ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2021. Т. 28, № 1. С. 68–96

УДК 519.71 DOI 10.33048/daio.2021.28.699

СВЯЗНЫЕ БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ С ЛОКАЛЬНО ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПРОСТЫХ ИМПЛИКАНТ

И. П. Чухров

Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, 123056, Москва, Россия

E-mail: chip@icad.org.ru

Аннотация. Известная нижняя оценка максимального числа простых импликант булевой функции (длины сокращённой ДНФ) отличается от верхней оценки в $\Theta(\sqrt{n})$ раз и асимптотически достигается на симметричной поясковой функции, имеющей ширину пояса $n/3$. Для изучения свойств связных булевых функций с большим числом простых импликант вводится понятие локально экстремальной в некоторой окрестности функции по числу простых импликант. Получены оценки изменения числа простых импликант при изменении значений поясковой функции в некоторой d-окрестности. Доказано, что поясковая функция, для которой ширина пояса и номер нижнего слоя единичных вершин асимптотически равны $n/3$, локально экстремальна в некоторой окрестности для $d \leqslant \Theta(n)$, а для $d \geqslant 2^{\Theta(n)}$ — нет. Аналогичное утверждение справедливо для функций, имеющих простые импликанты разного ранга. Свойство локальной экстремальности сохраняется после применения к булевой функции преобразования, сохраняющего расстояние между вершинами единичного куба. Библиогр. 10.

Ключевые слова: булева функция, связная функция, простая импликанта, максимальная грань, число простых импликант, локальный экстремум.

Введение

Подход к минимизации булевых функций как к задаче о покрытии широко используется при разработке вычислительных алгоритмов. Рассмотрение задачи о покрытии в матричной форме приводит к размерностям, определяемым числом единичных вершин и числом простых импликант (длиной сокращённой ДНФ) булевой функции. В геометрической интерпретации такая задача представляет собой задачу о покрытии подмножества вершин единичного куба максимальными гранями, содержащимися в этом подмножестве вершин.

При изложении будем использовать понятия и обозначения для граней и множества вершин единичного n-мерного куба B^n в следующей геометрической интерпретации.

Гранью куба B^n ранга k и размерности $n-k$ называется множество

$$B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{i_1,\ldots,i_k} = \{\widetilde{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in B^n \mid x_{i_1} = \sigma_1,\ldots,\ x_{i_k} = \sigma_k\},$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ и $\sigma_s \in \{0,1\}$ для $s = 1,\ldots,k$. *Расстоянием* $\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})$ между вершинами $\widetilde{x},\widetilde{y} \in B^n$ называется число координат, в которых вершины имеют различные значения. *Слоем* B^n_k куба B^n называется множество вершин $\widetilde{x} \in B^n$, для которых число единичных координат равно k, где $0 \leqslant k \leqslant n$. *Поясом* $S^n_{k,k+h}$ куба B^n называется множество вершин $\widetilde{x} \in B^n_i$, где $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant k+h \leqslant n$.

Множество булевых функций n переменных обозначим через P_n. Для функции $f \in P_n$ обозначим $N_f = \{\widetilde{x} \in B^n \mid f(\widetilde{x}) = 1\}$ и $\overline{N}_f = B^n \setminus N_f$. *Связной* называется функция, если для любых вершин $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta} \in N_f$ есть последовательность вершин $\{x_i \mid \widetilde{x}_i \in N_f\}_{i=1}^{p+1}$ такая, что $\widetilde{x}_1 = \widetilde{\alpha}$, $\widetilde{x}_{p+1} = \widetilde{\beta}$ и $\rho(\widetilde{x}_i,\widetilde{x}_{i+1}) = 1$ для $i = 1,\ldots,p$.

Функция $f \in P_n$, для которой $N_f = S^n_{k,k+h}$, называется *поясковой* и обозначается $f^n_{k,k+h}$. *Симметрическая* функция состоит из связных компонент, которыми являются поясковые функции.

Подмножества функций P_n, которые являются связными, симметрическими или поясковыми булевыми функциями, обозначим через P^{con}_n, P^{sym}_n или $P^{\mathrm{zone}}_n = P^{\mathrm{sym}}_n \cap P^{\mathrm{con}}_n$ соответственно.

Грань $g \subseteq N_f$ называется *гранью функции* f; она называется *максимальной гранью* функции f, если любая грань $g' \supset g$ не содержится в множестве N_f. Очевидно, что число максимальных граней функции равно сумме чисел максимальных граней её связных компонент. Множество и число максимальных граней функции f обозначается через G_f и $|G_f|$ соответственно. Наибольшее число максимальных граней функций n переменных обозначается через G_n.

Используемые понятия и обозначения можно найти в $[1,2]$.

Для булевых функций пяти и шести переменных известна максимальная длина сокращённой ДНФ [3].

Для класса всех функций $[4,5]$ при $n \to \infty$ доказаны оценки

$$c_n\frac{3^n}{n} \leqslant G_n \leqslant C_n\frac{3^n}{\sqrt{n}}, \quad \text{где } c_n \sim \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \text{ и } C_n \sim \frac{3}{2\sqrt{\pi}}.$$

Нижняя оценка достигается на поясковой функции $f^n_{\lfloor n/3\rfloor,n-\lfloor n/3\rfloor}$.

Для класса симметрических функций известна функция f^n_{sym} с наибольшим числом максимальных граней [4]. Функция f^n_{sym} имеет $2p+1$ компонент связности, которыми являются следующие поясковые функции: $f_0 = f^n_{k_0,n-k_0} = f^n_{\lfloor n/3\rfloor,n-\lfloor n/3\rfloor}$, $f^<_i = f^n_{\lfloor k_i/2\rfloor,k_i}$ и $f^>_i = f^n_{n-\lfloor k_i\rfloor,n-\lfloor k_i/2\rfloor}$ для $i = 1,\ldots,p$, где $k_1 = k_0 - 2$ и $k_{i+1} = \lfloor k_i/2\rfloor - 2$, если $k_i \geqslant 2$. При этом $k_p < \ldots < k_1 < k_0 < n-k_0 < n-k_1 < \ldots < n-k_p$ и $f^n_{\mathrm{sym}}(\widetilde{x}) = 0$, если $\widetilde{x} \in B^n_{k_i-1} \cup B^n_{n-k_i+1}$ для $i = 0,\ldots,p$. Асимптотику числа максимальных граней определяет поясковая функция $f^n_{k_0,n-k_0}$.

Для почти всех функций из P_n доказано [2, с. 75], что число простых импликант асимптотически равно сумме средних значений числа максимальных граней размерности $\lfloor\log\log n\rfloor$ и $\lfloor\log\log n\rfloor + 1$ при $n \to \infty$.

Для подмножества функций $P^{0,m}_n \subset P_n$, принимающих значение 0 для m вершин, в [6] получена асимптотика числа простых импликант для почти всех функций из $P^{0,m}_n$, если $m \leqslant 2^n - 1$ и $m \to \infty$ при $n \to \infty$.

В прикладных задачах, использующих минимизацию булевых функций, высокие оценки максимального числа простых импликант булевой функции не позволяют получить содержательных результатов для оценки алгоритмов. Интерес представляют оценки для специальных классов функций с ограничениями, которые возникают при различных представлениях булевых функций [7]. Для булевых функций, определяющихся ДНФ с ограниченным числом членов, известно, что ДНФ с k членами имеет не более $2k-1$ простых импликант [8]. Класс булевых функций, определяющихся конъюнктивными нормальными формами с k членами (k-КНФ), имеет существенное значение для оценки вычислительной сложности при разработке алгоритмов k-SAT. Для булевых функций n переменных, которые определяются 2-КНФ, максимальное число простых импликант асимптотически равно $3^{\frac{n}{3}}$ при $n \to \infty$ [9].

Для глобального максимума функционала числа простых импликант булевой функции наилучшая нижняя оценка получена на поясковых функциях с использованием возможности вычисления точного значения функционала и монотонности функционала для функций, отличающихся в соседних слоях. В общем случае возникают трудности, характерные для задач дискретной оптимизации с большим числом глобальных и локальных экстремумов, поэтому естественными являются следующие вопросы:

— возможность сравнения булевых функций по функционалу числа простых импликант как выполнение бинарного отношения сравнения, т. е. без вычисления значений функционала для сравниваемых функций;

— экстремальные свойства булевых функций с числом простых импликант, близким к нижней оценке, т. е. максимальные грани содержатся в средних слоях куба и имеют размерность, близкую к $\frac{n}{3}$.

1. Описание конструкции

В кубе B^n для $\sigma = 0, 1$ и $0 \leqslant i < j \leqslant n$ введём следующие обозначения:
$B^{n,\sigma}$ — грань, для вершин которой координата n равна σ;
$B_i^{n,\sigma} = B_i^n \cap B^{n,\sigma}$ — пересечение слоя B_i^n с гранью $B^{n,\sigma}$;
$S_{i,j}^{n,\sigma} = S_{i,j}^n \cap B^{n,\sigma}$ — пересечение пояса $S_{i,j}^n$ с гранью $B^{n,\sigma}$.

Используем следующие обозначения для граней, множеств вершин и максимальных граней функции $f \in P_n$:

$g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ — грань с минимальной и максимальной вершинами $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$;

$X_f = \{\widetilde{x} \in N_f \mid \exists\, g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f\}$ и $Y_f = \{\widetilde{y} \in N_f \mid \exists\, g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f\}$ — множества минимальных и максимальных вершин максимальных граней функции f соответственно;

$G_{f,X}^{\widetilde{\alpha}} = \{g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}} \in G_f\}$ и $G_{f,Y}^{\widetilde{\alpha}} = \{g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}} \in G_f\}$ — максимальные грани, для которых $\widetilde{\alpha}$ является минимальной и максимальной вершиной соответственно;

$G_f^{\widetilde{\alpha}} = G_{f,X}^{\widetilde{\alpha}} \cup G_{f,Y}^{\widetilde{\alpha}}$ — максимальные грани, для которых $\widetilde{\alpha} \in N_f$ является минимальной или максимальной вершиной, т. е. $G_f^{\widetilde{\alpha}} \neq \varnothing$, если $\widetilde{\alpha} \in X_f \cup Y_f$, при этом $\widetilde{\alpha} \in X_f \cap Y_f$, если $G_{f,X}^{\widetilde{\alpha}} \neq \varnothing$ и $G_{f,Y}^{\widetilde{\alpha}} \neq \varnothing$.

Для вершины $\widetilde{\alpha} \notin N_f$ положим

$$G_f^{\widetilde{\alpha}<} = \{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{\alpha} < \widetilde{x}\}, \quad G_f^{\widetilde{\alpha}>} = \{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{y} < \widetilde{\alpha}\}.$$

Множество преобразований $\omega\colon B^n \to B^n$, сохраняющих расстояние между вершинами, т. е. $\rho(\omega(\widetilde{x}), \omega(\widetilde{y})) = \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ для $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in B^n$, обозначим через W_ρ^n. Множество W_ρ^n содержит следующие отображения:

$\omega_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \oplus \widetilde{\alpha} = (x_1 \oplus \alpha_1, \ldots, x_n \oplus \alpha_n)$, где вершина $\widetilde{\alpha} \in B^n$;

$\omega_\pi(\widetilde{x}) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$, где $\pi \in \Pi^n$ — перестановка чисел $1, \ldots, n$.

Для отображения $\omega \in W_\rho^n$, подмножества $X \subseteq B^n$ и функции $f \in P_n$ пусть $\omega(X)$ — множество вершин $\{\omega(\widetilde{x}), \widetilde{x} \in X\}$ и $\omega(f)$ — функция, для которой $N_{\omega(f)} = \omega(N_f)$.

Для отображения $\omega_{\widetilde{1}}(\widetilde{x}) = \widetilde{x} \oplus \widetilde{1}$, где $\widetilde{1} = (1, \ldots, 1) \in B^n$, выполняется: если $\widetilde{x} < \widetilde{y}$, то $\omega_{\widetilde{1}}(\widetilde{x}) > \omega_{\widetilde{1}}(\widetilde{y})$,

$$\omega_{\widetilde{1}}(B_j^n) = B_{n-j}^n, \quad \omega_{\widetilde{1}}(S_{k,k+h}^n) = S_{n-k-h,n-k}^n, \quad \omega_{\widetilde{1}}(g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}) = g_{\omega_{\widetilde{1}}(\widetilde{y}),\omega_{\widetilde{1}}(\widetilde{x})}.$$

Лемма 1. *Если $\omega \in W_\rho^n$, то $\omega(\widetilde{x}) = \pi(\widetilde{x}) \oplus \widetilde{\alpha}$, где вершина $\widetilde{\alpha} = \omega(\widetilde{0})$ принадлежит B^n и $\pi(\widetilde{x}) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ для $\pi \in \Pi^n$.*

Из леммы 1 следует, что для отображения $\omega \in W_\rho^n$ и грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ множество $\omega(g_{\widetilde{x},\widetilde{y}})$ является гранью такой же размерности, в которой вершины $\omega(\widetilde{x})$ и $\omega(\widetilde{y})$ являются противоположными. Тогда если $g \in G(f)$, то $\omega(g) \in G(\omega(f))$ и $|G_f| = |G_f(\omega(f))|$.

Лемма 2. *Если* $\mathbb{F}^n_{k,k+h,r}$ — *подмножество функций* $f \in P_n$, *для которых есть преобразование* $\omega \in W^n_\rho$ *такое, что* $\omega(N_f) \subseteq S^n_{k-r,k+h+r}$, *то* $\max\limits_{f \in \mathbb{F}^n_{\lfloor n/3 \rfloor, \lfloor 2n/3 \rfloor, r_n}} G(f) \sim G_n$ *для* $r_n = \left\lfloor \frac{1}{3}\sqrt{2n \ln n} \right\rfloor$ *и* $n \to \infty$.

Лемма 2 означает, что асимптотика значения G_n достигается на функциях, для которых единичные вершины содержатся в поясе, имеющем ширину и номер нижнего слоя, асимптотически равные $n/3$.

Функция $f \in P_n$ называется *экстремальной*, если $|G_f| \geqslant |G_\varphi|$ для любой функции $\varphi \in P_n$. *Расстоянием* между функциями для функций f, $\varphi \in P_n$ называется

$$\rho(f, \varphi) = |\{\widetilde{x} \in B^n \mid f(\widetilde{x}) \neq \varphi(\widetilde{x})\}| = |N_f \setminus N_\varphi| + |N_\varphi \setminus N_f|.$$

Множество функций $\Omega^c_d(f) = \left\{\varphi \in P^{\mathrm{con}}_n \mid 0 < \rho(f, \varphi) \leqslant d\right\}$ называется *d-окрестностью связной функции* $f \in P^{\mathrm{con}}_n$, где $d > 0$. Связная функция $f \in P^{\mathrm{con}}_n$ называется *экстремальной* в окрестности $\Omega^c_d(f)$, если $|G_f| > |G_\varphi|$ для любой функции $\varphi \in \Omega^c_d(f)$.

Множество максимальных граней функции f, которые не являются максимальными гранями для функции φ, обозначим через $G_{f-\varphi}$. Тогда $G_{f-\varphi} = G_f \setminus (G_\varphi \cup G^{\subset}_{f,\varphi})$, где $G^{\subset}_{f,\varphi} = \{g \in G_f \mid g \subset g' \in G_f\}$, и

$$|G_f| - |G_\varphi| = |G_{f-\varphi}| - |G_{\varphi-f}|. \tag{1}$$

Следовательно, $|G_f| > |G_\varphi|$ тогда и только тогда, когда $|G_{f-\varphi}| > |G_{\varphi-f}|$. Это можно использовать для оценки изменения числа максимальных граней при изменении значений функции в некоторой окрестности.

В лемме 3 получены оценки для максимальных граней связной функции из d-окрестности при $d \leqslant \Theta(n)$.

Лемма 3. *Для функций* $f \in P^{\mathrm{con}}_n$ *и* $\varphi \in \Omega^c(f, d)$ *выполняются следующие свойства.*

(i) *Если* $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$, *где* $\widetilde{x} \in B^n_p$, $\widetilde{y} \in B^n_{p+q}$ *и* $0 < p \leqslant p+q < n$, *то*

$$\left|\overline{N}_\varphi \cap S^n_{p-1,p+q-1}\right| \geqslant p, \quad \left|\overline{N}_\varphi \cap S^n_{p+1,p+q+1}\right| \geqslant n-(p+q).$$

(ii) *Если* $X \subset B^n$ — *связное подмножество вершин и* $|X| \leqslant d \leqslant n$, *то* X *содержится в грани размерности не более* $d-1$.

(iii) *Если* $\widetilde{\alpha} \in N_\varphi$ *и* $\rho(\widetilde{\alpha}, N_f) > 1$, *то* $\left|G^{\widetilde{\alpha}}_\varphi\right| < 2^{d-1}$ *при* $d \leqslant n$.

В лемме 4 для поясковой функции $f^n_{k,k+h}$ получены свойства максимальных граней функции из d-окрестности при $d \leqslant \Theta(n)$.

Лемма 4. *Для функции* $\varphi \in \Omega^c_d(f)$, *где* $f = f^n_{k,k+h}$, $1 < k \leqslant k+h < n$ *и* $d < d_f = \min\{h, k, n-k-h\}$, *выполняются следующие свойства.*

(i) *Если* $g \in G_\varphi$, *то* $g \not\subset S^n_{k-1,k+h-1}$ *и* $g \not\subset S^n_{k+1,k+h+1}$.

(ii) *Если* $N_\varphi \subseteq N_f$, *то* $G_\varphi \subseteq G_f$, *т. е. любая максимальная грань функции* φ *является максимальной для функции* f.

(iii) *Для грани* $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$, *если* $\widetilde{x} \in B^n_{k-1}$, *то* $\widetilde{y} \in S^n_{k+h,k+h+1}$, *а если* $\widetilde{y} \in B^n_{k+h+1}$, *то* $\widetilde{x} \in S^n_{k-1,k}$.

(iv) *Если* $\widetilde{x} \in N_\varphi \cap B^n_{k-1} \neq \varnothing$, *то* $\widetilde{x} \in X_\varphi$, $N_\varphi \cap B^n_{k-1} \subseteq X_\varphi$ *и для грани* $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$ *имеем* $\widetilde{y} \in S^n_{k+h,k+h+1}$.

Если $\widetilde{y} \in N_\varphi \cap B^n_{k+h+1} \neq \varnothing$, *то* $\widetilde{y} \in Y_\varphi$, $N_\varphi \cap B^n_{k+h+1} \subseteq Y_\varphi$, *и для грани* $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$ *имеем* $\widetilde{x} \in S^n_{k-1,k}$.

Для функций φ, f введём следующие обозначения множеств вершин

$$R^1_{\varphi,f} = \{\widetilde{\alpha} \in N_\varphi \mid \rho(\widetilde{\alpha}, N_f) = 1\}, \quad R^{>1}_{\varphi,f} = \{\widetilde{\alpha} \in N_\varphi \mid \rho(\widetilde{\alpha}, N_f) > 1\},$$
$$X^1_{\varphi,f} = \bigl\{\widetilde{x} \in X_\varphi \cap R^1_{\varphi,f} \mid \exists\, g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi,\ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \cap N_f \neq \varnothing\bigr\},$$
$$Y^1_{\varphi,f} = \bigl\{\widetilde{y} \in Y_\varphi \cap R^1_{\varphi,f} \mid \exists\, g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi,\ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \cap N_f \neq \varnothing\bigr\},$$
$$R^{\geqslant 1}_{\varphi,f} = R^1_{\varphi,f} \cup R^{>1}_{\varphi,f}, \quad X^{>1}_{\varphi,f} = X_\varphi \cap R^{>1}_{\varphi,f}, \quad Y^{>1}_{\varphi,f} = Y_\varphi \cap R^{>1}_{\varphi,f}$$

и множеств граней

$$G_{f\cap\varphi} = G_{\varphi\cap f} = G_f \cap G_\varphi, \quad G_{f\subseteq\varphi} = \{g \in G_f \mid g \subseteq g' \in G_\varphi\},$$
$$G_{f-\varphi} = G_f \setminus G_{f\subseteq\varphi}, \quad G_{\varphi-f} = G_\varphi \setminus G_{\varphi\subseteq f},$$
$$G^{\leqslant 1}_{\varphi-f} = \{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi-f} \mid \max\{\rho(\widetilde{x}, N_f), \rho(\widetilde{y}, N_f)\} \leqslant 1\},$$
$$G^{>1}_{\varphi-f} = \{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi-f} \mid \max\{\rho(\widetilde{x}, N_f), \rho(\widetilde{y}, N_f)\} > 1\}.$$

Тогда выполняются соотношения

$$G_{\varphi-f} = G^{\leqslant 1}_{\varphi-f} \cup G^{>1}_{\varphi-f}, \quad G^{\leqslant 1}_{\varphi-f} \cap G^{>1}_{\varphi-f} = \varnothing,$$
$$|G_{\varphi-f}| = \bigl|G^{\leqslant 1}_{\varphi-f}\bigr| + \bigl|G^{>1}_{\varphi-f}\bigr|, \tag{2}$$
$$\bigl|G^{>1}_{\varphi-f}\bigr| \leqslant \bigl|X^{>1}_{\varphi,f}\bigr| \max_{\widetilde{x} \in X^{>1}_{\varphi,f}} \bigl|G^{\widetilde{x}}_{\varphi,X}\bigr| + \bigl|Y^{>1}_{\varphi,f}\bigr| \max_{\widetilde{y} \in Y^{>1}_{\varphi,f}} \bigl|G^{\widetilde{y}}_{\varphi,Y}\bigr|. \tag{3}$$

В лемме 5 для поясковой функции получены верхняя и нижняя оценка мощности множеств $G_{\varphi-f}$ и $G_{f-\varphi}$ соответственно для любой функции φ из d-окрестности при $d \leqslant \Theta(n)$. Из (1) следует, что такие оценки позволяют сравнить $|G_f|$ и $|G_\varphi|$.

Лемма 5. *Для функций* $f = f^n_{k,k+h}$ *и* $\varphi \in \Omega^c_d(f)$, *где* $1 < k < k+h < n$ *и* $d < d_f = \min\{h, k, n-k-h\}$, *выполняются следующие соотношения.*

(i) *Если* $N_\varphi \subset N_f$, *то* $G_\varphi \subset G_f$ *и* $|G_f| > |G_\varphi|$.

(ii) *Если* $N_\varphi \setminus N_f \neq \varnothing$, *то*

$$|G_{\varphi-f}| \leqslant d_1^- \binom{n-k+1}{h+1} + d_1^+ \binom{k+h+1}{h+1} + d_{>1} 2^{d-d_0}, \tag{4}$$

$$|G_{f-\varphi}| \geqslant \operatorname{sgn}(d_1^-)(n-k+1-d_1^-)\binom{n-k}{h} - d_0 M_{k,h}^{n,-} - d_1^+(h+1)(h+2)$$

$$+ \operatorname{sgn}(d_1^+)[(k+h+1-d_1^+)\binom{k+h}{h} - d_0 M_{k,h}^{n,+} - d_1^-(h+1)(h+2)], \quad (5)$$

где

$$d_1^- = \left|N_\varphi \cap B_{k-1}^n\right|, \quad d_1^+ = \left|N_\varphi \cap B_{k+h+1}^n\right|, \quad d_{>1} = \left|N_\varphi \setminus S_{k-1,k+h+1}^n\right|,$$
$$d_0 = |N_f \setminus N_\varphi|, \quad d_1 = d_1^- + d_1^+, \quad d_0 + d_1 + d_{>1} \leqslant d,$$

$$M_{k,h}^{n,-} = \max_{j=0,\ldots,h}(j+1)\binom{n-k-j}{h-j}, \quad M_{k,h}^{n,+} = \max_{j=0,\ldots,h}(j+1)\binom{k+h+j}{h-j}.$$

(iii) *Если* $0 < k - h/2 < n - h$, *то*

$$M_{k,h}^{n,-} = \max\left\{\binom{n-k}{h}, 2\binom{n-k-1}{h-1}\right\},$$

$$M_{k,h}^{n,+} = \max\left\{\binom{k+h}{h}, 2\binom{k+h-1}{h-1}\right\}.$$

Если $k \sim h \sim n/3$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$M_{k,h}^{n,-} \leqslant \binom{n-k}{h}(1+o(1)), \quad M_{k,h}^{n,+} \leqslant \binom{k+h}{h}(1+o(1)).$$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Функция* $f = f_{k,k+h}^n$, *где* $k \sim h \sim n/3$ *при* $n \to \infty$, *в окрестности* $\Omega_d^c(f)$

(i) *локально экстремальна, если* $d \leqslant cn$ *и* $0 < c < \frac{2}{9}$;

(ii) *не локально экстремальна, если* $d > 2^{nc}$, $c > c_0 = \frac{t_0}{3}$ *и* t_0 *удовлетворяет соотношению* $t_0 H\left(\frac{1}{t_0}\right) = 1$, *т. е.* $0{,}430 < c_0 < 0{,}433$.

Определим функцию $\psi_{k,k+h}^n = \bar{x}_n f_{k,k+h+1}^{n-1}(\widetilde{x}^{n-1}) \vee f_{k,k+h}^n(\widetilde{x}^n) \in P_n^{\mathrm{con}}$, где $0 < k \leqslant k+h < n$. Максимальные грани функции $\psi = \psi_{k,k+h}^n$ имеют размерность $h+1$ и h, множество единичных вершин совпадает с поясом $S_{k,k+h+1}^{n-1}$ в грани $B_n^{n,0}$ и с поясом $S_{k-1,k+h-1}^{n-1}$ в грани $B_n^{n,1}$.

Если $k \sim h \sim \frac{n}{3}$ при $n \to \infty$, то $|G_\psi| < |G_f|$, где $f = f_{k,k+h}^n$, так как $|G_\psi| = \binom{n-1}{k+h+1}\binom{k+h+1}{k} + \binom{n-1}{k+h-1}\binom{k+h-1}{k-1}$, $|G_f| = \binom{n}{k+h}\binom{k+h}{k}$ и

$$\frac{|G_\psi|}{|G_f|} = \frac{(n-k-h)(n-k-h-1)}{n(h+1)} + \frac{k}{n} \leqslant \frac{2}{3}(1+o(1)) < 1.$$

Используя оценки леммы 5 и методы теоремы 1, можно доказать локальную экстремальность функции $\psi_{k,k+h}^n$ в некоторой окрестности для

$k \sim h \sim n/3$ и $n \to \infty$, но сложность оценок возрастает при различных размерностях максимальных граней.

Теорема 2. *Функция $\psi = \psi^n_{k,k+h}$ локально экстремальна в окрестности $\Omega^c_d(\psi)$, если $0 < d \leqslant cn$, $c < \frac{2}{15}$ и $k \sim h \sim n/3$ при $n \to \infty$.*

Замечание 1. С использованием схемы доказательства теоремы 1(ii) и заменой функции $f = f^n_{k,k+h}$ на функцию $\psi = \psi^n_{k,k+h}$ показывается, что оценки числа максимальных граней в множествах $G_{\psi-\varphi}$ и $G_{\varphi-\psi}$ для различных подмножеств сохраняются с учётом величин, равных $o(1)$ при $k \sim h \sim n/3$ и $n \to \infty$. Следовательно, функция ψ не локально экстремальна в окрестности $\Omega^c_d(\psi)$, если $d > 2^{nc}$ и $c > c_0 = \frac{t_0}{3}$, где t_0 удовлетворяет соотношению $t_0 H\left(\frac{1}{t_0}\right) = 1$.

Применение к булевой функции преобразований из множества W^n_ρ позволяет получить разные функции, для которых сохраняются структурные и количественные характеристики максимальных граней: пересечение граней, число граней определённой размерности и др. Тем самым их применение к функциям $f^n_{k,k+h}$ и $\psi^n_{k,k+h}$ позволяет получить связные функции, для которых единичные вершины содержатся в любом диапазоне слоев куба, заполняют слои частично и сохраняется свойство локальной экстремальности функции в некоторой окрестности. Аналогично применение преобразований множества W^n_ρ к функции, на которой достигается значение G_n, позволяет получить разные функции, обладающие свойством глобальной экстремальности. Таким образом, функционал числа максимальных граней функции n переменных обладает свойством полиэкстремальности для глобального и локальных максимальных значений, близких к глобальному значению.

Актуальным представляется изучение свойств, при которых булева функция имеет асимптотически или по порядку роста максимальное число простых импликант. При этом могут быть использованы преобразования функции, при которых сохраняется асимптотика или порядок роста числа простых импликант функции. Таким образом, возникает вопрос значимости следующих свойств для достижения экстремальных значений числа простых импликант функции:

— параметры пояса, в котором содержится множество единичных вершин функции,

— разнообразие размерностей максимальных граней,

— принадлежность единичной вершины функции определённому числу максимальных граней,

— сравнимость вершин, которые являются максимальными или минимальными вершинами максимальных граней функции.

3. Доказательства

Доказательство леммы 1. Вершину слоя B_k^n, у которой координаты с номерами $i_1, \ldots, i_k$ равны 1, а остальные координаты равны 0, обозначим через $\widetilde{e}_{i_1,\ldots,i_k}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$ и $k = 1, \ldots, n$. Для множества $X \subset B^n$ и вершины $\widetilde{\alpha} \in B^n$ положим $X \oplus \widetilde{\alpha} = \{\widetilde{x} \oplus \widetilde{\alpha} \mid \widetilde{x} \in X\}$.

Если $\omega \in W_\rho^n$ и $\omega(\widetilde{0}) = \widetilde{\alpha}$, то $\omega\big(B_k^n\big) = B_k^n \oplus \widetilde{\alpha}$ для любого $k = 1, \ldots, n$, так как сохраняется расстояние между вершинами.

Докажем индукцией по k, что если $\omega \in W_{\rho,\widetilde{\alpha}}^n$, то $\omega(\widetilde{x}) = \pi(\widetilde{x}) \oplus \widetilde{\alpha}$, где перестановка $\pi \in \Pi^n$ определяется следующим образом.

Для вершины $\widetilde{e}_i \in B_1^n$ выполняется $\varpi(\widetilde{e}_i) \in B_1^n(\widetilde{\alpha})$ и $\varpi(\widetilde{e}_i) \neq \varpi(\widetilde{e}_j)$, где $i, j = 1, \ldots, n$ и $i \neq j$. Тогда $\varpi(\widetilde{e}_i) = \widetilde{e}_{t_i} \oplus \widetilde{\alpha}$ и $\varpi(\widetilde{e}_j) = \widetilde{e}_{t_j} \oplus \widetilde{\alpha}$, где $t_i \neq t_j$ для $i, j = 1, \ldots, n$ и $i \neq j$. Определим перестановку $\pi \in \Pi^n$, для которой $\pi(i) = t_i$, если $\varpi(\widetilde{e}_i) = \widetilde{e}_{t_i} \oplus \widetilde{\alpha}$ и $i = 1, \ldots, n$.

Базис индукции. Для вершины $\widetilde{e}_{i_1,i_2} \in B_2^n$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n$, выполняется $\varpi(\widetilde{e}_{i_1,i_2}) \in B_2^n(\widetilde{\alpha})$, т. е. $\varpi(\widetilde{e}_{i_1,i_2}) = \widetilde{e}_{t_1,t_2} \oplus \widetilde{\alpha}$. Тогда

$$\rho(\varpi(\widetilde{e}_{i_1,i_2}), \widetilde{e}_{\pi(i_t)} \oplus \widetilde{\alpha}) = \rho(\varpi(\widetilde{e}_{i_1,i_2}), \varpi(\widetilde{e}_{i_t})) = 1$$

для $t = 1, 2$ и, следовательно,

$$\varpi(\widetilde{e}_{i_1,i_2}) = \widetilde{e}_{\pi(i_1)} \oplus \widetilde{e}_{\pi(i_2)} \oplus \widetilde{\alpha} = \widetilde{e}_{\pi(i_1),\pi(i_2)} \oplus \widetilde{\alpha}.$$

Индуктивный переход. Для любой вершины $\widetilde{x} = \widetilde{e}_{i_1,\ldots,i_k} \in B_k^n$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n$, $k \geqslant 2$, выполняется

$$\varpi(\widetilde{e}_{i_1,\ldots,i_k}) = \pi(\widetilde{e}_{i_1,\ldots,i_k}) \oplus \widetilde{\alpha} = \widetilde{e}_{\pi(i_1),\ldots,\pi(i_k)} \oplus \widetilde{\alpha}.$$

Произвольная вершина $\widetilde{x} = \widetilde{e}_{i_1,\ldots,i_{k+1}} \in B_{k+1}^n$, где $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{k+1} \leqslant n$, имеет следующие свойства.

(a) $\varpi(\widetilde{x}) = \varpi(\widetilde{e}_{i_1,\ldots,i_{k+1}}) \in B_{k+1}^n(\widetilde{\alpha})$, т. е. $\varpi(\widetilde{e}_{i_1,\ldots,i_{k+1}}) = \widetilde{e}_{t_1,\ldots,t_{k+1}} \oplus \widetilde{\alpha}$.

(b) Для вершины $\widetilde{x}_j \in B_k^n$ такой, что $\widetilde{x}_j < \widetilde{x}$ и координата i_j равна 0, где $j = 1, \ldots, k+1$, выполняется $\varpi(\widetilde{x}_j) = \pi(\widetilde{x}_j) \oplus \widetilde{\alpha} \in B_k^n(\widetilde{\alpha})$, $\rho(\varpi(\widetilde{x}_j), \varpi(\widetilde{x})) = 1$ и $\varpi(\widetilde{x}) = \widetilde{e}_{t_1,\ldots,t_{k+1}} \oplus \widetilde{\alpha} \in B_{k+1}^n(\widetilde{\alpha})$.

(c) Вершина $\widetilde{x} = \widetilde{e}_{i_1,\ldots,i_{k+1}} \in B_{k+1}^n$ единственная такая, что $\rho(\widetilde{x}_j, \widetilde{x}) = 1$ для $j = 1, \ldots, k+1$, следовательно, $\omega(\widetilde{x}) \in B_{k+1}^n(\widetilde{\alpha})$ является единственной вершиной, для которой $\rho(\omega(\widetilde{x}_j), \omega(\widetilde{x})) = 1$, $j = 1, \ldots, k+1$.

По предположению $\omega(\widetilde{x}_j) = \pi(\widetilde{x}_j) \oplus \widetilde{\alpha}$ для $\widetilde{x}_j \in B_k^n$ и $j = 1, \ldots, k+1$, т. е. $\omega(\widetilde{x}_1) = \widetilde{e}_{\pi(i_2),\ldots,\pi(i_{k+1})} \oplus \widetilde{\alpha}$,

$$\omega(\widetilde{x}_j) = \widetilde{e}_{\pi(i_1),\ldots,\pi(i_{j-1}),\pi(i_{j+1}),\ldots,\pi(i_{k+1})} \oplus \widetilde{\alpha}, \quad j = 2, \ldots, k,$$

и $\omega(\widetilde{x}_{k+1}) = \widetilde{e}_{\pi(i_1),\ldots,\pi(i_k)} \oplus \widetilde{\alpha}$.

Тогда $\pi(\widetilde{x}) \oplus \widetilde{\alpha} = \widetilde{e}_{\pi(i_1),\ldots,\pi(i_{k+1})} \oplus \widetilde{\alpha} \in B_{k+1}^n(\widetilde{\alpha})$ является единственной вершиной, для которой $\rho(\omega(\widetilde{x}_j), \pi(\widetilde{x}) \oplus \widetilde{\alpha}) = 1$, где $j = 1, \ldots, k+1$, и $\pi(\widetilde{x}) \oplus \widetilde{\alpha} = \omega(\widetilde{x})$ для $\widetilde{x} \in B_{k+1}^n$. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Множества максимальных граней функции $f \in P_n$, для которых минимальная вершина грани находится не выше и максимальная вершина грани находится не ниже слоя куба B_k^n, обозначим через $G_f^{\leqslant k}$ и $G_f^{\geqslant k}$ соответственно. Тогда

$$G_f^{\leqslant k} = \bigcup_{i=0}^{k} \bigcup_{\widetilde{x} \in X_f \cap B_i^n} G_{f,X}^{\widetilde{x}}, \quad G_f^{\geqslant k} \leqslant \bigcup_{i=k}^{n} \bigcup_{\widetilde{y} \in Y_f \cap B_i^n} G_{f,Y}^{\widetilde{y}}.$$

Для вершины $\widetilde{y} \in Y_f \cap B_i^n$ все грани из множества $G_{f,Y}^{\widetilde{y}}$ содержатся в грани $g_{\widetilde{0},\widetilde{y}}$, минимальные вершины граней несравнимы и $\left|G_f^{\widetilde{y}}\right| \leqslant \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} < 2^i$. Аналогично для вершины $\widetilde{x} \in X_f \cap B_i^n$ все грани из множества $G_{f,X}^{\widetilde{x}}$ содержатся в грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{1}}$, максимальные вершины граней несравнимы и $\left|G_f^{\widetilde{x}}\right| \leqslant \binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2 \rfloor} < 2^{n-i}$. Следовательно,

$$\left|G_f^{\geqslant k}\right| < \sum_{k \leqslant i \leqslant n} \binom{n}{i} 2^i, \quad \left|G_f^{\leqslant k}\right| < \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} \binom{n}{i} 2^{n-i}.$$

Используем асимптотическое соотношение [10, с. 280, п. 5.7.4]

$$\sum_{\frac{na}{a+1} + z\frac{1}{a+1}\sqrt{na} \leqslant i \leqslant n} \binom{n}{i} 2^i \sim \frac{(1+a)^n}{z\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},$$

где $a > 0$, $z \to \infty$ и $z = o(n^{1/6})$ при $n \to \infty$. Пологая в этом соотношении $a = 2$ и $z = \sqrt{2 \ln n} = o(n^{1/6})$, имеем $e^{-z^2/2} = n^{-1}$ и

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant \frac{1}{3}n - z\frac{1}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{i} 2^{n-i} = \sum_{\frac{2}{3}n + z\frac{1}{3}\sqrt{2n} \leqslant i \leqslant n} \binom{n}{i} 2^i \leqslant \Theta\Big(\frac{3^n}{n\sqrt{\ln n}}\Big) = o\Big(\frac{3^n}{n}\Big).$$

Тогда

$$\left|G_f^{\leqslant \frac{n}{3} - r_n}\right| + \left|G_f^{\geqslant \frac{2n}{3} + r_n}\right| = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{3} - r_n} \binom{n}{i} 2^{n-i} + \sum_{\frac{2n}{3} + r_n \leqslant j \leqslant n} \binom{n}{j} 2^j = o\Big(\frac{3^n}{n}\Big)$$

для $r_n = \left\lfloor \frac{1}{3}\sqrt{2n \ln n} \right\rfloor$ и $n \to \infty$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. (i) Для грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$, где $\widetilde{x} \leqslant \widetilde{y}$, $\widetilde{x} \in B_p^n$ и $\widetilde{y} \in B_{p+q}^n$, определим множества индексов единичных и нулевых координат $I_1 = \{t \mid x_t = y_t = 1,\ 1 \leqslant t \leqslant n\}$ и $I_0 = \{t \mid x_t = y_t = 0,\ 1 \leqslant t \leqslant n\}$. Тогда $I_1 \cap I_0 = \varnothing$, $|I_1| = p$, $|I_0| = n - (p+q)$ и

$$g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} = \{\widetilde{\alpha} \in B^n \mid \alpha_t = 0, \text{ если } t \in I_0, \text{ и } \alpha_t = 1, \text{ если } t \in I_1\}.$$

Определим множества граней $G^- = \{g_j^-, j \in I_1\}$ и $G^+ = \{g_j^+, j \in I_0\}$, где

$$g_j^- = \{\widetilde{\alpha} \in B^n \mid \alpha_t = 0, \text{ если } t \in I_0, \text{ и } \alpha_t = 1, \text{ если } t \in I_1 \setminus \{j\}\},$$
$$g_j^+ = \{\widetilde{\alpha} \in B^n \mid \alpha_t = 0, \text{ если } t \in I_0 \setminus \{j\}, \text{ и } \alpha_t = 1, \text{ если } t \in I_1\}.$$

Если $g_i^-, g_j^- \in G^-$ и $i \neq j$, то они содержатся в $S^n_{p-1,p+q}$, а множества $g' = g_i^- \setminus g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ и $g'' = g_j^- \setminus g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ являются гранями, для которых

$$g' \cap g'' = \varnothing, \quad g' \cap \overline{N}_\varphi \neq \varnothing, \quad g'' \cap \overline{N}_\varphi \neq \varnothing,$$
$$g' \subset S^n_{p-1,p+q-1}, \quad g'' \subset S^n_{p-1,p+q-1}.$$

Следовательно, $\left|\overline{N}_\varphi \cap S^n_{p-1,p+q-1}\right| \geqslant |G^-| = p$.

Если $g_i^+, g_j^+ \in G^+$ и $i \neq j$, то они содержатся в $S^n_{p,p+q+1}$, а множества $g' = g_i^+ \setminus g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ и $g'' = g_j^+ \setminus g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ являются гранями, для которых

$$g' \cap g'' = \varnothing, \quad g' \cap \overline{N}_\varphi \neq \varnothing, \quad g'' \cap \overline{N}_\varphi \neq \varnothing$$
$$g' \subset S^n_{p+1,p+q+1}, \quad g'' \subset S^n_{p+1,p+q+1}.$$

Следовательно, $\left|\overline{N}_\varphi \cap S^n_{p+1,p+q+1}\right| \geqslant |G^+| = n - p - q$.

(ii) Связное множество вершин $X = \{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_d\}$ может быть упорядочено таким образом, что подмножество $X_t = \{\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_t\}$ связно и $\rho\,(\widetilde{x}_{t+1}, X_t) = 1$ для $t = 1, \ldots, d-1$. Тогда $\rho(\widetilde{x}_{t+1}, \widetilde{x}) = 1$ для некоторой вершины $\widetilde{x} \in X_t$. Номер координаты, в которой вершины $\widetilde{x}_{t+1}$ и $\widetilde{x}$ различаются, обозначим через j_{t+1}.

Множество $J = \{j_{t+1} \mid t = 1, \ldots, d-1\}$ может содержать одинаковые значения индексов. При этом все вершины $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in X$ для любой координаты $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus J$ имеют одинаковое значение, которое обозначим через σ_j. Тогда

$$X \subseteq \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n \mid \alpha_j = \sigma_j,\ j \in \{1, \ldots, n\} \setminus J\},$$

т. е. X содержится в грани размерности не более $d-1$.

(iii) Для функций $f \in P_n^{\mathrm{con}}$, $\varphi \in \Omega_d^c(f)$ и вершины $\widetilde{\alpha} \in N_\varphi$, где $\rho(\widetilde{\alpha}, N_f) > 1$ и $d \leqslant n$, выполняется $|N_\varphi \setminus N_f| \leqslant d \leqslant n$. Из п. (ii) следует, что $N_\varphi \setminus N_f \subset g'$, где грань g' имеет размерность не более $d-1$ и содержит любую грань $g \in G_\varphi^{\widetilde{\alpha}}$. Из леммы 1 следует, что $\left|G_\varphi^{\widetilde{\alpha}}\right| = \left|G_{\omega(f)}^{\omega_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{\alpha})}\right| = \left|G^{\widetilde{0}}_{\omega_{\widetilde{\alpha}}(f)}\right|$. Максимальные вершины всех граней из множества $G_{\widetilde{0}}(\omega_{\widetilde{\alpha}}(f))$ являются несравнимыми вершинами и содержатся в грани $\omega_{\widetilde{\alpha}}(g')$ размерности не более $d-1$. Следовательно, число граней не превосходит числа вершин среднего слоя грани $\omega_{\widetilde{\alpha}}(g')$ и $\left|G_\varphi^{\widetilde{\alpha}}\right| = \left|G^{\widetilde{0}}_{\omega_{\widetilde{\alpha}}(f)}\right| < 2^{d-1}$. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. (i) Для грани $g \in G_\varphi$ и функции $\varphi \in \Omega^c(f, d)$, где $d < d_f \leqslant \min\{k, n-k-h\}$ и $N_f = S^n_{k,k+h}$, из леммы 3(i) следует, что если $g \subset S^n_{k-1,k+h-1}$, то $|N_\varphi \setminus N_f| \geqslant n-k-h > d$, и если $g \subset S^n_{k+1,k+h+1}$, то $|N_\varphi \setminus N_f| \geqslant k > d$, что невозможно для $\varphi \in \Omega^c_d(f)$.

(ii) Соотношение $G_\varphi \subseteq G_f$, если $N_\varphi \subseteq N_f$, выполняется, так как если грань $g \in G_\varphi \setminus G_f$, то $g \subset S^n_{k,k+h-1}$ или $g \subset S^n_{k+1,k+h}$ противоречит п. (i) леммы.

(iii) Пусть $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$. Если $\widetilde{x} \in B^n_{k-1}$ и $\widetilde{y} \notin S^n_{k+h,k+h+1}$, то может быть или $\widetilde{y} \in S^n_{k,k+h-1}$, что противоречит п. (i), или $\widetilde{y} \in S^n_{k+h+2,n}$, и тогда $\left|g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \cap B^n_{k+h+1}\right| \geqslant h+2 > d_f$, что противоречит условию $\varphi \in \Omega^c_d(f)$.

Если $\widetilde{y} \in Y_\varphi \cap B^n_{k+h+1}$ и $\widetilde{x} \notin S^n_{k-1,k}$, то или $\widetilde{x} \in S^n_{k+1,k+h}$, что противоречит п. (i), или $\widetilde{x} \in S^n_{0,k-2}$, и тогда $\left|g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \cap B^n_{k-1}\right| \geqslant h+2 > d$, что противоречит условию $\varphi \in \Omega^c_d(f)$.

(iv) Для $\widetilde{x} \in N_\varphi \cap B^n_{k-1}$ и множества

$$Y_{\widetilde{x}} = \left\{\widetilde{y} \in B^n_k \cap N_f \cap N_\varphi \mid \widetilde{x} < \widetilde{y}\right\}$$

выполняется $|Y_{\widetilde{x}}| \geqslant n-k+1-d \geqslant h+1$. Определим функцию $\varphi_1 \in \Omega^c_d(f)$ такую, что $N_{\varphi_1} = \{\widetilde{x}\} \cup \left(N_\varphi \cap S^n_{k,n}\right) \subseteq N_\varphi$, т. е. $\rho(\varphi_1, f) \leqslant \rho(\varphi, f) < d$. Из п. (iii) следует, что для вершины $\widetilde{x} \in N_{\varphi_1} \cap B^n_{k-1}$ есть максимальная грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi_1}$ и $\widetilde{y} \in S^n_{k+h,k+h+1}$. Так как $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset N_{\varphi_1} \subseteq N_\varphi$, то $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ является гранью функции φ. Покажем, что грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi_1}$ максимальная для функции φ и $\widetilde{x} \in X_\varphi$.

Если $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \notin G_\varphi$, то найдётся грань $g \subset N_\varphi$, для которой $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g \not\subset N_{\varphi_1}$ и размерность больше размерности $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ на 1. Тогда $g = g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}} \subset N_\varphi$, где $\widetilde{\alpha} \in B^n_{k-2}$, $\widetilde{y} \in S^n_{k+h,k+h+1}$ и $|g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}} \setminus N_f| \geqslant \left|g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}} \cap B^n_{k-1}\right| \geqslant h+1 > d$, что противоречит $\varphi \in \Omega^c_d(f)$.

Для $\widetilde{y} \in N_\varphi \cap B^n_{k+h+1}$ рассмотрим функции $f_1(\widetilde{x}) = f(\widetilde{x} \oplus \widetilde{1})$, $\varphi_1 \in \Omega^c_d(f_1)$ и вершину $\widetilde{x}_1 = \widetilde{y} \oplus \widetilde{1} \in N_{\varphi_1} \cap B^n_{n-k-h-1}$. Тогда $f_1(\widetilde{x}) = f^n_{n-k-h,n-k}$, $\widetilde{x}_1 \in X_{\varphi_1}$, так как $N_{\varphi_1} \cap B^n_{n-k-h-1} \subseteq X_{\varphi_1}$, и $\widetilde{y}_1 \in S^n_{n-k,n-k+1}$ для любой грани $g_{\widetilde{x}_1,\widetilde{y}_1} \in G_{\varphi_1}$.

Следовательно, для функций $f(\widetilde{x}) = f_1(\widetilde{x} \oplus \widetilde{1}) = f^n_{k,k+h}$, $\varphi \in \Omega^c_d(f)$ и вершины $\widetilde{y} = \widetilde{x}_1 \oplus \widetilde{1} \in N_\varphi \cap B^n_{k+h+1}$ имеем $\widetilde{y} \in Y_\varphi$, $N_\varphi \cap B^n_{k+h+1} \subseteq Y_\varphi$ и $\widetilde{x} \in S^n_{n-k,n-k+1} \oplus 1 = S^n_{k-1,k}$ для грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$. Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. (i) Если $N_\varphi \subset N_f$ и $|N_\varphi \setminus N_f| \leqslant d < d_f$, то из леммы 4(ii) следует, что $G_\varphi \subset G_f$ и $|G_f| > |G_\varphi|$.

(ii) Для получения верхней оценки $|G_{\varphi-f}|$ используем (2), равенства $G^{>1}_{\varphi-f} = \varnothing$ при $d_{>1} = 0$, $G^{\leqslant 1}_{\varphi-f} = \varnothing$ при $d^-_1 + d^+_1 = 0$ и то, что $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \cap \overline{N}_f \neq \varnothing$ для любой грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi-f}$ (последнее следует из п. (i)).

Верхняя оценка $\left|G^{>1}_{\varphi-f}\right|$ при $d_{>1} > 0$. Если грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{>1}_{\varphi-f}$, то или $\widetilde{x} \in N_\varphi \cap S^n_{0,k-2}$, или $\widetilde{y} \in N_\varphi \cap S^n_{n+k+2,n}$. Тогда $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \not\subset N_f$, $|g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \setminus N_f| <$

$|N_\varphi \setminus N_f| \leqslant d - d_0 < d_f < n$ и по лемме 3(iii) или $\bigl|G^{\widetilde{x}}_{\varphi,X}\bigr| < 2^{d-d_0-1}$, или $\bigl|G^{\widetilde{y}}_{\varphi,Y}\bigr| < 2^{d-d_0-1}$ соответственно. Из оценки (5) при $\bigl|X^{>1}_{\varphi,f}\bigr| \leqslant d_{>1}$ и $\bigl|Y^{>1}_{\varphi,f}\bigr| \leqslant d_{>1}$ следует, что $\bigl|G^{>1}_{\varphi-f}\bigr| \leqslant d_{>1}2^{d-d_0} < d_{>1}2^d$.

Верхняя оценка $\bigl|G^{\leqslant 1}_{\varphi-f}\bigr|$ при $d_1 = d_1^- + d_1^+ > 0$. Отметим, что в силу леммы 4(iv) выполняется $N_\varphi \cap B^n_{k-1} \subseteq X_\varphi$ и $N_\varphi \cap B^n_{k+h+1} \subseteq Y_\varphi$.

Для $\widetilde{x} \in X^1_{\varphi,f} \subset B^n_{k-1}$ множество граней $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{\leqslant 1}_{\varphi-f}$ обозначим через $G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-f,X}$. Из леммы 4(iv) следует, что $G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-f,X} = G_0 \cup G_1$, где $G_0 \cap G_1 = \varnothing$,

$$G_\sigma = \bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in \mathbb{G}^{\leqslant 1}_{\varphi-f} \mid \widetilde{x} < \widetilde{y} \in B^{n,1}_{k+h+\sigma},\ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \cap \overline{N}_\varphi = \varnothing\bigr\}, \quad \sigma = 0, 1.$$

Если $G_1 = \varnothing$, то

$$\bigl|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-f,X}\bigr| = |G_0| = \bigl|\bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \mid \widetilde{y} \in B^n_{k+h},\ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \cap \overline{N}_\varphi = \varnothing\bigr\}\bigr| \leqslant \binom{n-k+1}{h+1}.$$

Если $G_1 \neq \varnothing$, то $|\{g \in G_0 \mid g \subset g'\}| = h+2$ для любой грани $g' \in G_1$ и $|G_1| \leqslant d < d_f \leqslant h$. Тогда

$$\bigl|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-f,X}\bigr| \leqslant |G_0| - (h+2) + |G_1| < |G_0| \leqslant \binom{n-k+1}{h+1}.$$

Следовательно, для $\widetilde{x} \in X^1_{\varphi,f} \subset B^n_{k-1}$ выполняется

$$\bigl|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-f,X}\bigr| \leqslant \binom{n-k+1}{h+1}. \tag{6}$$

Для вершины $\widetilde{y} \in Y^1_{\varphi,f} \subset B^n_{k+h+1}$ множество граней $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{\leqslant 1}_{\varphi-f}$ обозначим через $G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-f,Y}$. Из леммы 1 следует, что $\bigl|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-f,Y}\bigr| = \bigl|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}'}_{\varphi'-f',X}\bigr|$, где $f' = \omega_{\widetilde{1}}(f) = f^n_{n-k-h,n-k}$, $\varphi' = \omega_{\widetilde{1}}(\varphi) \in \Omega^c(f',d)$ для $d < d_{f'} = d_f$, $\widetilde{x}' = \omega_{\widetilde{1}}(\widetilde{y}) \in X^1_{\varphi',f'} \cap B^n_{n-k-h-1}$ и

$$\bigl|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-f,Y}\bigr| = \bigl|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}'}_{\varphi'-f',X}\bigr| \leqslant \binom{k+h+1}{h+1}. \tag{7}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\bigl|G^{\leqslant 1}_{\varphi-f}\bigr| \leqslant \bigl|X^1_{\varphi,f}\bigr|\binom{n-k+1}{h+1} + \bigl|Y^1_{\varphi,f}\bigr|\binom{k+h+1}{h+1}&\\ \leqslant d_1^-\binom{n-k+1}{h+1} + d_1^+\binom{k+h+1}{h+1}&\end{aligned}$$

и выполняется (4).

Нижняя оценка $|G_{f-\varphi}|$. Если $d_1^- > 0$, то по лемме 4(iv) для функции φ есть вершина $\widetilde{\alpha} \in N_\varphi \cap B^n_{k-1} \subseteq X_\varphi$. Обозначим для $\widetilde{\alpha} \in B^n_{k-1}$ множества граней следующим образом:

$$\begin{gathered} G_f^{\widetilde{\alpha}<} = \bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{\alpha} < \widetilde{x} < \widetilde{y},\ \widetilde{x} \in B^n_k,\ \widetilde{y} \in B^n_{k+h}\bigr\}, \\ G_{f,\varphi=0}^{\widetilde{\alpha}<} = \bigl\{g \in G_f^{\widetilde{\alpha}<} \mid \exists\, \widetilde{z} \in g,\ \varphi(\widetilde{z}) = 0\bigr\}, \\ G_{f-\varphi}^{\widetilde{\alpha}<} = G_f^{\widetilde{\alpha}<} \setminus G_{f\subseteq\varphi}, \quad G_{f\cap\varphi}^{\widetilde{\alpha}<} = G_f^{\widetilde{\alpha}<} \cap G_\varphi. \end{gathered}$$

Очевидно, что $G_{f,\varphi=0}^{\widetilde{\alpha}<} \cap G_\varphi = \varnothing$.

Для грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f$ и функции $\varphi \in \Omega_d^c(f)$ имеют место следующие соотношения:

$g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \not\subset g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}} \subset N_\varphi$ для $\widetilde{\alpha} \in N_\varphi \cap S^n_{0,k-2}$, так как $|g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}} \setminus N_f| > h+2 > d$;

$g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \not\subset g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}} \subset N_\varphi$ для $\widetilde{\alpha} \in N_\varphi \cap S^n_{k+h+2,n}$, так как $|g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}} \setminus N_f| > h+2 > d$.

Значит, или $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}} \in G_\varphi$ для $\widetilde{\alpha} \in N_\varphi \cap B^n_{k-1}$, или $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}} \in G_\varphi$ для $\widetilde{\alpha} \in N_\varphi \cap B^n_{k+h+1}$, или $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}'} \in G_\varphi$ для $\widetilde{\alpha} \in N_\varphi \cap B^n_{k-1}$ и $\widetilde{\alpha}' \in N_\varphi \cap B^n_{k+h+1}$. Тогда $g \in G_{f-\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}$, если $g \in G_f^{\widetilde{\alpha}<}$ и

$$g \notin G_{f,\varphi=0}^{\widetilde{\alpha}<} \cup G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigl(B^n_{k-1} \setminus \{\widetilde{\alpha}\}\bigr) \cup G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigl(B^n_{k+h+1}\bigr),$$

где $G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigl(B^n_{k+h+1}\bigr)$ — множество граней $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f^{\widetilde{\alpha}<}$, для которых найдётся вершина $\widetilde{\alpha}' \in N_\varphi \cap B^n_{k+h+1}$ такая, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{x} < \widetilde{\alpha}'$ и $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}'} \in G_\varphi^{\widetilde{\alpha}'>}$; $G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigl(B^n_{k-1} \setminus \{\widetilde{\alpha}\}\bigr)$ — множество граней $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f^{\widetilde{\alpha}<}$, для которых найдётся вершина $\widetilde{\alpha}' \in N_\varphi \cap B^n_{k-1}$ такая, что $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\alpha}' < \widetilde{x}$ и $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{\alpha}',\widetilde{y}} \in G_\varphi^{\widetilde{\alpha}'<}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |G_{f-\varphi}| \geqslant \bigl|G_{f-\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigr| \geqslant \bigl|G_f^{\widetilde{\alpha}<}\bigr| - \bigl|G_{f,\varphi=0}^{\widetilde{\alpha}<}\bigr| \\ - \bigl|G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigl(B^n_{k-1} \setminus \{\widetilde{\alpha}\}\bigr)\bigr| - \bigl|G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigl(B^n_{k+h+1}\bigr)\bigr|. \end{aligned}$$

Грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ принадлежит $G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigl(B^n_{k+h+1}\bigr)$, если $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}'} \in G_\varphi$, где $\widetilde{\alpha} < \widetilde{x} < \widetilde{y} < \widetilde{\alpha}'$, $\widetilde{\alpha} \in B^n_{k-1}$ и $\widetilde{\alpha}' \in B^n_{k+h+1}$. Тогда

$$\bigl|\bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f^{\widetilde{\alpha}<} \mid g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}'},\ \widetilde{\alpha} < \widetilde{x} < \widetilde{y} < \widetilde{\alpha}'\bigr\}\bigr| = (h+2)(h+1)$$

и $\bigl|\bigl\{\widetilde{\alpha}' \in N_\varphi \cap B^n_{k+h+1} \mid \widetilde{\alpha} < \widetilde{\alpha}'\bigr\}\bigr| \leqslant d_1^+$. Значит,

$$\bigl|G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigl(B^n_{k+h+1}\bigr)\bigr| \leqslant d_1^+(h+2)(h+1).$$

Грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ принадлежит $G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\bigl(B^n_{k-1} \setminus \{\widetilde{\alpha}\}\bigr)$, если $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{\alpha}',\widetilde{y}} \in G_\varphi$, где $\widetilde{\alpha}' < \widetilde{x} < \widetilde{y}$, $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}'\} \in N_\varphi \cap B^n_{k-1}$ и $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}') = 2$. Тогда

$$\bigl|\bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f^{\widetilde{\alpha}<} \mid g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{\alpha},y} \cap g_{\widetilde{\alpha}',\widetilde{y}}\bigr\}\bigr| = \binom{n-k}{h}$$

и $\bigl|\bigl\{\widetilde{\alpha}' \in N_\varphi \cap B^n_{k-1} \mid \widetilde{\alpha}' \neq \widetilde{\alpha}\bigr\}\bigr| < d_1^-$. Следовательно,

$$\bigl|G^{\widetilde{\alpha}<}_{f\subset\varphi}\bigl(B^n_{k-1} \setminus \{\widetilde{\alpha}\}\bigr)\bigr| < d_1^- \binom{n-k}{h}.$$

Грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ принадлежит $G^{\widetilde{\alpha}<}_{f,\varphi=0}$ для $\widetilde{\alpha} \in B^n_{k-1}$, если $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \cap Z^{\widetilde{\alpha}<} \neq \varnothing$, где множество вершин $Z^{\widetilde{\alpha}<} = \{\widetilde{z} \in N_f \setminus N_\varphi \mid \widetilde{\alpha} < \widetilde{z}\}$. Тогда $\bigl|G^{\widetilde{\alpha}<}_{f,\varphi=0}\bigr| \leqslant |Z^{\widetilde{\alpha}<}| \max\limits_{\widetilde{z}\in Z^{\widetilde{\alpha}<}} \bigl|G^{\widetilde{\alpha}\leqslant}_{f,\widetilde{z}}\bigr|$, где $G^{\widetilde{\alpha}\leqslant}_{f,\widetilde{z}} = \bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{\widetilde{\alpha}<}_f \mid \widetilde{z} \in g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}\bigr\}$ — грани из множества $G^{\widetilde{\alpha}<}_f$, которые содержат вершину $\widetilde{z} \in Z^{\widetilde{\alpha}<}$.

Грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ принадлежит $G^{\widetilde{\alpha}\leqslant}_{f,\widetilde{z}}$, если $\widetilde{x} \in B^n_k$, $\widetilde{y} \in B^n_{k+h}$ и $\widetilde{\alpha} < \widetilde{x} \leqslant \widetilde{z} \leqslant \widetilde{y}$, т. е. $G^{\widetilde{\alpha}\leqslant}_{f,\widetilde{z}} = \{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \mid \widetilde{x} \in X_{\widetilde{z}},\ \widetilde{y} \in Y_{\widetilde{z}}\}$, где $X_{\widetilde{z}} = \bigl\{\widetilde{x} \in B^n_k \mid \widetilde{\alpha} < \widetilde{x} \leqslant \widetilde{z}\bigr\}$ и $Y_{\widetilde{z}} = \bigl\{\widetilde{y} \in B^n_{k+h} \mid \widetilde{\alpha} < \widetilde{z} \leqslant \widetilde{y}\bigr\}$.

Если $\widetilde{z} \in B^n_{k+j}$, где $j = 0,\dots,h$, то имеем $|X_{\widetilde{z}}| = \bigl|g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{z}} \cap B^n_k\bigr| = j+1$, $|Y_{\widetilde{z}}| = \bigl|g_{\widetilde{z},\widetilde{1}} \cap B^n_{k+h}\bigr| = \binom{n-k-j}{h-j}$ и $\bigl|G^{\widetilde{\alpha}\leqslant}_{f,\widetilde{z}}\bigr| = |X_{\widetilde{z}}||Y_{\widetilde{z}}| = (j+1)\binom{n-k-j}{h-j}$. Тогда

$$\max_{\widetilde{z}\in Z^{\widetilde{\alpha}<}} \bigl|G^{\widetilde{\alpha}\leqslant}_{f,\widetilde{z}}\bigr| = M^{n,-}_{k,h} = \max_{j=0,\dots,h} (j+1)\binom{n-k-j}{h-j},$$

$|Z^{\widetilde{\alpha}<}| \leqslant |N_f \cap \overline{N}_\varphi| \leqslant d_0$ и $\bigl|G^{\widetilde{\alpha}<}_{f,\varphi=0}\bigr| \leqslant d_0 M^{n,-}_{k,h}$. Следовательно,

$$\bigl|G^{\widetilde{\alpha}<}_{f-\varphi}\bigr| \geqslant (n-k+1-d_1^-)\binom{n-k}{h} - d_0 M^{n,-}_{k,h} - d_1^+(h+1)(h+2). \tag{8}$$

Если $d_1^+ > 0$, то для функции φ из леммы 4(iv) следует, что найдётся вершина $\widetilde{\alpha} \in N_\varphi \cap B^n_{k+h+1} \subseteq Y_\varphi$. Обозначим для $\widetilde{\alpha} \in B^n_{k+h+1}$ множества граней

$$\begin{aligned} G^{\widetilde{\alpha}>}_f &= \bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} < \widetilde{y} < \widetilde{\alpha},\ \widetilde{x} \in B^n_k,\ \widetilde{y} \in B^n_{k+h}\bigr\},\\ G^{\widetilde{\alpha}>}_{f,\varphi=0} &= \bigl\{g \in G^{\widetilde{\alpha}>}_f \mid \exists\, \widetilde{z} \in g,\ \varphi(\widetilde{z}) = 0\bigr\},\\ G^{\widetilde{\alpha}>}_{f-\varphi} &= G^{\widetilde{\alpha}>}_f \setminus G_\varphi, \quad G^{\widetilde{\alpha}>}_{f\cap\varphi} = G^{\widetilde{\alpha}>}_f \cap G_\varphi. \end{aligned}$$

Тогда $g \in G^{\widetilde{\alpha}>}_{f-\varphi}$, если $g \in G^{\widetilde{\alpha}>}_f$ и

$$g \notin G^{\widetilde{\alpha}>}_{f,\varphi=0} \cup G^{\widetilde{\alpha}>}_{f\subset\varphi}\bigl(B^n_{k-1}\bigr) \cup G^{\widetilde{\alpha}>}_{f\subset\varphi}\bigl(B^n_{k+h+1} \setminus \{\widetilde{\alpha}\}\bigr),$$

где $G^{\widetilde{\alpha}>}_{f\subset\varphi}(B^n_{k-1})$ — множество граней $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{\widetilde{\alpha}>}_f$, для которых найдётся вершина $\widetilde{\alpha}' \in N_\varphi \cap B^n_{k-1}$ такая, что $\widetilde{\alpha}' < \widetilde{x} < \widetilde{\alpha}$ и $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{\alpha}',\widetilde{y}} \in G^{\widetilde{\alpha}'<}_\varphi$; $G^{\widetilde{\alpha}>}_{f\subset\varphi}(B^n_{k+h+1} \setminus \{\widetilde{\alpha}\})$ — множество граней $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{\widetilde{\alpha}>}_f$, для которых найдётся вершина $\widetilde{\alpha}' \in N_\varphi \cap B^n_{k+h+1}$ такая, что $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\alpha}' > \widetilde{y}$ и $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \subset g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}'} \in G^{\widetilde{\alpha}'>}_\varphi$.

Следовательно,

$$\left|G_{f-\varphi}\right| \geqslant \left|G_{f-\varphi}^{\widetilde{\alpha}>}\right| \geqslant \left|G_{f}^{\widetilde{\alpha}>}\right| - \left|G_{f,\varphi=0}^{\widetilde{\alpha}>}\right| \\ - \left|G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}>}\left(B_{k-1}^{n}\right)\right| - \left|G_{f\subset\varphi}^{\widetilde{\alpha}>}\left(B_{k+h+1}^{n}\setminus\{\widetilde{\alpha}\}\right)\right|.$$

Грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ принадлежит $G_{f,\varphi=0}^{\widetilde{\alpha}>}$ для вершины $\widetilde{\alpha}\in B_{k+h+1}^{n}$, если есть вершина $\widetilde{z}\in g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$, где $\widetilde{z}\in Z^{\widetilde{\alpha}>}=\{\widetilde{z}\in N_f\mid \widetilde{\alpha}>\widetilde{z},\varphi(\widetilde{z})=0\}$. Тогда

$$\left|G_{f,\varphi=0}^{\widetilde{\alpha}>}\right| \leqslant |Z^{\widetilde{\alpha}>}|\max_{\widetilde{z}\in Z^{\widetilde{\alpha}>}}\left|G_{f,\widetilde{z}}^{\widetilde{\alpha}>}\right|,$$

где $G_{f,\widetilde{z}}^{\widetilde{\alpha}>}=\left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}\in G_{f}^{\widetilde{\alpha}>}\mid \widetilde{z}\in g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}\right\}$ — грани из множества $G_{f}^{\widetilde{\alpha}>}$, которые содержат вершину $\widetilde{z}\in Z^{\widetilde{\alpha}>}$.

Для функций $f=f_{k,k+h}^{n}$, $\varphi\in\Omega^{c}(f,d)$ и отображения $\omega_{\widetilde{1}}\in W_{\rho}^{n}$ из леммы 2 следует, что $|G_{f-\varphi}|=|G_{f'-\varphi'}|$, где $f'=\omega_{\widetilde{1}}(f)=f_{n-k-h,n-k}^{n}$, $\varphi'=\omega_{\widetilde{1}}(\varphi)\in\Omega^{c}(f',d)$ и $\widetilde{\alpha}'=\omega_{\widetilde{1}}(\widetilde{\alpha})\in B_{n-k-h-1}^{n}$. При этом выполняются соотношения

$$\left|N_{\varphi'}\cap B_{n-k-h-1}^{n}\right|=\left|N_{\varphi}\cap B_{k+h+1}^{n}\right|=d_1^{+},$$

$$\left|N_{\varphi'}\cap B_{n-k+1}^{n}\right|=\left|N_{\varphi}\cap B_{k-1}^{n}\right|=d_1^{-},$$

$$\left|G_{f}^{\widetilde{\alpha}>}\right|=\left|G_{f'}^{\widetilde{\alpha}'<}\right|=(k+h+1)\binom{k+h}{h},$$

$$\max_{\widetilde{z}\in Z^{\widetilde{\alpha}>}}\left|G_{f,\widetilde{z}}^{\widetilde{\alpha}>}\right|=\max_{\widetilde{z}\in Z^{\widetilde{\alpha}'<}}\left|G_{f',\widetilde{z}}^{\widetilde{\alpha}'<}\right|=\max_{j=0,\ldots,h}(j+1)\binom{k+h-j}{h-j}=M_{k,h}^{n,+},$$

$$|Z^{\widetilde{\alpha}>}|=|Z^{\widetilde{\alpha}'<}|\leqslant|N_{f'}\cap\overline{N}_{\varphi'}|=|N_f\cap\overline{N}_{\varphi}|\leqslant d_0,$$

$$\left|G_{f\subseteq\varphi}^{\widetilde{\alpha}>}\right|=\left|G_{f'\subseteq\varphi'}^{\widetilde{\alpha}'<}\right|\leqslant|Z^{\widetilde{\alpha}>}|M_{k,h}^{n,+}\leqslant d_0M_{k,h}^{n,+},$$

$$\left|G_{f-\varphi}^{\widetilde{\alpha}>}\right|\geqslant(k+h+1-d_1^{+})\binom{k+h}{h}-d_0M_{k,h}^{n,+}-d_1^{-}(h+1)(h+2). \qquad (9)$$

Из нижних оценок (8) и (9) следует (5).

(iii) Для $a_j=(j+1)\binom{n-k-j}{h-j}$, где $j=0,\ldots,h-1$, выполняется

$$\frac{a_j}{a_{j+1}}=\left(1-\frac{1}{j+2}\right)\left(1+\frac{n-k-h}{h-j}\right)\geqslant\left(1-\frac{1}{j+2}\right)\frac{n-k}{h}.$$

Тогда $\frac{a_0}{a_1}\geqslant\frac{n-k}{2h}$ и $\frac{a_j}{a_{j+1}}\geqslant\frac{2}{3}\frac{n-k}{h}$ для $j=1,\ldots,h-1$.

Если $n-k>\frac{3h}{2}$, то $a_j>a_{j+1}$ для $j=1,\ldots,h-1$ и

$$\max_{j=0,\ldots,h}a_j=\max\{a_0,a_1\}=\max\left\{\binom{n-k}{h},2\binom{n-k-1}{h-1}\right\}.$$

Следовательно, $a_1 < a_0(1+o(1)) = \binom{n-k}{h}(1+o(1))$ и $a_j < a_1$ для $j = 2,\dots,h$, если $k \sim h \sim \frac{n}{3}$ при $n \to \infty$.

Для $a_j = (j+1)\binom{k+h-j}{h-j}$, где $j = 0,\dots,h-1$, выполняется

$$\frac{a_j}{a_{j+1}} = \left(1 - \frac{1}{j+2}\right)\left(1 + \frac{k}{h-j}\right) \geqslant \left(1 - \frac{1}{j+2}\right)\frac{k+h}{h}.$$

Тогда $\frac{a_0}{a_1} \geqslant \frac{k}{2h}$ и $\frac{a_j}{a_{j+1}} \geqslant \frac{2}{3}\frac{k}{h}$ для $j = 1,\dots,h-1$.

Если $k > \frac{h}{2}$, то $a_j > a_{j+1}$ для $j = 1,\dots,h-1$ и

$$\max_{j=0,\dots,h} a_j = \max\{a_0, a_1\} = \max\left\{\binom{k+h}{h}, 2\binom{k+h-1}{h-1}\right\}.$$

Следовательно, $a_1 < a_0(1+o(1)) = \binom{k+h}{h}(1+o(1))$ и $a_j < a_1$ для $j = 2,\dots,h$, если $k \sim h \sim \frac{n}{3}$ при $n \to \infty$. Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. (i) Отметим, что выполняется условие $d < d_f = \min\{h, k, n-k-h\}$ леммы 5, если $d \leqslant cn$ и $k \sim h \sim n/3$ для $0 < c < \frac{2}{9}$ и $n \to \infty$.

Если $N_\varphi \subset N_f$, т. е. $0 < d_0 \leqslant d$ и $d_1 = d_{>1} = 0$, то $|G_f| > |G_\varphi|$ в силу леммы 5(i).

Если $N_\varphi \setminus N_f \neq \varnothing$, то из леммы 5(ii, iii) следует выполнение соотношений (4) и (5). Тогда $|G_{f-\varphi}| > |G_{\varphi-f}|$ и $|G_f| > |G_\varphi|$, если

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sgn}(d_1^-)\left((n-k+1-d_1^-)\binom{n-k}{h} - d_0 M_{k,h}^{n,-} - d_1^+(h+1)(h+2)\right)\\
&+ \operatorname{sgn}(d_1^+)\left((k+h+1-d_1^+)\binom{k+h}{h} - d_0 M_{k,h}^{n,+} - d_1^-(h+1)(h+2)\right)\\
&\qquad > d_1^-\binom{n-k+1}{h+1} + d_1^+\binom{k+h+1}{h+1} + d_{>1}2^{d-d_0-1},
\end{aligned}$$

где

$$d_0 = |N_f \setminus N_\varphi|, \quad d_1^- = \left|N_\varphi \cap B_{k-1}^n\right|, \quad d_1^+ = \left|N_\varphi \cap B_{k+h+1}^n\right|,$$
$$d_{>1} = \left|N_\varphi \setminus S_{k-1,k+h+1}^n\right|, \quad d_0 + d_1^- + d_1^+ + d_{>1} \leqslant d,$$
$$M_{k,h}^{n,-} = \max_{j=0,\dots,h}(j+1)\binom{n-k-j}{h-j}, \quad M_{k,h}^{n,+} = \max_{j=0,\dots,h}(j+1)\binom{k+h-j}{h-j}.$$

Если $k \sim h \sim n/3$ при $n \to \infty$, то $d_f = \min\{h, k, n-k-h\} \sim n/3$, $d(h+1)(h+2) \leqslant \Theta(n^3)$, $\max\{d_1^-, d_1^+, d_0\} \leqslant \Theta(n)$,

$$M_{k,h}^{n,-} \leqslant \binom{n-k}{h}(1+o(1)), \quad M_{k,h}^{n,+} \leqslant \binom{k+h}{h}(1+o(1)),$$

$$\binom{n-k+1}{h+1} = 2\binom{n-k}{h}(1+o(1)), \quad \binom{k+h+1}{h+1} = 2\binom{h+k}{h}(1+o(1)).$$

Используем оценку $\frac{\sqrt{\pi}}{2}G(n,x) \leqslant \binom{n}{xn} \leqslant G(n,x)$, где $0 < x < 1$, $G(n,x) = 2^{nH(x)}/\sqrt{2\pi nx(1-x)}$ и $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ (см. [10, с. 280, п. 5.8]).

Если $x_n = a(1+o(1))$, $0 < a < 1$ и $n \to \infty$, то $H(x_n) = H(a)(1-o(1))$, $0 < H(a) \leqslant 1$. Следовательно, $\binom{n}{x_n} = 2^{nH(a)(1-o(1))}$ и, если $a = \frac{1}{2}$, то $\binom{n}{x_n} = 2^{n(1-o(1))}$ при $n \to \infty$.

Тогда $\min\left\{\binom{n-k}{h}, \binom{k+h}{h}\right\} \geqslant 2^{\frac{2n}{3}(1-o(1))}$, $d_1^- + d_1^+ > 0$ при $d_{>1} > 0$, $3d_1^- + 3d_1^+ + d_0 \leqslant 3d$, $d_{>1}2^{d-d_0-1} < d2^d = o\big(\min\left\{\binom{n-k}{h}, \binom{k+h}{h}\right\}\big)$ при $d \leqslant cn$, где $c < \frac{2}{9}$, и

$$|G_{\varphi-f}| \leqslant 2d_1^-\binom{n-k}{h}(1+o(1)) + 2d_1^+\binom{h+k}{h}(1+o(1)) + d2^d,$$

$$|G_{f-\varphi}| \geqslant \operatorname{sgn}(d_1^-)\left((n-k+1-d_1^-)\binom{n-k}{h} - d_0\binom{n-k}{h}(1+o(1)) - \Theta(n^3)\right)$$

$$+\operatorname{sgn}(d_1^+)\left((k+h+1-d_1^+)\binom{k+h}{h} - d_0\binom{k+h}{h}(1+o(1)) - \Theta(n^3)\right).$$

Следовательно,

$$|G_{f-\varphi}| - |G_{\varphi-f}| \geqslant \operatorname{sgn}(d_1^-)(n-k+1-3d_1^- - d_0 - o(n))\binom{n-k}{h}$$

$$+\operatorname{sgn}(d_1^+)(k+h+1-3d_1^+ - d_0 - o(n))\binom{k+h}{h}$$

$$\geqslant \operatorname{sgn}(d_1^-)\left(\frac{2n}{3} - 3d - o(n)\right)\binom{n-k}{h} + \operatorname{sgn}(d_1^+)\left(\frac{2n}{3} - 3d - o(n)\right)\binom{k+h}{h}$$

и $|G_{f-\varphi}| - |G_{\varphi-f}| > 0$, т. е. $|G_f| > |G_\varphi|$, если $d \leqslant cn$, где $0 < c < \frac{2}{9}$, и $n \to \infty$.

(ii) Определим функцию φ такую, что $N_\varphi = N_f \cup \{\widetilde{\alpha}\} \cup N_\xi$, где $\widetilde{\alpha} \in B^n_{k-1}$ и $N_\xi \subset S^n_{0,k-2}$ и $\rho(\widetilde{\alpha}, N_\xi) = 1$ для функции ξ.

Для вершины $\widetilde{\alpha}$ обозначим непересекающиеся подмножества максимальных граней функции φ следующим образом:

$\mathbb{G}_\varphi^{\widetilde{\alpha}<}$ — грани, для которых вершина $\widetilde{\alpha}$ минимальна, т. е. $g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}} \in \mathbb{G}_\varphi^{\widetilde{\alpha}<}$, если $\widetilde{\alpha} < \widetilde{y} \in B^n_{k+h}$ и $g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}} \subset N_f \cup \{\widetilde{\alpha}\}$,

$\mathbb{G}_\varphi^{\widetilde{\alpha}>}$ — грани, для которых вершина $\widetilde{\alpha}$ максимальна, т. е. $g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}} \in \mathbb{G}_\varphi^{\widetilde{\alpha}>}$, если $\widetilde{\alpha} > \widetilde{x} \in N_\xi$ и $g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}}$ максимальна для множества $N_\xi \cup \{\widetilde{\alpha}\}$.

Для вершины $\widetilde{\alpha}$ пусть $\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi} = \{g \in G_\xi \mid g \subset g' \in \mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\varphi}\}$ — подмножество максимальных граней функции ξ, которые содержатся в гранях $\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\varphi}$. Тогда $\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi} \cap \big(G_\xi \setminus \mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}\big) = \varnothing$ и $|G_\xi| = \big|\mathbb{G}^{>\widetilde{\alpha}}_{\xi-\varphi}\big| + \big|G_\xi \setminus \mathbb{G}^{>\widetilde{\alpha}}_{\xi-\varphi}\big|$.

Следовательно,

$$G_{f-\varphi} = \{g \in G_f \mid g \subset g' \in G^{\widetilde{\alpha}<}_{\varphi}\} = \{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \mid \widetilde{\alpha} < \widetilde{x} < \widetilde{y},\ \widetilde{x} \in B^n_k,\ \widetilde{y} \in B^n_{k+h}\},$$

$$|G_{f-\varphi}| = (n-k+1)\binom{n-k}{h},$$

$$G_{\varphi-f} = \mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}<}_{\varphi} \cup \mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\varphi} \cup \big(G_\xi \setminus \mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}\big),$$

$$|G_{\varphi-f}| = \big|\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}<}_{\varphi}\big| + \big|\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\varphi}\big| + \big|G_\xi \setminus \mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}\big| > \big|G_\xi \setminus \mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}\big|,$$

где $\big|\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}<}_{\varphi}\big| = \binom{n-k+1}{h+1}$ и $\big|\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\varphi}\big| < 2^k$ для вершины $\widetilde{\alpha} \in B^n_{k-1}$.

Если $k \sim h \sim n/3$ и $n \to \infty$, то $2^{\frac{2n}{3}(1-o(1))} \leqslant |G_{f-\varphi}| \leqslant 2^{\frac{2n}{3}(1+o(1))}$, $\big|\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}<}_{\varphi}\big| = o(|G_{f-\varphi}|)$ и $\big|\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\varphi}\big| = o(|G_{f-\varphi}|)$.

Если $\big|G_\xi \setminus \mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}\big| = |G_\xi| - \big|\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}\big| > 2^{\frac{2n}{3}(1+\varepsilon)}$ для $\varepsilon > 0$, то $|G_\varphi| > |G_f|$, $\varphi \in \Omega^c_d(f)$ для $d \geqslant d_\xi = |N_\varphi \setminus N_f| = |N_\xi| + 1$ и функция f не локально экстремальна в d-окрестности.

Для функции $\xi = f^{\lceil tk\rceil}_{\lfloor k/2\rfloor-1,k-2}$, где $1 < t \leqslant 2$, выполняется

$$|G_\xi| = \binom{\lceil tk\rceil}{k-2}\binom{k-2}{\lfloor k/2\rfloor - 1}, \quad |\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}| = (k-1)\binom{k-2}{\lfloor k/2\rfloor - 1}$$

и $|N_\xi| < |B^{\lceil tk\rceil}| = 2^{\lceil tk\rceil}$. Если $k \sim n/3$, $1 < t \leqslant 2$ и $n \to \infty$, то

$$|N_\xi| < 2^{\frac{n}{3}t(1+o(1))},$$

$$\big|\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}\big| \leqslant 2^{\frac{n}{3}(1+o(1))}, \quad |G_\xi| = 2^{\frac{n}{3}(tH(\frac{1}{t})+1)(1-o(1))}.$$

Функция $tH(\frac{1}{t})$ возрастает на $(1,2]$, $2H(\frac{1}{2}) = 2$, $tH(\frac{1}{t}) \to 0$, если $t \to 1$, и $t_0H(\frac{1}{t_0}) = 1$ для $t_0 \in (1{,}29; 1{,}30)$. Если $\xi = f^{\lceil t_\varepsilon k\rceil}_{\lfloor k/2\rfloor-1,k-2}$, где $t_\varepsilon = t_0 + \varepsilon \leqslant 2$ и $\varepsilon > 0$, то $t_\varepsilon H(\frac{1}{t_\varepsilon}) = 1 + \delta$, где $\delta > 0$,

$$|G_\xi| = 2^{\frac{n}{3}(t_\varepsilon H(\frac{1}{t_\varepsilon})+1)(1-o(1))} = 2^{\frac{2n}{3}(1+\frac{\delta}{2})(1-o(1))},$$

$$\big|\mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}\big| = o(|G_\xi|), \quad \big|G_\xi \setminus \mathbb{G}^{\widetilde{\alpha}>}_{\xi-\varphi}\big| = |G_\xi|(1-o(1)).$$

Тогда $|G_\varphi| > |G_f|$ и $\varphi \in \Omega^c_d(f)$ для $d = 2^{cn} > 2^{\frac{n}{3}t_\varepsilon(1+o(1))} \geqslant |N_\xi|$, если $c > t_\varepsilon = \frac{t_0+\varepsilon}{3}$. Следовательно, $c > \frac{t_0+\varepsilon}{3} > c_0$ и $2^{cn} \geqslant |N_\xi|$ для $c > c_0 = \frac{t_0}{3}$ и $0 < \varepsilon < 3\delta\big(c - \frac{t_0}{3}\big)$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Отметим, что если $d \leqslant cn$, $c < \frac{2}{15}$ и $k \sim h \sim n/3$ при $n \to \infty$, то $d < d_\psi = \min\{h, k, n-k-h\} - 2$.

Для функций ψ и $\varphi \in \Omega_d^c(\psi)$ получим оценки величин $|G_{\varphi-\psi}|$ и $|G_{\psi-\varphi}|$ снизу и сверху соответственно, используя методы леммы 5 для $1 < k < k+h < n$ и $d < d_\psi = \min\{h, k, n-k-h\} - 2$.

(i) Докажем, что если $\varphi \in \Omega_d^c(f)$, $N_\varphi \subset N_\psi$ и $d < d_\psi$, то $G_\varphi \subset G_\psi$ и $|G_\psi| > |G_\varphi|$.

Если $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi-\psi}$ и $\widetilde{y} \in B^{n,0}$, то для функций $f_0 = f^n_{k,k+h+1}$ и φ_0, где $N_{\varphi_0} = N_\varphi \cup B^{n,1}_{k+h+1}$, $\rho(f_0, \varphi_0) \leqslant \rho(\psi, \varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_0}$ и $\varphi_0 \in \Omega_d^c(f_0)$, выполняется $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi_0 - f_0}$ и $N_{\varphi_0} \subset N_{f_0}$, что противоречит лемме 4(ii).

Если $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi-\psi}$ и $\widetilde{y} \in B^{n,1}$, то для функций $f_1 = f^n_{k,k+h}$ и φ_1, где $N_{\varphi_1} = N_\varphi \setminus B^{n,0}_{k+h+1}$, $\rho(f_1, \varphi_1) \leqslant \rho(\psi, \varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_1}$ и $\varphi_1 \in \Omega_d^c(f_1)$, выполняется $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi_1 - f_1}$ и $N_{\varphi_1} \subset N_{f_1}$, что противоречит лемме 4(ii).

(ii) Оценки $|G_{\varphi-\psi}|$ и $|G_{\psi-\varphi}|$, если $N_\varphi \setminus N_\psi \neq \varnothing$.

Множество максимальных граней функции ψ представимо в виде

$$G_\psi = G^0_\psi \cup G^1_\psi, \quad G^0_\psi \cap G^1_\psi = \varnothing,$$
$$G^0_\psi = \left\{ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \mid \widetilde{x} \in B^{n,0}_k,\ \widetilde{x} < \widetilde{y} \in B^{n,0}_{k+h+1} \right\},$$
$$G^1_\psi = \left\{ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \mid \widetilde{x} \in B^n_k,\ \widetilde{x} < \widetilde{y} \in B^{n,1}_{k+h} \right\}.$$

Подмножества G^0_ψ и G^1_ψ содержат грани размерности $h+1$ и h соответственно. Для грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi-\psi}$ может быть выполнено или $\widetilde{x} \in B^n_{k-1}$, или $\widetilde{y} \in B^{n,0}_{k+h+2} \cup B^{n,1}_{k+h+1}$.

Обозначим $R^{1,X}_{\varphi,\psi} = N_\varphi \cap B^n_{k-1}$ и $R^{1,Y}_{\varphi,\psi} = N_\varphi \cap \left(B^{n,0}_{k+h+2} \cup B^{n,1}_{k+h+1}\right)$. Докажем, что $R^{1,X}_{\varphi,\psi} \subseteq X^1_{\varphi,\psi}$ и $R^{1,Y}_{\varphi,\psi} \subseteq Y^1_{\varphi,\psi}$.

Если $\widetilde{x} \in B^{n,0}_{k-1}$, то для функций $f_0 = f^{n-1}_{k,k+h+2}$ и $\varphi_0 \in P_{n-1}$ таких, что $\varphi_0(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \varphi(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)$, $\rho(f_0, \varphi_0) \leqslant \rho(\psi, \varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_0}$ и $\varphi_0 \in \Omega_d^c(f_0)$, из леммы 4(iv) следует, что $N_{\varphi_0} \cap B^{n-1}_{k-1} \subseteq X_{\varphi_0}$ и для вершины $\widetilde{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B^{n-1}_{k-1}$ найдётся грань $g_{\widetilde{x}',\widetilde{y}'} \in G_{\varphi_0}$, где $\widetilde{y}' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Тогда грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ для вершин $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$ и $\widetilde{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0)$ содержится в G_φ и $N_\varphi \cap B^{n,0}_{k-1} \subseteq X_\varphi$.

Если $\widetilde{x} \in B^{n,1}_{k-1}$, то для функций $f_1 = f^n_{k,k+h}$ и $\varphi_1 \in P_n$ таких, что $N_{\varphi_1} = N_\varphi \cap \left(B^n \setminus S^{n,0}_{k+h+1,n}\right)$, $\rho(f_1, \varphi_1) \leqslant \rho(\psi, \varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_1}$ и $\varphi_1 \in \Omega_d^c(f_1)$, из леммы 4(iv) следует, что $N_{\varphi_1} \cap B^n_{k-1} \subseteq X_{\varphi_1}$ и для вершины $\widetilde{x} \in B^{n,1}_{k-1}$ найдётся грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi_1}$. Тогда $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$ и $N_\varphi \cap B^{n,1}_{k-1} \subseteq X_\varphi$.

Следовательно, $R^{1,X}_{\varphi,\psi} = \left(N_\varphi \cap B^{n,0}_{k-1}\right) \cup \left(N_\varphi \cap B^{n,1}_{k-1}\right) = N_\varphi \cap B^n_{k-1}$.

Если $\widetilde{y} \in B^{n,0}_{k+h+2}$, то для функций $f_0 = f^{n-1}_{k,k+h+1}$ и $\varphi_0 \in P_{n-1}$ таких, что $\varphi_0(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \varphi(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)$, $\rho(f_0, \varphi_0) \leqslant \rho(\psi, \varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_0}$ и $\varphi_0 \in \Omega_d^c(f_0)$, из леммы 4(iv) следует, что $N_{\varphi_0} \cap B^{n-1}_{k+h+2} \subseteq Y_{\varphi_0}$ и для вершины $\widetilde{y}' = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in B^{n-1}_{k+h+2}$ найдётся грань $g_{\widetilde{x}',\widetilde{y}'} \in G_{\varphi_0}$, где $\widetilde{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Тогда $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$ и $N_\varphi \cap B^{n,0}_{k+h+2} \subseteq X_\varphi$ для вершин $\widetilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, $\widetilde{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$, где $\widetilde{y} \in B^n_{k+h+2}$.

Если $\widetilde{y} \in B^{n,1}_{k+h+1}$, то для функций $f_1 = f^n_{k,k+h}$ и φ_1, где $N_{\varphi_1} = N_\varphi \cap \bigl(B^n \setminus S^{n,0}_{k+h+1,n}\bigr)$, $\rho(f_1, \varphi_1) \leqslant \rho(\psi, \varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_1}$ и $\varphi_1 \in \Omega^c_d(f_1)$, из леммы 4(iv) следует, что $N_{\varphi_1} \cap B^n_{k+h+1} \subseteq Y_{\varphi_1}$ и для вершины $\widetilde{y} \in B^{n,1}_{k+h+1}$ найдётся грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi_1}$. Тогда $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$ и $N_\varphi \cap B^{n,1}_{k+h+1} \subseteq Y_\varphi$.

Следовательно, $R^{1,Y}_{\varphi,\psi} = N_\varphi \cap \bigl(B^{n,0}_{k+h+2} \cup B^{n,1}_{k+h+1}\bigr)$.

Обозначим $d_0 = |N_\psi \setminus N_\varphi|$, $d_1 = d_1^- + d_1^+$, где

$$d_1^- = \bigl|N_\varphi \cap B^n_{k-1}\bigr|, \quad d_1^+ = \bigl|N_\varphi \cap \bigl(B^{n,0}_{k+h+2} \cup B^{n,1}_{k+h+1}\bigr)\bigr|,$$
$$d_{>1} = \bigl|N_\varphi \setminus \bigl(B^n_{k-1} \cup N_\psi \cup B^{n,0}_{k+h+2} \cup B^{n,1}_{k+h+1}\bigr)\bigr|, \quad d_0 + d_1 + d_{>1} \leqslant d.$$

Докажем, что если $N_\varphi \subset N_\psi$ и $|N_\varphi \setminus N_\psi| < d_\psi$, то $G_\varphi \subset G_\psi$, т. е. $|G_{\varphi-\psi}| = 0$ и $|G_{\psi-\varphi}| > 0$.

Если $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$ и $\widetilde{y} \in S^{n,0}_{k,k+h+1}$, то $\widetilde{x} \leqslant \widetilde{y}$ и $\widetilde{x} \in S^{n,0}_{k,k+h+1}$, где $\widetilde{x} = (x_1, \dots, x_n, 0)$ и $\widetilde{y} = (y_1, \dots, y_n, 0)$. Для функций $f_0 = f^{n-1}_{k,k+h+1}$ и $\varphi_0 \in P_{n-1}$ такой, что $\varphi_0(z_1, \dots, z_{n-1}) = \varphi(z_1, \dots, z_{n-1}, 0)$, выполняется $N_{\varphi_0} \subseteq N_{f_0}$, $\rho(f_0, \varphi_0) \leqslant \rho(\psi, \varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_0}$ и $\varphi_0 \in \Omega^c_d(f_0)$.

Следовательно, $G_{\varphi_0} \subset G_{f_0}$ по лемме 4(ii) и $g_{\widetilde{x}',\widetilde{y}'} \in G_{f_0}$, где $\widetilde{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B^{n-1}_k$ и $(y_1, \dots, y_{n-1}) \in B^{n-1}_{k+h+1}$. В этом случае $\widetilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in B^{n,0}_k$, $\widetilde{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \in B^{n,0}_{k+h+1}$ и $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\psi$.

Если $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\varphi$ и $\widetilde{y} \in S^{n,1}_{k,k+h}$, то $\widetilde{x} \leqslant \widetilde{y}$ и $\widetilde{x} \in S^n_{k,k+h}$. Для функций $f_1 = f^n_{k,k+h}$ и φ_1, где $N_{\varphi_1} = N_\varphi \cap \bigl(B^n \setminus S^{n,0}_{k+h+2,n}\bigr)$, выполняется $N_{\varphi_1} \subseteq N_{f_1}$ и $\rho(f_1, \varphi_1) \leqslant \rho(\psi, \varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_1}$, т. е. $\varphi_1 \in \Omega^c_d(f_1)$. Следовательно, по лемме 4(ii) $G_{\varphi_1} \subset G_{f_1}$, $\widetilde{x} \in B^n_k$, $\widetilde{y} \in B^{n,1}_{k+h}$. Тогда $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_\psi$.

Верхняя оценка $|G_{\varphi-\psi}|$. Из п. (i) следует, что $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \cap \overline{N}_\psi \neq \varnothing$ для произвольной грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\varphi-\psi}$. Используем соотношения $|G_{\varphi-\psi}| = \bigl|G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi}\bigr| + \bigl|G^{>1}_{\varphi-\psi}\bigr|$ (см. (2)), где $G^{>1}_{\varphi-\psi} = \varnothing$, если $d_{>1} = 0$, и $G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi} = \varnothing$, если $d_1 = d_1^- + d_1^+ = 0$.

Верхняя оценка $\bigl|G^{>1}_{\varphi-\psi}\bigr|$ при $d_{>1} > 0$. Для грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{>1}_{\varphi-\psi}$ либо $\widetilde{x} \in X^{>1}_{\varphi,\psi} \cap S^n_{0,k-2}$, либо $\widetilde{y} \in Y^{>1}_{\varphi,\psi} \cap \bigl(S^{n,0}_{n+k+3,n} \cup S^{n,1}_{n+k+2,n}\bigr)$. Тогда $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \not\subseteq g \in G_\psi$, $|g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \setminus N_\psi| < |N_\varphi \setminus N_\psi| \leqslant d - d_0 < d_\psi < n$ и по лемме 3(iii) либо $\bigl|G^{\widetilde{x}}_{\varphi,X}\bigr| < 2^{d-d_0-1}$, либо $\bigl|G^{\widetilde{y}}_{\varphi,Y}\bigr| < 2^{d-d_0-1}$ соответственно. Так как $\bigl|X^{>1}_{\varphi,\psi}\bigr| \leqslant d_{>1}$ и $\bigl|Y^{>1}_{\varphi,\psi}\bigr| \leqslant d_{>1}$, из оценки (3) следует, что

$$\bigl|G^{>1}_{\varphi-\psi}\bigr| \leqslant 2d_{>1}2^{d-d_0-1} = d_{>1}2^{d-d_0}.$$

Верхняя оценка $\left|G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi}\right|$ при $d_1^-+d_1^+>0$. Если $d_1^->0$, то для вершины $\widetilde{x}\in R^{1,X}_{\varphi,\psi}=N_\varphi\cap B^n_{k-1}\neq\varnothing$ обозначим через $G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-\psi,X}=\left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}\in G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi}\right\}$ подмножество граней $G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi}$ с минимальной вершиной $\widetilde{x}\in R^{1,X}_{\varphi,\psi}\subseteq X^1_{\varphi,\psi}$. Если $d_1^+>0$, то для вершины $\widetilde{y}\in R^{1,Y}_{\varphi,\psi}=N_\varphi\cap\left(B^{n,0}_{k+h+2}\cup B^{n,1}_{k+h+1}\right)\neq\varnothing$ обозначим через $G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-\psi,Y}=\left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}\in G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi}\right\}$ подмножество граней $G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi}$ с максимальной вершиной $\widetilde{y}\in R^{1,Y}_{\varphi,\psi}\subseteq Y^1_{\varphi,\psi}$. Тогда

$$\left|G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi}\right|\leqslant d_1^-\max_{\widetilde{x}\in R^{1,X}_{\varphi,\psi}}\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-\psi,X}\right|+d_1^+\max_{\widetilde{y}\in R^{1,Y}_{\varphi,\psi}}\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-\psi,Y}\right|. \tag{10}$$

(a) Если $d_1^->0$, то для вершины $\widetilde{x}\in R^{1,X}_{\varphi,\psi}\neq\varnothing$ докажем, что

$$\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-\psi,X}\right|\leqslant\binom{n-k+1}{h+1}+\max\left\{0,\binom{n-k}{h+2}-\binom{n-k}{h+1}\right\}. \tag{11}$$

Если $\widetilde{x}\in B^{n,0}_{k-1}$, то $G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-\psi,X}=G^{\leqslant 1,\widetilde{x},0}_{\varphi-\psi,X}\cup G^{\leqslant 1,\widetilde{x},1}_{\varphi-\psi,X}$, где

$$G^{\leqslant 1,\widetilde{x},\sigma}_{\varphi-\psi,X}=\left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}\in G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi}\mid\widetilde{x}<\widetilde{y}\in B^{n,\sigma}\right\},\quad\sigma=0,1,$$

и $G^{\leqslant 1,\widetilde{x},0}_{\varphi-\psi}\cap G^{\leqslant 1,\widetilde{x},1}_{\varphi-\psi}=\varnothing$. Тогда $\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-\psi,X}\right|=\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x},0}_{\varphi-\psi,X}\right|+\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x},1}_{\varphi-\psi,X}\right|$.

Множество $G^{\leqslant 1,\widetilde{x},0}_{\varphi-\psi,X}$ содержится в $B^{n,0}$ и $\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x},0}_{\varphi-\psi,X}\right|=\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}_0}_{\varphi_0-f_0,X}\right|$ для вершины $\widetilde{x}_0=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, функций $f_0=f^{n-1}_{k,k+h+1}$ и $\varphi_0\in P_{n-1}$, где $\varphi_0(z_1,\ldots,z_{n-1})=\varphi(z_1,\ldots,z_{n-1},0)$, $\rho(f_0,\varphi_0)\leqslant\rho(\psi,\varphi)<d_\psi\leqslant d_{f_0}$, т. е. $\varphi_0\in\Omega^c_d(f_0)$. Тогда (см. (6))

$$\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x},0}_{\varphi-\psi,X}\right|=\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}_0}_{\varphi_0-f_0,X}\right|\leqslant\binom{n-k}{h+2}.$$

Для множества $G^{\leqslant 1,\widetilde{x},1}_{\varphi-\psi,X}$ выполняется $\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x},1}_{\varphi-\psi,X}\right|=\left|\mathbb{G}^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1-f_1,X}\right|$, где

$$\mathbb{G}^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1-f_1,X}=\left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}\in G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1-f_1,X}\mid\widetilde{x}<\widetilde{y}\in S^{n,1}_{k+h,n}\right\}$$

для функций $f_1=f^n_{k,k+h}$ и φ_1 таких, что $N_{\varphi_1}=N_\varphi\cap\left(B^n\setminus S^{n,0}_{k+h+1,n}\right)$, $\rho(f_1,\varphi_1)\leqslant\rho(\psi,\varphi)<d_\psi\leqslant d_{f_1}$ и $\varphi_1\in\Omega^c_d(f_1)$.

Из леммы 4(iv) следует, что $\mathbb{G}^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1-f_1,X}=G_0\cup G_1$, где

$$G_\sigma=\left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}\in\mathbb{G}^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1-f_1,X}\mid\widetilde{x}<\widetilde{y}\in B^{n,1}_{k+h+\sigma},\ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}\cap\overline{N}_{\varphi_1}=\varnothing\right\}$$

для $\sigma=0,1$ и $G_0\cap G_1=\varnothing$.

Если $G_1 = \varnothing$, то $\left|\mathbb{G}^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1 - f_1, X}\right| = |G_0|$ для $\widetilde{x} \in B^{n,0}_{k-1}$, где $G_0 \subseteq \left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \mid \widetilde{x} < \widetilde{y} \in B^{n,1}_{k+h}\right\}$. Тогда

$$\left|\mathbb{G}^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1 - f_1, X}\right| \leqslant |G_0| \leqslant \left|\left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \mid \widetilde{x} < \widetilde{y} \in B^{n,1}_{k+h}\right\}\right| = \binom{n-k+1}{h+1} - \binom{n-k}{h+1}.$$

Если $G_1 \neq \varnothing$, то $|G_1| \leqslant d < d_{f_1} \leqslant h$ и $|\{g \in G_0 \mid g \subset g'\}| = h+2$ для любой грани $g' \in G_1$. Тогда $\left|\mathbb{G}^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1 - f_1, X}\right| \leqslant |G_0| - (h+2) + |G_1| < |G_0|$. Следовательно,

$$\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-\psi, X}\right| = \left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x},0}_{\varphi-\psi, X}\right| + \left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x},1}_{\varphi-\psi, X}\right| \leqslant \binom{n-k+1}{h+1} + \binom{n-k}{h+2} - \binom{n-k}{h+1}.$$

Если $\widetilde{x} \in B^{n,1}_{k-1}$, то $\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-\psi, X}\right| = \left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1 - f_1, X}\right|$ для функций $f_1 = f^n_{k,k+h}$ и φ_1, где $N_{\varphi_1} = N_\varphi \cap \left(B^n \setminus S^{n,0}_{k+h+1,n}\right)$, $\rho(f_1,\varphi_1) \leqslant \rho(\psi,\varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_1}$ и $\varphi_1 \in \Omega^c_d(f_1)$. Тогда (см. (6))

$$\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi-\psi, X}\right| = \left|G^{\leqslant 1,\widetilde{x}}_{\varphi_1 - f_1, X}\right| \leqslant \binom{n-k+1}{h+1}.$$

Следовательно, если $d_1^- > 0$ и $\widetilde{x} \in R^{1,X}_{\varphi,\psi}$, то выполняется (11).

(b) Если $d_1^+ > 0$, то для вершины $\widetilde{y} \in R^{1,Y}_{\varphi,\psi}$ докажем, что

$$\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-\psi, Y}\right| \leqslant \max\left\{\binom{k+h+1}{h+1}, \binom{k+h+2}{h+2}\right\} = \binom{k+h+2}{h+2}. \tag{12}$$

Если $\widetilde{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n) \in B^{n,0}_{k+h+2}$, то $\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-\psi, Y}\right| = \left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}_0}_{\varphi_0 - f_0, Y}\right|$ для вершины $\widetilde{y}_0 = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ и функций $f_0 = f^{n-1}_{k,k+h+1}$ и $\varphi_0 \in P_{n-1}$ таких, что $\varphi_0(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \varphi(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0)$, $\rho(f_0, \varphi_0) \leqslant \rho(\psi,\varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_0}$ и $\varphi_0 \in \Omega^c_d(f_0)$. Тогда (см. (7))

$$\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-\psi, Y}\right| = \left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}_0}_{\varphi_0 - f_0, Y}\right| \leqslant \binom{k+h+2}{h+2}.$$

Если $\widetilde{y} \in B^{n,1}_{k+h+1}$, то $\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-\psi, Y}\right| = \left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi_1 - f_1, Y}\right|$, для $f_1 = f^n_{k,k+h}$ и φ_1, где $N_{\varphi_1} = N_\varphi \cap \left(B^n \setminus S^{n,0}_{k+h+1,n}\right)$, $\rho(f_1,\varphi_1) \leqslant \rho(\psi,\varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_1}$ и $\varphi_1 \in \Omega^c_d(f_1)$. Тогда (см. (7))

$$\left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi-\psi, Y}\right| = \left|G^{\leqslant 1,\widetilde{y}}_{\varphi_1 - f_1, Y}\right| \leqslant \binom{k+h+1}{h+1}$$

и выполняется (12).

Из оценок (10)–(12) следует, что

$$\bigl|G^{\leqslant 1}_{\varphi-\psi}\bigr| \leqslant d_1^-\left(\binom{n-k+1}{h+1} + \max\left\{0, \binom{n-k}{h+2} - \binom{n-k}{h+1}\right\}\right) + d_1^+\binom{k+h+2}{k},$$

и тогда

$$|G_{\varphi-\psi}| \leqslant d_{>1}2^{d-d_0} + d_1^-\left(\binom{n-k+1}{h+1} + \max\left\{0, \binom{n-k}{h+2} - \binom{n-k}{h+1}\right\}\right) + d_1^+\binom{k+h+2}{h+2}. \quad (13)$$

Нижняя оценка $|G_{\psi-\varphi}|$. Если $d_1^- > 0$ и $\widetilde{\alpha} \in R^{1,X}_{\varphi,\psi} \neq \varnothing$, то имеем

$$|G_{\psi-\varphi}| \geqslant \bigl|G^{\widetilde{\alpha}<}_{\psi-\varphi}\bigr| \quad \text{для } G^{\widetilde{\alpha}<}_{\psi-\varphi} = \bigl\{g \in G^{\widetilde{\alpha}<}_{\psi} \mid g \not\subseteq g' \in G_\varphi\bigr\}.$$

Если $d_1^+ > 0$ и $\widetilde{\alpha} \in R^{1,Y}_{\varphi,\psi} \neq \varnothing$, то получаем

$$|G_{\psi-\varphi}| \geqslant \bigl|G^{\widetilde{\alpha}>}_{\psi-\varphi}\bigr| \quad \text{для } G^{\widetilde{\alpha}>}_{\psi-\varphi} = \bigl\{g \in G^{\widetilde{\alpha}>}_{\psi} \mid g \not\subseteq g' \in G_\varphi\bigr\}.$$

Следовательно,

$$|G_{\psi-\varphi}| \geqslant \operatorname{sgn}(d_1^-)\min_{\widetilde{\alpha}\in R^{1,X}_{\varphi,\psi}}\bigl|G^{\widetilde{\alpha}>}_{\psi-\varphi}\bigr| + \operatorname{sgn}(d_1^+)\min_{\widetilde{\alpha}\in R^{1,Y}_{\varphi,\psi}}\bigl|G^{\widetilde{\alpha}<}_{\psi-\varphi}\bigr|. \quad (14)$$

Если $\widetilde{\alpha} \in R^{1,Y}_{\varphi,\psi} \cap B^{n,1}_{k+h+1}$, то $\bigl|G^{\widetilde{\alpha}>}_{\psi-\varphi}\bigr| = \bigl|G^{\widetilde{\alpha}_1>}_{f_1-\varphi_1}\bigr|$ для $\widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\alpha} \in B^{n,1}_{k+h+1}$ и функций $f_1 = f^n_{k,k+h}$ и φ_1, где $N_{\varphi_1} = N_\varphi \cap \bigl(B^n \setminus S^{n,0}_{k+h+1,n}\bigr)$.

Тогда $\rho(f_1,\varphi_1) \leqslant \rho(\psi,\varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_1}$, $\varphi_1 \in \Omega^c_d(f_1)$ и (см. (9))

$$\bigl|G^{\widetilde{\alpha}>}_{\psi-\varphi}\bigr| = \bigl|G^{\widetilde{\alpha}_1>}_{f_1-\varphi_1}\bigr| \geqslant (k+h+1)\binom{k+h}{h} - d_0M^{n,+}_{k,h} - d(h+2)(h+1).$$

Если $\widetilde{\alpha} \in R^{1,Y}_{\varphi,\psi} \cap B^{n,0}_{k+h+2}$, то $\bigl|G^{\widetilde{\alpha}>}_{\psi-\varphi}\bigr| = \bigl|G^{\widetilde{\alpha}_0>}_{f_0-\varphi_0}\bigr|$ для $\widetilde{\alpha}_0 \in B^{n-1}_{k+h+2}$, где $\widetilde{\alpha}_0 = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$, $f_0 = f^{n-1}_{k,k+h+1}$ и $\varphi_0 \in P_{n-1}$, определяемой равенством $\varphi_0(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \varphi(x_1,\ldots,x_{n-1},0)$.

Тогда $\rho(f_0,\varphi_0) \leqslant \rho(\psi,\varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_0}$, $\varphi_0 \in \Omega^c_d(f_0)$ и (см. (9))

$$\bigl|G^{\widetilde{\alpha}>}_{\psi-\varphi}\bigr| = \bigl|G^{\widetilde{\alpha}_0>}_{f_0-\varphi_0}\bigr| \geqslant (k+h+2)\binom{k+h+1}{h+1} - d_0M^{n-1,+}_{k,h+1} - d(h+3)(h+2).$$

Следовательно,

$$\left|G_{\psi-\varphi}^{\widetilde{\alpha}>}\right| \geqslant \mathbb{G}^{>}(n,k,h,d,d_0) = \min\left\{(k+h+1)\binom{k+h}{h} - d_0 M_{k,h}^{n,+},\right.$$

$$\left.(k+h+2)\binom{k+h+1}{h+1} - d_0 M_{k,h+1}^{n-1,+}\right\} - d(h+3)(h+2). \quad (15)$$

Если $\widetilde{\alpha} \in R_{\varphi,\psi}^{1,X} \cap B_{k-1}^{n,1}$, то $\left|G_{\psi-\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\right| = \left|G_{f_1-\varphi_1}^{\widetilde{\alpha}_1<}\right|$ для $\widetilde{\alpha}_1 \in B_{k-2}^{n-1}$, где $\widetilde{\alpha}_1 = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$, $f_1 = f_{k-1,k-1+h}^{n-1}$ и $\varphi_1 \in P_{n-1}$, определяемой равенством $\varphi_1(x_1,\dots,x_{n-1}) = \varphi(x_1,\dots,x_{n-1},1)$.

Тогда $\rho(f_1,\varphi_1) \leqslant \rho(\psi,\varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_1}$, $\varphi_1 \in \Omega_d^c(f_1)$ и (см. (8))

$$\left|G_{\psi-\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\right| = \left|G_{f_1-\varphi_1}^{\widetilde{\alpha}_1<}\right| \geqslant (n-k+1)\binom{n-k}{h} - d_0 M_{k-1,h}^{n-1,-} - d(h+2)(h+1).$$

Если $\widetilde{\alpha} \in R_{\varphi,\psi}^{1,X} \cap B_{k-1}^{n,0}$, то $G_{\psi-\varphi}^{\widetilde{\alpha}<} = G_{\psi-\varphi,0}^{\widetilde{\alpha}<} \cup G_{\psi-\varphi,1}^{\widetilde{\alpha}<}$ и $G_{\psi-\varphi,0}^{\widetilde{\alpha}<} \cap G_{\psi-\varphi,1}^{\widetilde{\alpha}<} = \varnothing$ для $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},0)$ и множеств

$$G_{\psi-\varphi,0}^{\widetilde{\alpha}<} = \left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\psi-\varphi} \mid \widetilde{\alpha} < \widetilde{x} \in B_k^n,\ \widetilde{x} < \widetilde{y} \in B_{k+h+1}^{n,0}\right\},$$

$$G_{\psi-\varphi,1}^{\widetilde{\alpha}<} = \left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{\psi-\varphi} \mid \widetilde{\alpha} < \widetilde{x} \in B_k^n,\ \widetilde{x} < \widetilde{y} \in B_{k+h}^{n,1}\right\}.$$

Следовательно, $\left|G_{\psi-\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\right| = \left|G_{\psi-\varphi,0}^{\widetilde{\alpha}<}\right| + \left|G_{\psi-\varphi,1}^{\widetilde{\alpha}<}\right|$.

Для $G_{\psi-\varphi,0}^{\widetilde{\alpha}<}$ выполняется $\left|G_{\psi-\varphi,0}^{\widetilde{\alpha}<}\right| = \left|G_{f_0-\varphi_0}^{\widetilde{\alpha}_0<}\right|$, где $\widetilde{\alpha}_0 = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$, $\widetilde{\alpha}_0 \in B_{k-1}^{n-1}$, $f_0 = f_{k,k+h}^{n-1}$ и $\varphi_0 \in P_{n-1}$ определяется равенством $\varphi_0(x_1,\dots,x_{n-1}) = \varphi(x_1,\dots,x_{n-1},0)$.

Тогда $\rho(f_0,\varphi_0) \leqslant \rho(\psi,\varphi) < d_\psi \leqslant d_{f_0}$, $\varphi_0 \in \Omega_d^c(f_0)$ и (см. (8))

$$\left|G_{\psi-\varphi,0}^{\widetilde{\alpha}<}\right| = \left|G_{f_0-\varphi_0}^{\widetilde{\alpha}_0<}\right| \geqslant (n-k)\binom{n-1-k}{h} - d_0 M_{k,h}^{n-1,-} - d(h+2)(h+1).$$

Для $G_{\psi-\varphi,1}^{\widetilde{\alpha}<}$ выполняется $G_{\psi-\varphi,1}^{\widetilde{\alpha}<} = \left\{g_{\widetilde{\alpha}',\widetilde{y}} \in G_\psi^{\widetilde{\alpha}'<} \mid g_{\widetilde{\alpha}',\widetilde{y}} \nsubseteq g \in G_\varphi\right\}$, где $\widetilde{\alpha}' = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},1) \in B_k^{n,1}$, $G_\psi^{\widetilde{\alpha}'<} = \left\{g_{\widetilde{\alpha}',\widetilde{y}} \in G_\psi \mid \widetilde{\alpha}' < \widetilde{y} \in B_{k+h}^{n,1}\right\}$ и $\left|G_{\psi-\varphi,1}^{\widetilde{\alpha}<}\right| \leqslant \left|G_\psi^{\widetilde{\alpha}'<}\right| = \binom{n-k}{h}$. Используем оценку $\left|G_{\psi-\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\right| \geqslant \left|G_{\psi-\varphi,0}^{\widetilde{\alpha}<}\right|$, так как $\binom{n-k}{h} = o\bigl(n\binom{n-1-k}{h}\bigr)$, если $n-k-h = \Theta(n)$ при $n \to \infty$.

Следовательно,

$$\left|G_{\psi-\varphi}^{\widetilde{\alpha}<}\right| \geqslant \mathbb{G}^{<}(n,k,h,d,d_0) = \min\left\{(n-k)\binom{n-1-k}{h} - d_0 M_{k,h}^{n-1,-},\right.$$

$$\left.(n-k+1)\binom{n-k}{h} - d_0 M_{k-1,h}^{n-1,-}\right\} - d(h+2)(h+1). \quad (16)$$

Из оценок (15), (16) вытекает неравенство

$$|G_{\psi-\varphi}| \geqslant \mathrm{sgn}(d_1^-)\mathbb{G}^{<}(n,k,h,d,d_0) + \mathrm{sgn}(d_1^+)\mathbb{G}^{>}(n,k,h,d,d_0)\,. \qquad (17)$$

Если $k \sim h \sim n/3$ и $n \to \infty$, то выполняются следующие оценки:

(i) $d < d_\psi \sim n/3$, $d(h+3)(h+2) \leqslant n^3$ и $d_{>1}2^{d-d_0} \leqslant d_{>1}2^{\frac{n}{3}(1+o(1))}$;

(ii) $\binom{k+h+2}{h+2} \sim 4\binom{k+h}{k}$, $\binom{n-k+1}{h+1} \sim 4\binom{n-k-1}{h}$ и $\binom{n-k}{h+2} - \binom{n-k}{h+1} = o\left(\binom{n-k+1}{h+1}\right)$.

(iii) Из (13) следует оценка

$$\begin{aligned} |G_{\varphi-\psi}| &\leqslant d_1^-\binom{n-k+1}{h}(1+o(1)) + d_1^+\binom{k+h+2}{h+2} + d_{>1}2^{\frac{n}{3}(1+o(1))} \\ &= 4d_1^-\binom{n-k-1}{h}(1+o(1)) + 4d_1^+\binom{k+h}{h}(1+o(1)). \qquad (18)\end{aligned}$$

(iv) Из (17) следует оценка

$$\begin{aligned} |G_{\psi-\varphi}| > \mathrm{sgn}(d_1^-)&\binom{n-k-1}{h}(n-k-d-o(n)) \\ &+ \mathrm{sgn}(d_1^+)\binom{k+h}{h}(k+h-d-o(n)), \qquad (19)\end{aligned}$$

так как $M_{k,h}^{n,-} \leqslant \binom{n-k}{h}(1+o(1))$ и $M_{k,h}^{n,+} \leqslant \binom{k+h}{h}(1+o(1))$ (лемма 5(iii)),

$$\begin{aligned} \min\left\{(n-k)\binom{n-k-1}{h} - d_0M_{k,h}^{n-1,-}, (n-k+1)\binom{n-k}{h} - d_0M_{k-1,h}^{n-1,-}\right\} \\ \geqslant \binom{n-k-1}{h}(n-k-d-o(n)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\left\{(k+h+1)\binom{k+h}{h} - d_0M_{k,h}^{n,+}, (k+h+2)\binom{k+h+1}{h+1} - d_0M_{k,h+1}^{n-1,+}\right\} \\ \geqslant \binom{k+h}{h}(k+h-d-o(n)).\end{aligned}$$

Для $d < \frac{1-\varepsilon}{5}\min\{n-k, k+h\} < \frac{2}{15}n$, где ε — константа и $0 < \varepsilon < 1$, выполняется $4d(1+o(1)) \leqslant n-k-d-o(n)$ и $4d(1+o(1)) \leqslant k+h-d-o(n)$. Значит, при $d_1 > 0$, если $d_1^- > 0$, то

$$4d_1^-\binom{n-k-1}{h}(1+o(1)) < \mathrm{sgn}(d_1^-)\binom{n-k-1}{h}(n-k-d-o(n)),$$

если $d_1^+ > 0$, то

$$4d_1^+\binom{k+h}{h}(1+o(1)) < \operatorname{sgn}(d_1^+)\binom{k+h}{h}(k+h-d-o(n)),$$

т. е. верхняя оценка (18) для $|G_{\varphi-\psi}|$ меньше нижней оценки (19) для $|G_{\psi-\varphi}|$. Тогда $|G_{\varphi-\psi}| < |G_{\psi-\varphi}|$ и $|G_\varphi| < |G_\psi|$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.** Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. М.: Наука, 1974. С. 99–148.
2. **Сапоженко А. А, Чухров И. П.** Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. 1987. Т. 25. С. 68–116.
3. **Гаджиев М. М.** Максимальная длина сокращённой д. н. ф. для булевых функций пяти и шести переменных // Дискретный анализ. Вып. 18. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1971. С. 3–24.
4. **Викулин А. П.** Оценка числа конъюнкций в сокращённой д. н. ф. // Пробл. кибернетики. 1974. № 29. С. 151–166.
5. **Chandra A. K., Markovsky G.** On the number of prime implicants // Discrete Math. 1978. Vol. 24. P. 7–11.
6. **Андреев А. Е.** К проблеме минимизации дизъюнктивных нормальных форм // Докл. АН СССР. 1984. Т. 274, № 2. С. 265–269.
7. **Kettle N., King A., Strzemecki T.** Widening ROBDDs with prime implicants // Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems. Proc. 12th Int. Conf. (Vienna, Austria, Mar. 25–Apr. 2, 2006) Heidelberg: Springer, 2006. P. 105–119. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 3920).
8. **Sloan R. H., Szörenyi B., Turan G.** On k-term DNF with the largest number of prime implicants // SIAM J. Discrete Math. 2008. Vol. 21, No. 4. P. 987–998.
9. **Talebanfard N.** On the structure and the number of prime implicants of 2-CNFs // Discrete Appl. Math. 2016. Vol. 200. P. 1–4.
10. **Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.** Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2005. 416 с.

Чухров Игорь Петрович

Статья поступила
23 августа 2020 г.
После доработки —
23 августа 2020 г.
Принята к публикации
28 октября 2020 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2021. Vol. 28, No. 1. P. 68–96

UDC 519.71 DOI 10.33048/daio.2021.28.699

CONNECTED BOOLEAN FUNCTIONS WITH A LOCALLY EXTREMAL NUMBER OF PRIME IMPLICANTS

I. P. Chukhrov

Institute of Computer Aided Design RAS,
19/18, Vtoraya Brestskaya Street, 123056 Moscow, Russia
E-mail: `chip@icad.org.ru`

Abstract. The well-known lower bound for the maximum number of prime implicants of a Boolean function (the length of the reduced DNF) differs by $\Theta(\sqrt{n})$ times from the upper bound and is asymptotically attained at a symmetric belt function with belt width $n/3$. To study the properties of connected Boolean functions with many prime implicants, we introduce the notion of a locally extremal function in a certain neighborhood in terms of the number of prime implicants. Some estimates are obtained for the change in the number of prime implicants as the values of the belt function range over a d-neighborhood. We prove that the belt function for which the belt width and the number of the lower layer of unit vertices are asymptotically equal to $n/3$ is locally extremal in some neighborhood for $d \leqslant \Theta(n)$ and not locally extremal if $d \geqslant 2^{\Theta(n)}$. A similar statement is true for the functions that have prime implicants of different ranks. The local extremality property is preserved after applying some transformation to the Boolean function that preserves the distance between the vertices of the unit cube. Bibliogr. 10.

Keywords: Boolean function, connected function, prime implicant, maximum face, the number of prime implicants, local extremum.

REFERENCES

1. **Yu. L. Vasil'ev** and **V. V. Glagolev,** Metric properties of disjunctive normal forms, in *Discrete Mathematics and Mathematical Problems of Cybernetics,* Vol. 1 (Nauka, Moscow, 1974), pp. 99–148 [Russian].

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (1), 17–38 (2021), DOI 10.1134/S1990478921010038.

2. **A. A. Sapozhenko** and **I. P. Chukhrov,** Boolean function minimization in the class of disjunctive normal forms, *Itogi Nauki Tekh., Ser. Teor. Veroyatn., Mat. Stat., Teor. Kibern.* **25**, 68–116 (1987) [Russian] [*J. Sov. Math.,* **46** (4), 2021–2052 (1989)].
3. **M. M. Gadzhiev,** Maximum length of abbreviated DNF for Boolean functions of five and six variables, in *Discrete Analysis,* Vol. 18 (Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1971), pp. 3–24 [Russian].
4. **A. P. Vikulin,** Estimation of the number of conjunctions in the abbreviated DNF, in *Cybernetics Problems,* Vol. 29 (Nauka, Moscow, 1971), pp. 151–166 [Russian].
5. **A. K. Chandra** and **G. Markovsky,** On the number of prime implicants, *Discrete Math.* **24**, 7–11 (1978).
6. **A. E. Andreev,** On the problem of minimizing disjunctive normal forms, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **274** (2), 265–269 (1984) [Russian].
7. **N. Kettle, A. King,** and **T. Strzemecki,** Widening ROBDDs with Prime Implicants, in *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems* (Proc. 12th Int. Conf., Vienna, Austria, Mar. 25–Apr. 2, 2006) (Springer, Heidelberg, 2006), pp. 105–119 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 3920).
8. **R. H. Sloan, B. Szörenyi,** and **G Turan,** On k-term DNF with the largest number of prime implicants, *SIAM J. Discrete Math.* **21** (4), 987–998 (2008).
9. **N. Talebanfard,** On the structure and the number of prime implicants of 2-CNFs, *Discrete Appl. Math.* **200**, 1–4 (2016).
10. **G. P. Gavrilov** and **A. A. Sapozhenko,** *Tasks and Exercises in Discrete Mathematics,* (Fizmatlit, Moscow, 2005) [Russian].

Igor P. Chukhrov

Received August 23, 2020
Revised August 23, 2020
Accepted October 28, 2020