ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2021. Т. 28, № 1. С. 48–67

УДК 519.1+519.8 DOI 10.33048/daio.2021.28.697

# АФФИННАЯ ОБОЛОЧКА МНОГОГРАННИКА РАСПИСАНИЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ ИДЕНТИЧНЫХ ТРЕБОВАНИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ

*Р. Ю. Симанчёв*[1, 2, a], *П. В. Соловьёва*[1, b], *И. В. Уразова*[1, c]

[1] Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, 644077 Омск, Россия
[2] Омский научный центр СО РАН,
пр. Карла Маркса, 15, 644024 Омск, Россия
E-mail: [a] `osiman@rambler.ru`, [b] `polinochka.chervonnykh@mail.ru`,
[c] `urazovainn@mail.ru`

**Аннотация.** Рассмотрены некоторые полиэдральные свойства множества расписаний обслуживания идентичных требований с предшествованиями параллельными приборами. Прерывания в обслуживании требований запрещены. Предложена формализация множества расписаний как семейства подмножеств конечного множества, определён многогранник расписаний. Найдены аффинная оболочка и размерность этого многогранника, условия опорности неравенств, определяющих его полиэдральную релаксацию. Табл. 1, ил. 2, библиогр. 20.

**Ключевые слова:** расписание, многогранник, аффинная оболочка, опорное неравенство.

## Введение

Многие экстремальные комбинаторные задачи могут быть формализованы в следующей постановке. Среди множеств некоторого семейства подмножеств $\mathcal{H} \subset 2^E$ конечного множества $E$, на котором задан аддитивный вещественный функционал $c\colon E \to R$, найти множество, максимизирующее (минимизирующее) функцию $c(S) = \sum\limits_{e \in S} c(e)$, $S \subseteq E$. Подобную формализацию допускают комбинаторные задачи, типичные для таких

Исследование выполнено по государственному заданию Омского научного центра СО РАН в соответствии с Программой ФНИ ГАН на 2013–2020 гг. (номер госрегистрации проекта в системе ЕГИСУ НИОКТР АААА–А17–117041210229–2) и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–07–00599).

областей, как стратегическое и сетевое планирование, маршрутизация и логистика, кластерный анализ и др. Нас интересует полиэдральная структура таких задач, базовым объектом которой является выпуклая оболочка векторов инциденций множеств из $\mathcal{H}$. Принципиальная возможность использования свойств евклидова пространства для анализа и решения комбинаторных задач вытекает из классической теоремы Вейля — Минковского, согласно которой выпуклая оболочка конечного числа точек в $R^n$ (многогранник) может быть представлена как множество решений системы линейных уравнений и неравенств с $n$ переменными (полиэдр). Исследование полиэдральной структуры экстремальной комбинаторной задачи подразумевает изучение аффинной оболочки многогранника допустимых решений, установление вида линейных неравенств, порождающих грани многогранника, исследование смежности его вершин, решётки граней, свойств релаксационных полиэдров и т. д. На полиэдральных свойствах основываются методы решения задач, в первую очередь процедуры отсечения и процедуры ветвей и границ. Наиболее впечатляющие рекорды (по размерности) при точном решении индивидуальных экстремальных комбинаторных задач получены именно с применением полиэдральных постановок (см., например, [1–7] и др.)

Аффинная оболочка многогранника, будучи аффинным подпространством евклидова пространства, описывается системой линейных уравнений. Знание аффинной оболочки многогранника задачи позволяет определить его размерность, что необходимо для построения опорных неравенств, доказательства их фасетности, построения оценок числа итераций процедур отсечения.

Число работ, связанных с применением полиэдрального подхода к задачам теории расписаний, невелико. Результаты, касающиеся полиэдральных свойств некоторых задач теории расписаний, можно найти в [1, 8–17]. Невысокий интерес к полиэдральному анализу задач теории расписаний связан, на наш взгляд, в первую очередь с тем, что в них возникают серьёзные теоретические трудности уже на этапе формализации множества расписаний как семейства подмножеств конечного множества и представления целевой функции в виде линейного функционала.

В настоящей статье рассматриваются расписания обслуживания идентичных требований параллельными приборами, которые описываются следующими условиями. Требования множества $V$, $|V| = n$, обслуживаются $m \geqslant 3$ параллельными идентичными приборами. Все требования поступают в очередь на обслуживание одновременно (в момент времени $k = 0$) и имеют одинаковые (равные 1) длительности обслуживания. Запрещены прерывания в обслуживании требований. На множестве $V$ задано отношение частичного порядка $\triangleleft$, определяющее условия предшествования в обслуживании требований. Всякий порядок обслуживания

требований на множестве $V$, допустимый относительно частичного порядка $\lhd$, называется допустимым расписанием или просто расписанием. Мы рассматриваем расписания, в которых все работы завершаются к моменту времени $d$. При этом очевидно, что если $d$ будет слишком мало, то множество определённых выше расписаний может оказаться пустым. Это множество расписаний допускает следующую формализацию [18]. Расписанием называется такая функция $\sigma\colon V \to D = \{1, 2, \ldots, d\}$, что

(i) соотношение $i \lhd j$ влечёт неравенство $\sigma(i) < \sigma(j)$;

(ii) для любого $k \in D$ имеется не более $m$ требований $i \in V$ таких, что $\sigma(i) = k$.

Описанное множество расписаний является множеством допустимых решений ряда оптимизационных задач, которые определяются различными целевыми функциями такими, как, например, минимизация общего времени обслуживания всех требований, и минимизация суммарного взвешенного времени обслуживания всех требований.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 множество расписаний формализуется как семейство подмножеств конечного множества, строится многогранник расписаний и приводится его полиэдральная релаксация. Разд. 2 посвящён анализу структуры некоторого класса расписаний, заведомо существующих. Этот результат носит технический характер и необходим для построения аффинной оболочки многогранника расписаний (разд. 3) и доказательства опорности неравенств, описывающих полиэдральную релаксацию (разд. 4). Завершает статью заключение.

## 1. Расписания как семейство подмножеств конечного множества

Всякий частичный порядок на конечном множестве может быть описан с помощью ориентированного ациклического графа. Ациклический орграф, задающий частичный порядок на множестве требований $V$, будем обозначать буквой $G$. Через $V$ и $A$ будем обозначать множества его вершин и дуг соответственно. Вершины орграфа $G$ будем обозначать буквами $i$ или $j$. Дугу с началом в $i$ и концом в $j$ будем обозначать через $ij$. Путём в орграфе $G$ будем называть подграф, порождённый множеством вершин $i_1, i_2, \ldots, i_t$, удовлетворяющих условию $i_s i_{s+1} \in A$ для всех $s = 1, 2, \ldots, t-1$. Дуга $ij$ называется транзитивной, если в орграфе $G$ существует путь из $i$ в $j$, отличный от дуги $ij$. Исходя из определения расписания, будем далее полагать, что орграф $G$ не содержит транзитивных дуг. Чтобы исключить из рассмотрения тривиальный случай, будем полагать, что $G$ не является путём. Если никакие две вершины множества $U \subset V$ не связаны условиями предшествования, то такое множество $U$ будем называть независимым. Для дальнейшего изложения будем

пользоваться следующим представлением расписаний. Определим таблицу $E = V \times D$ как множество клеток $(i, k)$, полагая, что строки таблицы взаимно однозначно соответствуют вершинам $V$ графа предшествований $G$, а столбцы — моментам времени $D$. При этом порядок строк не имеет значения, а столбцы строго упорядочены, начиная с единицы. Пусть $V' \subset V$ и $D' \subset D$. Фрагментом $E(V', D')$ таблицы $E$ будем называть подтаблицу, образованную пересечением строк $V'$ и столбцов $D'$. Фрагментом множества $S \subset E$ назовём множество $S(V', D') = S \cap E(V', D')$. Если столбец $k$ не содержит клеток из множества $S \subset E$ (фрагмента $S(V', D')$), то будем говорить, что столбец $k$ пуст относительно множества $S$ (фрагмента $S(V', D')$ соответственно).

Расписанием будем называть подмножество клеток таблицы $E$ вида $\{(i, k) \in E \mid \sigma(i) = k\}$, где $\sigma$ — функция, удовлетворяющая условиям (i), (ii). Это подмножество клеток также будем обозначать через $\sigma \subseteq E$. При таком подходе и введённых выше обозначениях условие (ii) можно записать так: $|\sigma(V, \{k\})| \leqslant m$ для каждого $k \in D$. Семейство всех расписаний в $E$ обозначим через $\Sigma_d$. Если $(i, k) \in \sigma$, то будем говорить, что в расписании $\sigma$ вершина $i$ размещена в столбце $k$; если для двух клеток $(i, k), (j, l) \in \sigma$ имеет место неравенство $k < l$, то будем говорить, что в расписании $\sigma$ вершина $i$ размещена левее столбца $l$ (вершина $j$ — правее столбца $k$). Из наличия условий предшествования в обслуживании требований, задаваемых орграфом $G$, следует, что для всякой $i \in V$ имеются такие $k \in D$, что клетки $(i, k)$ заведомо не принадлежат никакому расписанию. Формализуем это соображение следующим образом.

Через $p_i$, $i \in V$, обозначим характеристику задачи, определяемую следующими условиями:

— для любого расписания $\sigma \in \Sigma_d$ выполняется

$$\{(i, 1), (i, 2), \dots, (i, p_i)\} \cap \sigma = \varnothing;$$

— существует расписание $\sigma_\star \in \Sigma_d$ такое, что $(i, p_i + 1) \in \sigma_\star$.

Через $q_i$, $i \in V$, обозначим характеристику задачи, определяемую такими условиями:

— для любого расписания $\sigma \in \Sigma_d$ выполняется

$$\{(i, d - q_i + 1), (i, d - q_i + 2), \dots, (i, d)\} \cap \sigma = \varnothing;$$

— существует расписание $\sigma_\star \in \Sigma_d$, такое, что $(i, d - q_i) \in \sigma_\star$.

Вообще говоря, при одном и том же графе $G$ и различных значениях $d$ характеристики $p_i$ и $q_i$ могут меняться, что обуславливается наличием ограничения на число приборов $m$.

Задача нахождения значений параметров $p_i$ и $q_i$ эквивалентна одной из широко известных задач теории расписаний, а именно минимизации

общего времени обслуживания всех требований:

$$\max_{i \in V} \sigma(i) \longrightarrow \min_{\sigma \in \Sigma_d} . \tag{1}$$

Действительно, если к графу предшествований $G$ добавить ещё одну вершину $i'$ и провести к ней дуги из всех вершин, имеющих нулевую полустепень исхода (антибаза, см. [19] ), то поиск $p_{i'}$ эквивалентен решению задачи минимизации общего времени обслуживания на графе $G$. Ясно, что аналогичное рассуждение справедливо и для параметра $q_i$. Отметим сразу, что задача (1), которая послужила катализатором настоящей работы, NP-трудна при произвольном числе приборов $m$. Если $m$ фиксировано, то сложностной статус задачи (1) на сегодняшний день неизвестен [20]. Этот факт в определённой степени оправдывает введение параметров $p_i$ и $q_i$.

Для каждой вершины $i \in V$ определим множество $D_i = \{p_i + 1, p_i + 2, \ldots, d - q_i\} \subset D$. Из определения параметров $p_i$ и $q_i$ следует, что вершина $i \in V$ не может быть размещена за пределами этого множества ни в каком расписании. Это означает, что множество клеток таблицы $E$ может быть сокращено до множества $E_d = \{(i,k) \mid i \in V,\ k \in D_i\}$. Ясно, что $\sigma \subset E_d$ для любого $\sigma \in \Sigma_d$. Множество $E_d$ будем называть базовым. Имея множества $D_i$, определим для каждого $k \in D$ множество $V_k = \{i \in V \mid k \in D_i\}$.

Сопоставим базовому множеству $E_d$ евклидово пространство $R^{E_d}$ размерности $|E_d| = \sum\limits_{i \in V} |D_i|$ посредством взаимно однозначного соответствия между множеством $E_d$ и множеством осей координат пространства $R^{E_d}$. Иными словами, $R^{E_d}$ есть пространство вектор-столбцов, координаты которых индексированы элементами (клетками) множества $E_d$. Всякому $S \subseteq E_d$ сопоставим его вектор инциденций $x^S \in R^{E_d}$ с координатами $x^S_{ik} = 1$ при $(i,k) \in S$ и $x^S_{ik} = 0$ при $(i,k) \notin S$. Многогранником расписаний назовём множество

$$P(\Sigma_d) = \mathrm{conv}\{x^\sigma \in R^{E_d} \mid \sigma \in \Sigma_d\},$$

где conv — обозначение выпуклой оболочки точек в $R^{E_d}$.

В работах [1,15] показано, что $(0,1)$-вектор $x \in R^{E_d}$ является вектором инциденций расписания тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующей системе линейных уравнений и неравенств:

$$\sum_{k \in D_i} x_{ik} = 1, \quad i \in V, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in V_k} x_{ik} \leqslant m, \quad k \in D, \tag{3}$$

$$x_{ik} \leqslant \sum_{\substack{l\in D_j,\\ l>k}} x_{jl}, \quad ij \in A,\ k \in D_i, \tag{4}$$

$$x_{ik} \geqslant 0, \quad i \in V,\ k \in D_i. \tag{5}$$

Полиэдр, определяемый ограничениями (2)–(5), будем обозначать через $M_d$. Из приведённого результата следует, что $M_d$ является полиэдральной релаксацией многогранника $P(\Sigma_d)$ и не содержит целочисленных точек, отличных от векторов инциденций расписаний, или, что то же самое, $\operatorname{vert} P(\Sigma_d) = M_d \cap Z^{E_d}$, где vert — обозначение для множества вершин многогранника, $Z^{E_d}$ — целочисленная решётка в пространстве $R^{E_d}$. Кроме того, $\operatorname{vert} P(\Sigma_d) \subseteq \operatorname{vert} M_d$, так как $P(\Sigma_d)$ и $M_d$ лежат в единичном гиперкубе пространства $R^{E_d}$.

Семейство расписаний $\Sigma_d$ на фиксированном графе предшествований $G$ можно рассматривать при различных значениях параметра $d$. Легко заметить, что при различных $d$ семейства $\Sigma_d$ удовлетворяют условию монотонности в том смысле, что при $d < d'$ имеет место включение $\Sigma_d \subset \Sigma_{d'}$. При этом ясно, что, например, для задачи (1) множества оптимальных расписаний относительно $\Sigma_d$ и $\Sigma_{d'}$ совпадают (если они непусты). В этой связи особое место занимает минимально возможное значение $d = d_{\min}$, которое определяется двумя условиями: $\Sigma_{d_{\min}-1} = \varnothing$ и $\Sigma_{d_{\min}} \neq \varnothing$. Заметим, что по сути $d_{\min}$ является оптимальным значением целевой функции задачи (1). Далее в статье всюду будем полагать, что $d = n$, поскольку множество $\Sigma_n$ заведомо непусто при любом графе предшествований на $n$ вершинах.

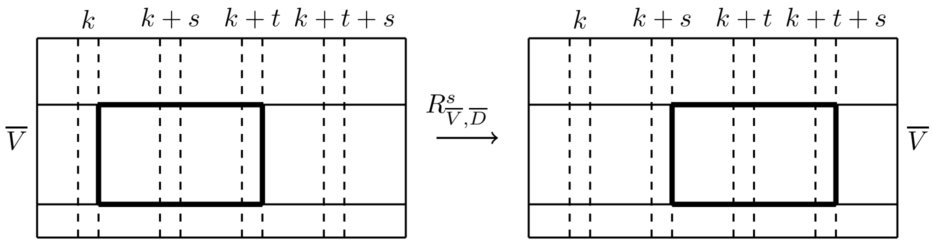


*Рис. 1*

Пусть $S \subset E$, $\overline{V} \subseteq V$, $\overline{D} = \{k+1, k+2, \ldots, k+t\}$ и столбцы $\{k+t+1, k+t+2, \ldots, k+t+s\}$ пустые относительно фрагмента $S(\overline{V}, D)$. Определим множество клеток $S' \subset E$ условиями

$$x_{il}^{S'} = 0, \quad i \in \overline{V},\ l = k+1, k+2, \ldots, k+s,$$

$$x_{il}^{S'} = x_{il-s}^{S}, \quad i \in \overline{V},\ l = k+s+1, k+s+2, \ldots, k+t+s,$$

$$x_{il}^{S'} = x_{il}^{S}, \quad (i,l) \notin E(\overline{V}, \{k+1, k+2, \ldots k+t+s\}).$$

Такой переход от $S$ к $S'$ будем обозначать через $S' = R^s_{\overline{V},\overline{D}}(S)$ — сдвиг фрагмента $S(\overline{V},\overline{D})$ множества $S$ на $s$ столбцов вправо (рис. 1). Аналогичный сдвиг на $s$ столбцов влево будем обозначать через $S' = L^s_{\overline{V},\overline{D}}(S)$. Ясно, что

$$R^s_{\overline{V},\overline{D}}\big(L^s_{\overline{V},\overline{D}}(S)\big) = L^s_{\overline{V},\overline{D}}\big(R^s_{\overline{V},\overline{D}}(S)\big) = S.$$

Отметим важное свойство сдвига: если $\sigma \in \Sigma_d$ и $\overline{V} = V$, то множества $R^s_{V,\overline{D}}(\sigma)$ и $L^s_{V,\overline{D}}(\sigma)$ также будут расписаниями из $\Sigma_d$. И наконец, в силу того, что $\Sigma_d \subset \Sigma_{d+s}$, операцию $\sigma' = R^s_{V,\overline{D}}(\sigma)$ при $k+t=d$ будем также рассматривать как возможную, поскольку столбцы $d+1, d+2, \ldots, d+s$ можно считать пустыми относительно расписания $\sigma$ в базовом множестве $E_{d+s}$.

## 2. Основная лемма

В настоящем разделе будет доказана лемма технического характера, которая станет основой дальнейших конструкций при исследовании полиэдральных свойств множества расписаний.

Для подмножеств $U_1, U_2 \subset V$ будем писать $U_1 \lhd U_2$, если выполняются следующие условия:

1) $U_1 \cap U_2 = \varnothing$,
2) для любой вершины $i \in U_1$ найдётся $j \in U_2$ такая, что $i \lhd j$,
3) не существует $j \in U_2$ такой, что $j \lhd i$ для какой-либо $i \in U_1$.

Кроме того, нам понадобятся следующие обозначения. Для $i \in V$ и $U \subset V$ определим следующие подмножества вершин:

$$N_-(i) = \{j \in V \mid j \lhd i\}, \quad N_+(i) = \{j \in V \mid i \lhd j\},$$
$$N_-(U) = \bigcup_{i\in U} N_-(i), \quad N_+(U) = \bigcup_{i\in U} N_+(i),$$
$$W(U) = V \setminus (U \cup N_-(U) \cup N_+(U)).$$

Нетрудно увидеть, что если $U$ независимо, то введённые множества обладают следующими свойствами.

**Свойство 1.** $N_-(U) \lhd U$, $U \lhd N_+(U)$.

**Свойство 2.** *Любые две вершины $i \in N_-(U)$ ($i \in N_+(U)$) и $j \in W(U)$ либо не связаны отношением предшествования, либо $i \lhd j$ ($j \lhd i$ соответственно).*

**Свойство 3.** *Любые две вершины $i \in U$ и $j \in W(U)$ не связаны отношением предшествования.*

Расширим определения характеристик $p_i$ и $q_i$ на подмножества множества $V$. Пусть $\sigma \in \Sigma_n$, $U \subset V$. Положим

$$T_\sigma(U) = \Big\{k \in D \mid \sum_{i \in U} x^\sigma_{ik} > 0\Big\}$$

— множество столбцов, в которых в расписании $\sigma$ размещены вершины множества $U$. Обозначим

$$p_U = \min\{k \mid \exists\, \sigma \in \Sigma_d \colon T_\sigma(N_-(U)) \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}\},$$
$$q_U = \min\{k \mid \exists\, \sigma \in \Sigma_d \colon T_\sigma(N_+(U)) \subseteq \{d-k+1, d-k+2, \ldots, d\}\}.$$

Аналогично тому, как это было выше, определим множество $D_U = \{p_U + 1, p_U + 2, \ldots, d - q_U\} \subset D$. Отметим, что, вообще говоря, множество $D_U$ может оказаться пустым. Однако, как будет показано ниже, если $U$ независимое и $d = n$, то $D_U \neq \varnothing$. Кроме того, легко проверить, что если $d = n$ и $U$ состоит из одной вершины $i$, то введённые характеристики $p_U$, $q_U$ и $D_U$ совпадают с определёнными выше характеристиками $p_i$, $q_i$ и $D_i$.

**Лемма 1.** *Пусть $U \subset V$ — независимое множество и $d = n$. Тогда существует расписание $\sigma \in \Sigma_n$, обладающее следующими свойствами:*
1) $T_\sigma(N_-(U)) = \{1, 2, \ldots, p_U\}$,
2) $T_\sigma(U \cup W(U)) \subseteq D_U$,
3) $T_\sigma(N_+(U)) = \{n - q_U + 1, n - q_U + 2, \ldots, n\}$.

*При этом вершины множества $U$ могут быть расположены в столбцах $D_U$ произвольно с учётом ограничений* (3) *на число вершин в столбце.*

Доказательство. Рассмотрим расписание $\sigma_1 \in \Sigma_n$, для которого $T_{\sigma_1}(N_-(U)) \subseteq \{1, 2, \ldots, p_U\}$. Предположим, что найдётся столбец $l \in \{1, 2, \ldots, p_U\}$, пустой относительно фрагмента $\sigma_1(N_-(U), \{1, 2, \ldots, p_U\})$. Обозначим $\overline{D} = \{l+1, l+2, \ldots, p_U\}$ и положим

$$S_1 = L^1_{N_-(U), \overline{D}}(\sigma_1) \subset E(N_-(U), \{1, 2, \ldots, p_U - 1\}).$$

При этом условия предшествования между вершинами множества $N_-(U)$ не нарушатся. Расширим множество $S_1$ на всю таблицу $E$, положив

$$S_1 \cap (E \setminus E(N_-(U), \{1, 2, \ldots, p_U - 1\})) = \varnothing.$$

Если фрагмент $S_1(V, \{1, 2, \ldots, p_U - 1\})$ полученного множества $S_1$ имеет пустой столбец, то повторим аналогичный сдвиг влево на один столбец. Продолжая этот процесс, придём к ситуации, когда фрагмент $S_1(V, \{1, 2, \ldots, p_U - s_1\})$, где $s_1$ — число пустых столбцов в исходном фрагменте $\sigma_1(N_-(U), \{1, 2, \ldots, p_U\})$, не будет содержать пустых относительно $E(V, \{1, 2, \ldots, p_U - s_1\})$ столбцов. При этом столбцы с номерами $p_U - s_1 + 1$,

$p_U - s_1 + 2, \ldots, p_U$ будут пустыми относительно множества $S_1$. Отметим, что все вершины множества $N_-(U)$ будут размещены в столбцах $1, 2, \ldots, p_U - s_1$ без нарушения условий предшествования.

Пусть $\sigma_2 \in \Sigma_n$ — такое расписание, что $T_{\sigma_2}(N_+(U)) \subseteq \{n - q_U + 1, d - q_U + 2, \ldots, n\}$. Если найдётся столбец $l \in \{n - q_U + 1, d - q_U + 2, \ldots, n\}$, пустой относительно фрагмента $\sigma_2(N_+(U), \{n - q_U + 1, n - q_U + 2, \ldots, n\})$, то, обозначив $\overline{D} = \{n - q_U + 1, n - q_U + 2, \ldots, n - q_U + l - 1\}$, положим

$$S_2 = R^1_{N_+(U), \overline{D}}(\sigma_2) \subset E(N_+(U), \{n - q_U + 2, d - q_U + 3, \ldots, n\}).$$

Вновь расширим множество $S_2$ на всю таблицу $E$ при условии

$$S_2 \cap (E \setminus E(N_+(U), \{n - q_U + 2, n - q_U + 3, \ldots, n\})) = \varnothing.$$

Если полученный фрагмент $S_2(V, \{n - q_U + 2, d - q_U + 3, \ldots, n\})$ имеет пустой столбец, то повторим аналогичный сдвиг вправо на один столбец. Продолжая, придём к ситуации, когда фрагмент $S_2(V, \{n - q_U + 1 + s_2, n - q_U + 2 + s_2, \ldots, n\})$ не будет содержать пустых столбцов относительно $E(V, \{n - q_U + 1 + s_2, d - q_U + 2 + s_2, \ldots, n\})$, а столбцы с номерами $n - q_U + 1$, $n - q_U + 2, \ldots, n - q_U + s_2$ будут пустыми относительно $S_2$. При этом все вершины множества $N_+(U)$ будут размещены в столбцах $n - q_U + 1 + s_2$, $n - q_U + 2 + s_2, \ldots, n$ с сохранением условий предшествования.

Итак, у нас есть два множества

$$S_1 \subseteq E(N_-(U), \{1, 2, \ldots, p_U - s_1\}),$$
$$S_2 \subseteq E(N_+(U), \{n - q_U + 1 + s_2, n - q_U + 2 + s_2, \ldots, n\}),$$

причём вершины $N_-(U) \cup N_+(U)$ размещены с соблюдением частичного порядка и ограничений на число приборов (3). Таким образом, для размещения вершин $U \cup W(U)$ в таблице $E$ у нас имеется

$$n - (p_U - s_1) - (q_U - s_2) = |D_U| + s_1 + s_2$$

пустых столбцов. Так как фрагменты

$$S_1(N_-(U), \{1, 2, \ldots, p_U - s_1\}),$$
$$S_2(N_+(U), \{n - q_U + 1 + s_2, n - q_U + 2 + s_2, \ldots, n\})$$

не содержат пустых столбцов, то $|N_-(U)| \geqslant p_U - s_1$ и $|N_+(U)| \geqslant q_U - s_2$. Следовательно, число неразмещённых вершин $U \cup W(U)$ не превышает числа столбцов, пустых относительно множества $S_1 \cup S_2$. В частности, $|W(U)| < |D_U| + s_1 + s_2$. Отсюда и из свойства 2 следует, что вершины из $W(U)$ могут быть размещены во фрагменте

$$E(W(U), \{p_U - s_1 + 1, p_U - s_1 + 2, \ldots, n - q_U + s_2\}$$

с выполнением условий предшествования. Получаем множество $S_3$.

И наконец, множество $U$ в силу его независимости и свойств 1 и 3 может быть размещено во фрагменте

$$E(U, \{p_U - s_1 + 1, p_U - s_1 + 2, \ldots, n - q_U + s_2\})$$

в произвольном порядке, лишь с ограничением (3) на число вершин в столбце, что тоже легко выполняется с учётом неравенства $|U|+|W(U)| \leqslant |D_U| + s_1 + s_2$. Это множество клеток обозначим через $S_4$.

Легко увидеть, что $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \in \Sigma_n$. Остаётся заметить, что из определения характеристик $p_U$ и $q_U$ следует $s_1 = s_2 = 0$. Лемма 1 доказана.

В доказательстве леммы 1 содержатся следующие факты.

**Следствие 1.** *Пусть $U \subset V$ — независимое множество и $d = n$. Тогда*
1) $|U| + |W(U)| \leqslant |D_U|$,
2) *$D_U$ всегда непусто.*

Из того, что граф предшествований $G$ не является путём, вытекает

**Следствие 2.** *Пусть $U \subset V$ — независимое множество, $k \in D_U$. Среди расписаний, удовлетворяющих лемме 1, существует такое $\sigma \in \Sigma_n$, что столбец $k$ пуст относительно $\sigma$ и мощность каждого из фрагментов $\sigma(W(U), l)$, $l \in D_U$, не превышает $m - 1$.*

Действительно, $|U| + |W(U)| \leqslant |D_U|$ по следствию 1. Если в каждом столбце из множества $D_U$ размещена вершина из множества $U \cup W(U)$ и иначе быть не может, то $|U|+|W(U)| = |D_U|$. Тогда по лемме 1 в таблице $E$ нет столбцов, пустых относительно $\sigma$. Так как столбцов в $E$ и вершин в $G$ ровно по $n$, в каждом столбце размещена ровно одна вершина. Теперь из определения характеристик $p_U$ и $q_U$ следует, что граф $G$ является путём. Таким образом, среди столбцов множества $D_U$ непременно есть пустой. Поскольку $k \in D_U$, с помощью последовательности соответствующих сдвигов легко добиться, чтобы пустым был именно столбец $k$. Неравенство $|\sigma(W(U), l)| \leqslant m - 1$ при $l \in D_U$ следует из $|W(U)| < |D_U|$ и свойств 2 и 3.

## 3. Аффинная оболочка

В настоящем разделе будет показано, что аффинная оболочка многогранника $P(\Sigma_n)$ является множеством решений системы (2).

**Теорема 1.**

$$\operatorname{aff} P(\Sigma_n) = \Big\{x \in R^{E_n} \mid \sum_{k \in D_i} x_{ik} = 1,\ i \in V\Big\}.$$

Доказательство. Как известно, система линейных уравнений, множество решений которой содержит многогранник, является аффинной оболочкой многогранника тогда и только тогда, когда всякое уравнение, задающее гиперплоскость, содержащую многогранник, является линейной комбинацией уравнений системы. В нашем случае мы должны показать, что для любых $b \in R^{E_n}$ и $b_0 \in R$ таких, что

$$P(\Sigma_n) \subset \{x \in R^{E_n} \mid b^{\mathsf{T}} x = b_0\}, \tag{6}$$

уравнение $b^{\mathsf{T}} x = b_0$ является линейной комбинацией уравнений

$$\sum_{k \in D_i} x_{ik} = 1, \quad i \in V.$$

Пусть уравнение $b^{\mathsf{T}} x = b_0$ удовлетворяет условию (6) и $b_{ik}$, $i \in V$, $k \in D_i$ — коэффициенты этого уравнения. Покажем, что для каждой $i \in V$ коэффициенты $b_{ik}$ равны между собой при всех $k \in D_i$.

Пусть $i \in V$ и $p_i+1 < k \leqslant n-q_i$. Выберем расписание $\sigma_1 \in \Sigma_n$, удовлетворяющее условиям леммы 1 при $U = \{i\}$. При этом потребуем, чтобы $(i,k) \in \sigma_1$. В силу следствия 1 имеем $|W(i)| < |D_i|$. Это означает, что вершины множества $W(i)$ можно разместить в столбцах $p_i+1, p_i+2, n-q_i$ так, чтобы для каждого столбца $l$ из этого множества выполнялось условие $|\sigma(W(i),\{l\})| < m$. Так как множество $N_-(i)$ располагается левее столбца $p_i+1$, множество $N_+(i)$ располагается правее столбца $n-q_i$ и вершина $i$ не связана условиями предшествования с вершинами множества $W(i)$, то, перенеся вершину $i$ из клетки $(i,k)$ в клетку $(i,p_i+1)$, получим новое расписание $\sigma_2$ такое, что $\sigma_1 \triangle \sigma_2 = \{(i,p_i+1),(i,k)\}$, где $\triangle$ означает симметрическую разность двух множеств. Так как $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_n$, то $b^{\mathsf{T}} x^{\sigma_1} = b^{\mathsf{T}} x^{\sigma_2} = b_0$. Тогда

$$0 = b^{\mathsf{T}} x^{\sigma_1} - b^{\mathsf{T}} x^{\sigma_2} = b^{\mathsf{T}}(x^{\sigma_1} - x^{\sigma_2}) = b_{ik} - b_{ip_i+1},$$

откуда получаем равенство $b_{ik} = b_{ip_i+1}$. Итак, показано, что

$$b_{ip_i+1} = b_{ip_i+2} = \cdots = b_{in-q_i} = b_i,$$

для каждого $i \in V$. Тогда

$$b^{\mathsf{T}} x = \sum_{i \in V} \sum_{k \in D_i} b_{ik} x_{ik} = \sum_{i \in V} \Bigl( \sum_{k \in D_i} b_{ik} x_{ik} \Bigr) = \sum_{i \in V} \Bigl( b_i \sum_{k \in D_i} x_{ik} \Bigr),$$

откуда видно, что левая часть уравнения $b^{\mathsf{T}} x = b_0$ является линейной комбинацией уравнений (1) с коэффициентами $b_i$, $i \in V$. Подставляя в уравнение $b^{\mathsf{T}} x = b_0$ и уравнения (1) вектор инциденций любого из расписаний, получим $b_0 = \sum_{i \in V} b_i$, т. е. $b_0$ является комбинацией правых частей уравнений (1) с теми же коэффициентами. Теорема 1 доказана.

**Следствие 3.** *Размерность многогранника* $P(\Sigma_n)$ *равна*

$$\dim P(\Sigma_n) = n^2 - n - \sum_{i\in V}(p_i + q_i).$$

Действительно, размерность любого выпуклого множества в евклидовом пространстве равна размерности пространства минус ранг матрицы ограничений, задающих аффинную оболочку множества. В нашем случае размерность пространства $R^{E_n}$ равна

$$|E_n| = \sum_{i\in V}|D_i| = \sum_{i\in V}(n - p_i - q_i) = n^2 - \sum_{i\in V}(p_i + q_i).$$

Ранг матрицы системы уравнений (1), как нетрудно заметить, равен $n$.

**Пример 1.** Рассмотрим орграф $G$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, 10\}$ и множеством дуг $A = \{(1,5), (1,7), (2,3), (3,4), (4,5), (4,7), (5,6), (6,9), (7,9), (8,9), (9,10)\}$ (рис. 2). Пусть $d = n = 10$, $m = 3$.

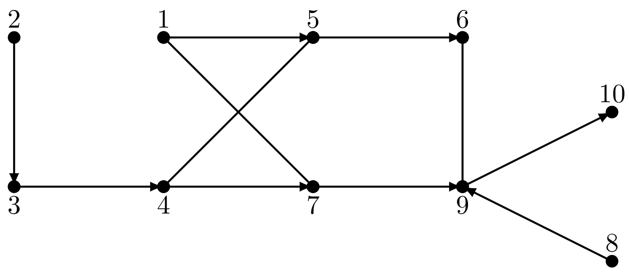


*Рис. 2.* Граф предшествований $G$

Данный орграф устроен относительно просто, и у нас есть возможность найти значения характеристик $p_i$ и $q_i$ непосредственно. Они приведены в табл. 1.

*Таблица 1*

**Характеристики** $p_i$, $q_i$

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 0 | 5 | 6 |
| $q_i$ | 4 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 |

По следствию 3 получаем $\dim P(\Sigma_{10}) = 100 - 10 - 53 = 37$.

## 4. Свойства ограничений полиэдра $M_n$

В этом разделе описаны условия, при которых неравенства (3)–(5), описывающие релаксационный полиэдр многогранника $P(\Sigma_n)$, являются опорными. Для этого нам понадобятся несколько общих определений, необходимых для описания полиэдральной структуры выпуклых оболочек конечного числа точек в евклидовом пространстве. Пусть $R^n$ — $n$-мерное пространство вектор-столбцов, $P = \mathrm{conv}\{x^1, x^2, \ldots, x^t\} \subset R^n$ — многогранник. Линейное неравенство $a^{\mathsf{T}} x \leqslant a_0$ называется правильным относительно $P$, если оно выполняется для каждой точки из $P$. Правильное неравенство называется опорным к $P$, если существует такая точка $x' \in P$, что $a^{\mathsf{T}} x' = a_0$. Всякое опорное неравенство порождает множество $\{x \in P \mid a^{\mathsf{T}} x = a_0\}$, которое называется гранью многогранника $P$.

Гиперплоскости $\{x \in R^n \mid a^{\mathsf{T}} x = a_0\}$ в пространстве $R^n$, являющиеся границами полупространств $\{x \in R^n \mid a^{\mathsf{T}} x \leqslant a_0\}$, будем также называть правильными и опорными соответственно.

**Теорема 2.** *Справедливы следующие утверждения.*

(а) (*ограничения на число приборов*). *Пусть $k \in D$ и $|V_k| \geqslant m$. Неравенство $\sum\limits_{i \in V_k} x_{ik} \leqslant m$ опорно к многограннику $P(\Sigma_n)$ тогда и только тогда, когда в графе $G$ найдётся такое независимое множество $U \subseteq V_k$, что $|U| = m$ и $k \in D_U$.*

(б) (*ограничения предшествования*). *Неравенство*

$$x_{ik} \leqslant \sum_{\substack{l \in D_j,\\ l > k}} x_{jl}, \quad i, j \in A,\ k \in D_i,$$

*опорно к многограннику $P(\Sigma_n)$.*

(в) (*ограничения на неотрицательность*). *Неравенство $x_{ik} \geqslant 0$, $i \in V$, $k \in D_i$, опорно к многограннику $P(\Sigma_n)$.*

Доказательство. (а) Необходимость. Предположим, что неравенство $\sum\limits_{i \in V_k} x_{ik} \leqslant m$ опорно к многограннику $P(\Sigma_n)$. Тогда существует такое расписание $\sigma \in \Sigma_n$, что $\sum\limits_{i \in V_k} x^{\sigma}_{ik} = m$. Это означает, что среди слагаемых $x^{\sigma}_{ik}$, $i \in V_k$, есть ровно $m$ штук, равных 1, т. е. $x^{\sigma}_{i_1 k} = x^{\sigma}_{i_2 k} = \cdots = x^{\sigma}_{i_m k} = 1$. Так как вершины $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} = U$ расположены в одном столбце относительно расписания $\sigma$, множество $U$ независимо. Остаётся показать, что $k \in D_U$. Ясно, что $T_\sigma(U) = \{k\}$. Предположим, что $k \leqslant p_U$. Поскольку все вершины из $U$ расположены в этом столбце, неравенство $k \leqslant p_U$ означает, что

$$T_\sigma(N_-(U)) \subseteq \{1, 2, \ldots k-1\} \subseteq \{1, 2, \ldots p_U - 1\},$$

что противоречит минимальности значения $p_U$. Аналогичным образом предположение $k > n - q_U$ приводит к противоречию с определением характеристики $q_U$. Необходимость доказана.

Достаточность. Построим расписание $\sigma$ из леммы 1. Пользуясь следствием 2, потребуем, чтобы столбец $k$ был пуст относительно $\sigma$ и поместим в него вершины множества $U$. Это приводит к равенству $\sum\limits_{i\in V_k} x_{ik}^\sigma = m$, откуда следует опорность неравенства (3). Утверждение (а) доказано.

(б) Действительно, согласно лемме 1 существует расписание $\sigma \in \Sigma_n$, в котором вершина $i$ размещена в столбце $k$, т. е. $x_{ik}^\sigma = 1$. Так как вершина $j$ является потомком вершины $i$, можем записать

$$\sum_{\substack{l\in D_j,\\ l\leqslant k}} x_{jl}^\sigma = 0.$$

Тогда в силу соответствующего ограничения вида (2) имеем

$$\sum_{\substack{l\in D_j,\\ l> k}} x_{jl}^\sigma = \sum_{l\in D_j} x_{jl}^\sigma = 1.$$

Утверждение (б) доказано.

(в) В силу следствия 2 существует расписание $\sigma \in \Sigma_n$, относительно которого столбец $k$ пуст. Это означает, что $x_{ik}^\sigma = 0$, т. е. требуемое неравенство опорно. Утверждение (в) доказано. Теорема 2 доказана.

**Следствие 4.** *Если максимальная из мощностей независимых множеств в графе $G$ меньше $m$, то ограничения* (3) *полиэдра $M_n$ избыточны.*

В завершение данного раздела приведём результат, связывающий вершины грани, порождаемой ограничением на число приборов (3), и независимые множества графа предшествований.

Согласно утверждению (а) из теоремы 2 для опорности неравенства $\sum\limits_{i\in V_k} x_{ik} \leqslant m$ необходимо и достаточно существования такого независимого множества $U \subseteq V_k$, что $|U| = m$ и $k \in D_U$. Вообще говоря, такое множество $U$ может оказаться неединственным. Пусть $\{U_1, U_2, \dots, U_t\}$ — семейство всех независимых множеств из $V_k$, удовлетворяющих условиям $|U_\alpha| = m$ и $k \in D_{U_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, t$; $U_\alpha \neq U_\beta$ при $\alpha \neq \beta$. Каждому множеству $U_\alpha$ сопоставим множество расписаний $\Sigma_n(U_\alpha) \subseteq \Sigma_n$ по правилу

$$\sigma \in \Sigma_n(U_\alpha) \Leftrightarrow E(V_k, \{k\}) \cap \sigma = E(U_\alpha, \{k\}).$$

**Лемма 2.** *Семейство множеств $\{\Sigma_n(U_\alpha) \mid \alpha = 1, 2, \dots, t\}$ является правильным разбиением множества расписаний, векторы инциденций*

*которых образуют множество всех вершин грани многогранника $P(\Sigma_n)$, порождённой опорным неравенством $\sum\limits_{i\in V_k} x_{ik} \leqslant m$.*

Доказательство. Лемма верна, если
(1) $\Sigma_n(U_\alpha) \neq \varnothing$ для всех $\alpha = 1, 2, \dots, t$;
(2) $\Sigma_n(U_\alpha) \cap \Sigma_n(U_\beta) = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$;
(3) $\Big\{\sigma \in \Sigma_n \mid \sum\limits_{i\in V_k} x^\sigma_{ik} = m\Big\} = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{t} \Sigma_n(U_\alpha)$.
Доказательство (1) совпадает с доказательством достаточности в теореме 2(a).

Для доказательства (2) предположим, что $\sigma \in \Sigma_n(U_\alpha) \cap \Sigma_n(U_\beta)$, $\alpha \neq \beta$. Тогда

$$E(U_\alpha, \{k\}) \cup E(U_\beta, \{k\}) = E(U_\alpha \cup U_\beta, \{k\}) \subset \sigma.$$

Поскольку $|U_\alpha \cup U_\beta| > m$ и все вершины из $U_\alpha \cup U_\beta$ размещены в столбце $k$ в расписании $\sigma$, то $\sum\limits_{i\in V_k} x^\sigma_{ik} > m$. Это противоречит правильности неравенства.

(3) Пусть $\alpha \in \{1, 2, \dots, t\}$ и $\sigma \in \Sigma_n(U_\alpha)$. По определению множества $\Sigma_n(U_\alpha)$ в расписании $\sigma$ в столбце $k$ размещены только вершины множества $U_\alpha$. Тогда в силу опорности нашего неравенства имеем $\sum\limits_{i\in V_k} x^\sigma_{ik} = m$. Так как $\alpha$ выбиралось произвольно, получаем включение

$$\Big\{\sigma \in \Sigma_n \mid \sum_{i\in V_k} x^\sigma_{ik} = m\Big\} \supseteq \bigcup_{\alpha=1}^{t} \Sigma_n(U_\alpha).$$

Пусть $\sigma \in \Sigma_n$ таково, что $\sum\limits_{i\in V_k} x^\sigma_{ik} = m$. Это означает, что среди слагаемых $x^\sigma_{ik}$, $i \in V_k$, есть ровно $m$ штук, равных 1. Так как вершины $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} = U$ расположены в одном столбце относительно расписания $\sigma$, множество $U$ независимо. Покажем, что $k \in D_U$. Ясно, что $T_\sigma(U) = \{k\}$. Предположим, что $k \leqslant p_U$. Поскольку все вершины из $U$ расположены в этом столбце, неравенство $k \leqslant p_U$ означает, что $T_\sigma(N_-(U)) \subseteq \{1, 2, \dots k-1\} \subseteq \{1, 2, \dots p_U - 1\}$, что противоречит минимальности значения $p_U$. Аналогичным образом предположение $k > n - q_U$ приводит к противоречию с определением характеристики $q_U$. Таким образом, $U = U_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \{1, 2, \dots, t\}$. Значит, верно включение

$$\Big\{\sigma \in \Sigma_n \mid \sum_{i\in V_k} x^\sigma_{ik} = m\Big\} \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{t} \Sigma_n(U_\alpha).$$

В итоге получаем требуемое равенство. Лемма 2 доказана.

## Заключение

В статье представлена интерпретация расписаний обслуживания идентичных требований с предшествованиями параллельными приборами в терминах семейства подмножеств конечного множества. В рамках этой интерпретации формализован многогранник расписаний, найдена аффинная оболочка, определена его размерность. Данные результаты существенно базируются на задаче о минимизации общего времени обслуживания требований, которая при произвольном числе приборов NP-трудна, а при фиксированном имеет на данный момент открытый сложностной статус. Кроме того, получены необходимые и достаточные условия опорности неравенств, образующих полиэдральную релаксацию многогранника.

Ближайшей перспективой данной работы является использование аффинной оболочки для получения неравенств, порождающих фасеты многогранника расписаний.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Симанчёв Р. Ю., Уразова И. В.** Целочисленная модель задачи минимизации общего времени обслуживания параллельными приборами единичных требований с предшествованиями // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 100–106.
2. **Симанчёв Р. Ю., Уразова И. В., Кочетов Ю. А.** Метод ветвей и отсечений для задачи разбиения на клики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26, № 3. С. 60–87.
3. **Applegate D. L., Bixby R. E., Chvátal V., Cook W. J., Espinoza D. G., Goycoolea M., Helsgaun K.** Certification of an optimal TSP tour through 85 900 cities // Oper. Res. Lett. 2009. Vol. 37. P. 11–15.
4. **Bouma W. H., Goldengorin B.** A polytime algorithm based on a primal LP model for the scheduling problem $1|pmtn; p_j = 2; r_j| \sum w_j C_j$ // Recent Advances in Applied Mathematics. Proc. Amer. Conf. Appl. Math. (Cambridge, MA, USA, Jan. 27–29, 2010). Stevens Point: WSEAS Press, 2010. P. 415–420.
5. **Crowder H., Jonson E. L., Padberg M. W.** Solving large-scale zero-one linear programming problems // Oper. Res. 1983. Vol. 31. P. 803–834.
6. **Grötschel M., Holland O.** Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems // Math. Program. 1991. Vol. 51. P. 141–202.
7. **Grötschel M., Wakabayashi Y.** A cutting plane algorithm for a clustering problem // Math. Program. 1989. Vol. 45. P. 59–96.
8. **Balas E.** On the facial structure of scheduling polyhedra // Mathematical Programming Essays in Honor of George B. Dantzig. Pt. I. Amsterdam: North-Holland, 1985. P. 179–218. (Math. Program. Studies; Vol. 24).
9. **Mokotoff E.** An exact algorithm for the identical parallel machine scheduling problem // Eur. J. Oper. Res. 2004. Vol. 152. P. 758–769.

10. **Queyranne M.** Structure of simple scheduling polyhedron // Math. Program. 1993. Vol. 58. P. 263–285.
11. **Queyranne M., Wang Y.** Single-machine scheduling polyhedra with precedence constraints // Math. Oper. Res. 1991. Vol. 16. P. 1–20.
12. **Nemhauser G. L., Savelsbergh M. W. P.** A cutting plane algorithm of single machine scheduling problem with release times // Combinatorial Optimization: New Frontiers in Theory and Practice. Heidelberg: Springer, 1992. P. 63–84. (NATO ASI Ser.; Vol. 82).
13. **Schulz A. S.** Polytopes and scheduling: PhD thesis. Technische Univ. Berlin, Berlin, 1996.
14. **Queyranne M., Schulz A. S.** Polyhedral approaches to machine scheduling. Berlin: Technische Univ. Berlin, 1994.
15. **Симанчёв Р. Ю., Уразова И. В.** Многогранник расписаний обслуживания идентичных требований параллельными приборами // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 1. С. 85–97.
16. **Симанчёв Р. Ю., Шерешик Н. Ю.** Целочисленные модели обслуживания требований одним прибором с прерываниями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 4. С. 89–101.
17. **Шерешик Н. Ю.** Релаксации многогранника оптимальных расписаний обслуживания требований одним прибором с прерываниями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 6. С. 78–90.
18. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
19. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М: Мир, 1978. 420 с.
20. **Brucker P., Knust S.** Complexity results for scheduling problems. Osnabrück: Univ. Osnabrück, 2009. Available at `www2.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/class` (accessed Oct. 23, 2020).

*Симанчёв Руслан Юрьевич*
*Соловьёва Полина Вячеславовна*
*Уразова Инна Владимировна*

Статья поступила
14 июля 2020 г.
После доработки —
27 сентября 2020 г.
Принята к публикации
28 сентября 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2021. Vol. 28, No. 1. P. 48–67

UDC 519.1+519.8 DOI 10.33048/daio.2021.28.697

# THE AFFINE HULL OF THE SCHEDULE POLYTOPE FOR SERVICING IDENTICAL REQUESTS BY PARALLEL DEVICES

*R. Yu. Simanchev*[1,2,a], *P. V. Solovieva*[1,b], and *I. V. Urazova*[1,c]

[1] Dostoevsky Omsk State University,
55a Mir Avenue, 644077 Omsk, Russia

[2] Omsk Scientific Center of SB RAS,
15 Karl Marx Avenue, 644024 Omsk, Russia

E-mail: [a]`osiman@rambler.ru`, [b]`polinochka.chervonnykh@mail.ru`,
[c]`urazovainn@mail.ru`

**Abstract.** Under consideration are some polyhedral properties of the set of schedules for servicing identical requests by parallel devices. The requests satisfy some precedence conditions. Any service interruptions are prohibited. We propose some formalization of the set of schedules as a family of subsets of a finite set, define the polytope of schedules, and find the affine hull and dimension of this polytope. We also obtain the conditions under which the inequalities determining its polyhedral relaxation are the support inequalities. Tab. 1, illustr. 2, bibliogr. 20.

**Keywords:** schedule, polytope, affine hull, support inequality.

## REFERENCES

1. **R. Yu. Simanchev** and **I. V. Urazova,** An integer-valued model for the problem of minimizing the total servicing time of unit claims with parallel devices with precedences, *Avtom. Telemekh.,* No. 10, 100–106 (2010) [Russian] [*Autom. Remote Control* **71** (10), 2102–2108 (2010)].
2. **R. Yu. Simanchev, I. V. Urazova,** and **A. Yu. Kochetov,** The branch and cut method for the clique partitioning problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **26** (3), 60–87 (2019) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **13** (3), 539–556 (2019)].

This research is carried out according to the state task of the Omsk Scientific Center SB RAS (project registration number AAAA–A17–117041210229–2) and is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 18–07–00599).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (1), 146–157 (2021), DOI 10.1134/S1990478921010130.

3. **D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal, W. J. Cook, D. G. Espinoza, M. Goycoolea,** and **K. Helsgaun,** Certification of an optimal TSP tour through 85,900 cities, *Oper. Res. Lett.* **37**, 11–15 (2009).
4. **W. H. Bouma** and **B. Goldengorin,** A polytime algorithm based on a primal LP model for the scheduling problem $1|pmtn; p_j = 2; r_j|\sum w_j C_j$, in *Recent Advances in Applied Mathematics* (Proc. Amer. Conf. Appl. Math., Cambridge, MA, USA, Jan. 27–29, 2010) (WSEAS Press, Stevens Point, 2010), pp. 415–420.
5. **H. Crowder, E. L. Jonson,** and **M. W. Padberg,** Solving large-scale zero-one linear programming problems, *Oper. Res.* **31**, 803–834 (1983).
6. **M. Grötschel** and **O. Holland,** Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems, *Math. Program.* **51**, 141–202 (1991).
7. **M. Grötschel** and **Y. Wakabayashi,** A cutting plane algorithm for a clustering problem, *Math. Program.* **45**, 59–96 (1989).
8. **E. Balas,** On the facial structure of scheduling polyhedra, in *Mathematical Programming Essays in Honor of George B. Dantzig,* Pt. I (North-Holland, Amsterdam, 1985), pp. 179–218 (Math. Program. Studies, Vol. 24).
9. **E. Mokotoff,** An exact algorithm for the identical parallel machine scheduling problem, *Eur. J. Oper. Res.* **152**, 758–769 (2004).
10. **M. Queyranne,** Structure of simple scheduling polyhedron, *Math. Program.* **58**, 263–285 (1993).
11. **M. Queyranne** and **Y. Wang,** Single-machine scheduling polyhedra with precedence constraints, *Math. Oper. Res.* **16**, 1–20 (1991).
12. **G. L. Nemhauser** and **M. W. P. Savelsbergh,** A cutting plane algorithm of single machine scheduling problem with release times, in *Combinatorial Optimization: New Frontiers in Theory and Practice* (Springer, Heidelberg, 1992), pp. 63–84 (NATO ASI Ser., Vol. 82).
13. **A. S. Schulz,** Polytopes and scheduling, *PhD Thesis* (Technische Univ. Berlin, Berlin, 1996).
14. **M. Queyranne** and **A. S. Schulz,** *Polyhedral Approaches to Machine Scheduling* (Technische Univ. Berlin, Berlin, 1994).
15. **R. Yu. Simanchev** and **I. V. Urazova,** Scheduling unit-time jobs on parallel processors polytope, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **18** (1), 85–97 (2011) [Russian].
16. **R. Yu. Simanchev** and **N. Yu. Shereshik,** Integer models for the interrupt-oriented services of jobs by single machine, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **21** (4), 89–101 (2014) [Russian].
17. **N. Yu. Shereshik,** Relaxations for the polyhedron of optimal schedules for the problem of interrupt-oriented service of jobs with a single machine, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (6), 78–90 (2015) [Russian].
18. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, New York, 1979; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).
19. **N. Christofides,** *Graph Theory: An Algorithmic Approach* (Academic Press, New York, 1975; Mir, Moscow, 1978 [Russian]).

20. **P. Brucker** and **S. Knust,** *Complexity Results for Scheduling Problems* (Univ. Osnabrück, Osnabrück, 2009). Available at `www2.informatik.uni-osnabrueck.de/knust/class` (accessed Oct. 23, 2020).

*Ruslan Yu. Simanchev*
*Polina V. Solovieva*
*Inna V. Urazova*

Received July 14, 2020
Revised September 27, 2020
Accepted September 28, 2020