ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2021. Т. 28, № 1. С. 5–14

УДК 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2021.28.693

О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ПОМЕЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ k-ЦИКЛИЧЕСКИХ 2-СВЯЗНЫХ ГРАФОВ

В. А. Воблый

Всероссийский институт научной и технической информации РАН,
ул. Усиевича, 20, 125190 Москва, Россия
E-mail: vitvobl@yandex.ru

Аннотация. Получена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических n-вершинных 2-связных графов, а также найдена соответствующая асимптотика при большом числе вершин и фиксированном числе k. При равномерном распределении вероятностей найдена асимптотическая формула для вероятности того, что случайный k-циклический n-вершинный 2-связный граф с большим числом вершин при фиксированном числе k является последовательно-параллельным графом. Табл. 1, библиогр. 11.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, последовательно-параллельный граф, k-циклический граф, асимптотика, случайный граф.

Введение

Рассматриваются неориентированные простые связные графы.

Определение 1 [1]. *Последовательно-параллельным* графом называется граф, не содержащий подразбиения полного графа K_4.

Определение 2. *Цикломатическим числом* (*циклическим рангом*) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом рёбер графа и числом его вершин. *k-Циклический граф* — это граф с равным k цикломатическим числом.

Последовательно-параллельные графы используются при построении надёжных коммуникационных сетей [2].

В [1] найдена асимптотика для числа помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [3] перечислены помеченные последовательно-параллельные связные и 2-связные графы по числу вершин. Число помеченных последовательно-параллельных трициклических и тетрациклических 2-связных графов с заданным числом вершин найдено в [4] и [5] соответственно.

В статье получена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических 2-связных графов с заданным числом вершин, а также асимптотика для числа таких графов с большим количеством вершин при фиксированном k. При равномерном вероятностном распределении найдена вероятность того, что случайный n-вершинный k-циклический 2-связный граф при фиксированном k и $n \to \infty$ является последовательно-параллельным графом.

1. Перечисление графов

Теорема 1. *Число $B_k(n)$ помеченных последовательно-параллельных k-циклических 2-связных графов с n вершинами при $k \geqslant 1$ и $n \geqslant k+2$ равно*

$$B_k(n) = \frac{n!}{2} \sum_{i=k}^{n-2} \sum_{j=n+k-2}^{n+i-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-2}}{i!} \binom{n-3}{i-1} \binom{n+i-2}{j} \binom{j+1}{n+k-1}.$$

Доказательство. Пусть $b_{n,m}$ — число помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с n вершинами и m рёбрами,

$$B(x,y) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{n,m} y^m \frac{x^n}{n!}, \quad \frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m b_{n,m} y^{m-1} \frac{x^n}{n!}.$$

— соответствующие экспоненциальные производящие функции. Так как цикломатическое число равно $k = m - n + 1$, имеем $m = n + k - 1$ и

$$B_k(n) = b_{n,n+k-1} = \frac{n!}{n+k-1} [x^{-1} y^{-1}] \, \frac{\partial B(x,y)}{\partial y} x^{-n-1} y^{-n-k+1}.$$

Известны соотношения [1]

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2(1 + D(x,y))}{2(1+y)}, \quad \ln\Big(\frac{1 + D(x,y)}{1+y}\Big) = \frac{x D^2(x,y)}{1 + x D(x,y)}.$$

Пусть $t = \ln((1+D)/(1+y))$. Тогда

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{2} e^t, \quad D = (1+y)e^t - 1,$$

$$x = \frac{t}{D(D-t)} = \frac{t}{((1+y)e^t - 1)((1+y)e^t - t - 1)}.$$

Известна формула для коэффициентов разложения аналитической функции $f(t)$ в ряд по степеням другой аналитической функции $w(t)$

(ряд Бурмана — Лагранжа) [6, с. 418–419]:

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n(t), \quad d_n = \frac{1}{n}[t^{-1}]\frac{f'(t)}{w^n(t)}, \quad n \geqslant 1.$$

В нашем случае имеем (y — параметр)

$$f(t) = e^t, \quad x = \frac{t}{((1+y)e^t-1)((1+y)e^t-t-1)} = w(t), \quad d_0 = f(0) = 1,$$

$$d_n(y) = \frac{1}{n}[t^{-1}]e^t((1+y)e^t-1)^n((1+y)e^t-t-1)^n t^{-n}, \quad n \geqslant 1,$$

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2}{2}e^t = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\sum_{p=1}^{\infty} d_p(y)x^p,$$

$$B_k(n) = \frac{n!}{2(n+k-1)}[x^{-1}y^{-1}]\sum_{p=1}^{\infty} d_p(y)x^{p+2-n-1}y^{-n-k+1}$$

$$= \frac{n!}{2(n+k-1)}[y^{-1}]d_{n-2}(y)y^{-n-k+1},$$

$$B_k(n) = \frac{n!}{2(n+k-1)(n-2)}[y^{-1}t^{-1}]e^t((1+y)e^t-1)^{n-2} \times((1+y)e^t-t-1)^{n-2}t^{2-n}y^{1-n-k}. \qquad (1)$$

Обозначим $N = n!/(2(n+k-1)(n-2))$. С помощью формулы бинома Ньютона и разложения в ряд для экспоненты получим

$$B_k(n) = N[t^{-1}y^{-1}]e^t\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(-t)^{n-2-i}((1+y)e^t-1)^{n+i-2}t^{2-n}y^{1-n-k}$$

$$= N[t^{-1}y^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n+i-2}{j}(1+y)^j e^{(j+1)t}$$

$$\times(-1)^{n+i-2-j}t^{-i}y^{1-n-k} = N[t^{-1}y^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n-2}{i}\binom{n+i-2}{j}(-1)^j$$

$$\times(1+y)^j\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(j+1)^p}{p!}t^{p-i}y^{1-n-k} = N[y^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n-2}{i}\binom{n+i-2}{j}$$

$$\times(-1)^j(1+y)^j\frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!}y^{1-n-k} = N[y^{-1}]\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{n+i-2}\binom{n-2}{i}\binom{n+i-2}{j}$$

$$\times(-1)^j \frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!} \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} y^{s-n-k+1} = N \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i-2} \binom{n-2}{i} \binom{n+i-2}{j}$$
$$\times \binom{j}{n+k-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

$$B_k(n) = \frac{n!}{2(n+k-1)(n-2)} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n+i-2} \binom{n-2}{i} \binom{n+i-2}{j}$$
$$\times \binom{j}{n+k-2} (-1)^j \frac{(j+1)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Учитывая равенства для биномиальных коэффициентов

$$\frac{1}{n+k-1} \binom{j}{n+k-2} = \frac{1}{j+1} \binom{j+1}{n+k-1},$$
$$\frac{1}{n-2} \binom{n-2}{i} = \frac{1}{i} \binom{n-3}{i-1},$$

получим утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Заметим, что в [7] другим методом получена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков (2-связных графов) с заданным числом вершин, однако она имеет более сложный вид.

В табл. 1 представлены числа $B_k(n)$, вычисленные с помощью теоремы 1 и пакета программ Maple.

Таблица 1

n	4	5	6	7	8	9	10
$B_2(n)$	6	70	720	7560	84000	997920	12700800
$B_3(n)$	0	70	1815	35070	624120	10946880	194745600
$B_4(n)$	0	0	1215	55461	1722840	46312560	1171648800
$B_5(n)$	0	0	—	27951	1977388	89940312	3394833120

Отметим, что в «Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей» Слоэна [8] отсутствуют данные о числе помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданными числом вершин и цикломатическим числом.

2. Асимптотика и вероятность

Теорема 2. *Для числа $B_k(n)$ помеченных последовательно-параллельных k-циклических 2-связных графов с n вершинами и фиксированным числом $k \geqslant 1$ при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$B_k(n) \sim \frac{n!\, n^{3k-4}}{(k-1)!(2k-1)!2^k}.$$

Доказательство. Для $B_k(n)$ используем выражение (1). Выделяя слагаемые с y с помощью бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned}B_k(n) &= N[y^{-1}t^{-1}]e^t(ye^t + e^t - 1)^{n-2}(ye^t + e^t - t - 1)^{n-2}t^{2-n}y^{1-n-k}\\ &= N[y^{-1}t^{-1}]e^t \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} y^i e^{it}(e^t - 1)^{n-2-i}\\ &\quad\times \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (e^t - t - 1)^j y^{n-2-j} e^{(n-2-j)t} t^{2-n} y^{1-n-k}.\end{aligned}$$

Вычисляя вычет по y, найдём $j = i - k$ и

$$B_k(n) = N[t^{-1}] \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} \binom{n-2}{i-k} e^{(n+k-1)t}(e^t-1)^{n-2-i}(e^t-t-1)^{i-k}t^{2-n}.$$

Так как $f(t) = e^{(n+k-1)t}(e^t - 1)^{n-2-i}(e^t - t - 1)^{i-k}t^{2-n} \sim 2^{k-i}t^{i-2k}$ при $t \to 0$, вычет от неё будет равен 0 при $i \geqslant 2k$ и верхний предел в сумме можно заменить на $2k - 1$.

Для нецентральных чисел Стирлинга 2-го рода $S(n,k,p)$ и присоединённых чисел Стирлинга 2-го рода $b(n,k)$ известны производящие функции [9, с. 314, 316, 324, 325]

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k,p)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}e^{pz}(e^z - 1)^k, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^z - z - 1)^k.$$

С помощью этих разложений получим

$$\begin{aligned}B_k(n) = N[t^{-1}] \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{n-2}{i} \binom{n-2}{i-k} \sum_{r=0}^{\infty} &(n-2-i)!S(r, n-2-i, n+k-1)\\ &\times \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!}(i-k)!b(s, i-k)\frac{t^s}{s!}t^{2-n}.\end{aligned}$$

Вычисляя вычет по t, найдём $s = n - r - 3$,

$$B_k(n) = N \sum_{i=k}^{2k-1} \binom{n-2}{i} \binom{n-2}{i-k} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n-2-i)!(i-k)!}{r!(n-r-3)!} \times S(r, n-2-i, n+k-1) b(n-r-3, i-k).$$

Так как $S(n,k,p) = 0$ при $n < k$ и $b(n,k) = 0$ при $n < 2k$, имеем

$$B_k(n) = N \sum_{i=k}^{2k-1} \sum_{r=n-2-i}^{n-2i+2k-3} \binom{n-2}{i} \binom{n-2}{i-k} \frac{(n-2-i)!(i-k)!}{r!(n-r-3)!} \times S(r, n-2-i, n+k-1) b(n-r-3, i-k).$$

После замены индекса суммирования $m = n - 2 - i + k - r$ получим

$$B_k(n) = N \sum_{i=k}^{2k-1} \sum_{m=i-k+1}^{k} \binom{n-2}{i} \binom{n-2}{i-k} \times b(i+m-k-1, i-k) S(n-2-i+k-m, n-2-i, n+k-1) \times \frac{(n-2-i)!(i-k)!}{(n-2-i+k-m)!(i+m-k-1)!}.$$

Для чисел $S(n+k, n, p)$ при фиксированном k и $n \to \infty$ известна асимптотика [10]

$$S(n+k, n, p) \sim \binom{n+k}{k} \left(p + \frac{n}{2}\right)^k.$$

Так как $\frac{(n+k)!}{n!} \sim n^k$, $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ при фиксированном k и $n \to \infty$, имеем

$$B_k(n) \sim N \sum_{i=k}^{2k-1} \sum_{m=i-k+1}^{k} \frac{n^i}{i!} \frac{n^{i-k}}{(i-k)!} \times \frac{n^{m-k}(i-k)!}{(i+m-k-1)!} \frac{(n-2-i+k-m)^{k-m}}{(k-m)!} \times \left(n + k - 1 + \frac{n-2-i+k-m}{2}\right)^{k-m} b(i+m-k-1, i-k)$$
$$\sim N \sum_{i=k}^{2k-1} \sum_{m=i-k+1}^{k} \frac{n^{2i-m} b(i+m-k-1, i-k)}{i!(i+m-k-1)!(k-m)!} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-m}.$$

При фиксированном k максимальная степень n в многочлене для $B_k(n)$ достигается при минимуме m, равном $i - k + 1$, и максимуме i, равном $2k - 1$, поэтому получим

$$B_k(n) \sim N \sum_{i=k}^{2k-1} \frac{n^{i+k-1} b(2i-2k, i-k)}{i!(2i-2k)!(2k-i-1)!} \left(\frac{3}{2}\right)^{2k-1-i}$$
$$\sim N \frac{n^{3k-2} b(2k-2, k-1)}{(2k-1)!(2k-2)!}.$$

Из производящей функции для $b(n,k)$ найдём

$$b(2n,n) = [z^{-2n}]\frac{(2n)!}{n!}(e^z - z - 1)^n = [z^{-2n}]\frac{(2n)!}{n!}\left(\frac{z^2}{2} + \dots\right)^n = \frac{(2n)!}{n!2^n},$$

поэтому окончательно получим

$$B_k(n) \sim \frac{n!}{n^2}\frac{n^{3k-2}}{(2k-1)!(2k-2)!}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!2^{k-1}} \sim \frac{n!n^{3k-4}}{(k-1)!(2k-1)!2^{k-1}}.$$

Теорема 2 доказана.

Зададим на множестве помеченных k-циклических 2-связных графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 1. *Пусть $P_k(n)$ равно вероятности того, что помеченный k-циклический 2-связный граф с n вершинами является последовательно-параллельным графом. Тогда*

$$P_k(n) \sim \frac{(3k-4)!}{b_{k-1}(k-1)!(2k-1)!2^k}$$

при фиксированном $k \geqslant 3$ и $n \to \infty$, где b_k — коэффициенты Райта,

$$b_1 = \frac{1}{12}, \quad b_2 = \frac{5}{48}, \quad B_k = \sum_{s=1}^{k-1} s(k-s) b_s b_{k-s}, \quad k \geqslant 2,$$
$$2(k+1)b_{k+1} = (3k+2)(kb_k + 3B_k), \quad k \geqslant 2.$$

Доказательство. Пусть $u(n, n+k)$ — число помеченных 2-связных графов с n вершинами и $n+k$ рёбрами. Райт нашёл асимптотику при $n \to \infty$ и $2 \leqslant k = o(\sqrt{n})$ [11]:

$$u(n, n+k) \sim b_k \frac{(n+3k-1)}{(3k-1)!}.$$

Отметим, что связный k-циклический граф с n вершинами имеет $n + k - 1$ рёбер, поэтому при фиксированном k и $n \to \infty$ получим

$$P_k(n) = \frac{B_k(n)}{u(n, n+k-1)} \sim \frac{n!n^{3k-4}(3k-4)!}{(k-1)!(2k-1)!2^k b_{k-1}(n+3k-4)!}$$
$$\sim \frac{(3k-4)!}{b_{k-1}(k-1)!(2k-1)!2^k}.$$

Следствие 1 доказано.

В частности, $P_3(n) \sim \frac{3}{5}$, $P_4(n) \sim \frac{3}{11}$, что совпадает с результатами, полученными другими методами в [4, 5]. Отметим, что все унициклические и бициклические 2-связные графы являются последовательно-параллельными графами ($P_1(n) = P_2(n) = 1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Comb. 2007. Vol. 28, No. 8. P. 2091–2105.
2. **Radhavan S.** Low-connectivity network design on series-parallel graphs // Networks. 2004. Vol. 43, No. 3. P. 163–176.
3. **Воблый В. А.** Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26, № 1. С. 20–32.
4. **Воблый В. А., Мелешко А. М.** О числе помеченных последовательно-параллельных трициклических блоков // Мат. XV Междунар. конф. «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения» (Тула, Россия, 28–31 мая 2018 г.). Тула: Изд-во ТГПУ, 2018. С. 168–170.
5. **Воблый В. А.** Число помеченных последовательно-параллельных тетрациклических блоков // Прикл. дискрет. математика. 2020. № 47. С. 57–61.
6. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
7. **Воблый В. А.** Явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков // Мат. заметки. 2020. Т. 108, вып. 4. С. 622–624.
8. The on-line encyclopedia of integer sequences. Highland Park, NJ: The OEIS Foundation, 2020. Available at `http://oeis.org` (accessed Oct. 27, 2020).
9. **Charalambides C. A.** Enumerative combinatorics. Boca Raton, FL: CRC Press, 2002. 609 p.
10. **Медведев Ю. И., Ивченко Г. И.** Асимптотическое представление конечных разностей от степенной функции в произвольной точке // Теория вероятностей и её применения. 1965. Т. 10, № 1. С. 151–156.
11. **Wright E. M.** The number of connected sparsely edged graphs. IV // J. Graph Theory. 1983. Vol. 7, No. 2. P. 219–229.

Воблый Виталий Антониевич

Статья поступила
11 июня 2020 г.
После доработки —
20 октября 2020 г.
Принята к публикации
22 октября 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2021. Vol. 28, No. 1. P. 5–14

UDC 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2021.28.693

ON THE ENUMERATION OF LABELED SERIES-PARALLEL k-CYCLIC 2-CONNECTED GRAPHS

V. A. Voblyi

All-Russian Institute for Scientific and Technical Information of RAS
20 Usievich Street, 125190 Moscow, Russia
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

Abstract. We deduce an explicit formula for the number of labeled series-parallel k-cyclic n-vertex 2-connected graphs and find the corresponding asymptotics for a large number of vertices and a fixed k. Under the uniform probability distribution, an asymptotic formula is obtained for the probability that a random n-vertex k-cyclic 2-connected graph with a large number of vertices and a fixed k is a series-parallel graph. Tab. 1, bibliogr. 11.

Keywords: enumeration, labeled graph, series-parallel graph, k-cyclic graph, asymptotics, random graph.

REFERENCES

1. **M. Bodirsky, O. Gimenez, M. Kang,** and **M. Noy,** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs, *Eur. J. Comb.* **28** (8), 2091–2105 (2007).
2. **S. Radhavan,** Low-connectivity network design on series-parallel graphs, *Networks* **43** (3), 163–176 (2004).
3. **V. A. Voblyi,** The second Riddell relation and its consequences, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **26** (1), 20–32 (2019) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **13** (1), 168–174 (2019)].
4. **V. A. Voblyi** and **A. M. Meleshko,** On the number of labeled series-parallel tricyclic blocks, in *Proc. XV Int. Conf. "Algebra, number theory, and discrete geometry. Current problems and applications," Tula, Russia, May 28-31, 2018,* (Izd. TGPU, Tula, 2018), pp. 168–170 [Russian].
5. **V. A. Voblyi,** The number of labeled tetracyclic series-parallel blocks, *Prikl. Diskretn. Mat.,* No. 47, 57–61 (2020) [Russian].
6. **M. A. Lavrentyev** and **B. V. Shabat,** Methods of the theory of functions of a complex variable (Nauka, Moscow, 1965) [Russian].

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (1), 169–174 (2021), DOI 10.1134/S1990478921010154.

7. **V. A. Voblyi,** Explicit formula for the number of labeled series-parallel k-cyclic blocks, *Mat. Zametki* **108** (4), 622-624 (2020) [Russian] [*Math. Notes* **108** (4), 608-610 (2020)].
8. The on-line encyclopedia of integer sequences, (The OEIS Foundation, Highland Park, NJ, 2020). Available at `http://oeis.org` (accessed Oct. 27, 2020).
9. **C. A. Charalambides,** Enumerative combinatorics (CRC Press, Boca Raton, FL, 2002).
10. **Yu. I. Medvedev** and **G. I. Ivchenko,** Asymptotic representations of finite differences of a power function at an arbitrary point, *Teor. Veroyatn. Primen.*, **10** (1), 151–156 (1965) [Russian] [*Theory Probab. Appl.*, **10** (1), 139–144 (1965)].
11. **E. M. Wright,** The number of connected sparsely edged graphs. IV, *J. Graph Theory* **7** (2), 219–229 (1983).

Vitaly A. Voblyi

Received June 11, 2020
Revised October 20, 2020
Accepted October 22, 2020