ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2020. Т. 27, № 4. С. 5–20

УДК 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2020.27.691

РАЗРЕЗ НАИБОЛЬШЕГО ВЕСА В ОРГРАФЕ, ПОРОЖДЁННЫЙ МИНИМАЛЬНЫМ ДОМИНИРУЮЩИМ МНОЖЕСТВОМ

В. В. Ворошилов

Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, 644077 Омск, Россия
E-mail: voroshil@gmail.com

Аннотация. Пусть $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф с заданными неотрицательными весами дуг, $S \subseteq V$ — некоторое подмножество его вершин. Множество S называется доминирующим, если для каждой вершины $j \in V \setminus S$ существуют как минимум одна вершина $i \in S$ и дуга из i в j. Доминирующее множество называется минимальным по включению, если оно не содержит в себе доминирующих множеств меньшего размера. Разрезом $\{S \to \overline{S}\}$ называется множество дуг (i, j) таких, что $i \in S$, $j \in V \setminus S$. Весом разреза будем считать суммарный вес входящих в него дуг. В статье исследуется задача поиска разреза $\{S \to \overline{S}\}$ максимального веса среди всех минимальных доминирующих множеств S. Ил. 6, библиогр. 8.

Ключевые слова: ориентированный граф, взвешенный граф, максимальный разрез, минимальное по включению доминирующее множество.

Введение

Данная работа посвящена задаче поиска в простом взвешенном ориентированном графе разреза максимального веса, порождённого минимальным по включению доминирующим множеством вершин.

Определение 1. *Разрезом*, порождённым множеством вершин D, (или просто разрезом $\{D \to \overline{D}\}$) в простом ориентированном графе $G = (V, A)$ называется множество всех дуг, начало которых принадлежит D, а конец — множеству $\overline{D} = V \setminus D$.

Использование обозначения $\{D \to \overline{D}\}$ вместо более распространённого $(D, \overline{D})$ призвано подчеркнуть тот факт, что в отличие от определения разреза для ориентированного графа, данного Н. Кристофидесом в [1],

как объединения дуг, направленных как из, так и в множество D, в этой работе рассматриваются исключительно дуги, направленные из множества D.

Определение 2. *Весом разреза* $\{D \to \overline{D}\}$ в простом ориентированном взвешенном графе $G = (V, A, w)$ с заданными неотрицательными весами дуг w будем называть сумму

$$w_{dc}(D) = \sum_{(i,j) \in \{D \to \overline{D}\}} w(i,j).$$

Определение 3. Будем говорить, что $D \subseteq V$ — *доминирующее* множество вершин графа G (или просто доминирующее множество), если для любой вершины $i \in V \setminus D$ существует вершина $j \in D$ такая, что дуга (j, i) принадлежит A. Доминирующее множество, не содержащее в себе доминирующих множеств меньшего размера, будем называть *минимальным по включению доминирующим* множеством, или для краткости просто *минимальным доминирующим* множеством. Семейство всех доминирующих множеств обозначим через $D(G)$, а семейство всех минимальных доминирующих множеств — через $D_{\min}(G)$.

В данной работе рассматривается задача, которая может быть формально записана следующим образом

Задача 1 (MAX MDS DICUT).

$$w_{dc}(D) \to \max \tag{1}$$

при ограничениях

$$D \in D_{\min}(G). \tag{2}$$

Без ограничения (2) она может рассматриваться как ориентированный случай задачи MAX CUT, опубликованной (в виде задачи распознавания) под номером 21 Р. Карпом в 1972 г. в его списке NP-полных задач [2].

Стоит отметить, что существуют различные вариации задачи MAX CUT. Например, ориентированный случай с дополнительным ограничением на размер множества рассматривается в [3] под названием MAX DICUT WITH GST, а неориентированный случай с различными условиями на характер множества D (включая условие доминирования) подробно исследуется в [4]

Если же в целевую функцию к весам дуг разреза добавить веса остальных дуг, началом которых являются вершины множества D, т. е. сумму

$$w_{dc}(D) = \sum_{(i,j) \in \{D \to \overline{D}\}} w(i,j)$$

заменить суммой

$$w(D) = \sum_{i\in D} \sum_{(i,j)\in A} w(i,j) = \sum_{i\in D} w(i),$$

где $w(i)$ — вес вершины i, равный суммарному весу исходящих из неё дуг, то получившаяся задача превращается в ориентированный вариант задачи MAX MIN DOMINATING SET:

$$\sum_{D\in D_{\min}(G)} w(D) \to \max .$$

Эта задача (в её неориентированном варианте) была подробно исследована в [5], а её аппроксимационные особенности — в [6]. В частности показано, что при P $\neq$ NP не существует полиномиального алгоритма её решения и, более того, не существует приближённого полиномиального алгоритма с гарантированной оценкой $|V|^{\epsilon-\frac{1}{2}}$ для любого $\epsilon > 0$.

В целом обе упомянутые задачи можно рассматривать как однокритериальное упрощение следующей двукритериальной задачи:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in S} \sum\limits_{(i,j)\in A} w(i,j) \to \max, \\ |S| \to \min, \\ S \in D(G). \end{cases} \tag{3}$$

Она рассматривается в [7] как задача определения ключевых показателей экономической безопасности региона. В ней веса дуг $w(i,j)$ отражают степень влияния одного экономического показателя на другой.

Авторами в [7] предлагается преобразовать задачу в однокритериальную путём замены критерия $|S| \to \min$ и ограничения $S \in D(G)$ ограничением $S \in D_{\min}(G)$, после чего она превращается в ориентированный вариант известной задачи MAX MIN DOMINATING SET.

Нетрудно заметить, что при таком подходе учитывается не только степень влияния друг на друга показателей из множества S с одной стороны и показателей за пределами S с другой, но и связи между показателями внутри самого множества, что может быть нежелательным побочным эффектом. Избавиться от него можно исключением из целевой функции дуг между вершинами множества S. Оставшиеся дуги в точности образуют разрез $\{D \to \overline{D}\}$, т. е. задача превращается в MAX MDS DICUT.

Оценки трудоёмкости задачи MAX MIN DOMINATING SET дали основания предположить, что MAX MDS DICUT также NP-трудна. Но и в этом случае наличие ЦЛП-модели несомненно будет полезным для разработки алгоритмов её точного или приближённого решения.

Основной материал данной работы разбит на две части. В разд. 1 доказывается принадлежность рассматриваемой задачи классу NP-трудных задач путём сведения к её распознавательному варианту NP-полной задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ. В разд. 2 приводятся системы, обеспечивающие условия доминирования, минимального доминирования и принадлежности разрезу, с построением в итоге ЦЛП-модели для рассматриваемой задачи.

1. Класс сложности

Сформулируем задачу о поиске разреза максимального веса, порождённого минимальным по включению доминирующим множеством, в виде задачи распознавания.

Задача 2 (MAX MDS DICUT в виде задачи распознавания)**.** *Пусть* $G = (V, A, w)$ *— взвешенный ориентированный граф,* $w(i, j) \geqslant 0$ *— веса его дуг,* $\beta \geqslant 0$ *— параметр. Существует ли минимальное доминирующее множество* D *такое, что*

$$w_{dc}(D) \geqslant \beta.$$

Очевидно, что задача 2 принадлежит классу NP. В самом деле, недетерминированному алгоритму достаточно угадать подходящее множество D, после чего за время $O(n^2)$ можно проверить, что D — минимальное доминирующее множество, и вычислить $w_{dc}(D)$.

Рассмотрим свойства двух подграфов специальной структуры, которые понадобятся в дальнейшем для доказательства NP-полноты.

Определение 4. «Хвостом» в ориентированном графе $G = (V, A)$ будем называть подграф $G_M = (V_M, A_M)$, где $V_M = \{r, q, s, k\}$, $A_M = \{(r, q), (q, s), (k, s)\}$, причём граф G не содержит никаких других дуг (за исключением входящих в вершину r), инцидентных вершинам r, s, q, k. Пример «хвоста» см. на рис. 1.

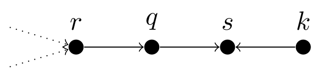

Рис. 1. Подграф «хвост»

Определение 5. Под «цилиндром» в ориентированном графе $G = (V, A)$ будем понимать подграф $G_T = (V_T, A_T)$, где $V_T = \{f, t, g, h\}$, $A_T = \{(t, f), (f, t), (g, h), (h, g), (f, h), (t, g)\}$, причём граф G не содержит никаких других дуг (за исключением исходящих из вершин t и f), инцидентных вершинам t, f, g, h. Пример «цилиндра» см. на рис. 2.

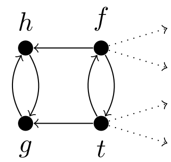

Рис. 2. Подграф «цилиндр»

Лемма 1 (свойство «хвоста»)**.** *Пусть $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф, $G_M = (V_M, A_M)$ — «хвост» в нём. Тогда для любого минимального доминирующего множества D и разреза $\{D \to \overline{D}\}$ верно*

$$(q, s) \in \{D \to \overline{D}\} \Rightarrow \exists\, p \in D\colon (p, r) \in A.$$

Доказательство. Пусть D — выбранное произвольно минимальное доминирующее множество. Заметим, что вершина k обязательно ему принадлежит, поскольку у k нет входящих дуг. Пусть теперь дуга (q, s) принадлежит разрезу $\{D \to \overline{D}\}$. По определению разреза это означает, что $q \in D$, $s \notin D$.

Предположим, что в D не существует вершины p такой, что $(p, r) \in A$, но тогда $r \in D$ по определению доминирующего множества. Более того, $D \setminus \{q\}$ также доминирующее, поскольку $(r, q) \in A$, $k \in D$ и $(k, s) \in A$, откуда следует, что D не минимальное; противоречие. Значит, исходное предположение неверно, и в множестве D существует вершина p такая, что $(p, r) \in A$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2 (свойство «цилиндра»)**.** *Пусть $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф, $G_T = (V_T, A_T)$ — «цилиндр» в нём. Тогда для любого минимального доминирующего множества D*

$$|\{t, f\} \cap D| = 1 \Leftrightarrow |\{g, h\} \cap D| = 1.$$

Доказательство. Пусть минимальное доминирующее множество D выбрано произвольно и $|\{t, f\} \cap D| = 1$. Для определённости положим $t \in D$, $f \notin D$ (для $t \notin D$, $f \in D$ лемма доказывается аналогично). Случай $|\{g, h\} \cap D| = 0$ невозможен, поскольку у вершины h есть всего две входящих дуги (f, h) и (g, h), но ни f, ни g множеству D не принадлежат, что противоречит определению D как доминирующего множества. Если же $|\{g, h\} \cap D| = 2$, то $D \setminus \{g\}$ также остаётся доминирующим, поскольку $h \in D$ и существует дуга (h, g), но это противоречит определению D как минимального по включению доминирующего множества. Остаётся единственный вариант: $|\{g, h\} \cap D| = 1$.

В обратную сторону. Пусть минимальное доминирующее множество D выбрано произвольно и $|\{g, h\} \cap D| = 1$. Случай $|\{t, f\} \cap D| = 0$ невозможен, поскольку единственная входящая дуга в t — это (f, t), а $f \notin D$, что

противоречит определению D как доминирующего множества. Если же $|\{t, f\} \cap D| = 2$, то $D \setminus \{g, h\}$ также остаётся доминирующим, поскольку $t, f \in D$ и существуют дуги (t, g), (f, h). Это противоречит определению D как минимального по включению доминирующего множества. Остаётся единственный вариант: $|\{t, f\} \cap D| = 1$. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Задача* 2 NP-*полна.*

Доказательство. Для доказательства NP-полноты выполним сведение к рассматриваемой задаче известной NP-полной задачи выполнимость, которая в [8] формулируется следующим образом.

Задача 3 (выполнимость). *Пусть* $U = \{u_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, *— множество булевых переменных,* $C = \{c_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, *— множество дизъюнкций над переменными из* U. *Существует ли выполняющийся набор значений истинности для* C?

Итак, пусть имеется задача 3 с заданным множеством булевых переменных $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ и множеством дизъюнкций $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$, $c_j = \{u_{j_1}, \ldots, u_{j_k}\} \cup \{\bar{u}_{j_{k+1}}, \ldots, \bar{u}_{j_{k_l}}\}$.

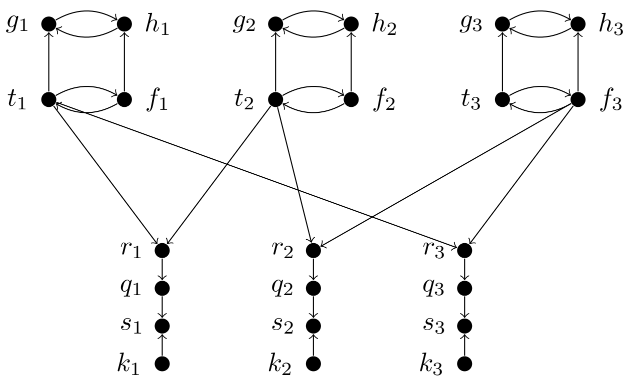

Рис. 3. Пример графа для $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3\}$, $c_1 = \{u_1, u_2\}$, $c_2 = \{u_2, \bar{u}_3\}$, $c_3 = \{u_1, \bar{u}_3\}$

Построим соответствующий ей ориентированный граф $G = (V, A)$, поставив в соответствие каждой переменной u_i отдельный «цилиндр», а каждой дизъюнкции c_j — отдельный «хвост». При этом если в дизъюнкцию c_j входит переменная u_i, то в граф добавляется дуга (t_i, r_j), а если в c_j входит отрицание переменной u_i, то добавляется дуга (f_i, r_j) (рис. 3). Или формально:

$$V = V_T \cup V_C,$$

$$V_T = \bigcup_{i=1}^{n} \{t_i, f_i, g_i, h_i\},$$
$$V_C = \bigcup_{j=1}^{m} \{q_j, r_j, s_j, k_j\},$$
$$(t_i, g_i), (f_i, h_i) \in A, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$(g_i, h_i), (h_i, g_i) \in A, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$(t_i, f_i), (f_i, t_i) \in A, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$(r_j, q_j), (q_j, s_j), (k_j, s_j) \in A, \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$(t_i, r_j) \in A \Leftrightarrow u_i \in c_j, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,$$
$$(f_i, r_j) \in A \Leftrightarrow \bar{u}_i \in c_j, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,$$
$$w(g_i, h_i) = w(h_i, g_i) = 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$w(q_j, s_j) = 1, \quad j = 1, \ldots, m,$$
$$w(t_i, g_i) = w(f_i, h_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$w(t_i, f_i) = w(f_i, t_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$w(r_j, q_j) = w(k_j, s_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Нетрудно видеть, что указанный граф можно построить за время $O(mn)$.

Докажем, что для построенного графа G и $\beta = m+n$ решение задачи 2 существует тогда и только тогда, когда существует решение задачи 3.

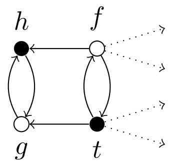

Рис. 4. Минимальное доминирующее множество в «цилиндре», содержащее вершину t

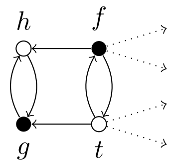

Рис. 5. Минимальное доминирующее множество в «цилиндре», содержащее вершину f

Пусть существует решение задачи 2, т. е. найдётся минимальное доминирующее множество D такое, что $w_{dc}(D) \geqslant m + n$. Это может выполняться только в случае, когда для всех $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$ дуги (q_j, s_j) принадлежат разрезу $\{D \to \overline{D}\}$ и $|\{g_i, h_i\} \cap D| = 1$. Из леммы 2 следует, что либо $t_i \in D$, $f_i \notin D$ (рис. 4), в этом случае полагаем $u_i = 1$, либо $t_i \notin D$, $f_i \in D$ (рис. 5), соответственно полагаем $u_i = 0$. Других вариантов быть не может, т. е. набор значений для u_i определяется непротиворечиво и единственно возможным образом.

Поскольку все (q_j, s_j) принадлежат разрезу $\{D \to \overline{D}\}$, из леммы 1 следует, что для всех r_j существует дуга из D в r_j (рис. 6), а значит, для

каждого j существует как минимум одно i такое, что либо $t_i \in D$, $u_i = 1$, $(t_i, r_j) \in A$ (и по построению графа G переменная u_i входит в c_j, делая её истинной), либо $f_i \in D$, $u_i = 0$, $(f_i, r_j) \in A$ (и по построению графа G отрицание переменной u_i входит в c_j, делая её истинной).

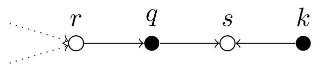

Рис. 6. Минимальное доминирующее множество в «хвосте», содержащее вершину q

Таким образом, имеем набор значений для u_i такой, что все c_j истинны, т. е. построенный набор u_i — решение задачи 3.

В обратную сторону. Пусть существует решение задачи 3, т. е. такой набор значений u_i, что все c_j истинны. Построим множество D следующим образом:

$$u_i = 1 \Rightarrow t_i, h_i \in D, \quad i = 1, \ldots, n \text{ (рис. 4)},$$
$$u_i = 0 \Rightarrow f_i, g_i \in D, \quad i = 1, \ldots, n \text{ (рис. 5)},$$
$$q_j, k_j \in D, \quad j = 1, \ldots, m \text{ (рис. 6)}.$$

Так как все c_j истинны, для каждого r_j существует как минимум одно ребро из D в r_j. Тогда множество D — доминирующее, более того, D — минимальное доминирующее. Заметим, что $w(g_i, h_i) + w(h_i, g_i) = 1$, поскольку $|\{g_i, h_i\} \cap D| = 1$ в силу леммы 2. Тогда

$$w_{dc}(D) = \sum_{j=1}^{m} w(q_j, s_j) + \sum_{i=1}^{n} (w(g_i, h_i) + w(h_i, g_i)) = m + n.$$

Значит, D является решением задачи 2. Теорема 1 доказана.

2. Построение ЦЛП-модели

Здесь и далее будем полагать, что $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф, $N = |V|$, $M = |A|$. *Окрестностью в вершину* i графа G будем называть множество $N_-\{i\} = \{j \mid (j, i) \in A\}$. *Окрестностью из вершины* i графа G будем называть множество $N_+\{i\} = \{j \mid (i, j) \in A\}$. Определим также их замкнутые варианты:

$$N_-[i] = \{i\} \cup N_-\{i\}, \quad N_+[i] = \{i\} \cup N_+\{i\}.$$

Сопоставим множеству вершин графа N-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^V$ посредством взаимно однозначного соответствия между элементами множества вершин V и осями координат пространства $\mathbb{R}^V$. Иными словами, пространство $\mathbb{R}^V$ можно рассматривать как пространство

вектор-столбцов, координаты которых индексируются элементами множества V.

Каждому множеству вершин $D \subseteq V$ сопоставим булев вектор $x^D \in \mathbb{R}^V$ с координатами

$$x^D = \{x_i^D\}, \quad x_i^D = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in D, \\ 0, & \text{если } i \in V \setminus D. \end{cases}$$

Тогда для любого множества вершин S верно соотношение

$$|S \cap D| = \sum_{j \in S} x_j^D.$$

Докажем вспомогательное утверждение, которое понадобится при построении ЦЛП-модели (аналогичное утверждение для неориентированного случая без доказательства приводится в [1]).

Лемма 3. *Пусть $G = (V, A)$ — простой ориентированный граф, D — произвольное подмножество его вершин. Множество D является доминирующим тогда и только тогда, когда для любого $i \in V$*

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D \geqslant 1.$$

Доказательство. Достаточность. Допустим, что D — доминирующее множество вершин. Выберем в графе G произвольную вершину i. Если вершина i принадлежит D, то

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D \geqslant x_i^D = 1.$$

Если же вершина i не принадлежит D, то (в силу определения доминирования) обязательно существует вершина k из D такая, что дуга (k, i) принадлежит A, или, другими словами, k принадлежит $N_-[i]$, но тогда

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D \geqslant x_k^D = 1.$$

В силу произвольности выбора вершины i утверждение леммы верно для всех вершин графа G.

Необходимость. Пусть для любой вершины i графа G выполняется

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j \geqslant 1.$$

Для любой вершины i, не принадлежащей D, это возможно, когда в $N_-[i]$ существует вершина k, отличная от i, такая, что $x_k = 1$ (поскольку $x_i = 0$). Значит, k принадлежит D и в A существует дуга (k, i). Так как

это верно для любых вершин из $V \setminus D$, множество D доминирующее. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Решение* $(\bar{x}, \bar{y})$ *системы*

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

$$\sum_{j \in N_+[i]} y_{ij} - x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j - x_k \leqslant N(1 - y_{ki}), \quad (k, i) \in A, \tag{6}$$

$$y_{ki} = 0, \quad (k, i) \notin A, \tag{7}$$

относительно булевых переменных x_i, y_{ki} *существует тогда и только тогда, когда* $\bar{x} = x^D$ *для некоторого минимального доминирующего множества* D.

Доказательство. Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — решение системы (4)–(7) и $\bar{x} = x^D$ для некоторого множества D. Тогда в силу леммы 3 D является доминирующим множеством. Предположим, что D не минимально по включению, т. е. существует $p \in D$ такое, что $D' = D \setminus \{p\}$ тоже доминирующее. Тогда по лемме 3 для D' и вектора $x^{D'}$ также выполняется неравенство

$$1 \leqslant \sum_{j \in N_-[i]} x_j^{D'} = \sum_{j \in N_-[i] \setminus \{p\}} x_j^D$$

и для всех $i = 1, \ldots, N$ таких, что $(p, i) \in A$, верно

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D - x_p^D \leqslant N(1 - \bar{y}_{pi}),$$

$$1 \leqslant \sum_{j \in N_-[i]} x_j^{D'} = \sum_{j \in N_-[i] \setminus \{p\}} x_j^D \leqslant N(1 - \bar{y}_{pi}),$$

$$\bar{y}_{pi} = 0,$$

т. е. $\bar{y}_{pi} = 0$ вообще для всех $i = 1, \ldots, N$, но

$$\sum_{i \in N_+[p]} \bar{y}_{pi} \geqslant x_p^D = 1;$$

противоречие.

В обратную сторону. Пусть D — минимальное доминирующее множество. Положим для $i = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, N$

$$\bar{y}_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in D \text{ и } \sum\limits_{j \in N_-[i]} x_j^D = 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{8}$$

Покажем, что $(x^D, \bar{y})$ — решение системы (4)–(7). В самом деле, неравенство (4) выполняется в силу леммы 3. Выражение (7) верно по построению $\bar{y}_{ki}$. В случае $(k,i) \in A$ неравенство (6) всегда истинно для $\bar{y}_{ki} = 0$, а для $\bar{y}_{ki} = 1$ оно верно, поскольку в этом случае (по построению $\bar{y}_{ki}$) $k \in D$, $x_k^D = 1$ и

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D - x_k^D = \sum_{j \in N_-[i]} x_j^D - 1 = 0 \leqslant 0 = N(1 - \bar{y}_{ki}).$$

Неравенство (5), очевидно, верно для всех $x_k^D = 0$. Покажем, что оно верно и для $x_k^D = 1$. Поскольку D минимальное доминирующее, для любого $k \in D$ множество $D \setminus \{k\}$ доминирующим не будет, а значит, для каждого k такого, что $x_k^D = 1$, существует $i \in N_+[k]$ такое, что

$$\sum_{j \in N_-[i] \setminus \{k\}} x_j^D = 0.$$

Тогда

$$1 \leqslant \sum_{j \in N_-[i]} x_j^D = \sum_{j \in N_-[i] \setminus \{k\}} x_j^D + \sum_{j \in N_-[i] \cap \{k\}} x_j^D = \sum_{j \in N_-[i] \cap \{k\}} x_j^D \leqslant 1,$$

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j^D = 1.$$

По построению $\bar{y}_{ki}$ получаем $\bar{y}_{ki} = 1$. Отсюда для всех $x_k^D = 1$ имеем

$$\sum_{j \in N_+[k]} \bar{y}_{kj} - x_k^D \geqslant \bar{y}_{ki} - x_k^D = 0.$$

Лемма 4 доказана.

В любом решении системы (4)–(7) значение $\bar{y}_{ki} = 1$ означает, что пересечение D с замкнутой окрестностью в вершину i состоит из единственной вершины k из D. Другими словами, вершина k — единственная среди всех вершин множества D, из которой вершина i достижима за один шаг.

В самом деле, при $\bar{y}_{ki} = 1$ (и обязательно $(k,i) \in A$, т. е. $k \in N_-[i]$) неравенство (6) превращается в следующее:

$$0 \geqslant \sum_{j \in N_-[i]} x_j - x_k,$$

откуда

$$1 \leqslant \sum_{j \in N_-[i]} x_j = x_k \leqslant 1,$$

а это в точности означает, что $k \in D$ и, как следствие, $N_-[i] \cap D = \{k\}$.

Лемма 5. *Для любого заранее заданного множества D и соответствующего вектора x^D решение $\bar{z}$ системы*

$$z_{ij} \leqslant x_i^D, \quad (i,j) \in A, \tag{9}$$

$$z_{ij} \leqslant 1 - x_j^D, \quad (i,j) \in A, \tag{10}$$

$$z_{ij} \geqslant \left(x_i^D - x_j^D\right), \quad (i,j) \in A, \tag{11}$$

$$z_{ij} = 0, \quad (i,j) \notin A, \tag{12}$$

относительно булевых переменных z_{ij} существует и единственно, при этом

$$\bar{z}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i,j) \in \{D \to \overline{D}\}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Докажем существование решения. Если в графе G отсутствует дуга (i,j), то из (12) следует, что $z_{ij} = 0$. Пусть дуга (i,j) в графе присутствует. При $x_i^D = x_j^D$ из неравенств (9) и (10) получаем, что $z_{ij} = 0$. При $x_i^D < x_j^D$, что возможно только при $x_i^D = 0$, из (9) снова следует, что $z_{ij} = 0$.

Пусть теперь $x_i^D > x_j^D$, что возможно только при $x_i^D = 1$, $x_j^D = 0$. Тогда соотношения (9)–(11) превращаются в следующие неравенства:

$$\begin{aligned} z_{ij} &\leqslant 1, \\ z_{ij} &\leqslant 1 - 0, \\ z_{ij} &\geqslant 1 - 0, \end{aligned}$$

что сразу даёт равенство $z_{ij} = 1$. Таким образом, имеем однозначно определённые

$$\bar{z}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i^D = 1,\ x_j^D = 0 \text{ и } (i,j) \in A, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Однако условия $x_i^D = 1$, $x_j^D = 0$ и $(i,j) \in A$ в совокупности и означают, что дуга (i,j) принадлежит разрезу $\{D \to \overline{D}\}$. Лемма 5 доказана.

Отметим, что без ограничения (11) данная система приведена в [3]. Однако в таком (сокращённом) виде значения z_{ij} соответствуют разрезу $\{D \to \overline{D}\}$ лишь в том случае, если они присутствуют в целевой функции на максимум со строго положительными весовыми коэффициентами. В то же время решение приведённой в данной работе системы всегда однозначным образом соответствует разрезу $\{D \to \overline{D}\}$.

Теорема 2. *Задача*

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w(i,j) z_{ij} \to \max \tag{14}$$

при ограничениях

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j \geqslant 1, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{15}$$

$$\sum_{j \in N_+[i]} y_{ij} - x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{16}$$

$$\sum_{j \in N_-[i]} x_j - x_k \leqslant N(1 - y_{ki}), \quad (k, i) \in A, \tag{17}$$

$$y_{ki} = 0, \quad (k, i) \notin A, \tag{18}$$

$$z_{ki} \leqslant x_k, \quad (k, i) \in A, \tag{19}$$

$$z_{ki} \leqslant 1 - x_i, \quad (k, i) \in A, \tag{20}$$

$$z_{ki} \geqslant x_k - x_i, \quad (k, i) \in A, \tag{21}$$

$$z_{ki} = 0, \quad (k, i) \notin A, \tag{22}$$

относительно булевых переменных x_i, y_{ki}, z_{ki} эквивалентна задаче о минимальном по включению доминирующем множестве с разрезом наибольшего веса (1)–(2). *При этом для множества D, определяемого вектором $x^D = \bar{x}$, верны следующие утверждения:*

$$D \in D_{\min}(G),$$
$$y_{ki} = 1 \Rightarrow N_-[i] \cap D = \{k\},$$
$$z_{ki} = 1 \Leftrightarrow (k, i) \in \{D \to \overline{D}\}.$$

Доказательство. Пусть $(\bar{x}_i, \bar{y}_{ki}, \bar{z}_{ki})$ — оптимальное решение задачи (14)–(22), D — множество, определяемое вектором $x^D = \bar{x}$. Ограничения (15)–(18) в силу леммы 4 обеспечивают минимальное доминирование для D. По лемме 5 ограничения (19)–(22) обеспечивают, что $\bar{z}_{ki} = 1$ тогда и только тогда, когда (k, i) принадлежит разрезу $\{D \to \overline{D}\}$, следовательно, выражения (14) и (1) эквивалентны.

В обратную сторону. Предположим, что минимальное доминирующее множество D — оптимальное решение задачи (1)–(2). Определим $\bar{x}_i$ как компоненты вектора x^D множества D, $\bar{y}_{ki}$ — согласно (8), а $\bar{z}_{ki}$ — согласно (13). Тогда из леммы 4 следует, что выбранные значения $\bar{x}_i, \bar{y}_{ki}$ удовлетворяют ограничениям (15)–(18), а из леммы 5 следует, что $\bar{z}_{ki}$ удовлетворяют (19)–(22), причём $\bar{z}_{ki}$ определяются единственно возможным образом, следовательно, выражение (14) для заданного D может принять одно единственное значение, совпадающее со значением выражения (1), и в силу единственности оно же будет максимальным. Значит, $(\bar{x}_i, \bar{y}_{ki}, \bar{z}_{ki})$ будет оптимальным решением задачи (14)–(22). Теорема 2 доказана.

Заключение

В рамках данной работы показано, что задача поиска минимального по включению доминирующего множества с разрезом наибольшего веса NP-полна в случае ориентированного графа.

Построенная модель в виде системы с $|V|+2|A|$ переменными и $2|V|+4|A|$ ограничениями вполне может уже сейчас использоваться в специализированных пакетах прикладных программ для расчётов на графах не очень высокой размерности.

Более того, после некоторого упрощения построенная ЦЛП-модель может быть применена и к задаче MAX MIN DOMINATING SET в её ориентированном варианте. Соответствующая система с $|V|+|A|$ переменными и $|V|+2|A|$ ограничениями приведена в [7], а доказательство вытекает непосредственно из лемм 3 и 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
2. **Karp R. M.** Reducibility among combinatorial problems // Complexity of Computer Computations. Proc. Symp. CCC (Yorktown Heights, USA, Mar. 20–22, 1972). New York: Plenum Press, 1972. P. 85–103.
3. **Ageev A., Hassin R., Sviridenko M.** A 0.5-approximation algorithm for max dicut with given sizes of parts // SIAM J. Discrete Math. 2001. Vol. 14, No. 2. P. 246–255.
4. **Lee J., Nagarajan V., Shen X.** Max-cut under graph constraints // Integer Programming and Combinatorial Optimization. Proc. 18th Int. Conf. (Liège, Belgium, June 1–3, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 50–62. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 9682).
5. **Cheston G. A., Fricke G., Hedetniemi S. T., Jacobs D. P.** On the computational complexity of upper fractional domination // Discrete Appl. Math. 1990. Vol. 27, No. 3. P. 195–207.
6. **Boria N., Della Croce F., Paschosdef V. Th.** On the max min vertex cover problem // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 196. P. 62–71.
7. **Симанчёв Р. Ю., Уразова И. В., Ворошилов В. В., Карпов В. В., Кораблёва А. А.** Выбор системы ключевых показателей экономической безопасности региона с использованием модели $(0, 1)$-программирования // Вестн. Омск. гос. ун-та. Сер. Экономика. 2019. Т. 17, № 3. С. 170–179.
8. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

Ворошилов Владимир Владимирович

Статья поступила
27 мая 2020 г.
После доработки —
19 июня 2020 г.
Принята к публикации
22 июня 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2020. Vol. 27, No. 4. P. 5–20

UDC 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2020.27.691

A MAXIMUM DICUT IN A DIGRAPH INDUCED BY A MINIMAL DOMINATING SET

V. V. Voroshilov

Dostoevsky Omsk State University,
55a Mir Avenue, 644077 Omsk, Russia
E-mail: `voroshil@gmail.com`

Abstract. Let $G = (V, A)$ be a simple directed graph and let $S \subseteq V$ be a subset of the vertex set V. The set S is called dominating if for each vertex $j \in V \setminus S$ there exist at least one $i \in S$ and an edge from i to j. A dominating set is called (inclusion) minimal if it contains no smaller dominating set. A dicut $\{S \to \overline{S}\}$ is a set of edges $(i, j) \in A$ such that $i \in S$ and $j \in V \setminus S$. The weight of a dicut is the total weight of all its edges. The article deals with the problem of finding a dicut $\{S \to \overline{S}\}$ with maximum weight among all minimal dominating sets. Illustr. 6, bibliogr. 8.

Keywords: directed graph, weighted graph, maximum dicut, inclusion minimal dominating set.

REFERENCES

1. **N. Christofides,** *Graph Theory: An Algorithmic Approach* (Academic Press, London, 1975; Mir, Moscow, 1978 [Russian]).
2. **R. M. Karp,** Reducibility among combinatorial problems, *Complexity of Computer Computations* (Proc. Symp. CCC, Yorktown Heights, USA, March 20–22, 1972) (Plenum Press, New York, 1972), pp. 85–103.
3. **A. Ageev, R. Hassin,** and **M. Sviridenko,** A 0.5-approximation algorithm for max dicut with given sizes of parts, *SIAM J. Discrete Math.* **14** (2), 246–255 (2001).
4. **J. Lee, N. Viswanath,** and **X. Shen,** Max-cut under graph constraints, *Programming and Combinatorial Optimization* (Proc. 18th Int. Conf., Liège, Belgium, June 1–3, 2016) (Springer, Cham, 2016), pp. 50–62 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9682).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **14** (4), 792–801 (2020), DOI 10.1134/S199047892004016X.

5. **G. A. Cheston, G. Fricke, S. T. Hedetniemi,** and **D. P. Jacobs,** On the computational complexity of upper fractional domination, *Discrete Appl. Math.* **27** (3), 195–207 (1990).
6. **N. Boria, F. Della Croce,** and **V. Th. Paschosdef,** On the max min vertex cover problem, *Discrete Appl. Math.* **196**, 62–71 (2015).
7. **R. Yu. Simanchev, I. V. Urazova, V. V. Voroshilov, V. V. Karpov,** and **A. A. Korableva,** Selection of the key-indicator system for the economic security of a region using a $(0, 1)$-programming model, *Vestn. Omsk. Univ., Ser. Ekonomika,* **17** (3), 170–179 (2019) [Russian].
8. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).

Vladimir V. Voroshilov

Received May 27, 2020
Revised June 19, 2020
Accepted June 22, 2020