ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2021. Т. 28, № 1. С. 15–47

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2021.28.685

ЭФФЕКТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О ВЗВЕШЕННОЙ ВЕРШИННОЙ РАСКРАСКЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДВУХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ

О. О. Развенская[a], *Д. С. Малышев*[b]

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия
E-mail: [a] `olga-olegov@yandex.ru`, [b] `dsmalyshev@rambler.ru`

Аннотация. Задача о взвешенной вершинной раскраске для заданного взвешенного графа состоит в том, чтобы минимизировать количество используемых цветов так, что для каждой вершины количество назначаемых ей цветов равно её весу и назначаемые множества цветов для любых смежных вершин не пересекаются. Для всех наследственных классов, определяемых двумя связными 5-вершинными порождёнными запретами, кроме четырёх случаев, известна вычислительная сложность варианта задачи о взвешенной вершинной раскраске с единичными весами. Для четырёх из шести попарных пересечений данных четырёх классов ранее была доказана разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске за полиномиальное от суммы весов вершин время. Для оставшихся двух таких пересечений данный факт устанавливается в настоящей работе. Библиогр. 17.

Ключевые слова: задача о взвешенной вершинной раскраске, наследственный класс, вычислительная сложность.

Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. неориентированные, непомеченные графы без петель и кратных рёбер. Замкнутое относительно изоморфизма и удаления вершин множество графов называется *наследственным классом графов.* Каждый наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{Y}$, и это записывается так: $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$. Графы

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 19–71–00005).

из класса $\mathcal{X}$ называются также *$\mathcal{Y}$-свободными.* Если $\mathcal{Y} = \{H\}$, то графы из $\mathcal{X}$ будем называть *H-свободными*, а не $\{H\}$-свободными.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, а $w\colon V \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ — весовая функция. Пара (G, w) называется *взвешенным графом. Вершинной раскраской* графа (G, w) называется произвольное отображение $c\colon V \to 2^{\mathbb{N}}$, для которого $|c(v)| = w(v)$ для любой вершины $v \in V$ и $c(u) \cap c(v) = \varnothing$ для любого ребра $uv \in E$. Элементы множества $\bigcup\limits_{v \in V} c(v)$ называются *цветами.* Предполагается, что вершины нулевого веса не окрашиваются, и поэтому их можно удалить из графа G. Использование нулевых весов обусловлено тем, что в работе будет предложена редукция взвешенных графов, состоящая в удалении специальных вершин и уменьшении весов некоторых других вершин с сохранением неотрицательности их весов. Это позволяет держать под контролем взвешенное хроматическое число.

Наименьшее количество цветов в вершинных раскрасках графа (G, w) называется его *взвешенным хроматическим числом* и обозначается через $\chi_w(G)$. *Задача о взвешенной вершинной раскраске* (далее кратко *задача* ВВР) для заданных взвешенного графа (G, w) и числа k состоит в том, чтобы определить, выполняется неравенство $\chi_w(G) \leqslant k$ или нет. Невзвешенный вариант (т. е. с единичными весами вершин) задачи ВВР называется *задачей о вершинной раскраске* (*задачей* ВР). Задачи ВР и ВВР являются классическими NP-полными задачами на графах [1].

Как обычно, через P_n, C_n и O_n обозначаются простой путь, простой цикл и пустой граф на n вершинах, а через $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой. Через $K_{2,3}^+$ обозначаем граф, получаемый добавлением ребра к графу $K_{2,3}$, инцидентного вершинам степени 3 этого графа. Граф W_4 получается из цикла с 4 вершинами добавлением новой вершины и всех рёбер, инцидентных добавленной вершине и вершинам цикла. Граф butterfly — результат отождествления двух вершин, принадлежащих двум треугольникам.

Задача ВР полиномиально разрешима для класса $\mathrm{Free}(\{H\})$, если H — порождённый подграф графа P_4 или графа $P_3 + P_1$ (т. е. дизъюнктного объединения графов P_3 и P_1), иначе она NP-полна в данном классе [2]. Однако полной классификации сложности задачи ВР получить не удаётся уже в случае пары запрещённых порождённых подграфов. Более того, для всех наследственных классов, определяемых запретами с не более чем 4 вершинами каждый, кроме трёх, известен вычислительный статус задачи ВР [3]. Некоторые недавние результаты о сложности задачи ВР в наследственных классах, определяемых запретами маленького размера, представлены в работах [4–15].

В работах [9–14] рассматривался вопрос о вычислительной сложности задачи ВР для двух связных 5-вершинных запрещённых порождённых

фрагментов. К настоящему времени сложностной статус задачи ВР известен для всех множеств запретов такого рода, кроме следующих четырёх:

- $\{K_{1,3}, \mathrm{butterfly}\}$,
- $\{P_5, H\}$, где $H \in \{K_{2,3}, K_{2,3}^{+}, W_4\}$.

Сложностной статус задачи ВР не удаётся прояснить ни для одного из данных четырёх классов. В работе [11] было показано, что задача ВР полиномиально разрешима для класса $\{P_5, K_{1,3}\}$-свободных графов. Следовательно, пересечение класса $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}, \mathrm{butterfly}\})$ с каждым из оставшихся трёх рассматриваемых классов даёт случай полиномиальной разрешимости задачи ВР. Нетрудно убедиться в том, что это остаётся справедливым для задачи ВВР и полиномиальной разрешимости относительно суммы весов вершин; этот факт доказывается в данной работе. В [15] рассматривался класс $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}, W_4\})$ и для него была доказана разрешимость задачи ВВР за полиномиальное от суммы весов вершин время. В данной работе мы рассматриваем классы $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^{+}\})$ и $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}^{+}, W_4\})$ и для их графов доказываем разрешимость задачи ВВР за полиномиальное от суммы весов вершин время. Из данных результатов следует, что задача ВР полиномиально разрешима в каждом из трёх упомянутых классов. Это вселяет уверенность в том, что задача ВР полиномиально разрешима в каждом из классов $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}\})$, $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}^{+}\})$, $\mathrm{Free}(\{P_5, W_4\})$. Авторы надеются, что их результат будет полезным при построении полиномиальных алгоритмов решения задачи ВР в данных классах.

1. Используемые обозначения

Пусть v — вершина в некотором графе. Для любого $k \geqslant 0$ через $N_k(v)$ обозначается множество вершин графа, расположенных в точности на расстоянии k от вершины v. Понятно, что $N_0(v) = \{v\}$, $N_1(v) = N(v)$ — окрестность вершины v. Для вершин $v_1, \ldots, v_k$ некоторого графа и некоторого подмножества V' его вершин примем обозначения

$$N_{V'}^{\cap}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = N(v_1) \cap N(v_2) \cap \cdots \cap N(v_k) \cap V',$$

$$N_{V'}^{\cup}(v_1, v_2, \ldots, v_k) = (N(v_1) \cup N(v_2) \cup \cdots \cup N(v_k)) \cap V',$$

$$N_{V'}^{-}(v_1, v_2) = (N(v_1) \setminus N(v_2)) \cap V'.$$

Если $k = 1$, то вместо $N_{V'}^{\cap}(v_1) = N_{V'}^{\cup}(v_1)$ пишем $N_{V'}(v_1)$, а $N_{V'}^{-}(v_1)$ означает множество $V' \setminus N(v_1)$. Если V' совпадает с множеством всех вершин графа, то вместо $N_{V'}^{-}(v_1, v_2)$ пишем $N^{-}(v_1, v_2)$.

Пусть G — граф и $A \subseteq V(G), B \subseteq V(G)$. Через $\overline{G}$ обозначается граф, дополнительный к G. Тогда $G(A)$ — подграф графа G, порождённый подмножеством вершин A, а $G \setminus A$ — результат удаления из графа G всех

элементов подмножества A. Подмножество A *вполне смежно* с подмножеством B, если каждая вершина из A смежна с каждой вершиной из B. Подмножество A *вполне несмежно* с подмножеством B, если никакая вершина из A не смежна ни с какой вершиной из B. Считаем, что пустое множество вершин и вполне смежно, и вполне несмежно с любым подмножеством вершин.

Независимым множеством графа называется любое подмножество попарно несмежных его вершин. *Кликой* графа называется любое подмножество попарно смежных его вершин.

2. Некоторое алгоритмическое обеспечение для построения эффективных алгоритмов решения задачи ВВР

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф. Подмножество $M \subseteq V$ называется *модулем графа* G, если для любой вершины из $V \setminus M$ она либо смежна со всеми элементами множества M, либо ни с одним из них. Модуль графа называется *тривиальным*, если он содержит только одну вершину графа или все его вершины, а иначе он называется *нетривиальным*. *Разделяющей кликой графа* называется такая его клика, при удалении которой увеличивается количество его компонент связности. Связный граф называется *атомарным*, если он не содержит ни нетривиальных модулей, ни разделяющих клик. Достаточно хорошо известен следующий результат (см., например, лемму 1 в [15]).

Лемма 1. *Для любого наследственного класса графов задача* ВВР *сводится за полиномиальное время к той же задаче для его атомарных графов.*

Анти-окрестностью вершины $v \in V$ назовём множество $V \setminus N(v)$, обозначаемое через $\overline{N(v)}$.

Лемма 2. *Пусть* (G, w) — *взвешенный граф, содержащий вершину* v *такую, что* $\overline{N(v)} = \{v, v_1, \dots, v_k\}$ *является независимым множеством. Тогда* $\chi_w(G) = \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$, *где* $w'(u) = w(u)$ *для любой вершины* $u \notin \overline{N(v)}$ *и* $w'(u) = \max(w(u) - w(v), 0)$ *для любой вершины* $u \neq v$, *принадлежащей множеству* $\overline{N(v)}$.

Доказательство. Так как $\overline{N(v)}$ независимо, любой цвет, используемый для v, может быть также использован для каждой вершины из $\overline{N(v)} \setminus \{v\}$ с сохранением допустимости раскраски и общего количества используемых цветов. Таким образом, достаточно рассматривать такие раскраски графа (G, w), в которых для любой вершины $u \in \overline{N(v)}$ некоторые из $\min(w(v), w(u))$ цветов для u совпадают с некоторыми из $\min(w(v), w(u))$ цветов для v. Удаление v из G и уменьшение $w(u)$ на

$\min(w(v), w(u))$ для каждого $u \in \overline{N(v)} \setminus \{v\}$ приводит к взвешенному графу $(G \setminus \{v\}, w')$, который может быть раскрашен в $\chi_w(G) - w(v)$ цветов. Следовательно, $\chi_w(G) \geqslant \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$. С другой стороны, любая раскраска $(G \setminus \{v\}, w')$ может быть дополнена до раскраски (G, w) путём использования новых $w(v)$ цветов для окрашивания вершины v и добавления любых новых $w(u) - w'(u)$ цветов для окрашивания каждой вершины $u \in \overline{N(v)} \setminus \{v\}$. Следовательно, $\chi_w(G) \leqslant \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$. Тем самым лемма 2 доказана.

Атомарный граф назовём *неприводимым*, если анти-окрестность каждой его вершины не является независимым множеством. Из лемм 1 и 2 следует справедливость следующего результата.

Лемма 3. *Для любого наследственного класса графов задача* ВВР *сводится за полиномиальное время к той же задаче для его неприводимых графов.*

Переборный аналог леммы 2 для случая, когда $\overline{N(v)} \setminus \{v\}$ является кликой, представлен в следующем очевидном утверждении.

Лемма 4. *Пусть (G, w) — взвешенный граф, содержащий вершину v такую, что $\overline{N(v)} \setminus \{v\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ является кликой. Пусть Ω — совокупность таких назначений w' весов вершинам графа $G \setminus \{v\}$, что*

- *$w'(u) = w(u)$ для любой вершины $u \notin \overline{N(v)}$,*
- *для некоторых целых неотрицальных чисел $w_1, w_2, \ldots, w_k$, в сумме дающих $w(v)$, имеем $w'(v_i) = \max(w(v_i) - w_i, 0)$ для любого $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Тогда $\chi_w(G) = \min\limits_{w' \in \Omega} \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную оптимальную вершинную раскраску c графа (G, w). Для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$ обозначим через w_i количество общих цветов у вершин v и v_i. Можно считать, что $w_1 + w_2 + \cdots + w_k = w(v)$, иначе цвета из $c(v) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} c(v_i)$ можно использовать для окрашивания $v_1, v_2, \ldots, v_k$ без потери оптимальности c. Удалим v из G, затем для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$ вес вершины v_i заменим на $\max(w(v_i) - w_i, 0)$ и получим некоторый элемент $w^* \in \Omega$. Ясно, что

$$\chi_w(G) = \chi_{w^*}(G \setminus \{v\}) + w(v) \geqslant \min_{w' \in \Omega} \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v).$$

Теперь рассмотрим оптимальную вершинную раскраску для графа $(G \setminus \{v\}, w^{**})$, где $w^{**} = \arg\min\limits_{w' \in \Omega} \chi_{w'}(G \setminus \{v\})$, и соответствующие целые неотрицательные $w_1, w_2, \ldots, w_k$, в сумме дающие $w(v)$. Эта раскраска задаёт частичную вершинную раскраску графа (G, w). Для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$ вес вершины v_i заменим на $w(v_i)$, использовав w_i новых цветов.

Считаем, что для разных v_i и v_j множества их новых цветов не пересекаются. Новые $w(v)$ цветов используем для окрашивания вершины v. Тем самым имеем

$$\chi_w(G) \leqslant \chi_{w^{**}}(G \setminus \{v\}) + w(v) = \min_{w' \in \Omega} \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v).$$

Значит, $\chi_w(G) = \min\limits_{w' \in \Omega} \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$. Лемма 4 доказана.

Число решений уравнения $w_1 + w_2 + \cdots + w_k = w(v)$ в целых неотрицательных числах равно $\binom{k}{w(v)+k-1}$. Следовательно, задача ВВР для пары (G, w) сводится к $\binom{k}{w(v)+k-1}$ задачам ВВР, каждая на графе $G\setminus\{v\}$, причём переход к каждой такой задаче выполняется за полиномиальное время.

Для взвешенного графа $(G' = (V', E'), w')$, где $V' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$, определим операцию *юнитизации весов*. Результатом данной операции будет граф $G_{w'}$ с множеством вершин, разбитым на клики $Q_1, \ldots, Q_n$, где $|Q_i| = w'_i$ для любого $1 \leqslant i \leqslant n$. Для любых i и j клика Q_i вполне смежна (соответственно вполне несмежна) с Q_j тогда и только тогда, когда $v'_i v'_j \in E'$ (соответственно $v'_i v'_j \notin E'$). Будем говорить, что операция юнитизации весов *сохраняет класс графов* $\mathcal{X}$, если для любых графа $G' \in \mathcal{X}$ и весовой функции w' справедливо $G_{w'} \in \mathcal{X}$. Нетрудно, например, проверить, что класс $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\{P_5, K_{1,3}\})$ сохраняется при юнитизации весов. Очевидно, что справедлива

Лемма 5. *Для любого класса графов, сохраняемого при юнитизации весов, задача* ВВР *сводится за полиномиальное от суммы весов вершин время к задаче* ВР *для графов из того же класса.*

В [14, лемма 11] доказана

Лемма 6. *Для любого фиксированного числа $C > 0$ существует такое $C' > 0$, что задача* ВВР *для графа $(G = (V, E), w)$ с $|V| \leqslant C$ может быть решена за время $O\big(\big(\sum\limits_{v \in V} w(v)\big)^{C'}\big)$.*

В [15] (см. лемму 10 в [14]) была доказана

Лемма 7. *Для любого O_3-свободного графа $(G = (V, E), w)$ задача* ВВР *может быть решена за время $O\big(\big(\sum\limits_{v \in V} w(v)\big)^3\big)$.*

Граф называется *графом Бержа*, если он принадлежит классу

$$\mathrm{Free}(\{C_{2i+1} \mid i \geqslant 1\} \cup \{\overline{C}_{2i+1} \mid i \geqslant 1\}).$$

Граф называется *совершенным*, если его хроматическое и кликовое числа (т. е. взвешенное хроматическое число для единичного набора весов

и размер наибольшей клики) равны и это верно для любого его порождённого подграфа. В [16] доказано, что граф совершенный тогда и только тогда, когда он является графом Бержа. Известна (см. [17])

Лемма 8. *Задача* ВВР *полиномиально разрешима для совершенных графов.*

3. Эффективная разрешимость задачи ВВР для $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободных графов

Опишем общую схему нашего алгоритма для $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободных графов. По лемме 3 можно рассматривать только неприводимые графы из класса $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\})$. В данном разделе будет доказано, что каждый такой граф $G = (V, E)$ либо имеет не более 10 вершин, либо имеет не более четырёх порождённых подграфов, каждый из которых изоморфен $K_{1,3}$. В первом случае к (G, w) применяется полиномиальный от суммы весов вершин алгоритм, существующий по лемме 6. В случае, когда $|V| \geqslant 11$ и имеется вершина v с условием $G(N(v)) \notin \mathrm{Free}(\{O_3\})$, к v применяется элиминация из леммы 4, которая оказывается полиномиальной, так как $N(v) \setminus \{v\}$ будет кликой на не более чем трёх вершинах. Следовательно, задача ВВР для $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободных графов сводится за полиномиальное от суммы весов вершин время к той же задаче для $\{P_5, K_{1,3}\}$-свободных графов. Задача ВВР разрешима за полиномиальное от суммы весов вершин время для $\{P_5, K_{1,3}\}$-свободных графов, поскольку задача ВР полиномиально разрешима в $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{1,3}\})$ (см. [11]) и операция юнитизации весов сохраняет класс $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{1,3}\})$.

Пусть $G = (V, E)$ — неприводимый $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободный граф, содержащий вершину v такую, что $V' = N(v)$ содержит независимое множество $I = \{a, b, c\}$. Множество $N_2(v)$ переобозначим через V''.

Лемма 9. *Множество $N_3(v)$ пусто.*

Доказательство. Предположим, напротив, что существует вершина $x \in N_3(v)$, смежная с вершиной $y \in V''$. Заметим, что $I \nsubseteq N(y)$, так как иначе I вместе с v, y порождают $K_{2,3}$. Тогда $N_{V'}^-(y)$ вполне смежно с $N_{V'}(y)$, иначе вершина из $N_{V'}^-(y)$ и несмежная с ней вершина из $N_{V'}(y)$ вместе с v, x, y порождают P_5. Значит, $N_I(y) \neq \varnothing$, иначе I, вершина v и произвольная вершина из $N_{V'}(y)$ порождают $K_{2,3}^+$. Получаем, что $I \nsubseteq N(y)$ и $N_I(y) \neq \varnothing$, т. е. I не может быть независимым; противоречие. Значит, $N_3(v) = \varnothing$. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Для любых двух смежных вершин $x, y \in V''$ имеет место либо $N_{V'}^{\cup}(x, y) = V'$, либо $N_{V'}(x) = N_{V'}(y)$.*

Доказательство. Предположим противное. Переобозначим множество $V' \setminus N^{\cup}_{V'}(x,y)$ через N', множество $N^{-}_{V'}(x,y) \cup N^{-}_{V'}(y,x)$ через N'', а множество $N^{\cap}_{V'}(x,y)$ через N'''. По нашему предположению $N' \neq \varnothing$ и $N'' \neq \varnothing$. Тогда N' вполне смежно с N'', так как иначе x, y, v, элемент множества N' и несмежный с ним элемент множества N'' порождают P_5. Ввиду этого обстоятельства и так как I — независимое множество, $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}, K^{+}_{2,3}\})$, то $I \not\subseteq N(x)$, $I \not\subseteq N(y)$ и $I \not\subseteq N'$, $I \not\subseteq N''$. Следовательно, либо $I \cap N' \neq \varnothing$, либо каждое из множеств $N^{-}_{V'}(x,y)$, $N^{-}_{V'}(y,x)$, N''' содержит по одному из элементов множества I.

Предположим, что $I \cap N' \neq \varnothing$. Можно считать, что $a \in I \cap N'$ и $u \in N^{-}_{V'}(x,y)$. Тогда, очевидно, $ua \in E$, $b, c \in N'''$ и u смежна хотя бы с одной из вершин b и c. Вершина u не может быть одновременно смежна с b и c, так как иначе a, b, c, v, u порождают $K^{+}_{2,3}$, поэтому можно считать, что $ub \in E$, $uc \notin E$. Следовательно, a, u, b, y, c порождают P_5. Значит, $I \cap N' = \varnothing$.

Предположим, что каждое из множеств $N^{-}_{V'}(x,y)$, $N^{-}_{V'}(y,x)$, N''' содержит по одному из элементов множества I. Можно считать, что

$$a \in N^{-}_{V'}(x,y), \quad b \in N^{-}_{V'}(y,x), \quad c \in N''', \quad w \in N'.$$

Понятно, что $wa \in E, wb \in E$. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{K^{+}_{2,3}\})$, то $wc \notin E$. Тогда b, w, a, x, c порождают P_5; противоречие. Значит, исходное предположение неверно. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Для любых двух смежных вершин $x, y \in V''$ имеет место $N^{\cup}_{V'}(x,y) = V'$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $N_{V'}(x) = N_{V'}(y)$ и $N_{V'}(x) \subset V'$ по лемме 10. Обозначим через V^* множество вершин $z \in V''$ таких, что $N_{V'}(z) = N_{V'}(x)$. Через V^{**} обозначим множество вершин компоненты связности подграфа $G(V^*)$, содержащей x и y. Докажем, что V^{**} — нетривиальный модуль графа G.

Предположим, что V^{**} не является модулем в графе G. Тогда существуют такие смежные вершины $v_1 \in V^{**}$ и $v_2 \in V^{**}$ и такая вершина $v_3 \in V'' \setminus V^{**}$, что $v_1v_3 \notin E$ и $v_2v_3 \in E$. Ясно, что $v_3 \notin V^*$. Следовательно, $N^{\cup}_{V'}(v_2, v_3) = V'$ по лемме 10. Тем самым существует вершина $u \in V'$, смежная с v_3 и несмежная с v_2. Тогда v_1, v_2, v_3, u, v порождают P_5. Таким образом, V^{**} — нетривиальный модуль графа G. Следовательно, исходное предположение неверно. Лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Если $V' = I$, то $|V| \leqslant 10$.*

Доказательство. Так как граф G $K_{2,3}$-свободный, ни одна из вершин множества V'' не смежна сразу со всеми вершинами множества $V' = I$. Предположим, что $z' \in N^{\cap}(a,b) \setminus \{v\}$ и $z'' \in V'' \setminus N^{\cap}(a,b)$. Если

$z''c \in E$, то $z'z'' \in E$, так как иначе z'', c, v, a или b, z' порождают P_5. Если же $z''c \notin E$, то z'' должна быть смежна или с a, или с b, но не с ними обеими одновременно. Тогда $z'z'' \notin E$, так как иначе c, v, a или b, z', z'' порождают P_5. Следовательно, $N^{\cap}(a,b) \setminus \{v\}$ — модуль графа G, поэтому он содержит не более одной вершины. Аналогично каждое из множеств $N^{\cap}(a,c) \setminus \{v\}$ и $N^{\cap}(b,c) \setminus \{v\}$ содержит не более одной вершины.

Предположим, что $N(z') \cap I = \{a\}$ и $z'' \in V''$, $N(z'') \cap I \neq \{a\}$. Ранее показано, что если $z'' \in N^{\cap}(a,b) \cup N^{\cap}(a,c)$, то $z'z'' \notin E$. Если z'' несмежна с a, то $z'z'' \in E$, так как иначе z', a, v, b или c, z'' порождают P_5. Следовательно, $N(a) \setminus N^{\cup}(b,c)$ является модулем в графе G и содержит не более одной вершины. Аналогично $|N(b) \setminus N^{\cup}(a,c)| \leqslant 1$ и $|N(c) \setminus N^{\cup}(a,b)| \leqslant 1$. Значит, $|V| \leqslant 10$. Лемма 12 доказана.

Далее предполагаем, что v имеет окрестность наибольшей мощности среди всех вершин графа G, содержащих три попарно несмежные вершины, и $|V'| \geqslant 4$.

Лемма 13. *Множество V'' является кликой с двумя или тремя вершинами и вершина степени 3 каждого порождённого подграфа $K_{1,3}$ графа G принадлежит множеству $V'' \cup \{v\}$.*

Доказательство. Пусть x и y — произвольные смежные вершины из множества V''. Данные вершины существуют, так как $\overline{N(v)}$ не должно быть независимым множеством. Введём обозначения

$$N_1 = N^{-}_{V'}(x,y), \quad N_2 = N^{-}_{V'}(y,x), \quad N_3 = N^{\cap}_{V'}(x,y).$$

По лемме 11 $N^{\cup}_{V'}(x,y) = V'$. Отсюда ввиду независимости множества I и $K_{2,3}$-свободности графа G следует, что $I \not\subseteq N(x)$, $I \not\subseteq N(y)$ и $N_1 \neq \varnothing$, $N_2 \neq \varnothing$. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}, K^{+}_{2,3}\})$, для любых несмежных вершин $x' \in V''$ и $y' \in V''$ имеем $|N^{\cap}_{V'}(x',y')| \leqslant 1$.

Покажем, что не существует вершины из множества V'', смежной только с одной из вершин x и y. Предположим, что вершина $z \in V''$ смежна с x и несмежна с y. Чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порождённого z, x, y, вершиной из N_2 и вершиной v, необходимо, чтобы $\{z\}$ было вполне смежно с N_2. Следовательно, N_2 содержит ровно один элемент a', причём $\{z\}$ вполне несмежно с $(N^{\cap}_{V'}(y,x) \setminus \{a'\})$. Если $\{z\}$ не вполне смежно с N_1, то $N(x)$ содержит три попарно несмежные вершины (y, z и некоторый элемент множества N_1), причём $|N(x)| > |V'|$. Ясно, что $I \not\subseteq N(z)$. Отсюда, поскольку $I \not\subseteq N(x)$, $I \not\subseteq N(y)$, можно предполагать, что $a' = a$, $b \in N_3$, $c \in N_1$. Следовательно, граф G содержит P_5, порождённый вершинами c, z, a, y, b. Значит, наше предположение о существовании вершины z неверно. Таким образом, $G(V'')$ является P_3-свободным графом, т. е. дизъюнктной суммой полных графов.

Предположим теперь, что z — вершина из множества V'', не смежная ни с x, ни с y. Рассмотрим два случая: $N(z) \cap (N_1 \cup N_2) = \varnothing$ и $N(z) \cap (N_1 \cup N_2) \neq \varnothing$. Предположим, что $N(z) \cap (N_1 \cup N_2) = \varnothing$, тогда $N(z) \cap N_3 \neq \varnothing$. Ясно, что $|N(z) \cap N_3| = 1$. Поскольку $N(z) \cap N_3$ не является разделяющей кликой графа G, существует вершина $z' \in V''$, смежная с z. По лемме 11 $N^{\cup}_{V'}(z, z') = V'$. Следовательно, $N(z') \cap (N_1 \cup N_2) \neq \varnothing$. Вершина z' не смежна ни с x, ни с y, так как иначе x, y, z, z' должны образовывать клику, что невозможно. Заменив z' на z, можно рассматривать только случай, когда $N(z) \cap (N_1 \cup N_2) \neq \varnothing$.

Предположим, что $N(z) \cap N_2 \neq \varnothing$; в случае $N(z) \cap N_1 \neq \varnothing$ рассуждения аналогичны. Ясно, что $|N^{\cap}_{V'}(x, z)| \leqslant 1$ и $|N^{\cap}_{V'}(y, z)| \leqslant 1$, поэтому $N(z) \cap N_2 = \{a'\}$. Можно считать, что $N(z) \cap N_1 = \{b'\}$, так как иначе должна существовать вершина $z'' \in V''$, смежная с z, поскольку $\{a'\}$ не является разделяющей кликой. Тогда $N^{\cup}_{V'}(z, z'') = V'$ по лемме 11, поэтому $V' \setminus \{a'\} \subseteq N(z'')$. Ясно, что $z''x \notin E, z''y \notin E$. Поскольку $|V'| \geqslant 4$, то либо $|N^{\cap}_{V'}(z'', x)| \geqslant 2$, либо $|N^{\cap}_{V'}(z'', y)| \geqslant 2$. Следовательно, G либо содержит порождённый $K_{2,3}$, либо содержит порождённый $K^+_{2,3}$. Значит, можно считать, что $N(z) \cap N_1 = \{b'\}$, поэтому $N(z) \cap N_3 = \varnothing$.

Поскольку $I \nsubseteq N(x)$, $I \nsubseteq N(y)$, из соображений симметрии можно считать, что $N_I(x) = \{b, c\}$, $a \in N_2$ и $c \in N_1$. Множество $\{a'\}$ вполне смежно с $N_{V'}(x) \setminus \{b'\}$, так как иначе вершины z, a', v, некоторая вершина из $N_{V'}(x) \setminus \{b'\}$, а также x порождают P_5. Тем самым $a'b \in E$ или $a'c \in E$, и поэтому $a' \neq a$. Предположим, что $b \in N_1$. Тогда $b' \in \{b, c\}$, иначе a', x, y, b, c порождают подграф $K_{2,3}$. Можно считать, что $b' = c$. Следовательно, z, c, x, y, a порождают P_5. Предположим, что $b \in N_3$. Если $b' = c$, то z, c, x, y, a порождают P_5. Предположим, что $b' \neq c$. Тогда $a'b \in E$, $a'c \in E$. Тогда $b'a \in E$, иначе z, b', x, y, a порождают P_5. Вершины a' и a не должны быть смежными, иначе v, a', a, b, c порождают $K^+_{2,3}$. Вершина b' смежна хотя бы с одной из вершин a' и b, так как иначе a, b', z, a', b порождают P_5. Если $b'b \in E$, то $b'c \notin E$, иначе v, b', a, b, c порождают $K^+_{2,3}$. Тогда $b'a' \in E$, иначе a, b', b, a', c порождают P_5, и a', b', c, x, y порождают $K_{2,3}$. Если же $b'a' \in E, b'b \notin E$, то $b'c$, так как иначе x, v, b, b', c порождают $K_{2,3}$. Тогда c, b', a, y, b порождают P_5.

Итак, каждая вершина множества $V'' \setminus \{x, y\}$ смежна и с x, и с y. Отсюда, поскольку $G(V'')$ — дизъюнктное объединение полных графов, множество V'' является кликой. По лемме 11 каждая из вершин a, b, c смежна не менее чем с $|V''| - 1$ вершинами клики V'', поэтому если $|V''| \geqslant 4$, то в V'' существует вершина, одновременно смежная с вершинами a, b, c. Следовательно, в этом случае G содержит порождённый подграф $K_{2,3}$. Тем самым $|V''| \leqslant 3$.

Предположим, что некоторый порождённый подграф $K_{1,3}$ графа G образован вершинами v', v'_1, v'_2, v'_3, причём вершина $v' \in V'$ имеет в этом

подграфе $K_{1,3}$ степень 3. Тогда очевидно, что $\{v_1', v_2', v_3'\} \nsubseteq V'$, так как иначе v, v', v_1', v_2', v_3' порождают подграф $K_{2,3}^+$. Поскольку V'' является кликой, множеству V'' принадлежит ровно одна из вершин v_1', v_2', v_3'. Можно считать, что $v_1' = x$, и тогда $v_2', v_3' \in N_2$. В этом случае вершины v', x, y, v_2', v_3' порождают либо $K_{2,3}$ (если $v' \in N_1$), либо $K_{2,3}^+$ (если $v' \in N_3$); противоречие. Лемма 13 доказана.

Теорема 1. *Задача* ВВР *разрешима за полиномиальное от суммы весов вершин время в классе* $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$*-свободных графов.*

Доказательство. Задача ВР полиномиально разрешима для $\{P_5, K_{1,3}\}$-свободных графов (см. [11, лемма 9]). Операция юнитизации весов сохраняет класс $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{1,3}\})$. Следовательно, по лемме 5 задача ВВР разрешима за полиномиальное от суммы весов вершин время в классе $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{1,3}\})$. Тем самым можно рассматривать только графы из $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\})$, содержащие порождённый подграф $K_{1,3}$ (принадлежность графа классу $\mathrm{Free}(\{K_{1,3}\})$, очевидно, проверяется за полиномиальное время). По леммам 3 и 6 можно рассматривать только такие неприводимые графы с не менее чем 11 вершинами. Леммы 12 и 13 гарантируют, что в каждом данном графе имеется не более чем 4 вершины, которые могут быть вершинами степени 3 их порождённых подграфов $K_{1,3}$. Анти-окрестности этих вершин за вычетом самих вершин порождают клики на не более чем трёх вершинах. К каждой такой вершине v можно применить элиминацию из леммы 4, причём за полиномиальное от суммы весов вершин время. Таким образом, задача ВВР в классе $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\})$ сводится за полиномиальное от суммы весов вершин время к той же задаче в классе $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{1,3}\})$. Следовательно, данная теорема справедлива. Теорема 1 доказана.

4. Эффективная разрешимость задачи ВВР для $\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\}$-свободных графов

Опишем общую схему нашего алгоритма для $\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\}$-свободных графов. По лемме 1 достаточно рассматривать только атомарные графы из $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\})$. В этом разделе будет установлено, что каждый такого рода граф либо O_3-свободен, либо совершенен, либо имеет не более 161 вершины. Следовательно, по леммам 6–8 существует полиномиальный от суммы весов вершин алгоритм, решающий задачу ВВР для $\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\}$-свободных графов.

Пусть H — атомарный $\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\}$-свободный граф, который содержит порождённый подграф $\overline{C}_7$. Поскольку удобнее работать с дополнением графа H, рассмотрим граф $G = \overline{H}$, в котором имеется порождённый подграф C_7.

Лемма 14. *Граф $G = (V, E)$ изоморфен 7-циклу или содержит порождённый 5-цикл.*

Доказательство. Предположим, что граф G C_5-свободен. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{\overline{W}_4\})$, любая вершина G смежна с некоторыми двумя вершинами цикла $C_7 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$. Далее индексы вершин данного цикла берём по модулю 7. Пусть $u \notin V(C_7)$ и $\{v_i, v_{i+1} \ldots, v_{i+k}\}$ — наибольшее по количеству множество соседей u на 7-цикле, состоящее из последовательных вершин цикла. Предположим, что $1 \leqslant k \leqslant 5$. Тем самым $uv_{i-1} \notin E$ и $uv_{i+k+1} \notin E$, иначе получаем противоречие с выбором множества. Имеем $uv_{i-2} \notin E$ и $uv_{i+k+2} \notin E$, иначе $v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, u$ или $v_{i+k+2}, v_{i+k+1}, v_{i+k}, v_{i+k-1}, u$ порождают $\overline{P}_5$, поэтому $k \neq 5$. Имеем $uv_{i-3} \notin E$ и $uv_{i+k+3} \notin E$, иначе $v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, u$ или $v_{i+k+3}, v_{i+k+2}, v_{i+k+1}, v_{i+k}, u$ порождают C_5, поэтому $k \neq 4$. Следовательно, $k \in \{1, 2, 3\}$ и $N_{V(C_7)}(u) = \{v_i, v_{i+1} \ldots, v_{i+k}\}$. Тем самым граф G не $\overline{K}^{+}_{2,3}$-свободный. Значит, либо $k = 7$, либо u не может быть смежна с двумя последовательными вершинами 7-цикла. Поскольку G C_5-свободный, в последнем случае $N_{V(C_7)}(u) = \{v_i, v_{i+2}\}$ для некоторого i.

Напомним, что граф H не содержит нетривиальных модулей. Следовательно, их не содержит граф G. Так как G $\overline{P}_5$-свободен, каждая вершина, смежная со всеми вершинами 7-цикла, должна быть смежна с каждой вершиной, имеющей ровно двух соседей на 7-цикле. Предположим, что $u \notin V(C_7)$, $N_{V(C_7)}(u) = \{v_i, v_{i+2}\}$ и множество $\{u, v_{i+1}\}$ не является модулем. Тогда существует вершина $u' \notin V(C_7)$, $N_{V(C_7)}(u') = \{v_j, v_{j+2}\}$, для которой $uu' \in E$, $v_{i+1}u' \notin E$ или $uu' \notin E$, $v_{i+1}u' \in E$. Второй случай возможен только при $j = i \pm 1$, но тогда $u, v_i, u', v_{i+3}, v_{i+5}$ или $u, v_{i-1}, u', v_{i+2}, v_{i+4}$ порождают подграф $\overline{W}_4$. Рассмотрим первый случай. Здесь $j \notin \{i-1, i+1\} \cup \{i-2, i+2\}$, иначе вершины $u, u', v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}$ или $u, u', v_{i-2}, v_{i-1}, v_i$ порождают подграф $\overline{P}_5$. Вместе с тем $j \notin \{i-3, i+3\}$, иначе $v_{i-3}, u', u, v_{i+2}, v_{i+3}$ или $v_{i-1}, v_i, u, u', v_{i+5}$ порождают подграф C_5. Более того, $j \neq i$, иначе вершины $u, u', v_{i+1}, v_{i+3}, v_{i+4}$ порождают подграф $\overline{W}_4$; противоречие. Значит, не существует вершины, не принадлежащей 7-циклу и имеющей ровно двух соседей на нём. Тем самым множество $V(C_7)$ является модулем. Значит, G изоморфен 7-циклу. Лемма 14 доказана.

Понятно, что каждый $\{P_5, W_4, C_5, \overline{C}_7\}$-свободный граф совершенен. Тем самым каждый $\{P_5, K^{+}_{2,3}, W_4\}$-свободный граф, не содержащий порождённых подграфов C_5 и $\overline{C}_7$, будет совершенным. Таким образом, по леммам 1 и 8 задача ВВР разрешима за полиномиальное время для данных графов. Имея в виду леммы 6 и 14, остаётся рассмотреть только $\{P_5, K^{+}_{2,3}, W_4\}$-свободные графы, содержащие порождённый C_5. Это,

по сути, и составляет основное содержание данного раздела, где практически все леммы нацелены на нахождение точной структуры возникающих графов. Таких лемм довольно много, и все они имеют технический характер.

Пусть $G = (V, E)$ — атомарный $\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\}$-свободный граф, в котором имеется порождённый цикл $C = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Всюду далее индексы вершин данного цикла понимаются по модулю 5. Применительно к графу G введём следующие обозначения:

- $V_i = \{x \notin V(C) \mid N_{V(C)}(x) = \{v_i, v_{i+2}\}\}$,
- $V_i' = \{y \notin V(C) \mid N_{V(C)}(y) = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}\}$,
- $V_i'' = \{z \notin V(C) \mid N_{V(C)}(z) = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}\}\}$,
- $V_i''' = \{t \notin V(C) \mid N_{V(C)}(t) = \{v_i, v_{i+2}, v_{i+3}\}\}$,
- V'''' — множество вершин, каждая из которых смежна со всеми вершинами $V(C)$,
- $S = V \setminus \Big(V(C) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{5} (V_i \cup V_i' \cup V_i'' \cup V_i''') \cup V''''\Big)$,
- $\widehat{V}$ — множество вершин, не принадлежащих C и одновременно имеющих соседей и на C, и в S.

Ясно, что каждая вершина, не принадлежащая C и имеющая соседа на нём, принадлежит множеству $\bigcup\limits_{i=1}^{5} (V_i \cup V_i' \cup V_i'' \cup V_i''') \cup V''''$. Помня о том, что G является $\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\}$-свободным графом, нетрудно убедиться в том, что верна

Лемма 15. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *При любом i множества V_i', V_i'' и V'''' являются кликами.*

(ii) *Множество $\bigcup\limits_{i=1}^{5} (V_i \cup V_i')$ вполне несмежно с S.*

(iii) *При любом i имеем*

(1) *V_i вполне смежно с $V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup V_{i+1}'''$ и вполне несмежно с*

$$V_i' \cup V_{i+2}' \cup V_{i+3}' \cup V_{i-1}'' \cup V_i'' \cup V'''',$$

причём $V_{i-1}' \cup V_{i+1}' \cup V_{i+1}'' \cup V_{i+3}'' = \varnothing$, если $V_i \neq \varnothing$;

(2) *V_i' вполне смежно с*

$$V_{i-1}' \cup V_{i+1}' \cup V_{i-1}'' \cup V_i'' \cup V_{i+1}''' \cup V_{i+3}''' \cup V_{i+4}''' \cup V''''$$

и вполне несмежно с $V_{i+2}'' \cup V_i''' \cup V_{i+2}'''$, причём $V_{i+1}''' = \varnothing$, если $V_i' \neq \varnothing$;

(3) *V_i'' вполне смежно с $V_{i-1}'' \cup V_{i+1}'' \cup V''''$ и вполне несмежно с*

$$V_{i-2}'' \cup V_{i+2}'' \cup V_i''' \cup V_{i-2}''',$$

причём $V_{i+1}''' \cup V_{i+2}''' \cup V'''' = \varnothing$, если $V_i'' \neq \varnothing$;

(4) *V_i''' вполне смежно с $V_{i-1}''' \cup V_{i+1}'''$ и вполне несмежно с V''''.*

Лемма 16. *При любом i множество V_i независимо.*

Доказательство. Предположим, что V_i не независимо. Обозначим через $H^* = (V^*, E^*)$ произвольную компоненту связности графа $G(V_i)$, имеющую не менее двух вершин. Из леммы 15 (пп. (ii) и (iii)(1)) следует, что элементы множества V^* могут иметь соседей только в множестве

$$V^* \cup \{v_i, v_{i+2}\} \cup V''_{i+2} \cup \bigcup_{\substack{j=1,\\ j\neq i+1}}^{5} V'''_i.$$

Так как V^* не является нетривиальным модулем в графе G, существуют такие смежные вершины $a, b \in V^*$ и $c \notin V_i$, что $ac \notin E$, $bc \in E$. Ясно, что $c \in V''_{i+2} \cup \bigcup_{\substack{j=1,\\ j\neq i+1}}^{5} V'''_i$. Если $c \in V''_{i+2}$, то v_i, v_{i+2}, a, b, c порождают W_4. Если $c \in V'''_{i+3} \cup V'''_{i+4}$, то $a, b, c, v_{i+3}, v_{i+4}$ порождают P_5. Если $c \in V'''_i \cup V'''_{i+2}$, то v_i, v_{i+2}, a, b, c порождают W_4; противоречие. Значит, V_i — независимое множество. Лемма 16 доказана.

В следующих четырёх леммах рассматриваем ситуацию, когда $S = \varnothing$, доказывая, что либо $G \in \mathrm{Free}(\{O_3\})$, либо G имеет мало вершин.

Лемма 17. *Если $\bigcup_{i=1}^{5} (V_i \cup V'''_i) \cup S = \varnothing$, то G O_3-свободный.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\{a, b, c\}$ — независимое множество графа G. Понятно, что $|C \cap \{a, b, c\}| \leqslant 1$. Если $v_i \in \{a, b, c\}$, скажем, $v_i = a$, то по лемме 15 (пп. (i), (iii)(2) и (iii)(3)) вершины b и c смежны. Оттуда же следует, что $V'''' \cap \{a, b, c\} = \varnothing$, поэтому $C \cap \{a, b, c\} = \varnothing$ и два элемента множества $\{a, b, c\}$ принадлежат одному из множеств $\bigcup_{i=1}^{5} V'_i$ и $\bigcup_{i=1}^{5} V''_i$. Пусть это будут вершины a и b. Если они принадлежат первому множеству, то по лемме 15 (пп. (i) и (iii)(2)) можно предполагать, что $a \in V'_i$ и $b \in V'_{i+2}$. Отсюда и из пп. (i), (iii)(2), (iii)(3) леммы 15 следует, что $c \in V''_{i+3}$, поэтому $a, v_{i+1}, c, v_{i+3}, b$ порождают P_5. Если же $a, b \in \bigcup_{i=1}^{5} V''_i$, то по лемме 15 (пп. (i) и (iii)(3)) можно считать, что $a \in V''_i, b \in V''_{i+2}$. По пп. (i), (iii)(2) и (iii)(3) леммы 15 имеем $c \in V'_{i+4}$. Тогда $a, v_{i+1}, c, v_{i+4}, b$ порождают P_5. Значит, исходное предположение неверно. Лемма 17 доказана.

Лемма 18. *Если $S = \varnothing$ и для некоторого i вершины $a \in V'_i$ и $b \in V'_{i+2}$ смежны, то либо $G \in \mathrm{Free}(\{O_3\})$, либо $|V| \leqslant 17$.*

Доказательство. Из п. (iii)(2) леммы 15 и W_4-свободности графа G следует, что $V'''' = \varnothing$. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, по п. (iii)(2) леммы 15 множество V_i''' является кликой.

По п. (iii)(1) леммы 15 имеем $V_{i+1} = V_{i+3} = V_{i+4} = \varnothing$. Вместе с тем, если существует вершина $c \in V_i \cup V_{i+2}$, то она не смежна ни с a, ни с b по п. (iii)(1) леммы 15, но тогда либо v_{i+3}, b, a, v_i, c, либо $v_{i+1}, a, b, v_{i+4}, c$ порождают P_5. Следовательно, $V_i = V_{i+2} = \varnothing$.

По п. (iii)(2) леммы 15 имеем $V_{i+1}''' = V_{i+3}''' = \varnothing$. Ясно, что не существует вершины $c \in V_{i+2}'''$, иначе $ac \notin E$ и $bc \notin E$ по п. (iii)(2) леммы 15 и вершины c, v_i, a, b, v_{i+3} порождают P_5. По лемме 15 (пп. (iii)(2) и (iii)(4)) и W_4-свободности графа G либо $V_i''' = \varnothing$, либо $V_{i+4}''' = \varnothing$.

Из соображений симметрии и леммы 17 можно считать, что $V_i''' \neq \varnothing$. Следовательно, $V_{i+4}''' = \varnothing$, а также $V_{i+3}'' = V_{i+4}'' = \varnothing$ по п. (iii)(3) леммы 15. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, по п. (iii)(2) леммы 15 множество V_i''' является кликой. Если существует вершина $c \in V_i''$, то $ac \in E$ и $\{c\}$ вполне несмежно с V_i''' по п. (iii)(2) леммы 15. Вершины b и c должны быть смежными, иначе $a, b, c, v_{i+2}, v_{i+3}$ порождают W_4. Следовательно, v_{i+3}, v_{i+4}, b, c вместе с произвольной вершиной множества V_i''' порождают $K_{2,3}^+$. Значит, $V_i'' = \varnothing$. Если существует вершина $c \in V_{i+2}''$, то $ac \notin E$, $bc \in E$ и $\{c\}$ вполне несмежно с V_i''' по пп. (iii)(2) и (iii)(3) леммы 15. Тогда v_{i+2}, a, b, c и произвольная вершина V_i''' порождают подграф $K_{2,3}^+$. Следовательно, $V_{i+2}'' = \varnothing$.

Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, по п. (i) леммы 15 никакая вершина из V_i''' не смежна с двумя вершинами из V_{i+1}''. Следовательно, по п. (iii)(2) леммы 15 для любой вершины $x \in V_{i+1}''$ имеем $|N_{V_i'''}(x)| \leqslant 1$, так как иначе $N_{V_i'''}(x)$ — нетривиальный модуль. Если существуют вершины $x_1, x_2 \in V_{i+1}''$, смежные соответственно с вершинами $y_1, y_2 \in V_i'''$, то $x_1y_2, x_2y_1 \notin E$ и $v_{i+2}, x_1, x_2, y_1, y_2$ порождают W_4. Значит, между V_i''' и V_{i+1}'' имеется не более одного ребра. Следовательно, по п. (iii)(3) леммы 15 имеем $|V_{i+1}''| \leqslant 2$, иначе G содержит нетривиальный модуль.

Напомним, что $V_{i+1}'' \cup V_i'''$ вполне смежно с V_{i+2}' по п. (iii)(2) леммы 15. Тем самым $\{a\}$ вполне смежно с V_{i+1}'', поскольку иначе некоторая его вершина вместе с a, b, v_{i+1}, v_{i+2} порождают W_4, поэтому V_{i+1}'' вполне несмежно с V_i''', так как иначе a, b, v_{i+4} вместе с парой смежных вершин, одна из которых принадлежит V_{i+1}'', а другая — V_i''', порождают $K_{2,3}^+$. Не существует таких несмежных вершин $c \in V_{i+1}''$ и $a' \in V_i'$, иначе $a' \neq a$ и $\{c\}$ вполне смежно с V_i''', чтобы избежать порождения P_5 вершинами a', v_{i+1}, c, v_{i-2} и вершиной из V_i'''; противоречие. Никакая вершина $a' \in V_i'$ не может быть смежна с вершинами $b', b'' \in V_{i+2}'$, поскольку иначе по пп. (i) и (iii)(2) леммы 15 вершины v_{i+4}, a', b', b'' вместе с произвольной

вершиной из V_i''' порождают $K_{2,3}^+$. Если существует ребро $a^*b^* \neq ab$, где $a^* \in V_i'$ и $b^* \in V_{i+2}'$, то $b = b^*$. Действительно, если $b \neq b^*$, то $a \neq a^*$ и $ab^* \notin E$, $ba^* \notin E$ и v_{i+2}, a, b, a^*, b^* порождают W_4.

По п. (iii)(2) леммы 15 множество V_{i+4}' должно быть пустым, иначе $V_i''' = \varnothing$. Множество V_{i+3}' вполне несмежно с V_i', поскольку иначе граф G будет содержать порождённый подграф P_5. По пп. (i) и (iii)(2) леммы 15 для любой вершины $x \in V_{i+2}'$ $N_{V_i'}(x)$ — модуль графа G, поэтому он содержит не более одной вершины. Значит, $V_i' \setminus \{a\}$ и $V_{i+2}' \setminus \{b\}$ — модули графа G и $\max(|V_i'|, |V_{i+2}'|) \leqslant 2$. Аналогично $\max(|V_{i+1}'|, |V_{i+3}'|) \leqslant 2$. Из п. (ii)(2) леммы 15 и того, что между V_i''' и V_{i+1}'' не более одного ребра и в G нет нетривиальных модулей, следует, что $|V_i'''| \leqslant 2$. Тем самым $|V| \leqslant 17$. Лемма 18 доказана.

Лемма 19. *Если $S = \varnothing$ и для некоторого i вершины $a \in V_i'$ и $b \in V_{i+1}''$ несмежны, то либо $G \in Free(\{O_3\})$, либо $|V| \leqslant 14$.*

Доказательство. Из пп. (iii)(1) и (iii)(3) леммы 15 следует, что $\bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i+2}}^{5} V_j = \varnothing$ и $V_{i-2}''' \cup V_{i+1}''' \cup V_{i+2}''' \cup V'''' = \varnothing$. Заметим, что если существует вершина $c \in V_{i+2}$, то по п. (iii)(1) леммы 15 имеем $ca \notin E$, $cb \notin E$. Тогда $c, v_{i-1}, b, v_{i+1}, a$ порождают P_5. Следовательно, $V_{i+2} = \varnothing$. Если существуют вершины $c_1 \in V_{i-1}'''$ и $c_2 \in V_i'''$, то по пп. (iii)(2), (iii)(3), (iii)(4) леммы 15 имеем $ac_1 \in E$, $ac_2 \notin E$, $bc_1 \notin E$, $c_1c_2 \in E$. Вместе с тем $c_2b \in E$, так как иначе $c_2, v_{i-2}, b, v_{i+1}, a$ порождают P_5. Тогда $v_{i+1}, c_1, v_{i+2}, b, c_2$ порождают W_4. Таким образом, хотя бы одно из множеств V_{i-1}''' и V_i''' пусто. По лемме 17 можно считать, что хотя бы одно из данных множеств не будет пустым. Далее будут отдельно рассмотрены два случая: когда $V_{i-1}''' \neq \varnothing$ и когда $V_i''' \neq \varnothing$. Заметим, что по лемме 18 можно считать, что для любого j множество V_j' вполне несмежно с V_{j+2}'.

Предположим, что $c \in V_{i-1}'''$. Тогда $V_i''' = \varnothing$. Заметим, что $V_{i-2}' = \varnothing$ по п. (iii)(2) леммы 15. Далее по п. (iii)(3) леммы 15 имеем $V_{i-2}'' \cup V_{i+2}'' = \varnothing$ и $V_{i-1}'' = \varnothing$, так как иначе b, c, v_{i+1}, v_{i+2} вместе с произвольным элементом из V_{i-1}'' порождают $K_{2,3}^+$.

По п. (iii)(2) леммы 15 множество V_i' вполне смежно с $V_i'' \cup V_{i-1}'''$, а множество $V_{i-1}' \cup V_{i+2}'$ вполне несмежно с V_{i-1}'''. По п. (iii)(3) леммы 15 множество V_{i+1}'' вполне смежно с V_i'' и вполне несмежно с V_{i-1}'''. Множество V_i' вполне несмежно с V_{i+1}'', так как иначе элемент из V_i', смежный с ним элемент из V_{i+1}'', вершины c, v_i, v_{i+1} порождают $K_{2,3}^+$. Множество V_i'' вполне несмежно с V_{i-1}''', иначе элемент из V_i'', смежный с ним элемент из V_{i-1}''', а также вершины v_i, v_{i+1}, b порождают $K_{2,3}^+$. Множество V_{i-1}' вполне смежно с V_i'', иначе некоторый его элемент и несмежный

с ним элемент из V_i'' вместе с v_i, v_{i+2}, c порождают P_5. Множество V_i'' вполне смежно с V_{i+2}', иначе элемент из V_{i+2}', несмежный с ним элемент из V_i'', а также v_{i-2}, v_{i+1}, c порождают P_5. Из п. (iii)(2) леммы 15 следует, что каждое из множеств $V_{i-1}', V_i', V_{i+1}', V_{i+2}', V_i'', V_{i+1}'', V_{i-1}'''$ является модулем в графе G, поэтому оно содержит не более одной вершины. Следовательно, $|V| \leqslant 12$.

Предположим, что $c \in V_i'''$. Тогда $V_{i-1}''' = \varnothing$. По пп. (iii)(2) и (iii)(3) леммы 15 имеем $V_{i-1}' = V_{i-2}'' = V_{i-1}'' = \varnothing$. По пп. (iii)(2) и (iii)(3) леммы 15 множество V_i''' вполне смежно с V_{i+1}' и вполне несмежно с V_{i+2}'', поэтому V_{i+1}' вполне несмежно с V_{i+2}'', так как элемент из V_{i+2}'', смежный с ним элемент из V_{i+1}' вместе с v_{i+1}, v_{i+2}, c порождают $K_{2,3}^+$.

По п. (iii)(2) леммы 15 множество V_i' вполне несмежно с V_i'''. Если вершина $b' \in V_{i+1}''$ несмежна со всеми вершинами из V_i', то $\{b'\}$ вполне смежно с V_i''', так как иначе b', несмежная с ней вершина из V_i''', несмежная с ней вершина из V_i', v_{i+1}, v_{i-2} порождают P_5. Следовательно, $\{b\}$ вполне смежно с V_i'''. По п. (iii)(3) леммы 15 множество V_i'' вполне смежно с V_{i+1}'' и вполне несмежно с V_i''', что в случае $V_i'' \neq \varnothing$ означает, что произвольный элемент из V_i'' вместе v_{i-1}, v_{i-2}, b, c порождают $K_{2,3}^+$. Следовательно, $V_i'' = \varnothing$.

По п. (i) леммы 15 множество V_{i+1}'' является кликой, поэтому никакая вершина из V_i''' не смежна с двумя вершинами V_{i+1}'', так как иначе G содержит порождённый подграф $K_{2,3}^+$. Следовательно, V_i''' вполне несмежно с $V_{i+1}'' \setminus \{b\}$. Множество $V_{i+1}'' \setminus \{b\}$ вполне смежно с V_i', так как элемент из $V_{i+1}'' \setminus \{b\}$, несмежный с ним элемент из V_i' вместе с c, v_{i+1}, v_{i-2} порождают P_5. Множество $\{b\}$ вполне смежно с V_{i-2}', так как a, v_{i+1}, b, v_{i-1} и несмежный с b элемент V_{i-2}' порождают P_5. Множество $V_{i+1}'' \setminus \{b\}$ вполне смежно с V_{i-2}', так как элемент из $V_{i+1}'' \setminus \{b\}$, несмежный с ним элемент из V_{i-2}' вместе с c, v_{i-1}, v_{i+2} порождают P_5.

Из рассуждений последних двух абзацев и пп. (iii)(2) и (iii)(3) леммы 15 следует, что каждое из множеств V_{i-2}', $N_{V_i'}(b)$, $N_{V_i'}^-(b)$, V_{i+1}', V_{i+2}', $V_{i+1}'' \setminus \{b\}$, V_{i+2}'', V_i''' является модулем в графе G, поэтому оно содержит не более одной вершины. Таким образом, $|V| \leqslant 14$. Лемма 19 доказана.

Лемма 20. *Если $S = \varnothing$, то либо G O_3-свободный, либо $|V| \leqslant 161$.*

Доказательство. Из пп. (iii)(1) и (iii)(2) леммы 15 следует, что множество $V_i' \cup \{v_{i+1}\}$ при $V_i' \neq \varnothing$ не будет нетривиальным модулем тогда и только тогда, когда либо между V_i' и $V_{i+2}' \cup V_{i+3}'$ есть ребро, либо когда V_i' не является вполне смежным с $V_{i+1}'' \cup V_{i+3}''$. Если одна из этих ситуаций реализуется, то попадаем в случай лемм 18 и 19, что означает справедливость данного утверждения. Следовательно, можно предполагать, что $V_1' \cup V_2' \cup V_3' \cup V_4' \cup V_5' = \varnothing$.

Так как $G \in \mathrm{Free}(\{W_4\})$, для любого i граф $G(V_i''')$ будет P_3-свободным, т. е. он является дизъюнктной суммой полных графов. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, то $G(V_i''')$ имеет одну или две компоненты связности. По п. (i) леммы 15 V_{i+1}'' является кликой. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, никакая вершина из V_i''' не смежна с двумя вершинами из V_{i+1}'', а также никакие две несмежные вершины из V_i''' не могут иметь общего соседа в V_{i+1}'' или иметь вершину из V_{i+1}'', несмежную с ними одновременно.

Пусть Q — множество вершин некоторой компоненты связности графа $G(V_i''')$, где $|Q| \geqslant 2$. Тогда по п. (iii)(1) леммы 15 множество V_{i-1} пусто. Из пп. (iii)(1), (iii)(3), (iii)(4) леммы 15 следует, что каждая вершина из множества $V_{i-1} \cup \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i+1}}^{5} V_j'' \cup V_{i-1}''' \cup V_{i+1}''' \cup V''''$ либо смежна с каждой вершиной из Q, либо не смежна ни с одной из них. Если вершина из $V_{i-2} \cup V_i \cup V_{i-2}''' \cup V_{i+2}'''$ имеет соседей в Q, но смежна не с каждой вершиной Q, то G содержит порождённый подграф W_4. Следовательно, каждая вершина из данного множества либо смежна с каждой вершиной из Q, либо не смежна ни с одной из них.

Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, никакая вершина из V_{i+1} не смежна с двумя вершинами из Q и никакая вершина из Q не смежна с двумя вершинами из V_{i+1} по лемме 16. Отсюда, а также из леммы 16 и P_5-свободности графа G следует, что между Q и V_{i+1} имеется не более двух рёбер. Аналогично между Q и V_{i+2} имеется не более двух рёбер. Из W_4-свободности графа G следует, что только одна вершина $x \in V_{i+1}''$ может иметь соседей в Q, поэтому либо $|V_{i+1}''| \leqslant 2$, либо $|V_{i+1}''| \geqslant 3$ и $V_i''' = Q$, что следует из рассуждений конца второго абзаца. Во втором случае по пп. (i), (iii)(1) и (iii)(3) леммы 15 множество $V_{i+1}'' \setminus \{x\}$ является нетривиальным модулем графа G.

Если $|Q| \geqslant 7$, то в Q должны быть две вершины, не смежные ни с одной вершиной из $V_{i+1} \cup V_{i+2}$ и либо одновременно смежные с x, либо одновременно несмежные с x. Следовательно, в этом случае G имеет нетривиальный модуль, поэтому $|Q| \leqslant 6$. Значит, $|V_j'''| \leqslant 12$ для любого j, так как каждое такое множество состоит из не более чем двух клик, каждая с не более чем 6 вершинами.

Покажем, что $|V_i''| \leqslant 2$ для любого i. По пп. (iii)(1) и (iii)(3) леммы 15 каждая вершина множества $V'''' \cup \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i-2}}^{5} V_j \cup \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{5} V_j'' \cup \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i-1}}^{5} V_j'''$ либо смежна с каждой вершиной из V_i'', либо не смежна ни с одной из них. По п. (i) леммы 15 множество V_i'' — клика. Отсюда ввиду W_4-свободности графа G следует, что каждая вершина из V_{i-2} либо смежна со всеми вершинами

из V_i'', либо не смежна ни с одной из них, поэтому V_i'' является модулем графа G, если $V_{i-1}''' = \varnothing$, и имеет не более одной вершины. Из рассуждений предыдущего абзаца следует, что $|V_i''| \leqslant 2$, если $V_{i-1}''' \neq \varnothing$.

Рассмотрим множество V_i. По лемме 16 оно независимое. По п. (i) леммы 15 множество V_i вполне смежно с $V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup V_{i+1}'''$ и вполне несмежно с $\bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i+2}}^{5} V_j''$. Каждая вершина из V_i либо смежна со всеми вершинами из V_{i+2}'', либо не смежна ни с одной из них. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{W_4\})$, для любых двух смежных элементов V_i''' каждый элемент V_i либо одновременно смежен с ними, либо одновременно несмежен с ними. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, никакая вершина из V_i''' не смежна с двумя вершинами из V_i. Аналогичные утверждения верны и для V_{i+2}'''. Следовательно, в V_i имеется не более четырёх элементов, каждый из которых имеет соседа в $V_i''' \cup V_{i+2}'''$. Ранее было установлено, что между V_i и V_{i-1}''', а также между V_i и V_{i-2}''' имеется не более четырёх рёбер.

Обозначим через $\widetilde{V_i}$ множество тех вершин из V_i, которые не имеют соседей в $V_{i-2}''' \cup V_{i-1}''' \cup V_i''' \cup V_{i+2}'''$. Если $|V_i| \geqslant 13$, то $|\widetilde{V_i}| \geqslant |V_i| - 12$. Напомним, что по лемме 16 множества V_{i-2}, V_i, V_{i+2} независимы. Отсюда, так как $G \in \mathrm{Free}(\{P_5\})$, для любых двух вершин $a, b \in V_i$ одно из множеств $N_{V_{i-2}}(a)$ и $N_{V_{i-2}}(b)$ является подмножеством другого. Аналогичное утверждение верно и для $N_{V_{i+2}}(a)$ и $N_{V_{i+2}}(b)$. Тем самым все вершины из V_i, имеющие соседей в V_{i-2} (соответственно в V_{i+2}), имеют в нём общего соседа. Отсюда, поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, в V_i имеется не более двух вершин, которые в V_{i-2} (соответственно в V_{i+2}) имеют соседа. Тем самым $|\widetilde{V_i}| \leqslant 5$, так как иначе G содержит нетривиальный модуль. Значит, $|V_j| \leqslant 17$ для любого j.

Из пп. (iii)(1)–(4) леммы 15 следует, что $|V''''| \leqslant 1$. Таким образом, $|V| \leqslant 5 + 5 \cdot 17 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 12 + 1 = 161$. Лемма 20 доказана.

В следующих шести леммах рассматриваем ситуацию, когда $S \neq \varnothing$, доказывая, что G имеет мало вершин. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{P_5\})$, справедлива

Лемма 21. *Любая вершина $a \in S$, смежная с вершиной $b \in V_i'''$, не имеет в S соседа, несмежного с b.*

Вершины множества $N(v_1) \cup N(v_2) \cup N(v_3) \cup N(v_4) \cup N(v_5)$ назовём *доминируемыми* циклом C. Далее предполагаем, что цикл C доминирует максимальное количество вершин среди всех порождённых 5-циклов графа G. По п. (ii) леммы 15 имеем $\widehat{V} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{5} (V_i'' \cup V_i''') \cup V''''$.

Лемма 22. *Пусть существует вершина $x \in S$, смежная с вершиной $y \in V_i'''$. Тогда одновременно выполнены следующие свойства.*

(i) *Множество $\{y\}$ вполне смежно с объединением $V_{i+1} \cup V_{i+2} \cup V_{i+1}''$, причём $|V_{i+1}| \leqslant 1$, $|V_{i+2}| \leqslant 1$.*

(ii) *Не существует таких смежных вершин a и b, что $a \in V_j'$, $b \in V_{j+2}'$ для некоторого j.*

(iii) *Каждая вершина из множества $V_{i-2}''' \cup V_{i+2}'''$ смежна ровно с одной из вершин x и y.*

Доказательство. (i) Если существует вершина $x' \in V_{i+1} \cup V_{i+2}$, то она несмежна с x по п. (ii) леммы 15. Следовательно, $x'y \in E$, так как иначе x, y, x', v_i, а также v_{i-1} или v_{i+1} порождают P_5, поэтому $\{y\}$ вполне смежно с $V_{i+1} \cup V_{i+2}$. По лемме 16 каждое из множеств V_{i+1}, V_{i+2} независимо. Следовательно, если хотя бы одно из них имеет два элемента, то они вместе с v_{i-2}, v_{i+2}, y порождают подграф $K_{2,3}^+$.

Если существует вершина $z \in V_{i+1}''$, несмежная с y, то $zx \in E$, так как иначе z, v_i, v_{i+1}, y, x порождают P_5. Тогда порождённый 5-цикл (v_i, v_{i+1}, z, x, y) доминирует больше вершин, чем C. Действительно, ведь $\{y\}$ вполне смежно с V_{i+2} и вполне смежно с V_{i+2}' (последнее по п. (iii)(2) леммы 15). Получаем противоречие с выбором цикла C. Следовательно, $\{y\}$ вполне смежно с V_{i+1}''.

(ii) Предположим противное. Из соображений симметрии и того, что $V_{i+4}' = \varnothing$, по п. (iii)(2) леммы 15 достаточно рассмотреть случай $a \in V_i'$, $b \in V_{i+2}'$. По пп. (ii) и (iii)(2) леммы 15 имеем $ax \notin E$, $bx \notin E$, $ay \notin E$, $by \in E$, но тогда v_{i+1}, a, b, y, x порождают P_5.

(iii) Предположим, что $z \in V_{i-2}''' \cup V_{i+2}'''$. Не умаляя общности, можно считать, что $z \in V_{i-2}'''$. Вершина z должна быть смежна хотя бы с одной из вершин x и y, иначе $x, y, v_{i-2}, z, v_{i+1}$ порождают P_5. Вместе с тем, она не может быть одновременно смежна с x и y, иначе x, y, z, v_{i-2}, v_i порождают $K_{2,3}^+$. Лемма 22 доказана.

Доказательство следующего вспомогательного утверждения является самым длинным и технически трудным во всей работе. К сожалению, ввиду неразрывности хода доказательства авторы не знают, каким образом его можно сократить или разбить на независимые меньшие части.

Лемма 23. *Предположим, что существует вершина $x \in S$, смежная с вершинами $y \in V_i'''$ и $y' \in V_{i-2}'''$. Тогда $|V| \leqslant 16$.*

Доказательство. Ясно, что $N_{V_{i-2}'''}(x)$ вполне несмежно с $N_{V_i'''}(x)$, так как иначе G содержит порождённый подграф $K_{2,3}^+$. По пп. (iii)(2) и (iii)(3) леммы 15 имеем $V_{i-1}' = V_{i+2}' = \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{5} V_j'' = \varnothing$. Отсюда в силу

пп. (ii), (iii)(1) и (iii)(2) леммы 15 и п. (ii) леммы 22 следует, что множество $V'_j \cup \{v_{j+1}\}$ при любом j является модулем графа G. Тем самым при любом j множество V'_j пусто, так как G атомарный.

По п. (iii)(3) леммы 15 либо $V''_i = \varnothing$, либо $V'''' = \varnothing$. По пп. (iii)(3) и (iii)(4) леммы 15 множество $V''_i \cup V''''$ вполне несмежно с $V'''_{i-2} \cup V'''_i$. Следовательно, $\{x\}$ вполне смежно с $V''_i \cup V''''$, иначе G содержит порождённый подграф P_5. Тем самым $|V''_i \cup V''''| \leqslant 1$, так как иначе по п. (i) леммы 15 граф G содержит порождённый подграф $K^+_{2,3}$. Множество V'''_{i-1} вполне смежно с $V'''_{i-2} \cup V'''_i$ по п. (iii)(4) леммы 15. Отсюда ввиду $\{W_4, K^+_{2,3}\}$-свободности графа G следует, что $|V'''_{i-1}| \leqslant 1$.

Проверим, что каждая вершина $y'' \in V'''_{i+1} \cup V'''_{i+2}$ смежна с вершиной x. Предположим противное. Не уменьшая общности, можно считать, что $y'' \in V'''_{i+2}$ несмежна с x. Тогда $y''y' \in E$ по п. (iii)(4) леммы 15. По п. (iii) леммы 22 имеем $y''y \in E$. Тогда y, y', y'', v_i, v_{i-1} порождают $K^+_{2,3}$. Значит, $\{x\}$ вполне смежно с $V'''_{i+1} \cup V'''_{i+2}$, откуда и из $K^+_{2,3}$-свободности графа G следует, что V'''_{i+1} и V'''_{i+2} — независимые множества. Следовательно, по п. (iii)(4) леммы 15 ввиду $K^+_{2,3}$-свободности графа G имеем $|V'''_{i+1}| \leqslant 1$ и $|V'''_{i+2}| \leqslant 1$.

Проверим, что если $N^-_{V'''_i}(x)$ непусто, то оно вполне несмежно с $N_{V'''_i}(x)$ и вполне смежно с $N_{V'''_{i-2}}(x)$, причём $N^-_{V'''_{i-2}}(x) = \varnothing$ и $N^-_{V'''_i \cap \widehat{V}}(x) = \varnothing$. Предположим, что $y_1 \in V'''_i$ несмежна с x. Рассмотрим произвольные вершины $y_2 \in N_{V'''_i}(x)$, $y_3 \in N_{V'''_{i-2}}(x)$, которые обязательно существуют, и $y_4 \in N^-_{V'''_{i-2}}(x)$. Тогда $y_1y_2 \notin E$, так как иначе $y_1y_3 \notin E$, чтобы вершины $v_i, v_{i-2}, y_1, y_2, y_3$ не порождали W_4, и $y_1, y_2, x, y_3, v_{i+1}$ порождают P_5. Вершины y_1 и y_3 должны быть смежными, иначе $y_1, v_{i+2}, y_2, x, y_3$ порождают P_5. Аналогично $y_3y_4 \notin E$ и $y_2y_4 \in E$. Тогда $y_1y_4 \in E$, так как иначе $v_{i+1}, y_1, y_2, y_3, y_4$ порождают P_5, но тогда $v_i, v_{i+1}, y_1, y_2, y_4$ порождают W_4. Предположим, что y_1 смежна с вершиной $x^* \in S$. Тогда $x^*y_3 \notin E$, поскольку иначе $v_{i-2}, v_i, y_1, y_3, x^*$ порождают $K^+_{2,3}$, и $x^*y_2 \notin E$, так как иначе $y_2, x^*, y_1, y_3, v_{i+1}$ порождают P_5. Вершины x и x^* несмежны, так как иначе $x^*, x, y_3, v_{i+1}, v_{i+2}$ порождают P_5. Следовательно, $x^*, y_1, v_{i-2}, y_2, x$ порождают P_5.

Из вышесказанного ввиду $\{P_5, K^+_{2,3}\}$-свободности графа G следует, что любая вершина $x^* \in S \setminus \{x\}$ либо вообще не имеет соседей в множестве $\bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i-1}}^{5} V'''_j$, либо $N(x^*) \cap \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i-1}}^{5} V'''_j = N(x) \cap \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i-1}}^{5} V'''_j$, причём $\{x^*\}$ вполне смежно с $V''_i \cup V''''$.

Поскольку G является связным P_5-свободным графом и V'''' вполне несмежно с $V_1''' \cup V_2''' \cup V_3''' \cup V_4''' \cup V_5'''$ по п. (iii)(4) леммы 15, каждая вершина из S смежна с вершиной из $\widehat{V}$. Покажем, что для любых двух смежных вершин $x_1, x_2 \in S$ справедливо $N_{\widehat{V}}(x_1) = N_{\widehat{V}}(x_2)$. Предположим противное. Тогда симметрическая разность $N_{\widehat{V}}(x_1)$ и $N_{\widehat{V}}(x_2)$ должна состоять из единственного элемента $y^* \in V''''$, иначе G содержит порождённый P_5. Тем самым можно считать, что $N_{\widehat{V}}(x_2) \supset N_{\widehat{V}}(x_1)$ и $N_{\widehat{V}}(x_2) \setminus N_{\widehat{V}}(x_1) = \{y^*\}$, поэтому $N(x_1) \cap \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i-1}}^{5} V_j''' = \varnothing$, поскольку иначе $x_1 y^* \in E$. Следовательно, $x_2 y \in E$, иначе $x_1, x_2, y^*, v_{i-2}, y$ порождают P_5. Тогда $x_1, x_2, y, v_i, v_{i-1}$ порождают подграф P_5. Таким образом, любые две смежные вершины из S имеют одинаковые множества соседей в $\widehat{V}$. Отсюда ввиду атомарности G следует, что S — независимое множество, иначе множество вершин некоторой компоненты связности графа $G(S)$ образует нетривиальный модуль.

Проверим, что либо $|V_i'' \cup V_{i-1}''' \cup V''''| \leqslant 1$, либо $|V| \leqslant 10$. Неравенство $|V_i'' \cup V_{i-1}''' \cup V''''| \leqslant 1$ не выполнено, только если $V_{i-1}''' = \{z_1\}$ и $z_2 \in V_i'' \cup V''''$. Если $z_2 \in V_i''$, то $z_1 z_2 \notin E$, иначе $v_i, v_{i+1}, y', z_1, z_2$ порождают W_4, и $x z_1 \in E$, иначе $x, z_2, v_i, v_{i-1}, z_1$ порождают P_5. Следовательно, по п. (i) леммы 22 порождённый 5-цикл $(x, z_2, v_i, v_{i-1}, z_1)$ доминирует больше вершин, чем C. Предположим, что $z_2 \in V''''$. Тогда $y z_2 \notin E$, $y' z_2 \notin E$, $z_1 z_2 \notin E$ по п. (iii)(4) леммы 15. Множество V_i пусто, так как иначе любой его элемент смежен с y' и несмежен с x и с z_2 (по пп. (ii) и (iii)(1) леммы 15 и п. (i) леммы 22), а значит, данный элемент вместе с $v_{i-1}, z_2, v_{i+1}, y'$ порождают P_5. Аналогично $V_{i+1} = \varnothing$. Если $V_{i+2}''' = \varnothing$, то порождённый 5-цикл $(z_2, v_{i+1}, z_1, y, v_{i-2})$ доминирует больше вершин, чем цикл C, что следует из п. (i) леммы 22, поэтому можно считать, что $V_{i+2}''' \neq \varnothing$. Аналогично можно считать, что $V_{i+1}''' \neq \varnothing$, иначе порождённый 5-цикл $(z_2, v_{i+2}, z_1, y, v_i)$ доминирует больше вершин, чем цикл C. Из п. (iii)(4) леммы 15 и $K_{2,3}^+$-свободности графа G следует, что $V_j''' = \{y_j\}$ для любого j. Из результата третьего абзаца следует, что $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ — порождённый 5-цикл, с каждой вершиной которого смежна вершина x. Очевидно, что если некоторая вершина x' смежна хотя бы с одной из вершин y_1–y_5, то она будет смежна со всеми ними. Следовательно, G содержит порождённый подграф W_4. Вершина z_2 не может быть смежна с вершиной из $S \setminus \{x\}$, поскольку иначе $\{z_2\}$ — разделяющая клика ввиду независимости S.

Всюду далее считаем, что $|V| \geqslant 11$. Напомним, что каждая вершина из S смежна с вершиной из $\widehat{V}$ и S независимо. Поскольку S независимо и $|V_i'' \cup V_{i-1}''' \cup V''''| \leqslant 1$, то

$$\Big\{x^* \in S \mid N(x^*) \cap \bigcup_{\substack{j=1,\\ j\neq i-1}}^{5} V_j''' = \varnothing\Big\} = \varnothing,$$

иначе $V_i'' \cup V_{i-1}''' \cup V''''$ будет разделяющей кликой.

Покажем, что можно считать, что $V_{i-2} \neq \varnothing$. Предположим, что $V_{i-2} = \varnothing$. По п. (iii)(1) леммы 15 и п. (i) леммы 22 множество V_{i-1} вполне смежно с $V_{i-2}''' \cup V_i'''$, поэтому можно считать, что $V_{i-1} = \varnothing$, иначе по п. (ii) леммы 15 этот случай относительно цикла $(x, y, y', v_{i+2}, v_{i+1})$, который доминирует столько же вершин, что и C, эквивалентен случаю $V_{i-2} \neq \varnothing$ относительно C. Аналогично $V_{i+2} = \varnothing$. По лемме 16 каждое из множеств V_i и V_{i+1} независимо. Тем самым по п. (i) леммы 22 ввиду $K_{2,3}^+$-свободности графа G имеем $\max(|V_i|, |V_{i+1}|) \leqslant 1$.

Предположим, что $S \setminus \{x\}$ непусто и $x^* \in S \setminus \{x\}$. Тогда либо $N_{\widehat{V}}(x) = N_{\widehat{V}}(x^*)$, либо одна из вершин x и x^* смежна с элементом из V_{i-1}''', а другая нет. Во втором случае $xx^* \notin E$, так как $G \in \mathrm{Free}(\{P_5\})$, и этот случай относительно цикла $(x, y, v_{i+2}, v_{i+1}, y')$, который доминирует столько же вершин, что и C, эквивалентен случаю $V_{i-2} \neq \varnothing$ относительно C. Следовательно, можно считать, что $S = \{x\}$, так как G атомарный.

Удостоверимся, что $\max(|V_{i-2}'''|, |V_i'''|) \leqslant 2$. Рассмотрим только случай множества V_i'''. Ввиду $K_{2,3}^+$-свободности графа G и результата четвёртого абзаца множество $N_{V_i'''}(x)$ либо состоит из одной вершины и $N_{V_i'''}^-(x)$ является кликой, либо оно состоит из двух несмежных вершин, но тогда $N_{V_i'''}^-(x) = \varnothing$. Ввиду W_4-свободности графа G и п. (i) леммы 22 множество V_{i+1} вполне смежно с $N_{V_i'''}(x)$ и вполне несмежно с $N_{V_i'''}^-(x)$. Из результата третьего абзаца и P_5-свободности графа G следует, что $N_{V_i'''}^-(x)$ вполне смежно с V_{i+2}'''. По п. (i) леммы 22 множество V_i вполне смежно с V_{i-2}''', откуда ввиду результата четвёртого абзаца и W_4-свободности графа G следует, что $V_i \cup S$ вполне несмежно с $N_{V_i'''}^-(x)$. Из данных наблюдений и пп. (iii)(3) и (iii)(4) леммы 15 следует, что $N_{V_i'''}^-(x)$ — модуль графа G, поэтому он содержит не более одного элемента.

Мы пришли к неравенству

$$|V| \leqslant |V(C)| + |V_i| + |V_{i+1}| + |V_{i-2}'''| + |V_i'''| \\ + |V_{i+1}'''| + |V_{i+2}'''| + |V_i'' \cup V_{i-1}''' \cup V'''| + |S| \leqslant 15.$$

Всюду далее считаем, что $V_{i-2}' \neq \varnothing$.

Проверим, что любые две вершины $a \in V_{i-2}$ и $b \in V_i''' \cup V_{i-2}'''$ несмежны. Не уменьшая общности, можно считать, что $b \in V_i'''$. В случае $ay' \in E$ либо a, y', b, v_{i-2}, v_i порождают подграф W_4 (если $by' \notin E$), либо $by' \in E$.

Во втором случае $b \neq y$, $ay \notin E$ (иначе a, v_i, v_{i-2}, y', y порождают подграф W_4), $yb \notin E$ (иначе v_{i-2}, v_i, a, b, y порождают подграф W_4), $ax \notin E$ (по п. (ii) леммы 15), $bx \notin E$ (иначе x, b, y', v_{i-2}, v_i порождают подграф $K_{2,3}^+$) и x, y, v_{i+2}, b, a порождают подграф P_5. Значит, $ay' \notin E$. Тогда $y'b \in E$, так как иначе a, b, v_{i+2}, v_{i+1}, y' порождают подграф P_5. Следовательно, $b \neq y$ и $bx \notin E$, иначе x, y', b, v_{i-2}, v_i порождают подграф $K_{2,3}^+$. Вершины a и y несмежны, поскольку иначе a, y, x, y, v_{i+1} порождают подграф P_5. Вершины b и y несмежные, так как иначе a, b, y, y', v_{i+2} порождают подграф $K_{2,3}^+$. По п. (ii) леммы 15 имеем $ax \notin E$, поэтому a, b, v_{i+2}, y, x порождают подграф P_5.

Проверим, что не существует смежных вершин a и b, первая из которых принадлежит V_{i-2}, а вторая — $V_i \cup V_{i+1}$. Из соображений симметрии можно рассматривать только случай, когда $b \in V_i$. По п. (ii) леммы 15 получаем $ax \notin E$, $bx \notin E$. Вершина a одновременно несмежна с вершинами y и y'. По п. (i) леммы 22 имеем $y'b \in E$. Вместе с тем $by \in E$, так как иначе a, b, y', x, y порождают подграф P_5. Следовательно, a, b, y, y', v_i порождают подграф $K_{2,3}^+$.

Напомним, что множество V_{i-2} вполне несмежно с $V_i \cup V_{i+1} \cup V_i'' \cup V_{i-2}''$. Более того, поскольку по результату третьего абзаца множество $\{x\}$ вполне смежно с $V_{i+1}''' \cup V_{i+2}'''$, по п. (i) леммы 22 получаем, что V_{i-2} вполне смежно с $V_{i+1}''' \cup V_{i+2}'''$. По лемме 16 множество V_{i-2} независимо. Ввиду данных обстоятельств и пп. (ii) и (iii)(1) леммы 15 можно считать, что $V_{i-2} = \{a'\}$, так как иначе G содержит нетривиальный модуль. Из тех же соображений следует, что a' смежна с некоторым элементом из $V_i'' \cup V''''$, иначе $\{a', v_{i-1}\}$ — нетривиальный модуль в графе G. Можно считать, что $V_i'' = \varnothing$ и $V'''' \neq \varnothing$. Действительно, если $V_i'' \neq \varnothing$, то $V'''' = \varnothing$ и $(a', v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i-2})$ — порождённый 5-цикл, все вершины которого смежны с некоторым элементом из V_i''. Данная ситуация эквивалентна тому, что $V'''' \neq \varnothing$.

В силу результата седьмого абзаца получаем, что $|V''''| = 1$, $V_i'' = V_{i-1}''' = \varnothing$. Из п. (iii)(4) леммы 15, леммы 16 и п. (i) леммы 22 и того, что $V_{i-2} = \{a'\}$, $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, следует, что $|V_j| \leqslant 1$ для любого j и $|V_{i-2}'''| \leqslant 1$, $|V_i'''| \leqslant 1$. Из результатов пятого и восьмого абзацев и атомарности G следует, что $S = \{x\}$. Тем самым

$$|V| \leqslant |V(C)| + \left|\bigcup_{j=1}^{5} V_j\right| + \left|\bigcup_{\substack{j=1,\\ j\neq i-1}}^{5} V_j'''\right| + |V''''| + |S| \leqslant 16.$$

Лемма 23 доказана.

Лемма 24. *Если вершина $x \in S$ смежна с вершинами $y_1, y_2 \in V_i'''$, то $|V| \leqslant 21$.*

Доказательство. Из $K_{2,3}^+$-свободности графа G, пп. (iii)(3) и (iii)(4) леммы 15 и п. (i) леммы 22 следует, что $y_1y_2 \notin E$ и множества V_{i+1}, V_{i+2}, V_i'', V_{i+1}'', V_{i+2}'', V_{i-1}''', V_{i+1}''', V'''' пусты. По п. (iii)(1) леммы 15 получаем $V_{i-1}'' = V_{i-2}'' = \varnothing$. По п. (iii) леммы 22 и лемме 23 можно считать, что каждый элемент множества $V_{i-2}''' \cup V_{i+2}'''$ смежен с y_1 и y_2 одновременно. Следовательно, $V_{i-2}''' \cup V_{i+2}''' = \varnothing$, так как иначе G содержит порождённый подграф W_4. Из пп. (ii), (iii)(1) и (iii)(2) леммы 15 и п. (ii) леммы 22 следует, что $V_j' = \varnothing$, иначе $V_j' \cup \{v_{j+1}\}$ является нетривиальным модулем графа G. Из пп. (ii) и (iii)(1) леммы 15 вытекает, что $V_{i-1} = \varnothing$, поскольку иначе $V_{i-1} \cup \{v_i\}$ — нетривиальный модуль графа G.

Так как $G \in \mathrm{Free}(\{W_4\})$, то $V_i''' = Q_1 \sqcup Q_2$ для клик Q_1 и Q_2, причём $y_1 \in Q_1$, $y_2 \in Q_2$. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, то $N_{Q_1}(x) = \{y_1\}$, $N_{Q_2}(x) = \{y_2\}$. Отсюда ввиду того, что G P_5-свободен, хотя бы одна из клик Q_1 и Q_2 содержит ровно одну вершину. Будем считать, что $Q_2 = \{y_2\}$. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{W_4\})$, каждая из вершин $V_{i-2} \cup V_i$ либо смежна со всеми вершинами клики Q_1, либо не смежна ни с одной из них. Тем самым можно говорить о смежности вершин из $V_{i-2} \cup V_i$ с кликами Q_1 и Q_2. Следовательно, $|Q_1 \setminus \widehat{V}| \leqslant 1$, поскольку $Q_1 \setminus \widehat{V}$ — модуль в графе G. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{W_4\})$, никакая вершина из $V_{i-2} \cup V_i$ не смежна с Q_1 и Q_2 одновременно. Так как $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, никакая вершина из V_i''' не смежна с двумя и более вершинами из V_{i-2} или из V_i.

По лемме 21 каждый элемент S смежен с некоторой вершиной из V_i'''. Множество S независимо. Действительно, иначе по лемме 21 вершины любой компоненты связности графа $G(S)$ с не менее чем двумя вершинами образуют нетривиальный модуль в G. Поскольку S независимо, а G $K_{2,3}^+$-свободен и не содержит разделяющих клик, каждая вершина из S смежна ровно с двумя вершинами из V_i''', одна из которых — y_2. Значит, $|Q_1 \cap \widehat{V}| \leqslant 2$, так как если в $Q_1 \cap \widehat{V}$ существуют две вершины a_1 и a_2, отличные от y_1, то существуют вершины $b_1, b_2 \in S$ такие, что

$$x \notin \{b_1, b_2\}, \quad a_1b_1, a_2b_2 \in E, \quad a_1b_2, a_2b_1 \notin E,$$
$$b_1y_1, b_2y_1 \notin E, \quad b_1y_2, b_2y_2 \in E.$$

Тогда b_1, y_2, b_2, a_2, y_1 порождают P_5. Поскольку $|Q_1 \cap \widehat{V}| \leqslant 2$, S является независимым множеством и каждая вершина из S смежна с y_2 и ещё с ровно одной вершиной из $Q_1 \cap \widehat{V}$, то $|S| \leqslant 2$, так как иначе G содержит нетривиальный модуль.

Итак, $|V_i'''| \leqslant 4$ и $|S| \leqslant 2$. Напомним, что никакая вершина из V_i''' не смежна с двумя и более вершинами из V_{i-2} или из V_i. Следовательно,

если $|V_{i-2}| \geqslant 5$, то существует не менее чем $|V_{i-2}| - 4$ вершин, каждая из которых не смежна ни с одной из вершин V_i'''. Аналогично, если $|V_i| \geqslant 5$, то существует не менее чем $|V_i| - 4$ вершин, каждая из которых не смежна ни с одной из вершин V_i'''. Если a и b — вершины, каждая из которых не имеет соседа в V_i''', то $ab \notin E$. Действительно, иначе по п. (ii) леммы 15 a, b, v_{i+2}, y_1, x порождают P_5. Тем самым $|V_{i-2}| \leqslant 5$ и $|V_i| \leqslant 5$, так как иначе G содержит нетривиальный модуль, состоящий из двух вершин V_{i-2} или из двух вершин V_i, поэтому справедливо неравенство $|V| \leqslant 21$. Лемма 24 доказана.

Будем предполагать, что хотя бы одно из множеств V'''' и $\bigcup\limits_{i=1}^{5} V_i$ пустое. Действительно, если $v' \in V_i$, то $C' = (v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, v', v_{i+2})$ — порождённый 5-цикл графа G, причём он доминирует столько же вершин, что и C. По пп. (iii)(1) и (iii)(3) леммы 15 каждый элемент множества V'''' смежен с четырьмя вершинами цикла C' и не существует вершины, смежной сразу со всеми его вершинами.

Лемма 25. *Предположим, что существует вершина $x \in S$, смежная с вершиной $y \in V_i'''$, причём $V_i'' \cup V_{i+2}'' \cup V'''' \neq \varnothing$. Тогда $|V| \leqslant 16$.*

Доказательство. Если существует вершина $x' \in S$, смежная с вершиной $y' \in V_j''$, то для любого j' не существует смежных вершин $a \in V_{j'}$ и $b \in V_{j'+2}$. Действительно, можно рассматривать только случаи $j \in \{j', j'+3\}$. В обоих случаях $ay' \notin E$, $by' \notin E$ по п. (iii)(1) леммы 15. По п. (ii) леммы 15 имеем $ax' \notin E$, $bx' \notin E$. В первом случае $y', v_{j'+3}, v_{j'+4}, b, a$, а во втором — $x', y', v_{j'+4}, b, a$ порождают P_5.

Предположим, что существует вершина $y' \in V_i'' \cup V_{i+2}''$. Из соображений симметрии достаточно рассматривать только случай, когда $y' \in V_{i+2}''$. Из пп. (iii)(3) и (iii)(4) леммы 15 и $K_{2,3}^+$-свободности графа G следует, что $yy' \notin E$ и $V_i'' = V'''' = \varnothing$. По п. (iii)(1) леммы 15 имеем $V_{i-2}'' = V_{i-1}'' = \varnothing$. Каждая вершина из S, смежная с элементом из V_i''', должна быть смежна со всеми элементами множества V_{i+2}''. Иначе вершина v_{i-1}, вершина из V_{i+2}'' и несмежная с ней вершина из V_i''', вершина v_{i+2}, и некоторая вершина из S порождают P_5. Следовательно, $y'x \in E$ и $V_{i+2}'' = \{y'\}$, так как иначе x, любые две вершины из V_{i+2}'', v_i, v_{i+2} порождают $K_{2,3}^+$. Если существует вершина $y'' \in V_{i+1}''$, то она должна быть смежна с y и с y' по п. (iii)(3) леммы 15 и п. (i) леммы 22, но тогда $y, y', y'', v_{i+1}, v_{i+2}$ порождают $K_{2,3}^+$. Следовательно, $V_{i+1}'' = \varnothing$. Если существует вершина $y''' \in V_i'''$, $y''' \neq y$, то по п. (iii)(3) леммы 15 и $K_{2,3}^+$-свободности графа G имеем $y'y''' \notin E$ и $yy''' \in E$. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{K_{2,3}^+\})$, то $xy''' \notin E$. Следовательно, v_{i-1}, y', x, y, y''' порождают P_5. Значит, $V_i''' = \{y\}$.

По пп. (ii), (iii)(1), (iii)(2) леммы 15 и п. (ii) леммы 22 имеем $V'_j = \varnothing$ для любого j. Это очевидно для $j \in \{i-2, i, i+2\}$, так как иначе множество $V'_j \cup \{v_{j+1}\}$ является нетривиальным модулем графа G. Проверим, что $V'_j = \varnothing$ для $j \in \{i-1, i+1\}$. Из соображений симметрии рассмотрим только $j = i+1$. Если $\widetilde{y} \in V'_{i+1}$, то $\widetilde{y}y' \in E$, $\widetilde{y}x \notin E$ по пп. (ii) и (iii)(2) леммы 15 и $\widetilde{y}y' \notin E$, так как иначе v_{i+1}, v_{i+2}, y, y', $\widetilde{y}$ порождают $K^+_{2,3}$. Тогда v_{i-1}, y', x, y, $\widetilde{y}$ порождают P_5. По п. (iii)(1) леммы 15 получаем $V_{i-1} = V_{i+1} = \varnothing$.

Если $y^* \in V'''_{i-2}$, то по п. (iii) леммы 22 и лемме 23 можно предполагать, что $yy^* \in E$, $xy^* \notin E$. По п. (iii)(3) леммы 15 имеем $y'y^* \notin E$. Тогда v_{i-1}, y', v_{i+2}, y, y^* порождают P_5. Если $y^* \in V'''_{i-1} \cup V'''_{i+1}$, то $yy^* \in E$ по п. (iii)(4) леммы 15. Если $y^* \in V'''_{i-1}$, то $y^*y' \notin E$ по п. (iii)(3) леммы 15 и либо v_{i+1}, y^*, y, x, y' (если $xy^* \notin E$), либо v_{i+1}, y^*, x, y', v_{i-2} (если $xy^* \in E$) порождают P_5. Если $y^* \in V'''_{i+1}$, то $y^*y' \notin E$, так как иначе y^*, y', y, v_{i-2}, v_{i+2} порождают W_4. Тогда если $xy^* \notin E$, то v_{i+1}, y^*, v_{i-2}, y', x порождают P_5. Если же $xy^* \in E$, то $(y^*, v_{i+2}, v_{i+1}, y', x)$ — порождённый 5-цикл графа G, который по п. (i) леммы 22 доминирует больше вершин, чем C. Значит, $V'''_{i-2} = V'''_{i-1} = V'''_{i+1} = \varnothing$.

По п. (iii)(1) леммы 15 $\{y'\}$ вполне несмежно с $V_{i-2} \cup V_{i+2}$. По лемме 16 множество V_i независимо. Поскольку $G \in \mathrm{Free}(\{W_4\})$, то $|N_{V_i}(y')| \leqslant 1$. Напомним, что по п. (ii) леммы 15 множество $V_{i-2} \cup V_i \cup V_{i+2}$ вполне несмежно с S. По п. (i) леммы 22 множество $\{y\}$ вполне смежно с V_{i+2}. Вместе с тем $\{y\}$ вполне несмежно с $V_{i-2} \cup N_{V_i}(y')$, так как иначе некоторый его элемент и y, x, y', v_{i-1} порождают P_5. Следовательно, если $V'''_{i+2} = \varnothing$, то каждое из множеств $V_{i-2}, N^-_{V_i}(y'), V_{i+2}$ является модулем в графе G, поэтому оно имеет не более одного элемента.

Предположим, что $V'''_{i+2} \neq \varnothing$. Тогда V'''_{i+2} вполне несмежно с $\{y'\}$ по п. (iii)(3) леммы 15. По п. (iii) леммы 22 и лемме 23 можно считать, что каждый его элемент смежен с y и несмежен с x. Поскольку граф G W_4-свободный, V'''_{i+2} — клика. Поскольку G является $K^+_{2,3}$-свободным, то V_{i+2} вполне смежно с V'''_{i+2}, а $V_{i-2} \cup N_{V_i}(y')$ вполне несмежно с V'''_{i+2}. Множество V'''_{i+2} либо вполне смежно с $N_{V_i}(y')$, либо вполне несмежно с ним, так как иначе v_{i+2}, y', элемент из $N_{V_i}(y')$, произвольный элемент из $N_{V_i \cap V'''_{i+2}}(y')$ и произвольный элемент из $V'''_{i+2} \setminus N_{V_i}(y')$ порождают P_5.

Предположим, что вершина $x'' \in S$ смежна с вершиной $y'' \in V'''_{i+2}$. Ясно, что x'' не смежна с y, так как $G \in \mathrm{Free}(\{K^+_{2,3}\})$. Тогда $x''y' \in E$, иначе вершины y', x, y, y'', x'' порождают P_5. Вместе с тем $xx'' \notin E$, иначе x'', x, y, v_i, v_{i+1} порождают P_5. Заметим, что (y', x'', y'', y, x) — порождённый 5-цикл, доминирующий больше вершин, чем цикл C. Следовательно, каждое из множеств V_{i-2}, $N^-_{V_i}(x)$, V_{i+2}, V'''_{i+2} является модулем в графе G и содержит не более одной вершины.

Ввиду связности и P_5-свободности графа G каждая вершина из S смежна с вершиной из $\widehat{V}$. По лемме 21 каждый элемент из S, смежный с y, не имеет в S соседа, несмежного с y. Ввиду P_5-свободности графа G то же утверждение верно и относительно вершины y'. Так как ни $\{y\}$, ни $\{y'\}$ не является разделяющей кликой в графе G, то $N_S(y) = N_S(y')$. Значит, $S = \{x\}$, иначе S — нетривиальный модуль в графе G. Таким образом, справедливо неравенство

$$|V| \leqslant |V(C)| + |V_{i-2}| + |V_{i+2}| + |N_{V_i}(x)| \\ + |N^-_{V_i}(x)| + |V''_{i+2}| + |V'''_i| + |V'''_{i+2}| + |S| \leqslant 13.$$

Предположим, что $y' \in V''''$. Тогда

$$\bigcup_{j=1}^{5} V''_j = \varnothing, \quad \bigcup_{j=1}^{5} V'_j = \varnothing,$$

первое — по п. (iii)(3) леммы 15, второе — по пп. (ii), (iii)(1), (iii)(2) леммы 15 и п. (ii) леммы 22. По нашим предположениям перед формулировкой данной леммы имеем $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4 \cup V_5 = \varnothing$. По аналогии с рассуждениями из второго абзаца нетрудно показать, что $yy' \notin E$, $y'x \in E$, $V'''_i = \{y\}$ и $V'''' = \{y'\}$. Каждый элемент множества $V'''_{i-2} \cup V'''_{i+2}$ несмежен с вершиной y' по п. (iii)(4) леммы 15. По п. (iii) леммы 22 и 23 можно считать, что каждый элемент множества $V'''_{i-2} \cup V'''_{i+2}$ смежен с y и несмежен с x. Поэтому $V'''_{i-2} \cup V'''_{i+2} = \varnothing$, так как иначе произвольный его элемент вместе с элементом из $\{v_{i-1}, v_{i+1}\}, y, x, y'$ порождают P_5.

Предположим, что $y^* \in V'''_{i-1} \cup V'''_{i+1}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $y^* \in V'''_{i-1}$. По п. (iii)(4) леммы 15 имеем $y^*y \in E$. Если $y^*x \notin E$, то по п. (iii)(4) леммы 15 цикл (y', v_{i+1}, y^*, y, x) порождённый и доминирует больше вершин, чем C. Следовательно, для каждой вершины $x' \in S$, смежной с вершиной y, множество $\{x'\}$ вполне смежно с $V'''_{i-1} \cup V'''_{i+1} \cup V''''$. Отсюда и $K_{2,3}$-свободности графа G следует, что $|V'''_{i-1}| \leqslant 1, |V'''_{i+1}| \leqslant 1$.

Так как $G \in \mathrm{Free}(\{P_5\})$ и x вполне смежно с $V'''_{i-1} \cup V'''_i \cup V'''_{i+1} \cup V''''$, каждая вершина из S, имеющая соседа в $\widehat{V}$, либо смежна со всеми вершинами из $V'''_{i-1} \cup V'''_i \cup V'''_{i+1} \cup V''''$, либо смежна с вершиной y' и не смежна ни с одной из вершин из $V'''_{i-1} \cup V'''_i \cup V'''_{i+1}$. Так как $\{y'\}$ не является разделяющей кликой и $G \in \mathrm{Free}(\{P_5\})$, каждая вершина из S смежна с каждым элементом множества $V'''_{i-1} \cup V'''_i \cup V'''_{i+1} \cup V''''$. Поскольку G не содержит нетривиальных модулей, то $S = \{x\}$. Следовательно, справедливы неравенства

$$|V| \leqslant |V(C)| + |V'''_{i-1}| + |V'''_{i+1}| + |V''''| + |S| \leqslant 9.$$

Лемма 25 доказана.

Лемма 26. *Если* $S \neq \varnothing$, *то* $|V| \leqslant 21$.

Доказательство. Предположим, напротив, что $|V| \geqslant 22$. Покажем, что в этом случае множество $\widehat{V}$ — разделяющая клика графа G. Напомним, что

$$\widehat{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^{5} (V_i'' \cup V_i''') \cup V''''.$$

Если $\widehat{V}$ не является разделяющей кликой, то оно содержит две несмежные вершины a и b. Вершина a имеет соседа $a' \in S$, вершина b имеет соседа $b' \in S$.

Предположим, что $a \in V_i'''$. Тогда $V_{i-2}'' = V_{i-1}'' = \varnothing$ по п. (iii)(3) леммы 15. Если $V_i'' \cup V_{i+2}'' \cup V'''' \neq \varnothing$, то $|V| \leqslant 16$ по лемме 25, поэтому можно считать, что $V_i'' \cup V_{i+2}'' \cup V'''' = \varnothing$. По п. (iii)(4) леммы 15 имеем $b \notin V_{i-1}''' \cup V_{i+1}'''$. По п. (iii) леммы 22 и лемме 23 можно считать, что каждый элемент из $\widehat{V} \cap V_i'''$ смежен с каждым элементом из $V_{i-2}''' \cup V_{i+2}'''$. Следовательно, $b \in V_i'''$. Если $a'b \in E$ или $b'a \in E$, то $|V| \leqslant 21$ по лемме 24. Если же $a'b \notin E$ или $b'a \notin E$, то либо a', a, v_{i+2}, b, b' (если $a'b' \notin E$), либо b', a', a, v_i, v_{i+1} порождают P_5.

Тем самым можно считать, что

$$\{a, b\} \cap \bigcup_{i=1}^{5} V_i''' = \varnothing.$$

По п. (iii)(3) леммы 15 имеем $a \notin V''''$, $b \notin V''''$. Предположим, что $a \in V_i''$. Тогда $b \notin V_{i-1}'' \cup V_{i+1}''$ по п. (iii)(3) леммы 15, т. е. $b \in V_{i-2}'' \cup V_{i+2}''$. Не уменьшая общности, можно считать, что $b \in V_{i+2}''$. Ясно, что $a'b \notin E$, $b'a \notin E$, так как иначе a, b, v_{i-1}, v_{i+1} вместе с a' или b' порождают P_5. Следовательно, $a' \neq b'$. Если $a'b' \notin E$, то b', b, v_i, a, a' порождают P_5, а если $a'b' \in E$, то b, b', a, a', v_{i+1} порождают P_5.

Таким образом, $\widehat{V}$ образует разделяющую клику графа G; противоречие с тем, что $|V| \geqslant 22$. Лемма 26 доказана.

Основным результатом этого раздела является

Теорема 2. *Задача* ВВР *разрешима за полиномиальное от суммы весов вершин время для* $\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\}$*-свободных графов.*

Доказательство. По лемме 1 задачу ВВР можно рассматривать только для атомарных графов из класса $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\})$. По лемме 14 каждый такой граф либо содержит порождённый C_5, либо имеет 7 вершин, либо является совершенным. С учётом этого и лемм 6 и 8 можно предполагать, что рассматриваются атомарные графы из класса $\mathrm{Free}(\{P_5, K_{2,3}^+, W_4\})$, содержащие порождённый C_5. Рассмотрим граф

$G = (V, E)$ такого типа. Если $S = \varnothing$, то по лемме 20 либо G является O_3-свободным, либо $|V| \leqslant 161$. Следовательно, к (G, w) можно применить полиномиальный от суммы весов вершин алгоритм, существующий по леммам 6 и 7. Если $S \neq \varnothing$, то по лемме 26 $|V| \leqslant 21$. Следовательно, к (G, w) можно применить полиномиальный от суммы весов вершин алгоритм, существующий по лемме 6. Тем самым утверждение справедливо. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Garey M. R., Johnson D. S.** Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. New York: Freeman, 1979. 338 p.
2. **Král' D., Kratochvíl J., Tuza Z., Woeginger G.** Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Proc. 27th Int. Workshop (Boltenhagen, Germany, June 14–16, 2001). Heidelberg: Springer, 2001. P. 254–262. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2204).
3. **Lozin V. V., Malyshev D. S.** Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 216. P. 273–280.
4. **Golovach P. A., Johnson M., Paulusma D., Song J.** A survey on the computational complexity of coloring graphs with forbidden subgraphs // J. Graph Theory. 2017. Vol. 84, No. 4. P. 331–363.
5. **Cameron K., Huang S., Penev I., Sivaraman V.** The class of (P_7, C_4, C_5)-free graphs: Decomposition, algorithms, and χ-boundedness // J. Graph Theory. 2019. Vol. 93, No. 4. P. 503–552.
6. **Cameron K., da Silva M., Huang S., Vuskovic K.** Structure and algorithms for (cap, even hole)-free graphs // Discrete Math. 2018. Vol. 341. P. 463–473.
7. **Dai Y., Foley A., Hoàng C.** On coloring a class of claw-free graphs: To the memory of Frédéric Maffray // Electron. Notes Theor. Comput. Sci. 2019. Vol. 346. P. 369–377.
8. **Fraser D., Hamela A., Hoàng C., Holmes K., LaMantia T.** Characterizations of $(4K_1, C_4, C_5)$-free graphs // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 231. P. 166–174.
9. **Hoàng C., Lazzarato D.** Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P}_5)$-free graphs and similar graph classes // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 186. P. 105–111.
10. **Karthick T., Maffray F., Pastor L.** Polynomial cases for the vertex coloring problem // Algorithmica. 2017. Vol. 81, No. 3. P. 1053–1074.
11. **Malyshev D. S.** The coloring problem for classes with two small obstructions // Optim. Lett. 2014. Vol. 8, No. 8. P. 2261–2270.
12. **Malyshev D. S.** Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem // J. Comb. Optim. 2016. Vol. 31, No. 2. P. 833–845.

13. **Malyshev D. S.** The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures // Discrete Appl. Math. 2018. Vol. 47. P. 423–432.
14. **Malyshev D. S., Lobanova O. O.** Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Appl. Math. 2017. Vol. 219. P. 158–166.
15. **Грибанов Д. В., Малышев Д. С., Мокеев Д. Б.** Эффективная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для некоторого наследственного класса с 5-вершинными запретами // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2020. Т. 27, № 3. С. 71–87.
16. **Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R.** The strong perfect graph theorem // Ann. Math. 2006. Vol. 164. P. 51–229.
17. **Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.** Polynomial algorithms for perfect graphs // Ann. Discrete Math. 1984. Vol. 21. P. 325–356.

Развенская Ольга Олеговна
Малышев Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
29 апреля 2020 г.
После доработки —
3 ноября 2020 г.
Принята к публикации
5 ноября 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2021. Vol. 28, No. 1. P. 15–47

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2021.28.685

EFFICIENT SOLVABILITY OF THE WEIGHTED VERTEX COLORING PROBLEM FOR SOME TWO HEREDITARY GRAPH CLASSES

O. O. Razvenskaya[a] and *D. S. Malyshev*[b]

National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: [a]`olga-olegov@yandex.ru`, [b]`dsmalyshev@rambler.ru`

Abstract. The weighted vertex coloring problem for a given weighted graph is to minimize the number of used colors so that for each vertex the number of the colors that are assigned to this vertex is equal to its weight and the assigned sets of vertices are disjoint for any adjacent vertices. For all but four hereditary classes that are defined by two connected 5-vertex induced prohibitions, the computational complexity is known of the weighted vertex coloring problem with unit weights. For four of the six pairwise intersections of these four classes, the solvability was proved earlier of the weighted vertex coloring problem in time polynomial in the sum of the vertex weights. Here we justify this fact for the remaining two intersections. Bibliogr. 17.

Keywords: weighted vertex coloring problem, hereditary class, computational complexity.

REFERENCES

1. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, New York, 1979).
2. **D. Král', J. Kratochvíl, Z. Tuza,** and **G. Woeginger,** Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs, in *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (Proc. 27th Int. Workshop, Boltenhagen, Germany, June 14–16, 2001) (Springer, Heidelberg, 2001), pp. 254–262 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2204).
3. **V. V. Lozin** and **D. S. Malyshev,** Vertex coloring of graphs with few obstructions, *Discrete Appl. Math.* **216**, 273–280 (2017).

This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 19–71–00005).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (1), 97–117 (2021), DOI 10.1134/S1990478921010099.

4. **P. A. Golovach, M. Johnson, D. Paulusma,** and **J. Song,** A survey on the computational complexity of coloring graphs with forbidden subgraphs, *J. Graph Theory* **84** (4), 331–363 (2017).
5. **K. Cameron, S. Huang, I. Penev,** and **V. Sivaraman,** The class of (P_7, C_4, C_5)-free graphs: Decomposition, algorithms, and χ-boundedness, *J. Graph Theory* **93** (4), 503–552 (2019).
6. **K. Cameron, M. da Silva, S. Huang,** and **K. Vuskovic,** Structure and algorithms for (cap, even hole)-free graphs, *Discrete Math.* **341**, 463–473 (2018).
7. **Y. Dai, A. Foley,** and **C. Hoàng,** On coloring a class of claw-free graphs: To the memory of Frédéric Maffray, *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.* **346**, 369–377 (2019).
8. **D. Fraser, A. Hamela, C. Hoàng, K. Holmes,** and **T. LaMantia,** Characterizations of $(4K_1, C_4, C_5)$-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **231**, 166–174 (2017).
9. **C. Hoàng** and **D. Lazzarato,** Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P}_5)$-free graphs and similar graph classes, *Discrete Appl. Math.* **186**, 105–111 (2015).
10. **T. Karthick, F. Maffray,** and **L. Pastor,** Polynomial cases for the vertex coloring problem, *Algorithmica* **81** (3), 1053–1074 (2017).
11. **D. S. Malyshev,** The coloring problem for classes with two small obstructions, *Optim. Lett.* **8** (8), 2261–2270 (2014).
12. **D. S. Malyshev,** Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem, *J. Comb. Optim.* **31** (2), 833–845 (2016).
13. **D. S. Malyshev,** The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures, *Discrete Appl. Math.* **47**, 423–432 (2018).
14. **D. S. Malyshev** and **O. O. Lobanova,** Two complexity results for the vertex coloring problem, *Discrete Appl. Math.* **219**, 158–166 (2017).
15. **D. V. Gribanov, D. S. Malyshev,** and **D. B. Mokeev,** Efficient solvability of the weighted vertex coloring problem for some hereditary class of graphs with 5-vertex prohibitions, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **27** (3), 71–87 (2020) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **14** (3), 480–489 (2020)].
16. **M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour,** and **R. Thomas,** The strong perfect graph theorem, *Ann. Math.* **164**, 51–229 (2006).
17. **M. Grötschel, L. Lovász,** and **A. Schrijver,** Polynomial algorithms for perfect graphs, *Ann. Discrete Math.* **21**, 325–356 (1984).

Olga O. Razvenskaya
Dmitriy S. Malyshev

Received April 29, 2020
Revised November 3, 2020
Accepted November 5, 2020