритма к некоторому локально оптимальному массиву  $S_n^*$  на последовательность  $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$  налагаются условия

$$\gamma_k > \gamma_{k+1} > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \quad (21)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = +\infty. \quad (22)$$

Неравенства (20) гарантируют, что изменения координат точки происходят в направлении роста функции  $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ , а не в противоположном направлении. Предел (21) означает, что величина нормы сдвига уменьшается до нуля. Равенство (22) говорит о том, что за достаточно большое число шагов алгоритма массив центров упаковки может занять любое

положение на фигуре  $M$  независимо от её размеров (подробнее см. [28]). В качестве наиболее удобной формулы для генерации коэффициентов  $\gamma_k$  в (19) можно предложить дробную функцию от номера  $k$ :

$$\gamma_k = \frac{a}{k+b}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (23)$$

где коэффициенты  $a \in (0, +\infty)$  и  $b \in [0, +\infty)$  задаются пользователем при запуске программного комплекса.

Заметим, что выражения в формуле (18) не определены в случае, если какая-то из точек  $\mathbf{s}_i \in S_n$  лежит на границе фигуры  $M$  или две точки  $\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \in S_n$  совпадают при  $i \neq j$ . Однако при практической реализации алгоритмов данная ситуация крайне маловероятна, поскольку множество  $M$  имеет ненулевую меру на плоскости, а его граница  $\partial M$  и  $S_n$  имеют меру, равную нулю.

Отдельной важной процедурой, входящей в программный комплекс, является построение начальной итерации  $\tilde{S}_n$  центров элементов упаковки. Она выполняется стохастическими методами, но с учётом особенностей рассматриваемой схемы суперградиентного подъёма. В частности, накладываются условия на минимальное расстояние между точками и на то, чтобы точки были максимально равномерно распределены по всей площади фигуры  $M$ . Здесь отметим, что процедуры численного решения выпукло-вогнутых оптимизационных задач, сочленяющие суб- и суперградиентные методы с элементами стохастики в вычислительных операциях, развиваются, например, в работе [31].

#### 4. Примеры построения упаковок

С помощью разработанного в среде MATLAB программного комплекса [32] выполнено моделирование решений ряда задач о построении субоптимальных упаковок для различных фигур с криволинейной границей. Главное его отличие от комплексов, использовавшихся ранее для выпуклых множеств, состоит в том, что в нём процедура отыскания ближайших к каждому из центров упаковки точек  $\Omega_{\partial M}(\mathbf{s}_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , более сложная. Процедура выделяет так называемые множества симметрии в  $M$  (подробнее о них см. [34, 35]), точки которых являются геометрическим местом центров кругов, вложенных в  $M$ , при этом пересекающихся с  $\partial M$  в двух или более точках. Косвенным показателем оптимальности упаковки является её плотность  $\sigma(U_n)$ , т. е. отношение суммы площадей кругов  $O(\mathbf{s}_i, r) \subseteq U_n$  к площади фигуры  $M$ . В [33] приведены оценки для максимальной плотности упаковки, но лишь для выпуклых фигур. В процессе решения задач был использован алгоритм, основанный на формулах (18), (19). Коэффициенты  $\gamma_k$  вычисляются в соответствии с (23).

**Пример 1.** Рассмотрим невыпуклое компактное множество  $M$ , ограниченное кривой

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4, \quad (24)$$

при значениях параметров  $a = 1,1$ ,  $c = 1$ . Требуется решить задачу 1 при  $n = 14$  и  $n = 16$ .

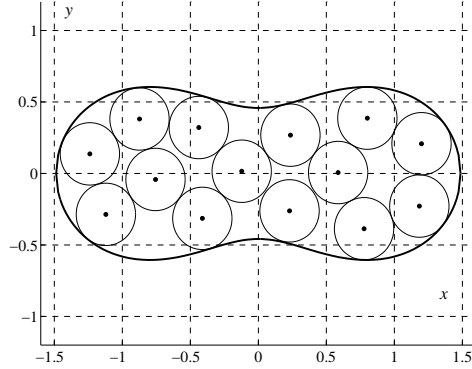


Рис. 1. Субоптимальная упаковка  $U_{14}$  в примере 1

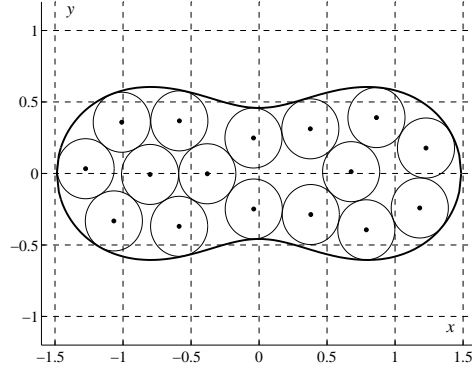


Рис. 2. Субоптимальная упаковка  $U_{16}$  в примере 1

Кривая (24) является частным случаем овала Кассини. При  $c < a < \sqrt{2}c$  она ограничивает невыпуклое односвязное множество, симметричное относительно начала координат (см. [36]). Решение задачи было осуществлено путём многократного запуска программного комплекса.

Получен массив центров кругов субоптимальной упаковки при  $n = 14$ :

$$\begin{aligned} S_{14} = \{ & (1,1837; -0,228), (0,2294; -0,2616), (0,8014; 0,3867), \\ & (0,5865; 0,0065), (0,2359; 0,2679), (1,1995; 0,2079), \\ & (-0,7560; -0,0419), (-0,4377; 0,3212), (-1,2385; 0,137), \\ & (0,7771; -0,3865), (-1,1209; -0,286), (-0,8736; 0,3811), \\ & (-0,4116; -0,3141), (-0,1223; 0,0157) \}. \end{aligned}$$

Радиус кругов найденной субоптимальной упаковки равен  $r \approx 0,2181$ . Плотность упаковки (отношение суммы площадей кругов к площади фигуры) равна  $\sigma(U_{14}) \approx 0,691$ . Множество  $M$ , круги упаковки  $U_{14}$  и массив их центров представлены на рис. 1.

Получен массив центров кругов субоптимальной упаковки при  $n = 16$ :

$$\begin{aligned} S_{16} = \{ & (-0,586; 0,368), (0,6769; 0,0126), (1,1816; -0,2414), \\ & (1,2275; 0,178), (0,3807; -0,2874), (-0,5876; -0,3695), (0,3771; 0,3122), \\ & (-0,3804; -0,0021), (-1,0674; -0,3319), (-1,275; 0,0332), \end{aligned}$$

$$(0,7885; -0,3941), (-1,0092; 0,3584), (-0,041; 0,2481), (0,8633; 0,3909), \\ (-0,8012; -0,0067), (-0,0389; -0,2485)\}.$$

Радиус кругов найденной субоптимальной упаковки равен  $r \approx 0,21$ . Плотность упаковки равна  $\sigma(U_{16}) \approx 0,732$ . Множество  $M$ , круги упаковки  $U_{16}$  и массив их центров представлены на рис. 2.

**Пример 2.** Пусть задано невыпуклое множество  $M$ , ограниченное кривой

$$\begin{cases} x = (R - mR) \cos mt + h \cos(t - mt), \\ y = (R - mR) \sin mt - h \sin(t - mt), \end{cases} \quad (25)$$

с параметрами  $t \in [0, 8\pi]$ ,  $R = 1$ ,  $m = 1/4$ ,  $h = 1/5$ . Требуется решить задачу 1 при  $n = 13$  и  $n = 15$ .

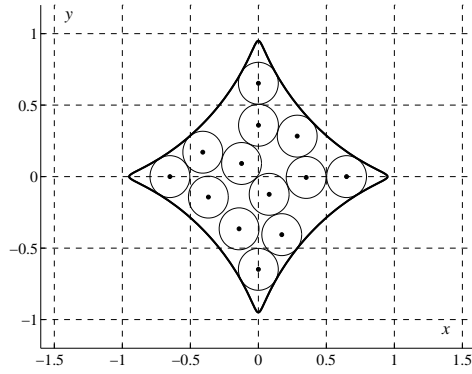


Рис. 3. Субоптимальная упаковка  $U_{13}$  в примере 2

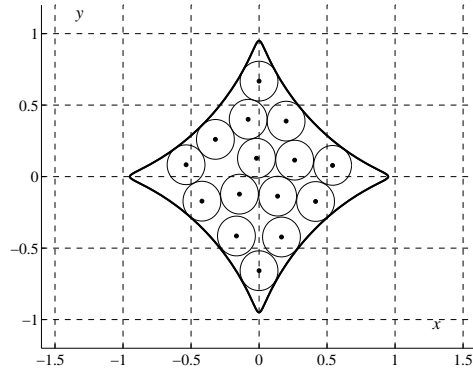


Рис. 4. Субоптимальная упаковка  $U_{15}$  в примере 2

Кривая (25) есть гипотрохоида — траектория точки, расположенной на круге радиуса  $mR$  на расстоянии  $h$  от его центра, катящемся без скольжения с внутренней стороны окружности радиуса  $R$  (см. [36]). Она, как и в предыдущем примере, ограничивает невыпуклое односвязное множество, симметричное относительно начала координат.

Получен массив центров кругов субоптимальной упаковки при  $n = 13$ :

$$S_{13} = \{(0,6486; 0), (0,3515; -0,0057), (-0,6501; 0), \\ (-0,1416; -0,3651), (-0,1235; 0,0917), (0,2858; 0,2831), \\ (-0,4085; 0,1708), (0; 0,6529), (0; -0,6484), (0,1721; -0,4059), \\ (0,001; 0,3592), (0,0794; -0,124), (-0,3675; -0,1431)\}.$$

Радиус кругов найденной субоптимальной упаковки равен  $r \approx 0,1465$ . Плотность упаковки  $U_{13}$  равна  $\sigma(U_{13}) \approx 0,6307$ . Множество  $M$ , круги упаковки  $U_{13}$  и массив их центров представлены на рис. 3.

Получен массив центров кругов субоптимальной упаковки при  $n = 15$ :

$$S_{15} = \{(-0,1663; -0,4153), (-0,1439; -0,1225), (-0,4199; -0,1716), \\ (0,2616; 0,1151), (0; -0,6580), (0,1366; -0,1366), (-0,5365; 0,0829), \\ (0,4156; -0,1740), (-0,3208; 0,2604), (0,1988; 0,3881), (0; 0,6678), \\ (-0,08; 0,4011), (0,1648; -0,4223), (-0,0188; 0,1284), (0,5406; 0,0786)\}.$$

Радиус кругов найденной субоптимальной упаковки равен  $r \approx 0,139$ . Плотность упаковки  $U_{15}$  равна  $\sigma(U_{15}) \approx 0,6552$ . Множество  $M$ , круги упаковки  $U_{15}$  и массив их центров представлены на рис. 4.

**Пример 3.** Рассмотрим невыпуклое компактное множество  $M$ , ограниченное кривой

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 = 4[(x - 1)^2 + y^2]. \quad (26)$$

Требуется решить задачу 1 при  $n = 17$  и  $n = 18$ .

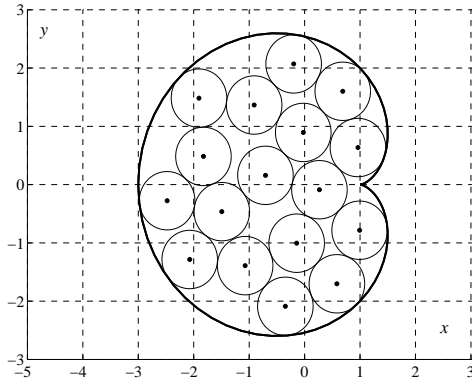


Рис. 5. Субоптимальная упаковка  $U_{17}$  в примере 3

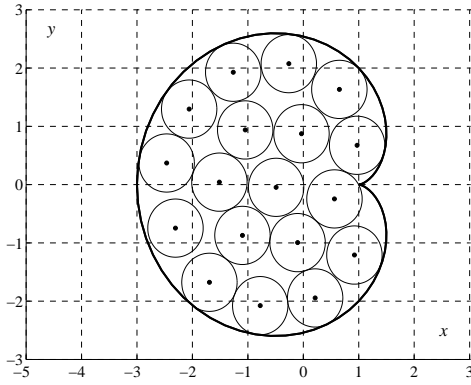


Рис. 6. Субоптимальная упаковка  $U_{18}$  в примере 3

Кривая (26) является кардиоидой — траекторией точки, расположенной на границе круга радиуса 1, катящегося без скольжения с наружной стороны окружности радиуса 1 (см. [36]). Она, как и в примере 2, ограничивает невыпуклое односвязное множество, но не симметричное относительно начала координат. Другая важная особенность кривой (26) заключается в том, что она негладкая, поскольку содержит точку возврата первого рода  $(0; 0)$ .

Получен массив центров кругов субоптимальной упаковки при  $n = 17$ :

$$S_{17} = \{(-3,0721; -1,2852), (-2,0723; -1,3905), (-1,1431; -1,0056), \\ (-0,7328; -0,0882), (-0,0379; 0,6362), (-0,3119; 1,601),$$

$$\begin{aligned} &(-1,706; 0,1589), (-1,1973; 2,0711), (-3,48; -0,2768), \\ &(-0,4172; -1,702), (-1,9095; 1,3656), (-0,0071; -0,7835), \\ &(-2,8244; 0,4834), (-2,9052; 1,4833), (-1,0240; 0,8948), \\ &(-2,4932; -0,4642), (-1,3471; -2,0882)\}. \end{aligned}$$

Радиус кругов найденной субоптимальной упаковки равен  $r \approx 0,5011$ . Плотность упаковки  $U_{17}$  равна  $\sigma(U_{17}) \approx 0,7115$ . Множество  $M$ , круги упаковки  $U_{17}$  и массив их центров представлены на рис. 5.

Получен массив центров кругов субоптимальной упаковки при  $n = 18$ :

$$\begin{aligned} S_{18} = \{ &(-1,7773; -2,0773), (-1,4902; -0,0469), (-0,7863; -1,9451), \\ &(-1,2614; 2,0752), (-0,3496; 1,6335), (-0,0783; -1,2084), \\ &(-1,0329; 0,8726), (-0,0292; 0,6746), (-2,0477; 0,9378), \\ &(-1,1033; -0,9957), (-3,0588; 1,2955), (-3,4647; 0,3704), \\ &(-3,3056; -0,7464), (-2,5133; 0,0421), (-2,2641; 1,9275), \\ &(-2,0974; -0,8718), (-2,6932; -1,6765), (-0,4379; -0,2454)\}. \end{aligned}$$

Радиус кругов найденной субоптимальной упаковки равен  $r \approx 0,4997$ . Плотность упаковки  $U_{18}$  равна  $\sigma(U_{18}) \approx 0,749$ . Множество  $M$ , круги упаковки  $U_{18}$  и массив их центров представлены на рис. 6.

Для отыскания близкой глобально оптимальной упаковки авторами предусмотрена возможность многократного использования алгоритма при различных начальных условиях, генерируемых с помощью стохастической процедуры. При моделировании каждого примера выполнено  $5 \div 10$  запусков программного комплекса. В каждом из них выполнялось  $2000 \div 5000$  циклов алгоритма. Машинное время, потраченное на каждый запуск, варьируется от 3 до 15 минут.

Косвенным показателем сложности алгоритма может служить то, что на каждой его итерации при заданном массиве из  $n$  центров упаковки  $S_n$  нужно найти  $n(n-1)/2$  векторов  $\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j$ , соединяющих точки, и построить  $n$  множеств  $\Omega_{\partial M}(\mathbf{s}_i)$ . Однако в случае, когда координаты точек массива  $S_n$  мало отличаются от координат массива на предыдущем шаге  $\{\tilde{\mathbf{s}}_i\}_{i=1}^n = \tilde{S}_n$ , можно достичь существенной экономии машинного времени за счёт использования информации о векторах и проекциях для предыдущего набора точек. Пусть выполняется оценка

$$\|\tilde{\mathbf{s}}_i - \mathbf{s}_i\| \leq \Delta_r, \quad i = \overline{1, n}, \quad (27)$$

где  $\Delta_r > 0$ . Обозначим

$$\tilde{\varphi}^{(i)}(\mathbf{x}) \triangleq \min(0, 5\rho(\mathbf{x}, \tilde{S}_n \setminus \{\tilde{\mathbf{s}}_i\}), \rho(\mathbf{x}, \partial M)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда имеет место

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i) \leq \tilde{\varphi}^{(i)}(\tilde{\mathbf{s}}_i) + \Delta_r, \quad i = \overline{1, n}. \quad (28)$$

Из последних оценок и (27) следует, что в множество  $\Omega(\mathbf{s}_i, S_n^{(i)}, M)$  согласно определению 3 могут входить только точки  $\mathbf{s}_j$  с номерами  $j = \overline{1, n}$ ,  $i \neq j$ , такие, что

$$\|\tilde{\mathbf{s}}_i - \tilde{\mathbf{s}}_j\| \leq \varphi^{(i)}(\tilde{\mathbf{s}}_i) + 4\Delta_r.$$

Из неравенств (27), (28) также следует, что в  $\Omega(\mathbf{s}_i, S_n^{(i)}, M)$  может быть вложено множество  $\Omega_{\partial M}(\mathbf{s}_i)$ , только если

$$\rho(\tilde{\mathbf{s}}_i, \partial M) \leq 2\Delta_r.$$

Соответственно, если выполняется оценка (27) при  $\Delta_r \ll R_M(\tilde{S}_n)$ , то программный комплекс помогает существенно сократить перебор точек при построении супердифференциалов  $D^+\varphi^{(i)}(\mathbf{s}_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , характеристических функций в центрах элементов упаковки.

Эффективность алгоритма проиллюстрирована на трёх различных примерах. Сравнительный анализ с результатами, полученными другими авторами, затруднён, поскольку реализованная вычислительная процедура обрабатывает класс невыпуклых областей, которые ограничены одной аналитически заданной кривой. В работах других авторов границы областей, как правило, являются кусочно заданными кривыми, а рассматриваемые множества имеют геометрию невыпуклого многоугольника (см. [37]).

## 5. Заключение

Разработаны и реализованы алгоритмы построения субоптимальных упаковок для невыпуклых фигур. Их теоретическую основу составила теорема 1, а практическая реализация выполнена на базе формул (18), (19) и (23). Полученные результаты позволяют утверждать, что плотность полученных программным комплексом упаковок сравнима с плотностью известных оптимальных упаковок базовых выпуклых фигур (см., например, [37]), хотя и несколько ниже (что обусловлено гораздо более сложной формой фигур). Аппроксимации множеств наборами кругов могут использоваться в задачах управления, например, для построения управления методом экстремального прицеливания и при численном построении множеств достижимости и интегральных воронок [2].

Разработанные и реализованные алгоритмы имеют ряд достоинств. Во-первых, они позволяют строить упаковки в фигуры сложной геометрии, в том числе невыпуклые и с границей, содержащей изолированные точки негладкости, в отличие, например, от алгоритмов, предложенных в работе [13]. Во-вторых, алгоритмы устойчивы относительно изменения

начального положения центров упаковки: точки массива  $S_n$  пошагово сдвигаются, имитируя отталкивание от границы множества  $M$  и от ближайших соседних кругов, что существенно проще, чем, например, построение волновых фронтов от точек в работах [16, 17]. В-третьих, разработанный программный комплекс предоставляет возможность многократного запуска с использованием данных по лучшим упаковкам из числа найденных. В координаты их центров вносится стохастическое возмущение, после чего запускается итерационная схема. Указанная процедура в ряде случаев даёт увеличение радиуса  $r$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Ушаков В. Н., Успенский А. А., Малев А. Г. Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям // Тр. Ин-та математики и механики. 2011. Т. 17, № 2. С. 209–224.
3. Ушаков В. Н., Лебедев П. Д., Лавров Н. Г. Алгоритмы построения оптимальных упаковок в эллипсы // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2017. Т. 10, № 3. С. 67–79.
4. Лебедев П. Д., Казаков А. Л. Итерационные методы построения упаковок из кругов различного радиуса на плоскости // Тр. Ин-та математики и механики. 2018. Т. 24, № 2. С. 141–151.
5. Machchhar J., Elber G. Dense packing of congruent circles in free-form non-convex containers // Comput. Aided Geom. Des. 2017. Vol. 52–53. P. 13–27.
6. Meng L., Wang C., Yao X. Non-convex shape effects on the dense random packing properties of assembled rods // Physica A. Vol. 490. 2017. P. 212–221.
7. Locatelli M., Raber U. Packing equal circles in a square: A deterministic global optimization approach // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 122. P. 139–166.
8. Li Y., Akeb H. Basic heuristics for packing a large number of equal circles. Amiens: Univ. Picardie Jules Verne, 2005. 19 p. Available at [www.researchgate.net/publication/250761942\\_Basic\\_Heuristics\\_for\\_Packing\\_a\\_Great\\_Number\\_of\\_Equal\\_Circles](http://www.researchgate.net/publication/250761942_Basic_Heuristics_for_Packing_a_Great_Number_of_Equal_Circles) (accessed Aug. 13, 2020).
9. Litvinchev I., Ozuna L. Approximate packing circles in a rectangular container: Valid inequalities and nesting // J. Appl. Res. Technology. 2014. Vol. 12, No. 4. P. 716–723.
10. Stoyan Yu. G., Yas'kov G. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip // Eur. J. Oper. Res. 2004. Vol. 156. P. 590–600.
11. Stoyan Yu. G., Yas'kov G. Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped // Intelligent Decision Support: Current Challenges and Approaches. Wiesbaden: Gabler-Verl., 2008. P. 46–67.
12. Hifi M., M'Hallah R. Approximate algorithms for constrained circular cutting problems // Comput. Oper. Res. 2004. Vol. 31. P. 675–694.



13. **Чугай А. М.** Решение задачи упаковки кругов в выпуклый многоугольник с помощью модифицированного метода сужающихся окрестностей // Радиоэлектроника и информатика. 2005. № 1. С. 58–63.
14. **Лебедев П. Д., Успенский А. А.** Построение функции оптимального результата и рассеивающих линий в задачах быстрогодействия с невыпуклым целевым множеством // Тр. Ин-та математики и механики. 2016. Т. 22, № 2. С. 188–198.
15. **Kazakov A. L., Lempert A. A., Та Т. Т.** The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, No. 32. P. 782–787.
16. **Казаков А. Л., Лемперт А. А., Нгуен Г. Л.** Об одном алгоритме построения упаковки конгруэнтных кругов в неодносвязное множество с неевклидовой метрикой // Вычисл. методы и программирование. 2016. Т. 17, № 2. С. 177–188.
17. **Kazakov A. L., Lempert A. A., Nguyen H. L.** The problem of the optimal packing of the equal circles for special non-Euclidean metric // Commun. Comput. Inf. Sci. 2017. Vol. 661. P. 58–68.
18. **Lebedev P. D., Uspenskii A. A.** Algorithms of optimal packing construction in a 3-dimensional Euclidian space // Modern Problems in Mathematics and Its Applications. Proc. 47th Int. Youth School-Conf. MPMA 2016 (Yekaterinburg, Russia, Jan. 31–Feb. 6, 2016). Aachen: RWTH Aachen Univ., 2016. P. 84–93. (CEUR Workshop Proc.; Vol. 1662). Available at [www.ceur-ws.org/Vol-1662](http://www.ceur-ws.org/Vol-1662) (accessed Aug. 13, 2020).
19. **Субботин А. И.** Обобщённые решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьют. технологий, 2003. 336 с.
20. **Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.
21. **Бычков И. В., Казаков А. Л., Лемперт А. А., Бухаров Д. С., Столбов А. Б.** Интеллектуальная система управления развитием транспортно-логистической инфраструктурой региона // Пробл. управления. 2014. № 1. С. 27–35.
22. **Рвачёв В. Л., Стоян Ю. Г.** Задача оптимального размещения круговых заготовок // Кибернетика. 1965. № 3. С. 77–83.
23. **Castillo I., Kampas F. J., Pinter J. D.** Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications // Eur. J. Oper. Res. 2008. Vol. 191, No. 3. P. 786–802.
24. **Harary F., Randolph W., Mezey P. G.** A study of maximum unit-circle caterpillars – tools for the study of the shape of adsorption patterns // Discrete Appl. Math. 1996. Vol. 67, No. 1–3. P. 127–135.
25. **Еремеев А. В., Заозерская Л. А., Колоколов А. А.** Задачи о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 17, № 2. С. 22–46.
26. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

27. Лебедев П. Д., Ушаков А. В. Аппроксимация множеств на плоскости оптимальными наборами кругов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 79–90.
28. Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Фёдоров В. В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986. 326 с.
29. Нурминский Е. А., Тьен Д. Метод сопряжённых субградиентов с ограниченной памятью // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 67–80.
30. Воронцова Е. А. Линейная задача о допусках для интервальной модели межотраслевого баланса // Вычисл. технологии. 2017. Т. 22, № 2. С. 67–84.
31. Гасников А. В., Двуреченский П. Е., Камзолов Д. И., Нестеров Ю. Е., Спокойный В. Г., Стецюк П. И., Суворикова А. Л., Чернов А. В. Поиск равновесий в многостадийных транспортных моделях // Тр. Моск. физ.-тех. ин-та. 2015. Т. 7, № 4. С. 143–155.
32. Лебедев П. Д. Программа вычисления оптимального покрытия полусферы набором сферических сегментов. Свид-во о гос. регистрации № 2015661543 от 29.10.2015.
33. Тот Л. Ф. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958. 365 с.
34. Местецкий Л. М. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 288 с.
35. Лебедев П. Д., Успенский А. А. Конструирование негладкого решения задачи управления по быстродействию при низком порядке гладкости границы целевого множества // Тр. Ин-та математики и механики. 2019. Т. 25, № 1. С. 108–119.
36. Савёлов А. А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. М.: Либроком, 2010. 294 с.
37. Specht E. Packomania. 2018. Available at [www.packomania.com](http://www.packomania.com) (accessed Aug. 13, 2020).

Лебедев Павел Дмитриевич  
Ушаков Владимир Николаевич  
Успенский Александр Александрович

Статья поступила  
27 декабря 2019 г.  
После доработки —  
27 июля 2020 г.  
Принята к публикации  
29 июля 2020 г.

# NUMERICAL METHODS FOR CONSTRUCTING SUBOPTIMAL PACKINGS OF NONCONVEX DOMAINS WITH CURVED BOUNDARY

P. D. Lebedev<sup>a</sup>, V. N. Ushakov<sup>b</sup>, and A. A. Uspenskii<sup>c</sup>

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,  
16 Sofya Kovalevskaya Street, 620990 Yekaterinburg, Russia

E-mail: <sup>a</sup>pleb@yandex.ru, <sup>b</sup>ushak@imm.uran.ru, <sup>c</sup>uspen@imm.uran.ru

**Abstract.** We study the problem of constructing some optimal packings of simply-connected nonconvex plane domains with a union of congruent circles. We consider the minimization of the radius of circles if the number of the circles is fixed. Using subdifferential calculus, we develop theoretical methods for solution of the problem and propose an approach for constructing some suboptimal packings close to optimal. In the numerical algorithms, we use the iterative procedures and take into account mainly the location of the current center of a packing element, the centers of the nearest neighboring elements, and the points of the boundary of the domain. The algorithms use the same supergradient ascent scheme whose parameters can be adapted to the number of packing elements and the geometry of the domain. We present a new software package whose efficiency is demonstrated by several examples of numerical construction of some suboptimal packings of the nonconvex domains bounded by the Cassini oval, a hypotrochoid, and a cardioid. Illustr. 6, bibliogr. 37.

**Keywords:** packing, maximization, optimization, algorithm, numerical procedure, directional derivative, superdifferential, approximation, supergradient ascent.

## REFERENCES

1. N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin, *Positional Differential Games* (Nauka, Moscow, 1974) [Russian].

A part of the research by P. D. Lebedev P. and V. N. Ushakov is supported by the Russian Scientific Foundation (Project 19–11–00105).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (4), 681–692 (2020), DOI 10.1134/S1990478920040079.

2. **V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii, and A. G. Malev**, An estimate of the stability defect for a positional absorption set subjected to discriminant transformations, *Tr. Inst. Mat. Mekh.* **17** (2), 209–224 (2011) [Russian] [*Proc. Steklov Inst. Math.* **279** (Suppl. 1), 113–129 (2012)].
3. **V. N. Ushakov, P. D. Lebedev, and N. G. Lavrov**, Algorithms for optimal packings in ellipse, *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program.* **10** (3), 67–79 (2017) [Russian].
4. **P. D. Lebedev and A. L. Kazakov**, Iterative methods for the construction of planar packings of circles of different size, *Tr. Inst. Mat. Mekh.* **24** (2), 141–151 (2018) [Russian].
5. **J. Machchhar and G. Elber**, Dense packing of congruent circles in free-form non-convex containers, *Comput. Aided Geom. Des.* **52–53**, 13–27 (2017).
6. **L. Meng, C. Wang, and X. Yao**, Non-convex shape effects on the dense random packing properties of assembled rods, *Physica A*, **490**, 212–221 (2017).
7. **M. Locatelli and U. Raber**, Packing equal circles in a square: A deterministic global optimization approach, *Discrete Appl. Math.* **122**, 139–166 (2017).
8. **Y. Li and H. Akeb**, Basic heuristics for packing a large number of equal circles (Univ. Picardie Jules Verne, Amiens, 2005). Available at [www.researchgate.net/publication/250761942\\_Basic\\_Heuristics\\_for\\_Packing\\_a\\_Great\\_Number\\_of\\_Equal\\_Circles](http://www.researchgate.net/publication/250761942_Basic_Heuristics_for_Packing_a_Great_Number_of_Equal_Circles) (accessed Aug. 13, 2020).
9. **I. Litvinchev and L. Ozuna**, Approximate packing circles in a rectangular container: Valid inequalities and nesting, *J. Appl. Res. Technol.* **12** (4), 716–723 (2014).
10. **Yu. G. Stoyan and G. Yas'kov**, A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip, *Eur. J. Oper. Res.* **156**, 590–600 (2004).
11. **Yu. G. Stoyan and G. Yas'kov**, Packing identical spheres into a rectangular parallelepiped, in *Intelligent Decision Support: Current Challenges and Approaches* (Gabler-Verl., Wiesbaden, 2008), pp. 46–67.
12. **M. Hifi and R. M'Hallah**, Approximate algorithms for constrained circular cutting problems, *Comput. Oper. Res.* **31**, 675–694 (2004).
13. **A. M. Chugai**, A solution to the disk packing problem in a convex polygon with the use of a modified method of tapering neighborhoods, *Radioelektron. Inform.*, No. 1, 58–63 (2005) [Russian].
14. **P. D. Lebedev and A. A. Uspenskii**, Construction of the optimal result function and dispersing lines in time-optimal problems with a nonconvex target set, *Tr. Inst. Mat. Mekh.* **22** (2), 188–198 (2016) [Russian].
15. **A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and T. T. Ta**, The sphere packing problem into bounded containers in three-dimension non-Euclidean space, *IFAC-PapersOnLine* **51** (32), 782–787 (2018).
16. **A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and H. L. Nguyen**, An algorithm of packing congruent circles in a multiply connected set with non-Euclidean metrics, *Vychisl. Metody Program.* **17** (2), 177–188 (2016) [Russian].

17. **A. L. Kazakov, A. A. Lempert, and H. L. Nguyen**, The problem of the optimal packing of the equal circles for special non-Euclidean metric, *Commun. Comput. Inf. Sci.* **661**, 58–68 (2017).
18. **P. D. Lebedev and A. A. Uspenskii**, Algorithms of optimal packing construction in a 3-dimensional Euclidian space, in *Modern Problems in Mathematics and Its Applications* (Proc. 47th Int. Youth School-Conf. MPMA 2016, Yekaterinburg, Russia, Jan. 31–Feb. 6, 2016) (RWTH Aachen Univ., Aachen, 2016), pp. 84–93 (CEUR Workshop Proc.; Vol. 1662). Available at [www.ceur-ws.org/Vol-1662](http://www.ceur-ws.org/Vol-1662) (accessed Aug. 13, 2020).
19. **A. I. Subbotin**, *Generalized Solutions of First-Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective* (Birkhäuser, Boston, 1995; Inst. Comput. Technol., Moscow, 2003 [Russian]).
20. **V. F. Demyanov and L. V. Vasilyev**, *Non-Differentiable Optimization* (Nauka, Moscow, 1981) [Russian].
21. **I. V. Bychkov, A. L. Kazakov, A. A. Lempert, D. S. Bukharov, and A. B. Stolbov**, An intelligent management system for the development of a regional transport logistics infrastructure, *Probl. Upr.*, No. 1, 27–35 (2014) [Russian] [*Autom. Remote Control.* **77** (2), 332–343 (2016)].
22. **V. L. Rvachov and Yu. G. Stoyan**, The problem of optimal placement of circular ingots, *Kibernetika*, No. 3, 77–83 (1965) [Russian].
23. **I. Castillo, F. J. Kampas, and J. D. Pinter**, Solving circle packing problems by global optimization: Numerical results and industrial applications, *Eur. J. Oper. Res.* **191** (3), 786–802 (2008).
24. **F. Harary, W. Randolph, and P. G. Mezey**, A study of maximum unit-circle caterpillars – tools for the study of the shape of adsorption patterns, *Discrete Appl. Math.* **67** (1–3), 127–135 (1996).
25. **A. V. Ereemeev, L. A. Zaozerskaya, and A. A. Kolokolov**, The set covering problem: Complexity, algorithms, and experimental investigations, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2*, **7** (2), 22–46 (2000) [Russian].
26. **R. Rockafellar**, *Convex Analysis* (Princeton Univ., Princeton, 1970; Mir, Moscow, 1973 [Russian]).
27. **P. D. Lebedev and A. V. Ushakov**, Approximating sets on a plane with optimal sets of circles, *Avtom. Telemekh.*, No. 3, 79–90 (2012) [Russian] [*Autom. Remote Control.* **73** (3), 485–493 (2012)].
28. **A. G. Sukharev, A. V. Timokhov, and V. V. Fyodorov**, *A Course in Optimization Methods* (Nauka, Moscow, 1986) [Russian].
29. **E. A. Nurminskii and D. Tien**, Method of conjugate subgradients with constrained memory, *Avtom. Telemekh.*, No. 4, 67–80 (2014) [Russian] [*Autom. Remote Control.* **75** (4), 646–656 (2012)].
30. **E. A. Vorontsova**, Linear tolerance problem for input-output model with interval data, *Vychisl. Tekhnol.* **22** (2), 67–84 (2017) [Russian].
31. **A. V. Gasnikov, P. E. Dvurechenskii, D. I. Kamzolov, Yu. E. Nesterov, V. G. Spokoiny, P. I. Stetsyuk, A. L. Suvorikova, and A. V. Chernov**, Searching for equilibriums in multistage transport models, *Tr. Mosk. Fiz.-Tekh. Inst.* **7** (4), 143–155 (2015) [Russian].

- 
- 32. **P. D. Lebedev**, A program for calculating the optimal coverage of a hemisphere with a set of spherical segments, *Certificate of State Registration* No. 2015661543 from 29.10.2015 [Russian].
  - 33. **L. F. Tóth**, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer, Heidelberg, 1953) (Grundlehren Math. Wiss., Vol. 65) [German]; (Fizmatgiz, Moscow, 1958) [Russian].
  - 34. **L. M. Mestetskii**, *Continuous Morphology of Binary Images: Figures, Skeletons, Circulars* (FIZMATLIT, Moscow, 2009) [Russian].
  - 35. **P. D. Lebedev** and **A. A. Uspenskii**, Construction of a nonsmooth solution to the time-optimal problem with a low order of smoothness of the target set boundary, *Tr. Inst. Mat. Mekh.* **25** (1), 108–119 (2019 [Russian]).
  - 36. **A. A. Savyolov**, *Flat Curves: Systematics, Properties, Applications* (Librokom, Moscow, 2010) [Russian].
  - 37. **E. Specht**, *Packomania* (2018). Available at [www.packomania.com](http://www.packomania.com) (accessed Aug. 13, 2020).

Pavel D. Lebedev  
Vladimir N. Ushakov  
Aleksandr A. Uspenskii

Received December 27, 2019  
Revised July 27, 2020  
Accepted July 29, 2020