ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2021. Т. 28, № 3. С. 5–37

УДК 519.8 DOI 10.33048/daio.2021.28.667

# ВЗВЕШЕННОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СУММАРНЫЙ ВЕС ЕГО ЧАСТЕЙ

*О. И. Дугинов*

Белорусский гос. университет
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь

Belarusian State University
4 Nezavisimosti Avenue, 220030 Minsk, Belarus

E-mail: duginov@bsu.by

**Аннотация.** Рассматривается NP-трудная в сильном смысле задача поиска в сбалансированном полном двудольном графе с весами на рёбрах и разбиением одной его доли на несколько непустых непересекающихся множеств такого совершенного паросочетания, что наибольший суммарный вес рёбер паросочетания, покрывающих все вершины одного множества разбиения, минимален. Предложена характеризация решений специального случая этой задачи, в котором, во-первых, веса рёбер графа принимают значения из множества $\{0, 1, \Delta\}$, где $\Delta$ — целое число, большее количества рёбер единичного веса, и, во-вторых, есть совершенное паросочетание, состоящее исключительно из рёбер нулевого и единичного весов. Кроме этого, выделены полиномиально разрешимый и сильно NP-трудный случаи рассматриваемой задачи. Установлена эквивалентность специального случая задачи с фиксированным числом множеств, на которые разбивается доля графа, задаче поиска совершенного паросочетания заданного веса в сбалансированном двудольном графе с весами на рёбрах. Ил. 5, библиогр. 29.

**Ключевые слова:** совершенное паросочетание, задача о назначениях, NP-трудность.

## Введение

Классическая задача комбинаторной оптимизации — задача о назначениях — восходит к работам [1] французского математика и инженера Гаспара Монжа (1746–1818). Основные результаты относительно этой задачи были получены в середине XX в. Эти результаты вместе с результатами из области линейного (и целочисленного линейного) программирования положили начало становлению комбинаторной оптимизации [2]. Начиная с середины XX в. активно изучаются различные варианты задачи о назначениях [3, 4]: задача о назначениях на узкое место [5], квадратичная задача о назначениях [6,7], сбалансированная задача о назначениях [8] и др. Сравнительно недавно, в 2015 г., М. Баркетов, Э. Пеш и Я. Шафранский в работе [9] предложили обобщение задачи о назначениях, которое в английском варианте носит название MIN-MAX WEIGHTED MATCHING и индуцируется актуальной проблемой оптимизации погрузочно-разгрузочных операций на железнодорожном терминале. Мы будем говорить об этом обобщении как о задаче НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ.

Основная цель настоящей работы заключается в продолжении исследования вопросов, связанных с вычислительной сложностью задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ, которое было начато в [9]. Мотивацией исследований служат слабая изученность рассматриваемой задачи и актуальность её приложений в области организации работы контейнерных терминалов.

Отметим также, что в литературе изучаются и другие задачи, которые моделируют различные ситуации, возникающие при транспортировке грузовых контейнеров [10–13].

Приведём необходимые определения и формулировку исследуемой задачи. Рассматриваются конечные графы $G = (V, E)$ без кратных рёбер и петель с множеством вершин $V = V(G)$ и множеством рёбер $E = E(G)$. Все стандартные теоретико-графовые понятия и обозначения, не определяемые в работе, могут быть найдены в [14].

Граф $G = (V, E)$ называется *двудольным*, если его множество вершин можно разбить на два подмножества $U$ и $W$ так, что каждое ребро графа соединяет некоторую вершину из множества $U$ с какой-нибудь вершиной из множества $W$. Такой граф будем обозначать $G = (U \cup W, E)$, а множества $U$ и $W$ будем называть *долями* графа $G$. При этом если $|U| = |W|$, то граф $G$ называется *сбалансированным двудольным*. Если каждая вершина доли $U$ смежна (т. е. соединена ребром) с каждой вершиной доли $W$, то граф $G$ называется *полным двудольным*.

Подмножество $M$ множества рёбер графа $G$ называется *паросочетанием*, если в $M$ нет смежных рёбер (т. е. рёбер с общей концевой вершиной). Паросочетание $M$ графа $G$ называется *максимальным*, если в графе $G$ нет другого паросочетания, содержащего паросочетание $M$. Будем говорить, что *вершина* $v \in V(G)$ *графа* $G$ *покрывается паросочетанием* $M$, если в $M$ найдётся ребро, инцидентное вершине $v$. Паросочетание $M$ графа $G$ называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа $G$. Пусть каждому ребру $e \in E(G)$ графа $G$ приписан вес $w(e) \in \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant 0\}$. Если $E'$ — непустое подмножество множества рёбер графа $G$, то сумму весов рёбер из множества $E'$ будем обозначать через $w(E')$. Вес паросочетания $M$ — сумма весов его рёбер:

$$w(M) = \sum_{e \in M} w(e).$$

Пусть $G = (U \cup W, E)$ — полный двудольный граф с весами на рёбрах $w\colon E \to \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant 0\}$. Пусть также зафиксировано разбиение доли $U$ на $m \geqslant 2$ непустых множеств $U_1, U_2, \ldots, U_m$. Множества $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$ и $U_m$, составляющие разбиение доли $U$, будем называть *компонентами* графа $G$. Множество рёбер графа $G$, которые инцидентны вершинам компоненты $U_i$, будем обозначать через $\delta(U_i)$, где $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Пусть $M$ — произвольное максимальное паросочетание графа $G$. *Вес компоненты* $U_i$ относительно паросочетания $M$ — сумма весов рёбер из $M$, инцидентных вершинам компоненты $U_i$, т. е. $w(M \cap \delta(U_i))$, где $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. *Стоимость* $v(M)$ *паросочетания* $M$ — максимальный вес компоненты относительно паросочетания $M$ среди всех компонент $U_1, U_2, \ldots, U_m$ графа $G$

$$v(M) = \max_{i \in \{1,2,\ldots,m\}} w(M \cap \delta(U_i)).$$

В работе рассматривается задача, которая в распознавательном варианте формулируется следующим образом.

**Задача** НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ. Условие: *задан полный двудольный граф $G = (U \cup W, E)$ с весами на рёбрах $w\colon E \to \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant 0\}$ и $m \geqslant 2$ компонентами $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$ и $U_m$, а также целое неотрицательное число $k$.*

Вопрос: *существует ли в графе $G$ максимальное паросочетание $M$, стоимость которого не превосходит $k$?*

Оптимизационная версия этой задачи состоит в том, чтобы найти в заданном полном двудольном графе $G = (U \cup W, E)$ с весами на рёбрах $w\colon E \to \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant 0\}$ и $m \geqslant 2$ компонентами $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$ и $U_m$ максимальное паросочетание $M$ наименьшей стоимости. В работе [9] доказано, что при любом $\varepsilon > 0$ не существует полиномиального алгоритма, который находит $(2-\varepsilon)$-приближённое решение оптимизационной версии задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ в случае, когда веса рёбер принимают значения 0, 1, 2 и 4 (в предположении, что гипотеза $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ справедлива).

В любом сбалансированном полном двудольном графе всякое максимальное паросочетание совершенно. В оригинальной постановке задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ не требуется, чтобы полный двудольный граф $G$ был сбалансированным. В [9] отмечено, что задача может быть сведена к задаче со сбалансированным полным двудольным графом с помощью добавления в граф $G$ дополнительных вершин с инцидентными им рёбрами нулевого веса, поэтому в дальнейшем можем ограничиться рассмотрением лишь сбалансированных полных двудольных графов и работать только с совершенными паросочетаниями. В дальнейшем договоримся, что в рассматриваемой задаче полный двудольный граф $G$ сбалансирован, искомое максимальное паросочетание $M$ графа $G$ совершенно, а саму задачу будем именовать НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ.

Несмотря на близость к полиномиально разрешимой задаче о назначениях, задача НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ NP-полна для нефиксированного числа компонент $m$ даже в случае, когда веса рёбер графа принадлежат множеству $\{0, 1, 2, 4\}$ [9]. Стало быть, для этой задачи нет точных полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов в предположении, что гипотеза $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ справедлива [15]. По этой причине представляется важным поиск специальных случаев этой задачи, для которых указанные алгоритмы существуют. Основные результаты работы заключаются в следующем. Во-первых, установлен сложностной статус двух специальных случаев задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ (разд. 3). Показано, что задача для сбалансированных полных двудольных графов, веса рёбер которых принадлежат множеству $\{0, 1\}$, полиномиально разрешима; одновременно с этим задача для сбалансированных полных двудольных графов, веса рёбер которых принимают значения 0, 1 и 2, а каждая компонента содержит не более чем две вершины, относится к числу NP-полных задач. Во-вторых, установлена эквивалентность задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ в случае, когда число компонент фиксировано (т. е. не является частью условия задачи), задаче поиска совершенного паросочетания заданного веса в сбалансированном двудольном графе с весами на рёбрах (разд. 4). Кроме этого, в разд. 1 показано, что задача НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ сводится к частному случаю этой задачи, в котором веса рёбер графа принимают значения из множества $\{0, 1, \Delta\}$, где $\Delta$ — произвольное целое число, большее количества рёбер единичного веса, рёбра единичного веса в графе попарно не смежны и наименьшая стоимость совершенного паросочетания в графе меньше $\Delta$. Это сведéние общего случая задачи к указанному частному случаю обуславливает важность последнего. В разд. 2 получены необходимые и достаточные условия существования совершенного паросочетания стоимости не больше $k$ ($k < \Delta$) в сбалансированном полном двудольном графе $G$, веса рёбер которого принимают значения из множества $\{0, 1, \Delta\}$.

## 1. Переход к графу, веса рёбер которого принимают значения из множества $\{0, 1, \Delta\}$

В этом разделе покажем, что существует псевдополиномиальное преобразование сбалансированного полного двудольного графа $G = (U \cup W, E)$ с весами на рёбрах и $m$ компонентами в сбалансированный полный двудольный граф $G^*$ с весами на рёбрах $w^*\colon E(G^*) \to \{0, 1, \Delta\}$ и $m$ компонентами, в котором рёбра единичного веса попарно не смежны, с условием, что наименьшая стоимость совершенного паросочетания сохраняется. Такое сведéние общего случая задачи к специальному позволит в дальнейшем получить необходимые и достаточные условия существования совершенного паросочетания ограниченной стоимости (разд. 2), а также установить связь задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ с задачей ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ (разд. 4).

Пусть $G = (U \cup W, E)$ — сбалансированный полный двудольный граф с весами на рёбрах $w\colon E \to \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geqslant 0\}$ и $m \geqslant 2$ компонентами $U_1$, $U_2$, $\ldots$, $U_m$. Для того чтобы перейти к целочисленным весам, умножим веса рёбер на наименьшее общее кратное $p$ их знаменателей. В результате стоимость любого совершенного паросочетания графа $G$ изменится в $p$ раз. Таким образом, мы можем предполагать, что веса рёбер $w(e)$, $e \in E$, являются целыми числами. Отметим также следующий очевидный факт: стоимость любого совершенного паросочетания графа $G$ не больше суммы весов рёбер $w(E(G))$ графа $G$.

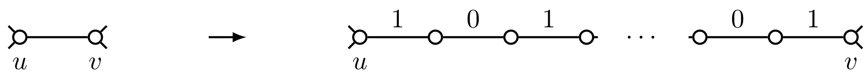



*Рис. 1.* Замена ребра $\{u, v\}$ в графе $G$ простой цепью $P_{uv}$ длины $2w(\{u, v\}) - 1$, в которой рёбра веса 1 и рёбра веса 0 чередуются

Преобразуем граф $G$ следующим образом. Каждое его ребро $\{u, v\} \in E$, вес которого не меньше чем 2, заменим простой цепью $P_{uv}$ длины $2w(\{u, v\}) - 1$, в которой рёбра веса 0 и рёбра веса 1 чередуются и крайние рёбра имеют вес 1, как показано на рис. 1. Получившийся в результате граф обозначим через $\widetilde{G}$. Нетрудно видеть, что граф $\widetilde{G}$ двудольный. Доли графа $\widetilde{G}$ обозначим через $\widetilde{U}$ и $\widetilde{W}$, при этом $U \subseteq \widetilde{U}$ и $W \subseteq \widetilde{W}$. Дополним двудольный граф $\widetilde{G}$ до полного двудольного графа, добавив в него необходимые рёбра веса $w(E(G)) + 1$ между вершинами доли $\widetilde{U}$ и вершинами доли $\widetilde{W}$. Определим разбиение доли $\widetilde{U}$ графа $\widetilde{G}$ на $m$ компонент $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots, \widetilde{U}_m$. Сначала положим $\widetilde{U}_1 = U_1$, $\widetilde{U}_2 = U_2$, $\ldots$, $\widetilde{U}_m = U_m$. Затем для каждого ребра $\{u, v\} \in E$ веса не меньше чем 2 проделаем следующее действие: все вершины соответствующей цепи $P_{uv}$, принадлежащие доле $\widetilde{U}$, отнесём в ту же компоненту $\widetilde{U}_i$, в которой находится концевая вершина ребра $\{u, v\}$, принадлежащая доле $\widetilde{U}$. В результате получим сбалансированный полный двудольный граф $\widetilde{G} = (\widetilde{U} \cup \widetilde{W}, \widetilde{E})$ с весами на рёбрах $\widetilde{w}\colon \widetilde{E} \to \{0, 1, w(E(G)) + 1\}$ и $m$ компонентами $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots, \widetilde{U}_m$.

**Лемма 1.** *Наименьшие стоимости совершенных паросочетаний графов $G$ и $\widetilde{G}$ равны.*

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из следующих простых фактов. Если вес ребра $\{u, v\} \in E$ графа $G$ не меньше чем 2, то он равен числу рёбер единичного веса в соответствующей цепи $P_{uv}$ графа $\widetilde{G}$. Если $M$ — совершенное паросочетание стоимости $k$ графа $G$, то для того чтобы получить совершенное паросочетание стоимости $k$ графа $\widetilde{G}$, достаточно в $M$ заменить каждое ребро $\{u, v\}$ веса не меньше чем 2 на все рёбра единичного веса соответствующей простой цепи $P_{uv}$. Если $M$ — совершенное паросочетание стоимости $k \leqslant w(E(G))$ графа $\widetilde{G}$, то для того чтобы получить совершенное паросочетание стоимости $k$ графа $G$, достаточно осуществить обратное преобразование, т. е. заменить в $M$ все рёбра единичного веса каждой простой цепи $P_{uv}$, все рёбра единичного веса которой содержатся в $M$, соответствующим ребром $\{u, v\} \in E$. Лемма 1 доказана.

Рассмотрим свойства графа $\widetilde{G}$. Во-первых, заметим, что в $\widetilde{G}$ число рёбер единичного веса совпадает с суммой весов рёбер графа $G$, т. е.

$$|\{e \in E(\widetilde{G}) \mid \widetilde{w}(e) = 1\}| = w(E(G)). \tag{1}$$

Это наблюдение непосредственно следует из способа преобразования графа $G$ в граф $\widetilde{G}$. Каждое замещаемое ребро $e$ графа $G$ заменяется простой цепью, в которой число рёбер единичного веса равно весу ребра $e$. Во-вторых, если $M$ — совершенное паросочетание наименьшей стоимости графа $\widetilde{G}$, то

$$v(M) \leqslant w(E(G)). \tag{2}$$

Это неравенство немедленно следует из леммы 1 и того факта, что стоимость любого совершенного паросочетания графа $G$ не больше чем $w(E(G))$. Известно [16, с. 481], что наличие в графе $G$ совершенного паросочетания веса $k \leqslant w(E(G))$ равносильно существованию в графе $\widetilde{G}$ совершенного паросочетания веса $k \leqslant w(E(G))$.

В графе $\widetilde{G}$, вообще говоря, могут встречаться смежные рёбра единичного веса. По графу $\widetilde{G}$ построим сбалансированный полный двудольный граф $G^*$ с весами на рёбрах $w^*\colon E(G^*) \to \{0, 1, w(E(G)) + 1\}$ и $m$ компонентами такой, что

а) в $G^*$ нет смежных рёбер единичного веса;

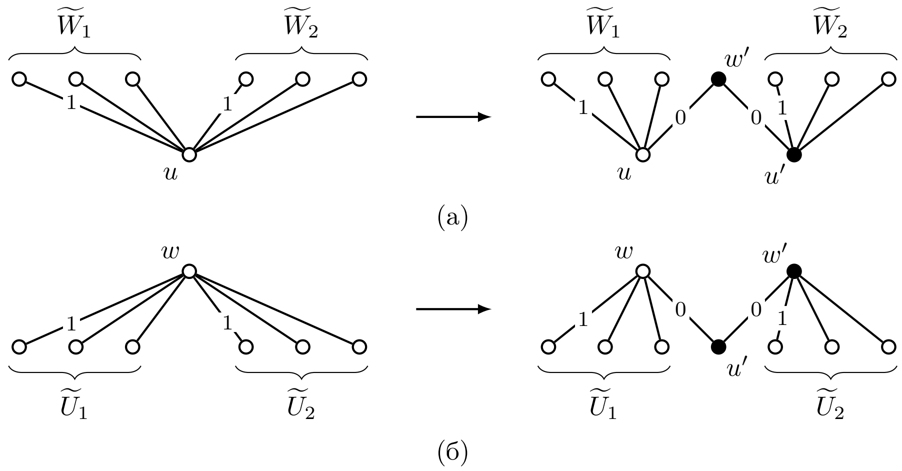



*Рис. 2.* Фрагмент графа $\widetilde{G}$ и результат применения локального преобразования графа $\widetilde{G}$ относительно (а) вершины $u \in \widetilde{U}$, (б) вершины $w \in \widetilde{W}$ (веса не изображённых на рисунке рёбер равны $w(E(G)) + 1$)

б) наименьшие стоимости совершенных паросочетаний графов $\widetilde{G}$ и $G^*$ равны;

в) в $\widetilde{G}$ существует совершенное паросочетание веса $k \leqslant w(E(G))$ тогда и только тогда, когда в графе $G^*$ существует совершенное паросочетание веса $k \leqslant w(E(G))$.

Рассмотрим локальное преобразование графа $\widetilde{G}$, которое уменьшает число пар смежных рёбер единичного веса. Если в графе $\widetilde{G}$ есть смежные рёбра единичного веса, то в этом графе найдётся вершина множества $\widetilde{U}$ или множества $\widetilde{W}$, инцидентная двум или более рёбрам единичного веса. Рассмотрим два случая.

Пусть $u \in \widetilde{U}$ — вершина графа $\widetilde{G}$, инцидентная двум или более рёбрам единичного веса. Разобьём множество $\widetilde{W}$ на два подмножества $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{W}_2$ таким образом, чтобы в каждом из множеств $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{W}_2$ была хотя бы одна вершина такая, что ребро графа $\widetilde{G}$, соединяющее её с вершиной $u$, имеет вес 1 (рис. 2(а)). Добавим в граф $\widetilde{G}$ новые вершины $u'$ и $w'$, а также рёбра между вершиной $u'$ и вершинами множества $\widetilde{W} \cup \{w'\}$, рёбра между вершиной $w'$ и вершинами множества $\widetilde{U}$. Положим веса рёбер между вершиной $u'$ и вершинами множества $\widetilde{W}_1$ равными $w(E(G)) + 1$. Для каждой вершины $w \in \widetilde{W}_2$ положим вес ребра $\{u', w\}$ равным весу ребра $\{u, w\}$. Изменим веса рёбер между вершиной $u$ и вершинами множества $\widetilde{W}_2$ на $w(E(G)) + 1$. Положим веса рёбер $\{w', u\}$ и $\{w', u'\}$ равными 0, а вес ребра $\{w', v\}$ для каждой вершины $v \in (\widetilde{U} \setminus \{u, u'\})$ равным

$w(E(G))+1$. Вершину $u'$ отнесём в ту из компонент $\widetilde{U}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, в которой находится вершина $u$. В результате получим сбалансированный полный двудольный граф $\widetilde{G}_u = ((\widetilde{U} \cup \{u'\}) \cup (\widetilde{W} \cup \{w'\}), E_u)$ с весами на рёбрах $w_u \colon E_u \to \{0, 1, w(E(G))+1\}$ и $m$ компонентами.

**Лемма 2.** *Существование в графе $\widetilde{G}$ совершенного паросочетания веса $k \leqslant w(E(G))$ (стоимости $c$) равносильно существованию совершенного паросочетания веса $k \leqslant w(E(G))$ (стоимости $c$) в графе $\widetilde{G}_u$.*

Доказательство. Рассмотрим в $\widetilde{G}$ совершенное паросочетание $M$ веса $k$ (стоимости $c$). Поскольку паросочетание совершенное, в нём есть ребро, покрывающее вершину $u$. Имеем $\{u, w\} \in M$, где $w \in \widetilde{W}$. Тогда

$$X = \begin{cases} M \cup \{\{u', w'\}\}, & \text{если } w \in \widetilde{W}_1, \\ (M \setminus \{\{u, w\}\}) \cup \{\{u, w'\}, \{u', w\}\}, & \text{если } w \in \widetilde{W}_2, \end{cases}$$

— совершенное паросочетание веса $k$ (стоимости $c$) графа $\widetilde{G}_u$.

Рассмотрим в $\widetilde{G}_u$ совершенное паросочетание $M$ веса $k$ (стоимости $c$). Так как $k \leqslant w(E(G))$ и паросочетание совершенное, то $\{u, w'\} \in M$ или $\{u', w'\} \in M$. Пусть $\{u, w'\} \in M$. Тогда $\{u', w'\} \notin M$ и, как следствие, $\{u', w\} \in M$ для некоторой вершины $w \in \widetilde{W}_2$. Нетрудно видеть, что $(M \setminus \{\{u, w'\}, \{u', w\}\}) \cup \{\{u, w\}\}$ — совершенное паросочетание веса $k$ (стоимости $c$) графа $\widetilde{G}$. Пусть $\{u', w'\} \in M$. Тогда $\{u, w'\} \notin M$ и, как следствие, $\{u, w\} \in M$ для некоторой вершины $w \in \widetilde{W}_1$. Нетрудно видеть, что $M \setminus \{\{u', w'\}\}$ — совершенное паросочетание веса $k$ (стоимости $c$) графа $\widetilde{G}$. Лемма 2 доказана.

Пусть $w \in \widetilde{W}$ — вершина графа $\widetilde{G}$, инцидентная двум или более рёбрам единичного веса. Разобьём множество $\widetilde{U}$ на два подмножества $\widetilde{U}_1$ и $\widetilde{U}_2$ таким образом, чтобы существовало ребро единичного веса, соединяющее вершину $w$ и некоторую вершину множества $\widetilde{U}_1$, а также ребро единичного веса, соединяющее вершину $w$ и некоторую вершину множества $\widetilde{U}_2$ (рис. 2(б)). Добавим в граф $\widetilde{G}$ новые вершины $u'$ и $w'$. Дополним граф до полного двудольного, добавив в него рёбра между вершиной $w'$ и вершинами множества $\widetilde{U} \cup \{u'\}$, а также рёбра между вершиной $u'$ и вершинами множества $\widetilde{W}$. Положим веса рёбер между вершиной $w'$ и вершинами множества $\widetilde{U}_1$ равными $w(E(G))+1$. Для каждой вершины $u \in \widetilde{U}_2$ положим вес ребра $\{u, w'\}$ равным весу ребра $\{u, w\}$. Изменим веса рёбер между вершиной $w$ и вершинами множества $\widetilde{U}_2$ на $w(E(G))+1$. Положим веса рёбер $\{u', w\}$ и $\{u', w'\}$ равными 0, а вес ребра $\{u', v\}$ равным $w(E(G))+1$ для любой вершины $v \in (\widetilde{W} \setminus \{w, w'\})$. Вершину $u'$ отнесём в любую из компонент $\widetilde{U}_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. В результате получим сбалансированный полный двудольный граф $\widetilde{G}_w = ((\widetilde{U} \cup \{u'\}) \cup (\widetilde{W} \cup \{w'\}), E_w)$ с весами на рёбрах $w^{(2)} \colon E_w \to \{0, 1, w(E(G)) + 1\}$ и $m$ компонентами.

**Лемма 3.** *Существование в графе $\widetilde{G}$ совершенного паросочетания веса $k \leqslant w(E(G))$ (стоимости $c$) равносильно существованию совершенного паросочетания веса $k \leqslant w(E(G))$ (стоимости $c$) в графе $\widetilde{G}_w$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.

Будем применять к графу $\widetilde{G}$ указанное локальное преобразование до тех пор, пока в графе не останется смежных рёбер единичного веса. В результате получим сбалансированный полный двудольный граф $G^*$ с весами на рёбрах $w^* \colon E(G^*) \to \{0, 1, w(E(G)) + 1\}$. Заметим, что число применений преобразования к графу $\widetilde{G}$ не превосходит квадрата первоначального числа его рёбер. Из лемм 2 и 3 следует, что, во-первых, существование совершенного паросочетания веса $k \leqslant w(E(G))$ в графе $\widetilde{G}$ равносильно наличию совершенного паросочетания веса $k \leqslant w(E(G))$ в результирующем графе $G^*$ и, во-вторых, наименьшие стоимости совершенных паросочетаний графов $\widetilde{G}$ и $G^*$ равны.

Проанализировав построение графа $G^*$, легко убедиться в том, что рёбер единичного веса в графах $\widetilde{G}$ и $G^*$ одинаковое число, т. е.

$$|\{e \in E(\widetilde{G}) \mid \widetilde{w}(e) = 1\}| = |\{e \in E(G^*) \mid w^*(e) = 1\}|.$$

Учитывая (1), получаем $w(E(G)) = |\{e \in E(G^*) \mid w^*(e) = 1\}|$. Допустим, что $M^*$ и $M$ — совершенные паросочетания наименьшей стоимости графов $G^*$ и $\widetilde{G}$ соответственно. Так как $v(M^*) = v(M)$, оценка (2) для $v(M)$ справедлива также и для $v(M^*)$, т. е. $v(M^*) \leqslant w(E(G))$. Из этого неравенства следует, что в $M^*$ нет рёбер веса $w(E(G)) + 1 = |\{e \in E(G^*) \mid w^*(e) = 1\}| + 1$ и, вообще говоря, можно считать веса таких рёбер равными $\Delta$, где $\Delta$ — произвольное целое число такое, что $\Delta \geqslant |\{e \in E(G^*) \mid w^*(e) = 1\}| + 1$.

## 2. Характеризация совершенных паросочетаний, стоимости которых не превосходят заданной пороговой величины

В этом разделе получим характеризацию совершенных паросочетаний, стоимости которых не превосходят заданной величины.

Пусть $G = (U \cup W, E)$ — сбалансированный полный двудольный граф с весовой функцией $w$ и $m$ компонентами. Как было показано в разд. 1, всегда можно перейти к сбалансированному полному двудольному графу, веса рёбер которого принимают значения из множества $\{0, 1, \Delta\}$, с той же минимальной стоимостью совершенного паросочетания. Поэтому можем предполагать, что весовая функция, определённая на множестве рёбер графа $G$, имеет вид $w\colon E \to \{0, 1, \Delta\}$, где $\Delta > |\{e \in E \mid w(e) = 1\}|$. Пусть доля $U$ графа $G$ разбита на $m \geqslant 2$ компонент $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$ и $U_m$. Пусть $U'$ — произвольное непустое подмножество множества $U$. Обозначим через $N_{0,1}(U')$ множество вершин $w \in W$ таких, что в графе $G$ существует ребро нулевого или единичного веса, соединяющее $w$ и некоторую вершину множества $U'$, а через $N_0(U')$ — множество вершин $w \in W$ таких, что в графе $G$ существует ребро нулевого веса между $w$ и некоторой вершиной множества $U'$. Положим $N_0(\varnothing) = \varnothing$ и $N_{0,1}(\varnothing) = \varnothing$. Нам понадобится следующий классический результат из теории графов.

**Теорема 1** (критерий существования в двудольном графе паросочетания, покрывающего долю графа)**.** *Пусть $G = (U \cup W, E)$ — двудольный граф (необязательно сбалансированный полный). В графе $G$ существует паросочетание, покрывающее все вершины множества $U$, тогда и только тогда, когда для любого непустого подмножества $U'$ множества $U$ выполняется неравенство $|N(U')| \geqslant |U'|$, где $N(U')$ — множество вершин $w \in W$ таких, что в графе $G$ существует ребро, соединяющее вершину $w$ и некоторую вершину множества $U'$.*

**Теорема 2.** *Пусть $G = (U \cup W, E)$ — сбалансированный полный двудольный граф с весами на рёбрах $w\colon E \to \{0, 1, \Delta\}$, где $\Delta > |\{e \in E \mid w(e) = 1\}|$, и $m$ компонентами $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$ и $U_m$. Для любого целого неотрицательного числа $k$ ($k < \Delta$) в графе $G$ существует совершенное паросочетание стоимости не больше $k$ тогда и только тогда, когда существует подмножество $U^*$ множества $U$ такое, что*

(а) $|U^* \cap U_i| \geqslant |U_i| - k$ *для каждого* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$;
(б) $|N_0(U' \cap U^*) \cup N_{0,1}(U' \setminus U^*)| \geqslant |U'|$ *для любого* $U' \subseteq U$.

Доказательство. Пусть в графе $G$ существует совершенное паросочетание $M$, стоимость которого не превосходит $k$, и $k < \Delta$. Тогда паросочетание $M$ состоит исключительно из рёбер веса 0 и 1. Это совершенное паросочетание естественным образом разбивается на $m$ непересекающихся паросочетаний

$$M = (M \cap \delta(U_1)) \cup (M \cap \delta(U_2)) \cup \cdots \cup (M \cap \delta(U_m)).$$

Поскольку стоимость совершенного паросочетания $M$ не превосходит $k$, вес каждого из $m$ паросочетаний $M \cap \delta(U_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, не больше $k$. Рассмотрим паросочетание $M \cap \delta(U_i)$ для произвольного $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Вес этого паросочетания не больше $k$. Значит, в паросочетании $M \cap \delta(U_i)$ рёбер веса 0 не меньше чем $|U_i| - k$. Пусть $U_i^*$ — множество вершин, принадлежащих множеству $U_i$ и инцидентных рёбрам паросочетания $M$

нулевого веса. Тогда

$$|U_i^*| \geqslant |U_i| - k. \tag{3}$$

Положим $U^* = U_1^* \cup U_2^* \cup \dots \cup U_m^*$. Тогда $U_i^* = U^* \cap U_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Заменив в неравенствах (3) множество $U_i^*$ на $U^* \cap U_i$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, получим условие (а).

Пусть $U' \subseteq U$. Если $U' = \varnothing$, то неравенство из условия (б) выполняется. Пусть $U' \neq \varnothing$. Рёбра паросочетания $M$, покрывающие вершины $U'$, делятся на два типа: рёбра, покрывающие вершины множества $U' \cap U^*$ (рёбра веса 0); рёбра, покрывающие вершины множества $U' \setminus U^*$ (рёбра веса 1). Множество тех концевых вершин рёбер первого типа (второго типа), которые принадлежат доле $W$, обозначим через $W'$ ($W''$). Если рёбер первого (второго) типа нет, то положим $W' = \varnothing$ ($W'' = \varnothing$) Ясно, что

$$W' \subseteq N_0(U' \cap U^*), \quad W'' \subseteq N_{0,1}(U' \setminus U^*), \quad |W' \cup W''| = |U'|.$$

Из этих соотношений немедленно следует, что

$$W' \cup W'' \subseteq N_0(U' \cap U^*) \cup N_{0,1}(U' \setminus U^*),$$
$$|U'| \leqslant |N_0(U' \cap U^*) \cup N_{0,1}(U' \setminus U^*)|,$$

т. е. условие (б) также выполняется.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть существует подмножество $U^*$ множества $U$, удовлетворяющее условиям (а) и (б). Удалим из графа $G$ все рёбра единичного веса, инцидентные вершинам множества $U^*$, а также все рёбра веса $\Delta$. В результате получим новый сбалансированный двудольный граф. Нетрудно видеть, что из того, что для исходного графа $G$ выполняется условие (б), следует необходимое и достаточное условие существования в новом графе паросочетания, покрывающего долю $U$ (теорема 1). Заключаем, что в новом графе существует паросочетание $M$, покрывающее все вершины доли $U$. Из равномощности долей нового графа вытекает следующий факт: $M$ — совершенное паросочетание нового графа. Рёбра этого паросочетания, инцидентные вершинам множества $U^*$, имеют вес 0. Значит, в исходном графе $G$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ вес паросочетания $M \cap \delta(U_i)$ не больше чем $|U_i| - |U_i \cap U^*| \leqslant |U_i| - (|U_i| - k)$. Последнее неравенство следует из условия (а). Следовательно, в исходном графе $G$ стоимость паросочетания $M$ не больше $k$. Теорема 2 доказана.

## 3. Вычислительная сложность задачи для графов с ограничениями на веса рёбер

В этом разделе изучим вычислительную сложность задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ при различных ограничениях на веса рёбер графа.

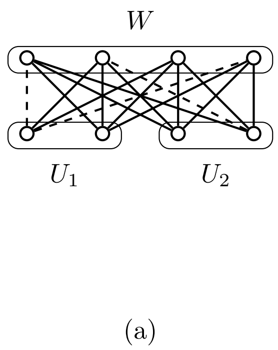
**Теорема 3.** *Решение оптимизационной версии задачи* НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ *для сбалансированных полных двудольных графов* $G$, *веса рёбер которых принадлежат множеству* $\{0,1\}$, *может быть получено с временно́й сложностью* $O(\max\limits_{i\in\{1,2,\ldots,m\}}|U_i| \times |V(G)|^3)$.

Доказательство. Пусть $G = (U \cup W, E)$ — сбалансированный полный двудольный граф с весами на рёбрах $w\colon E \to \{0,1\}$ и $U_1, U_2, \ldots, U_{m-1}$ и $U_m$ — компоненты, образующие разбиение доли $U$. Минимальная стоимость совершенного паросочетания в графе $G$ не превосходит $\max\limits_{i\in\{1,2,\ldots,m\}}|U_i|$. Пусть $k \in \{0, 1, \ldots, \max\limits_{i\in\{1,2,\ldots,m\}}|U_i|\}$. Следующее простое утверждение даёт характеризацию совершенных паросочетаний графа $G$, стоимости которых не превосходят $k$.

**Лемма 4.** *Пусть* $M$ — *произвольное совершенное паросочетание графа* $G$. *Стоимость паросочетания* $M$ *не больше* $k$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *множество* $M \cap \delta(U_i)$ *содержит не меньше чем* $\max(|U_i| - k, 0)$ *рёбер веса* 0.

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из определения стоимости паросочетания и того факта, что веса рёбер графа равны 0 или 1. Лемма 4 доказана.

Идея алгоритма нахождения в графе $G$ совершенного паросочетания минимальной стоимости заключается в том, чтобы для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, \max\limits_{i\in\{1,2,\ldots,m\}}|U_i|\}$ проверить, существует ли (и в случае существования найти) в графе $G$ совершенное паросочетание $M$, удовлетворяющее условию из леммы 4: для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ множество $M \cap \delta(U_i)$ содержит не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$ рёбер веса 0. Такую проверку можно осуществить с помощью потоковых методов. По графу $G$ построим ориентированный граф $D$, который получается из $G$ следующим образом: из $G$ удалим все рёбра веса 1, оставшимся рёбрам придадим ориентацию от вершин доли $U$ к вершинам доли $W$, добавим новые вершины $s'_1, s'_2, \ldots, s'_m$ и дуги, идущие из вершины $s'_i$ ко всем вершинам компоненты $U_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, добавим истоки $s_1, s_2, \ldots, s_m$ и дуги от $s_i$ к $s'_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, а также сток $t$ и дуги, выходящие из вершин доли $W$ и приходящие в вершину $t$. Для каждой дуги $e$ графа $D$ установим нижнюю $\ell(e)$ и верхнюю $u(e)$ границы на величину потока по этой дуге следующим образом: $\ell(e) = \max(|U_i| - k, 0)$ и $u(e) = |U_i|$ для каждой дуги $e = (s_i, s'_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$; $\ell(e) = 0$ и $u(e) = 1$ для всех остальных дуг графа $D$. Пример сбалансированного полного двудольного графа с весами рёбер



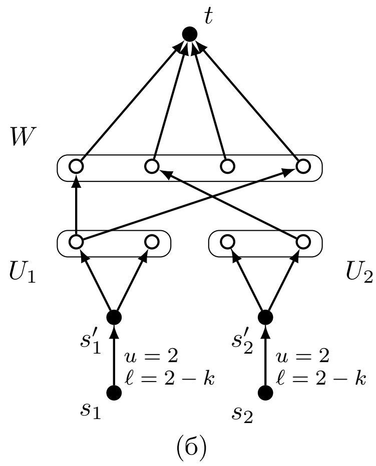




*Рис. 3.* (а) Сбалансированный полный двудольный граф $G = ((U_1 \cup U_2) \cup W, E)$ с рёбрами веса 0 (штриховая) и веса 1 (сплошная); (б) ориентированный граф $D$, соответствующий графу $G$ ($u = 1$, $\ell = 0$ для всех дуг кроме $(s_1, s'_1)$ и $(s_2, s'_2)$)

0 и 1 и двумя компонентами $U_1$ и $U_2$ изображён на рис. 3(а). Соответствующий ему ориентированный граф $D$ изображён на рис. 3(б).

Утверждается, что в графе $G$ существует совершенное паросочетание $M$ такое, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ множество $M \cap \delta(U_i)$ содержит не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$ рёбер веса 0 тогда и только тогда, когда в графе $D$ существует допустимый целочисленный поток. В самом деле, пусть в графе $G$ существует указанное совершенное паросочетание $M$. Допустимый целочисленный поток в графе $D$ получается следующим образом. Положим величину потока по дугам из вершин множества $U$ в вершины множества $W$ равным 1 для тех дуг, которые без учёта ориентации входят в $M$, и равным 0 для тех дуг, которые без учёта ориентации не входят в $M$. После чего наделим единичным потоком дуги, выходящие из «насыщенных» вершин множества $W$ — тех вершин множества $W$, в которые входит дуга с единичным потоком; остальные дуги, выходящие из вершин множества $W$, будут иметь нулевой поток. Затем наделим единичным потоком дуги, входящие в вершины множества $U$, из которых выходит дуга с единичным потоком; остальные дуги, входящие в вершины множества $U$, будут иметь нулевой поток. Наконец, для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ величину потока по дуге $(s_i, s'_i)$ положим равной сумме величин потоков по всем дугам, выходящим из вершины $s'_i$. Построенный таким образом целочисленный поток допустим. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что величина потока по дуге $(s_i, s'_i)$ не меньше нижней границы $\ell(s_i, s'_i) = \max(|U_i| - k, 0)$.

Действительно, поскольку множество $M \cap \delta(U_i)$ содержит не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$ рёбер веса 0, сумма величин потоков по всем дугам, выходящим из вершин компоненты $U_i$, не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$. Следовательно, сумма величин потоков по всем дугам, входящим в вершины компоненты $U_i$, не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$. Поскольку все такие дуги выходят из вершины $s'_i$, величина потока по дуге $(s_i, s'_i)$ не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$. Пусть в графе $D$ существует допустимый целочисленный поток. Построим совершенное паросочетание $M$ графа $G$. Сначала положим $M = \varnothing$. Величина потока по дуге $(s_i, s'_i)$ не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$. Следовательно, число дуг с единичными потоками, выходящих из вершин компоненты $U_i$, не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$. Эти дуги соответствуют попарно не смежным рёбрам веса 0 графа $G$, инцидентным вершинам компоненты $U_i$. Таких рёбер графа $G$ не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$. Добавим их в $M$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Нетрудно видеть, что результирующее множество $M$ является паросочетанием в графе $G$, причём множество $M \cap \delta(U_i)$ содержит не меньше чем $\max(|U_i| - k, 0)$ рёбер веса 0, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Произвольным образом дополним паросочетание $M$ до совершенного паросочетания графа $G$.

Задача о существовании в графе $G$ совершенного паросочетания, удовлетворяющего условию из леммы 4, сводится к задаче о существовании в ориентированном графе $D$ с двусторонними целыми ограничениями на пропускную способность дуг допустимого целочисленного потока, причём $|V(D)| = O(|V(G)|)$. Последняя задача решается сведéнием к задаче нахождения максимального потока в ориентированном графе $D'$ с числом вершин $|V(D)| + O(1)$ [17, с. 193], которая может быть решена за время $O(|V(D')|^3)$ [18, с. 212]. Преобразование $G$ в граф $D$ и преобразование $D$ в граф $D'$ можно реализовать за время $O(|V(G)|^2)$.

Таким образом, проверить существует ли (и в случае существования найти) в графе $G$ совершенное паросочетание, удовлетворяющее условию из леммы 4, можно за время $O(|V(G)|^3)$. Осуществив такую проверку для каждого значения параметра $k \in \{0, 1, 2, \dots, \max\limits_{i \in \{1,2,\dots,m\}} |U_i|\}$, можно найти совершенное паросочетание минимальной стоимости графа $G$ за время $O(\max\limits_{i \in \{1,2,\dots,m\}} |U_i| |V(G)|^3)$. Теорема 3 доказана.

**Теорема 4.** *Задача* НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ *для сбалансированных полных двудольных графов, веса рёбер которых принадлежат множеству* $\{0, 1, 2\}$ *и каждая компонента содержит не более чем две вершины,* NP-*полна.*

Доказательство. В указанных ограничениях задача НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ, очевидно, принадлежит классу NP. Полиномиальное сведéние построим от NP-полной задачи [19–21]

Разноцветное совершенное паросочетание. Условие: *задан сбалансированный двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$, рёбра которого окрашены в цвета $c\colon E \to \{1, 2, \ldots, t\}$, причём в один цвет окрашены не более чем два ребра графа.*

Вопрос: *существует ли в графе $G$ совершенное паросочетание, в котором нет двух рёбер одного цвета?*

Пусть $G = (X \cup Y, E)$ — сбалансированный двудольный граф, рёбра которого окрашены в цвета $c\colon E \to \{1, 2, \ldots, t\}$, причём в один цвет окрашены не более чем два ребра. Можем предполагать, что граф $G$ без изолированных вершин и все цвета используются, т. е. функция $c$ сюръективная. Преобразуем граф $G$ следующим образом. Для каждой вершины $x \in X$ степени $\deg(x)$ проделаем следующие действия:

1) добавим в граф $G$ простую цепь $P_x$ с множеством вершин $\big\{u_1^x, w_1^x, u_2^x, w_2^x, \ldots, u_{\deg(x)-1}^x, w_{\deg(x)-1}^x, u_{\deg(x)}^x\big\}$ и множеством рёбер $\big\{\{u_1^x, w_1^x\}, \{w_1^x, u_2^x\}, \{u_2^x, w_2^x\}, \ldots, \{u_{\deg(x)-1}^x, w_{\deg(x)-1}^x\}, \{w_{\deg(x)-1}^x, u_{\deg(x)}^x\}\big\}$, придадим рёбрам этой цепи вес 0;

2) произвольным образом упорядочим вершины графа $G$, смежные с вершиной $x$, и обозначим их через $y_1^x, y_2^x, \ldots, y_{\deg(x)}^x$;

3) для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, \deg(x)\}$ добавим ребро $\big\{u_i^x, y_i^x\big\}$, которому придадим вес 1, а также припишем вершине $u_i^x$ цвет — цвет ребра $\big\{x, y_i^x\big\} \in E$, т. е. число $c\big(\{x, y_i^x\}\big)$.

Далее удалим из графа все вершины множества $X$. В результате граф $G$ преобразуется в двудольный граф, который обозначим через $H$, а его доли — через $U$ и $W$, при этом

$$U = \bigcup_{x \in X} \big\{u_1^x, u_2^x, \ldots, u_{\deg(x)}^x\big\}, \; W = Y \cup \bigcup_{x \in X} \big\{w_1^x, w_2^x, \ldots, w_{\deg(x)-1}^x\big\}$$

и $|U| = |W| = |E|$.

Дополним граф $H$ до полного двудольного графа, добавив в него недостающие рёбра между вершинами доли $U$ и вершинами доли $W$ и приписав им вес 2. Выделим в графе $H$ компоненты, составляющие разбиение доли $U$. Вершины доли $U$ окрашены в цвета из множества $\{1, 2, \ldots, t\}$. Компоненты $U_1, U_2, \ldots, U_t$ образуют вершины одного цвета, т. е. $U_i$ — множество вершин доли $U$, окрашенных в цвет $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Поскольку в каждый цвет окрашено не более чем два ребра графа $G$, то $|U_i| \leqslant 2$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$. В качестве примера на рис. 4(а) и 4(б) приведены сбалансированный двудольный граф $G = (U \cup W, E)$, рёбра которого окрашены в два цвета, и отвечающий ему граф $H$.

Утверждается, что наличие в графе $G$ совершенного паросочетания, в котором нет двух рёбер одного цвета, равносильно наличию в графе $H$ совершенного паросочетания, стоимость которого не больше чем 1.

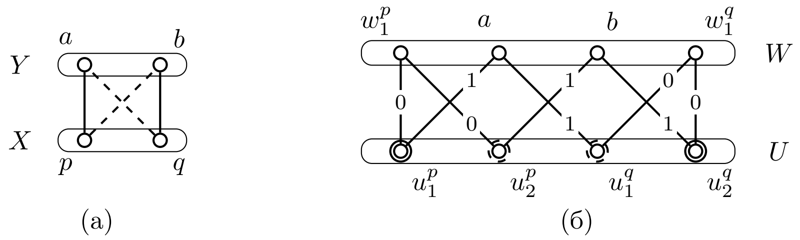



*Рис. 4.* (а) Сбалансированный двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$ с двумя рёбрами цвета 1 (сплошная) и двумя рёбрами цвета 2 (штриховая); (б) соответствующий сбалансированный полный двудольный граф $H = (U \cup W, \mathcal{E})$ с двумя компонентами $U_1 = \{u_1^q, u_2^p\}$ и $U_2 = \{u_1^p, u_2^q\}$; веса не изображённых на рисунке рёбер равны 2

Рассмотрим в графе $G$ совершенное паросочетание $M$, в котором нет двух рёбер одного цвета. Сформируем совершенное паросочетание $M'$ графа $H$. Сначала положим $M' = \varnothing$. Для каждой вершины $x \in X$ графа $G$ проделаем следующие действия. Поскольку паросочетание $M$ графа $G$ совершенное, в $M$ существует ребро, инцидентное вершине $x$, скажем, ребро $\{x, y_i^x\}$. Добавим в $M'$ ребро $\{u_i^x, y_i^x\}$ (вес которого равен 1), а также рёбра $\{u_1^x, w_1^x\}$, $\{u_2^x, w_2^x\}$, $\ldots$, $\{u_{i-1}^x, w_{i-1}^x\}$, $\{u_{i+1}^x, w_i^x\}$, $\{u_{i+2}^x, w_{i+1}^x\}$, $\ldots$, $\{u_{\deg(x)}^x, w_{\deg(x)-1}^x\}$ (веса которых равны 0). Нетрудно видеть, что получившееся в результате множество $M'$ является совершенным паросочетанием графа $H$ и состоит только из рёбер веса 0 и 1. Между рёбрами паросочетания $M$ и рёбрами веса 1 паросочетания $M'$ есть взаимно однозначное соответствие. Поскольку в $M$ нет двух рёбер одного цвета, в $M'$ нет двух рёбер веса 1, инцидентных вершинам одного цвета, т. е. вершинам, принадлежащим одной компоненте. Следовательно, стоимость совершенного паросочетания $M'$ не больше чем 1.

Рассмотрим в $H$ совершенное паросочетание $M'$, стоимость которого не больше чем 1. Паросочетание $M'$ состоит только из рёбер веса 0, 1. Построим совершенное паросочетание $M$ графа $G$, в котором нет двух рёбер одного цвета. Изначально положим $M = \varnothing$. Рассмотрим произвольную вершину $x \in X$ графа $G$. В графе $H$ ей соответствует простая цепь $P_x$ с множеством вершин $\{u_1^x, w_1^x, u_2^x, w_2^x, \ldots, w_{\deg(x)-1}^x, u_{\deg(x)}^x\}$. Нам понадобится вспомогательное

**Утверждение 1.** *Паросочетание $M'$ содержит в точности одно ребро, инцидентное вершине множества $Y$ и вершине множества $\{u_1^x, u_2^x, \ldots, u_{\deg(x)}^x\}$.*

Доказательство. Докажем от противного. Допустим, что утверждение неверно. Тогда возможны два случая.

Случай 1. Пусть в паросочетании $M'$ нет ребра, инцидентного вершине множества $Y$ и вершине множества $\{u_1^x, u_2^x, \ldots, u_{\deg(x)}^x\}$. Совершенное паросочетание $M'$ покрывает все вершины графа $H$ и, в частности, вершины $u_1^x, u_2^x, \ldots, u_{\deg(x)}^x$. Заметим, что в паросочетании $M'$ все рёбра, инцидентные вершинам $u_1^x, u_2^x, \ldots, u_{\deg(x)}^x$, содержатся в цепи $P_x$. Ясно, что среди рёбер цепи $P_x$ нет попарно не смежных рёбер, которые покрывают вершины $u_1^x, u_2^x, \ldots, u_{\deg(x)}^x$. Значит, в $M'$ найдётся ребро веса 2, инцидентное одной из вершин $u_1^x, u_2^x, \ldots, u_{\deg(x)}^x$. Получаем противоречие с тем, что паросочетание $M'$ состоит только из рёбер веса 0, 1.

Случай 2. Пусть теперь в паросочетании $M'$ найдутся хотя бы два ребра, каждое из которых инцидентно некоторой вершине множества $Y$ и какой-нибудь вершине множества $\{u_1^x, u_2^x, \ldots, u_{\deg(x)}^x\}$. Выберем два таких ребра, а именно ребро $e$, инцидентное вершине $u_p^x$, и ребро $e'$, инцидентное вершине $u_q^x$, таким образом, чтобы величина $|p - q|$ была минимальной. Без потери общности пусть $p < q$. Вершины $u_p^x$ и $u_q^x$ разбивают цепь $P_x$ на три части. Возьмём среднюю часть цепи, т. е. простую цепь $Q_x$ с вершинами $w_p^x, u_{p+1}^x, \ldots, w_{q-1}^x$. Совершенное паросочетание $M'$ покрывает все вершины графа $H$ и, в частности, вершины $w_p^x, w_{p+1}^x, \ldots, w_{q-1}^x$ цепи $Q_x$. Заметим, что в графе $H$ все рёбра веса 0 и 1, которые могут входить в паросочетание $M'$ и инцидентны вершинам $w_p^x, w_{p+1}^x, \ldots, w_{q-1}^x$, содержатся в цепи $Q_x$. Ясно, что в $Q_x$ нет попарно не смежных рёбер, которые покрывают вершины $w_p^x, w_{p+1}^x, \ldots, w_{q-1}^x$. Значит, в $M'$ найдётся ребро веса 2, инцидентное одной из вершин $w_p^x, w_{p+1}^x, \ldots, w_{q-1}^x$. Как и в случае 1, приходим к противоречию с тем, что паросочетание $M'$ состоит только из рёбер веса 0 и 1. Утверждение 1 доказано.

Итак, для каждой вершины $x \in X$ графа $G$ в множестве $M'$ существует единственное ребро веса 1, инцидентное вершине из множества $Y$ и вершине из множества $\{u_1^x, u_2^x, \ldots, u_{\deg(x)}^x\}$, скажем, $\{u_{i(x)}^x, y_{i(x)}^x\}$ — ребро, соответствующее ребру $\{x, y_{i(x)}^x\} \in E$ графа $G$, которое включим в множество $M$. Нетрудно видеть, что получившееся в результате множество рёбер $M$ является совершенным паросочетанием графа $G$. Вернёмся к паросочетанию $M'$ графа $H$. Веса рёбер $\{u_{i(x)}^x, y_{i(x)}^x\}$ паросочетания $M'$, где $x \in X$, равны 1. Стоимость паросочетания $M'$ не больше чем 1. Значит, для любых различных рёбер $\{u_{i(x)}^x, y_{i(x)}^x\}, \{u_{i(z)}^z, y_{i(z)}^z\}$ паросочетания $M'$ вершины $u_{i(x)}^x$ и $u_{i(z)}^z$ принадлежат разным компонентам и цвета их различны. Следовательно, рёбра $\{x, y_{i(x)}^x\}$ и $\{z, y_{i(z)}^z\}$ паросочетания $M$ имеют разные цвета. Отсюда заключаем, что в $M$ нет рёбер одного цвета. Теорема 4 доказана.

**Следствие 1** [9]**.** *Для любого $\varepsilon > 0$ нет псевдополиномиального алгоритма, который находит $(2-\varepsilon)$-приближённое решение оптимизационной версии задачи* НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ *в предположении, что гипотеза* $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ *верна.*

Доказательство. Заметим, что утверждение тривиально для любого $\varepsilon > 1$. Утверждение для оставшихся значений параметра $\varepsilon$ докажем методом от противного. Допустим, что существует псевдополиномиальный алгоритм $\mathcal{A}$, который находит в заданном сбалансированном полном двудольном графе $G$ с весами на рёбрах и $m$ компонентами совершенное паросочетание стоимости не больше чем $(2 - \varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}$, где OPT — наименьшая стоимость совершенного паросочетания графа $G$ и $\varepsilon \in (0, 1]$. Отметим, что алгоритм для задачи с общими весами полиномиальный в случае, когда все веса ограничены константой. Покажем, что в этом случае существует полиномиальный алгоритм, решающий NP-полную задачу РАЗНОЦВЕТНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ, что невозможно в предположении $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$. Рассмотрим произвольный сбалансированный двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$, рёбра которого окрашены в цвета $c\colon E \to \{1, 2, \ldots, t\}$, причём в один цвет окрашены не более двух рёбер графа. По графу $G$ построим сбалансированный полный двудольный граф $H$ с весами на рёбрах из множества $\{0, 1, 2\}$ и $t$ компонентами в соответствии с конструкцией из доказательства теоремы 4. Если в графе $G$ есть совершенное паросочетание, состоящее из рёбер различных цветов, то в графе $H$ есть совершенное паросочетание стоимости не больше чем 1, а значит, алгоритм $\mathcal{A}$ за полиномиальное время найдёт в графе $H$ совершенное паросочетание, стоимость которого меньше чем 2. Если в графе $G$ нет совершенного паросочетания, состоящего из разноцветных рёбер, то стоимость любого совершенного паросочетания графа $H$ не меньше чем 2, а значит, стоимость совершенного паросочетания графа $H$, найденное алгоритмом $\mathcal{A}$, не меньше чем 2. Выполнив сравнение, сможем однозначно определить, есть ли в графе $G$ совершенное паросочетание без рёбер одного цвета. Следствие 1 доказано.

## 4. Вычислительная сложность задачи для фиксированного числа компонент

В этом разделе исследуем вычислительную сложность задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ в предположении, что число компонент графа фиксировано (т. е. не является частью входа задачи). Покажем слабую NP-полноту задачи, а также установим связь сложности задачи со сложностью задачи ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ.

**Теорема 5.** *Задача* НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ *для любого фиксированного числа компонент* $m \geqslant 2$ *является* NP-*полной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ для любого фиксированного числа компонент $m \geqslant 2$ принадлежит классу NP. Построим полиномиальное свед́ение от NP-полной задачи РАЗБИЕНИЕ, в которой требуется определить, можно ли разбить заданное множество натуральных чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ на две части с одинаковыми суммами. Перейдём к сбалансированному полному двудольному графу $G = (U \cup W, E)$ с долями $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2n+m-2}\}$ и $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_{2n+m-2}\}$. Припишем рёбрам этого графа веса. Для любых $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, 2n + m - 2\}$ положим вес ребра $\{w_i, u_j\}$ равным $a_i$. Для любых $i \in \{n + 1, n + 2, \ldots, 2n\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, 2n+m-2\}$ положим вес ребра $\{w_i, u_j\}$ равным 0. Для каждого $i \in \{2n+1, 2n + 2, \ldots, 2n + m - 2\}$ положим вес ребра $\{w_i, u_i\}$ равным 0, вес ребра $\{w_i, u_j\}$ равным $a_1+a_2+\cdots+a_n$ для любого $j \in \{1, 2, \ldots, 2n+m-2\}$, $j \neq i$. Наконец, разобьём долю $U$ на $m$ компонент $U_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $U_2 = \{u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{2n}\}, U_3 = \{u_{2n+1}\}, U_4 = \{u_{2n+2}\}, \ldots, U_m = \{u_{2n+m-2}\}$. Легко показать, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно разбить на две группы с равными суммами тогда и только тогда, когда в графе $G$ существует совершенное паросочетание, стоимость которого не превосходит $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/2$. Рассмотрим разбиение множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ на две части $A_1$ и $A_2$ с равными суммами. Тогда совершенное паросочетание стоимости $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/2$ устроено следующим образом: если $a_i \in A_1$, то ребро с весом $a_i$ паросочетания покрывает вершину из компоненты $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$; если $a_i \in A_2$, то ребро с весом $a_i$ паросочетания покрывает вершину компоненты $\{u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{2n}\}$; остальные рёбра паросочетания имеют нулевой вес. Теорема 5 доказана.

Задача ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ своими корнями уходит к классическим работам Пападимитриу, Яннакакиса [22], Карзанова [23] и формулируется следующим образом. Заданы граф $G$ с весами на рёбрах $w\colon E(G) \to \{z \in Z \mid z \geqslant 0\}$ и натуральное число $k$. Требуется определить, существует ли в графе $G$ совершенное паросочетание, вес которого равен $k$. Эта задача NP-полна в классе сбалансированных двудольных графов при неограниченных весах [24]. В [23] предложены полиномиальные алгоритмы, решающие задачу ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ для полных графов и полных двудольных графов с весами 0, 1 на рёбрах. На настоящий момент неизвестно, является ли задача ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ NP-полной в сильном смысле [25] даже в классе сбалансированных двудольных графов [26, с. 322]. Наша цель — доказать следующие две теоремы.

**Теорема 6.** *Если задача* ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ *для сбалансированных двудольных графов* NP-*полна в сильном смысле, то задача* НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ *для любого фиксированного числа компонент* $m \geqslant 2$ NP-*полна в сильном смысле.*

**Теорема 7.** *Если существует псевдополиномиальный алгоритм, решающий задачу* ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ *в классе сбалансированных двудольных графов, то существует псевдополиномиальный алгоритм, решающий задачу* НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ *для любого фиксированного числа компонент* $m \geqslant 2$.

Идея доказательства теоремы 6 заключается в построении псевдополиномиального сведéния от задачи ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ для сбалансированных двудольных графов к задаче НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ с фиксированным числом компонент $m \geqslant 2$. Идея доказательства теоремы 7 состоит в преобразовании псевдополиномиального алгоритма решения задачи ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ для сбалансированных двудольных графов в псевдополиномиальный алгоритм решения задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ с фиксированным числом компонент.

Для того чтобы доказать теорему 6, построим псевдополиномиальное сведéние сначала для случая $m = 2$, а затем обобщим это свéдение на случай $m \geqslant 3$. Прежде чем переходить к формальному построению, приведём идею конструкции со вспомогательными утверждениями.

Пусть $m = 2$. Рассмотрим сбалансированный двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$ с весами на рёбрах $w \colon E \to \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geqslant 0\}$. Пусть $k$ — натуральное число такое, что $k \leqslant w(E(G))$. Дополним граф $G$ до сбалансированного полного двудольного графа, добавив в него необходимые рёбра веса $w(E(G)) + 1$. Идея заключается в том, чтобы по графу $G$ построить цепочку сбалансированных полных двудольных графов с весами на рёбрах $G \to G^* \to G^0$, которые обладают следующими свойствами. Во-первых, веса рёбер графа $G^*$ принимают значения из множества $\{0, 1, w(E(G)) + 1\}$ и в графе $G^*$ рёбра единичного веса попарно

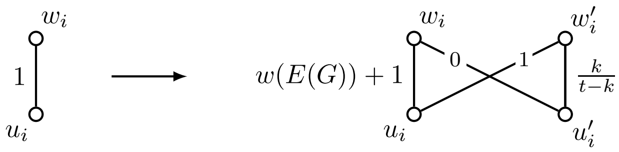



*Рис. 5.* Шаг преобразования графа $G^*$ в граф $G^0$

не смежны. Во-вторых, существование совершенного паросочетания веса $k$ в графе $G$ равносильно существованию совершенного паросочетания веса $k$ в графе $G^*$. Наконец, потребуем, чтобы существование в графе $G^*$ совершенного паросочетания веса $k$ было равносильно наличию в графе $G^0$ совершенного паросочетания стоимости не больше чем $k$. Приступим к реализации намеченной идеи.

По сбалансированному полному двудольному графу $G$ построим сбалансированный полный двудольный граф $G^*$ с весовой функцией $w^\star$, используя конструкцию из разд. 1 (без шага обновления компонент).

Преобразуем граф $G^*$. Рёбра единичного веса в графе $G^*$ попарно не смежны. Пусть $\{u_1, w_1\}$, $\{u_2, w_2\}$, …, $\{u_t, w_t\}$ — все рёбра единичного веса графа $G^*$. Концевые вершины $u_1, u_2, \ldots, u_t$ этих рёбер попарно различны и принадлежат доле $U^*$. Концевые вершины $w_1, w_2, \ldots, w_t$ этих рёбер также попарно различны и принадлежат доле $W^*$. Для каждого ребра $\{u_i, w_i\}$, $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, в граф $G^*$ (рис. 5) добавим две новые вершины $u'_i, w'_i$, а также ребро $\{u'_i, w'_i\}$ веса $\frac{k}{t-k}$, ребро $\{u_i, w'_i\}$ веса 1 и ребро $\{u'_i, w_i\}$ веса 0. Дополнительно изменим вес ребра $\{u_i, w_i\}$ с 1 на $w(E(G)) + 1$. В результате получим сбалансированный двудольный граф $G^0 = (U^0 \cup W^0, E^0)$, где $U^0 = U^* \cup \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_t\}$ и $W^0 = W^* \cup \{w'_1, w'_2, \ldots, w'_t\}$, с весами на рёбрах $w^0\colon E^0 \to \{0, 1, \frac{k}{t-k}, w(E(G)) + 1\}$. Затем дополним сбалансированный двудольный граф $G^0$ до сбалансированного полного двудольного графа, добавив в него необходимые рёбра веса $w(E(G)) + 1$. Наконец, выделим две компоненты $U_1^0 = U^*$ и $U_2^0 = \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_t\}$.

**Лемма 5.** *Для любого натурального числа $k \leqslant w(E(G))$ в графе $G$ существует совершенное паросочетание веса $k$ тогда и только тогда, когда в $G^0$ существует совершенное паросочетание стоимости не больше $k$.*

Доказательство. Достаточно показать равносильность существования в графе $G^*$ совершенного паросочетания веса $k$ и наличия в графе $G^0$ совершенного паросочетания стоимости не больше $k$.

Рассмотрим в $G^*$ совершенное паросочетание $M$ веса $k \leqslant w(E(G))$. Заметим, что паросочетание $M$ не содержит рёбер веса $w(E(G)) + 1$, т. е. оно состоит только из рёбер веса 0, 1. При этом в паросочетании $M$ число рёбер единичного веса равно $k$. Без потери общности будем считать, что в паросочетании $M$ рёбрами единичного веса являются рёбра $\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}$, …, $\{u_k, w_k\}$. Преобразуем паросочетание $M$ в совершенное паросочетание $M^0$ графа $G^0$. Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ удалим из $M$ ребро $\{u_i, w_i\}$ (вес которого равен 1) и добавим два ребра $\{u_i, w'_i\}$ и $\{u'_i, w_i\}$ графа $G^0$ (веса которых равны 1 и 0). Для каждого $i \in \{k + 1, k + 2, \ldots, t\}$ добавим в $M$ ребро $\{u'_i, w'_i\}$ (вес которого равен

$\frac{k}{t-k}$). В результате получим совершенное паросочетание $M^0$ графа $G^0$. Нетрудно видеть, что стоимость этого паросочетания равна $k$.

Рассмотрим в графе $G^0$ совершенное паросочетание $M^0$, стоимость которого не больше $k$. Так как $k \leqslant w(E(G))$, во-первых, в $M^0$ нет рёбер веса $w(E(G)) + 1$ и, во-вторых, для каждого индекса $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ или $\{u_i', w_i'\} \in M^0$, или $\{u_i, w_i'\} \in M^0$ и $\{u_i', w_i\} \in M^0$. Таким образом, индексы $1, 2, \dots, t$ разбиваются на два типа. Утверждается, что число индексов второго типа равно $k$. В самом деле, если индексов второго типа меньше чем $k$, то индексов первого типа больше чем $t-k$ и, как следствие, вес компоненты $U_2^0$ относительно $M^0$ больше $k$ (что невозможно ввиду того, что $v(M^0) \leqslant k$); если индексов второго типа, наоборот, больше чем $k$, то вес компоненты $U_1^0$ относительно $M^0$ больше $k$ (что невозможно ввиду того, что $v(M^0) \leqslant k$).

Преобразуем паросочетание $M^0$ в совершенное паросочетание $M$ графа $G^*$. Для каждого индекса $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ первого типа удалим из $M^0$ ребро $\{u_i', w_i'\}$. Затем для каждого индекса $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ второго типа удалим из $M^0$ рёбра $\{u_i', w_i\}$ и $\{u_i, w_i'\}$ и добавим ребро $\{u_i, w_i\}$ (вес которого в графе $G^*$ равен 1). В результате паросочетание $M^0$ преобразуется в совершенное паросочетание $M$ графа $G^*$ такое, что в $M$ рёбер единичного веса столько же, сколько индексов второго типа (которых ровно $k$). Таким образом, вес паросочетания $M$ равен $k$. Лемма 5 доказана.

Преобразование графа $G$ в граф $G^0$ лежит в основе псевдополиномиального сведе́ния для $m = 2$. Добавляя к графу $G^0$ необходимое число компонент, идею сведе́ния легко распространить на произвольное число компонент. Переходим к доказательству.

Доказательство теоремы 6. Для любого фиксированного числа компонент $m \geqslant 2$ задача наибольшая часть совершенного паросочетания, очевидно, принадлежит классу NP. Пусть задача точное совершенное паросочетание для сбалансированных двудольных графов NP-полна в сильном смысле. Построим псевдополиномиальное сведе́ние к задаче наибольшая часть совершенного паросочетания в предположении, что число компонент $m$ фиксировано и не меньше чем 2.

Сначала рассмотрим случай $m = 2$. Пусть $G = (X \cup Y, E)$ — сбалансированный двудольный граф с весами на рёбрах $w\colon E \to \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geqslant 0\}$. Пусть $k$ — натуральное число такое, что $k \leqslant w(E(G))$. Преобразуем взвешенный граф $G$ во взвешенный граф $G^0$. Нетрудно видеть, что это преобразование можно реализовать за псевдополиномиальное время, которое ввиду леммы 5 реализует псевдополиномиальное сведе́ние [15, с. 130] задачи точное совершенное паросочетание для сбалансированных двудольных графов к задаче наибольшая часть совершенного

ПАРОСОЧЕТАНИЯ в предположении, что число компонент $m$ фиксировано и равно 2. Тем самым утверждение доказано для случая $m = 2$.

Для того чтобы доказать утверждение для $m \geqslant 3$, достаточно привести конструкцию дополнения произвольного сбалансированного полного двудольного рёберно взвешенного графа $H = (U \cup W, E)$ с $m$ компонентами до графа с $m+1$ компонентами. В граф $H$ добавим две новые вершины $u'$ и $w'$, а также добавим ребро $\{u', w'\}$ веса 0, ребро $\{u', w\}$ веса $w(E)+1$ для каждой вершины $w \in W$ и ребро $\{u, w'\}$ веса $w(E)+1$ для каждой вершины $u \in U$ и дополнительно сформируем новую компоненту $U_{m+1} = \{u'\}$. Легко видеть, что такое добавление в граф $H$ двух вершин $u'$ и $w'$ и формирование новой компоненты $U_{m+1}$ не изменяет минимальной стоимости совершенного паросочетания. Таким образом, добавляя в граф $G^0$ пару новых вершин $m-2$ раз и формируя дополнительные $m-2$ новые одновершинные компоненты, получим взвешенный граф с $m$ компонентами и минимальной стоимостью совершенного паросочетания, равной минимальной стоимости совершенного паросочетания графа $G^0$. Теорема 6 доказана.

Доказательство теоремы 7. Пусть существует псевдополиномиальный алгоритм, решающий задачу ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ для сбалансированных двудольных графов (в дальнейшем для краткости будем опускать словосочетание «для сбалансированных двудольных графов»). Наша цель — разработать псевдополиномиальный алгоритм для задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ в предположении, что число компонент $m \geqslant 2$ является константой.

Пусть задан сбалансированный полный двудольный граф $G = (U \cup W, E)$ с весами на рёбрах и $m$ компонентами. Не теряя общности, можем предполагать, что веса рёбер графа $G$ являются целыми числами (в противном случае умножим веса рёбер на наименьшее общее кратное их знаменателей).

Для каждого натурального числа $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ проделаем следующие действия. Найдём в графе $G$ наибольший вес $w^{(i)}_{\max}$ паросочетания, покрывающего только вершины компоненты $U_i$. Это можно сделать при помощи полиномиального венгерского метода или псевдополиномиальных методов из работ [27–29]. После чего, используя алгоритм решения задачи ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ, для каждого целого неотрицательного числа $\ell^{(i)} \in \{0, 1, \ldots, w^{(i)}_{\max}\}$ выясним ответ на следующий вопрос: существует ли в графе $G$ паросочетание веса $\ell^{(i)}$, покрывающее все вершины компоненты $U_i$ и только эти вершины? На основании полученных ответов мы можем сформировать множество всех весов $X_i = \{x^{(i)}_1, x^{(i)}_2, \ldots, x^{(i)}_{p_i}\}$ паросочетаний графа $G$, покрывающих все вершины компоненты $U_i$ и только эти вершины.

Образуем все возможные упорядоченные наборы вида $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, …, $x_m \in X_m$, которые составляют декартово произведение $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$ множеств $X_1, X_2, \dots, X_m$. Идея алгоритма проста и состоит в том, чтобы для каждого набора $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_m) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$ определить, существует ли в графе $G$ совершенное паросочетание $M_{\widehat{x}}$ такое, что

$$w(M_{\widehat{x}} \cap \delta(U_i)) = \widehat{x}_i \quad \text{для каждого } i \in \{1, 2, \dots, m\}. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что среди таких паросочетаний $M_{\widehat{x}}$, $\widehat{x} \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$, есть совершенное паросочетание наименьшей стоимости. Таким образом, остаётся разработать псевдополиномиальный алгоритм, который для произвольного фиксированного набора $\widehat{x} \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$ определяет, существует ли в графе $G$ совершенное паросочетание $M_{\widehat{x}}$, удовлетворяющее условию (4).

Если фиксированный набор $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_m)$ является единственным набором в множестве $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$ с суммой компонент, равной $\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2 + \cdots + \widehat{x}_m$, то вопрос существования совершенного паросочетания $M_{\widehat{x}}$ графа $G$, удовлетворяющего условию (4), сводится к вопросу о наличии в графе $G$ совершенного паросочетания веса $\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2 + \cdots + \widehat{x}_m$, ответ на который можно получить с помощью алгоритма для задачи ТОЧНОЕ СОВЕРШЕННОЕ ПАРОСОЧЕТАНИЕ.

Пусть в множестве $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$ существует несколько наборов с суммой компонент, равной $\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2 + \cdots + \widehat{x}_m$. Поскольку компоненты в рассматриваемых наборах — неотрицательные числа, набор $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_m)$ отличен от нулевого набора. Для того чтобы гарантировать единственность набора $\widehat{x}$ с суммой компонент, равной сумме его компонент, умножим веса всех рёбер графа $G$, принадлежащих множеству $\delta(U_i)$, на корректирующий множитель $\lambda_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. При этом веса паросочетаний графа $G$, покрывающих только вершины компоненты $U_i$, изменятся в $\lambda_i$ раз, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Выберем значения корректирующих множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ таким образом, чтобы для любого набора $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_m) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$, отличного от набора $\widehat{x}$, выполнялось условие

$$\lambda_1 \widetilde{x}_1 + \lambda_2 \widetilde{x}_2 + \cdots + \lambda_m \widetilde{x}_m \neq \lambda_1 \widehat{x}_1 + \lambda_2 \widehat{x}_2 + \cdots + \lambda_m \widehat{x}_m. \tag{5}$$

Зафиксируем в $m$-мерном аффинном пространстве прямоугольную декартову систему координат. Наборам множества $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$ соответствуют точки пространства, которые лежат внутри $m$-мерного параллелепипеда

$$\Pi_m = \bigl\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid 0 \leqslant x_i \leqslant w_{\max}^{(i)},\ i \in \{1, 2, \dots, m\}\bigr\}.$$

Построим гиперплоскость $\pi_m$, которая содержит в точности одну целочисленную точку параллелепипеда $\Pi_m$ — точку $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_m)$.

Пусть $m = 2$. Рассмотрим гиперплоскость $\pi_2$, задаваемую уравнением

$$x_2 + \frac{1}{w^{(1)}_{\max} + 1}\, x_1 = \widehat{x}_2 + \frac{1}{w^{(1)}_{\max} + 1}\, \widehat{x}_1.$$

Нетрудно видеть, что $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) \in \pi_2$. Рассмотрим произвольную целочисленную точку $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ параллелепипеда $\Pi_2$, принадлежащую гиперплоскости $\pi_2$. Тогда

$$\widetilde{x}_2 + \frac{1}{w^{(1)}_{\max} + 1}\, \widetilde{x}_1 = \widehat{x}_2 + \frac{1}{w^{(1)}_{\max} + 1}\, \widehat{x}_1. \tag{6}$$

Из того, что точки $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$, $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ принадлежат параллелепипеду $\Pi_2$, следует, что $0 \leqslant \widetilde{x}_1 \leqslant w^{(1)}_{\max}$ и $0 \leqslant \widehat{x}_1 \leqslant w^{(1)}_{\max}$. Стало быть,

$$0 \leqslant \frac{1}{w^{(1)}_{\max} + 1}\, \widetilde{x}_1 < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \frac{1}{w^{(1)}_{\max} + 1}\, \widehat{x}_1 < 1.$$

В силу этих неравенств из (6) следует неравенство $|\widetilde{x}_2 - \widehat{x}_2| < 1$. Принимая во внимание целочисленность компонент $\widetilde{x}_2$ и $\widehat{x}_2$, получаем, что $\widetilde{x}_2 = \widehat{x}_2$. Из (6) следует равенство компонент $\widetilde{x}_1$ и $\widehat{x}_1$. Таким образом, произвольная целочисленная точка $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ параллелепипеда $\Pi_2$, принадлежащая гиперплоскости $\pi_2$, совпадает с точкой $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$.

Пусть $m \geqslant 3$. В общем случае уравнение гиперплоскости $\pi_m$ имеет вид

$$\begin{aligned} x_m + \frac{1}{w^{(m-1)}_{\max} + 1}\Bigg(x_{m-1} \\ + \frac{1}{w^{(m-2)}_{\max} + 1}\Bigg(x_{m-2} + \dots + \frac{1}{w^{(2)}_{\max} + 1}\Bigg(x_2 + \frac{1}{w^{(1)}_{\max} + 1}\, x_1\Bigg)\dots\Bigg)\Bigg) \\ = \widehat{x}_m + \frac{1}{w^{(m-1)}_{\max} + 1}\Bigg(\widehat{x}_{m-1} + \frac{1}{w^{(m-2)}_{\max} + 1}\Bigg(\widehat{x}_{m-2} \\ + \dots + \frac{1}{w^{(2)}_{\max} + 1}\Bigg(\widehat{x}_2 + \frac{1}{w^{(1)}_{\max} + 1}\, \widehat{x}_1\Bigg)\dots\Bigg)\Bigg). \end{aligned}$$

**Лемма 6.** *Для каждого натурального числа $m \geqslant 2$ гиперплоскость $\pi_m$ содержит ровно одну целочисленную точку $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_m)$, принадлежащую параллелепипеду $\Pi_m$. При этом для любой целочисленной точки $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \dots, \widetilde{x}_m)$, принадлежащей параллелепипеду $\Pi_m$, имеют место неравенства*

$$0 \leqslant \frac{1}{w^{(m-1)}_{\max} + 1}\Bigg(\widetilde{x}_{m-1} + \dots + \frac{1}{w^{(2)}_{\max} + 1}\Bigg(\widetilde{x}_2 + \frac{1}{w^{(1)}_{\max} + 1}\, \widetilde{x}_1\Bigg)\dots\Bigg) < 1. \tag{7}$$

Доказательство. Докажем по индукции по числу компонент $m$. Утверждение для $m = 2$ фактически было доказано выше. Пусть $m \geqslant 3$.

Легко видеть, что точка $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_m)$ удовлетворяет уравнению гиперплоскости $\pi_m$ и, следовательно, ей принадлежит. Рассмотрим произвольную целочисленную точку $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_m)$ параллелепипеда $\Pi_m$. По индуктивному предположению

$$0 \leqslant \frac{1}{w_{\max}^{(m-2)} + 1}\left(\widetilde{x}_{m-2} + \cdots + \frac{1}{w_{\max}^{(2)} + 1}\left(\widetilde{x}_2 + \frac{1}{w_{\max}^{(1)} + 1}\,\widetilde{x}_1\right)\ldots\right) < 1.$$

К каждой части этого двойного неравенства прибавим $\widetilde{x}_{m-1}$, после чего умножим каждую часть неравенства на $1/\big(w_{\max}^{(m-1)} + 1\big)$. Получим

$$\frac{1}{w_{\max}^{(m-1)} + 1}\,\widetilde{x}_{m-1} \leqslant \frac{1}{w_{\max}^{(m-1)} + 1}\left(\widetilde{x}_{m-1} + \frac{1}{w_{\max}^{(m-2)}}\left(\widetilde{x}_{m-2} + \cdots + \frac{1}{w_{\max}^{(2)} + 1}\left(\widetilde{x}_2 + \frac{1}{w_{\max}^{(1)} + 1}\,\widetilde{x}_1\right)\ldots\right)\right) < \frac{\widetilde{x}_{m-1} + 1}{w_{\max}^{(m-1)} + 1},$$

откуда непосредственно следует (7).

Рассмотрим произвольную целочисленную точку $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_m)$ параллелепипеда $\Pi_m$, принадлежащую гиперплоскости $\pi_m$. Эта точка удовлетворяет уравнению гиперплоскости $\pi_m$:

$$\widetilde{x}_m + \underbrace{\frac{1}{w_{\max}^{(m-1)} + 1}\left(\widetilde{x}_{m-1} + \cdots + \frac{1}{w_{\max}^{(2)} + 1}\left(\widetilde{x}_2 + \frac{1}{w_{\max}^{(1)} + 1}\,\widetilde{x}_1\right)\ldots\right)}_{A}$$
$$= \widehat{x}_m + \underbrace{\frac{1}{w_{\max}^{(m-1)} + 1}\left(\widehat{x}_{m-1} + \cdots + \frac{1}{w_{\max}^{(2)} + 1}\left(\widehat{x}_2 + \frac{1}{w_{\max}^{(1)} + 1}\,\widehat{x}_1\right)\ldots\right)}_{B}$$

и $0 \leqslant A < 1$, $0 \leqslant B < 1$. Стало быть, $|\widetilde{x}_m - \widehat{x}_m| < 1$. Поскольку компоненты $\widetilde{x}_m$ и $\widehat{x}_m$ целые, $\widetilde{x}_m = \widehat{x}_m$. Обе части равенства $A = B$ умножим на $w_{\max}^{(m-1)}+1$ и получим равенство, которое свидетельствует о том, что целочисленная точка $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_{m-1})$ принадлежит гиперплоскости $\pi_{m-1}$. По индуктивному предположению $\widetilde{x}_1 = \widehat{x}_1$, $\widetilde{x}_2 = \widehat{x}_2$, $\ldots$, $\widetilde{x}_{m-1} = \widehat{x}_{m-1}$. Лемма 6 доказана.

Раскроем скобки в уравнении гиперплоскости $\pi_m$ и получим

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m = \lambda_1 \widehat{x}_1 + \lambda_2 \widehat{x}_2 + \cdots + \lambda_m \widehat{x}_m,$$

где $\lambda_i = \prod\limits_{j=i}^{m-1} \frac{1}{w_{\max}^{(j)}+1}$ для $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ и $\lambda_m = 1$. По лемме 6 неравенство (5) выполняется для любой целочисленной точки $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_m)$ параллелепипеда $\Pi_m$ (и, в частности, множества $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$), отличной от $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_m)$.

**Лемма 7.** *Пусть* $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_m)$ — *точка с целочисленными координатами, принадлежащая параллелепипеду* $\Pi_m$, *и* $M_{\widehat{x}}$ — *совершенное паросочетание графа* $G$. *Паросочетание* $M_{\widehat{x}}$ *удовлетворяет условию* (4) *тогда и только тогда, когда в графе* $G$, *в котором веса рёбер множества* $\delta(U_i)$ *умножены на* $\lambda_i$ *для каждого* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *вес паросочетания* $M_{\widehat{x}}$ *равен* $\lambda_1\widehat{x}_1 + \lambda_2\widehat{x}_2 + \cdots + \lambda_m\widehat{x}_m$, *где* $\lambda_i = \prod\limits_{j=i}^{m-1} \frac{1}{w_{\max}^{(j)}+1}$ *для любого* $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ *и* $\lambda_m = 1$.

Доказательство. Пусть совершенное паросочетание $M_{\widehat{x}}$ графа $G$ удовлетворяет условию (4). Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ умножим веса рёбер $\delta(U_i)$ на $\lambda_i$. Сумма весов рёбер $M_{\widehat{x}} \cap \delta(U_i)$ изменится в $\lambda_i$ раз и станет равной $\lambda_i\widehat{x}_i$, где $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Следовательно, вес паросочетания $M_{\widehat{x}}$ относительно новых весов рёбер равен $\lambda_1\widehat{x}_1+\lambda_2\widehat{x}_2+\cdots+\lambda_m\widehat{x}_m$.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть в графе $G$ с изменёнными весами рёбер вес совершенного паросочетания $M_{\widehat{x}}$ равен $\lambda_1\widehat{x}_1 + \lambda_2\widehat{x}_2 + \cdots + \lambda_m\widehat{x}_m$, т. е.

$$\lambda_1 w(M_{\widehat{x}} \cap \delta(U_1)) + \lambda_2 w(M_{\widehat{x}} \cap \delta(U_2)) + \cdots + \lambda_m w(M_{\widehat{x}} \cap \delta(U_m)) \\ = \lambda_1\widehat{x}_1 + \lambda_2\widehat{x}_2 + \cdots + \lambda_m\widehat{x}_m.$$

Значит, точка $\widetilde{x} = (w(M_{\widehat{x}}\cap\delta(U_1)), w(M_{\widehat{x}}\cap\delta(U_2)), \ldots, w(M_{\widehat{x}}\cap\delta(U_m)))$ удовлетворяет уравнению гиперплоскости $\pi_m$ и тем самым ей принадлежит. Точка $\widetilde{x}$ целочисленная и содержится в параллелепипеде $\Pi_m$. По лемме 6 $\widetilde{x} = \widehat{x}$. Следовательно, $w(M_{\widehat{x}} \cap \delta(U_i)) = \widehat{x}_i$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, т. е. для $M_{\widehat{x}}$ выполняется условие (4). Лемма 7 доказана.

**Следствие 2.** *В графе* $G$ *существует совершенное паросочетание* $M_{\widehat{x}}$, *удовлетворяющее условию* (4) *для некоторого* $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_m) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$, *тогда и только тогда, когда в графе* $G$, *в котором веса рёбер* $\delta(U_i)$ *умножены на* $\lambda_i$ *для каждого* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *существует совершенное паросочетание веса* $\lambda_1\widehat{x}_1 + \lambda_2\widehat{x}_2 + \cdots + \lambda_m\widehat{x}_m$, *где* $\lambda_i = \prod\limits_{j=i}^{m-1} \frac{1}{w_{\max}^{(j)}+1}$ *для любого* $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ *и* $\lambda_m = 1$.

Для того чтобы выяснить, существует ли в графе $G$ совершенное паросочетание $M_{\widehat{x}}$, удовлетворяющее условию (4), достаточно проверить с помощью псевдополиномиального алгоритма, решающего задачу точное совершенное паросочетание, наличие в графе $G$, в котором веса рёбер множества $\delta(U_i)$ умножены на $\lambda_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, совершенного паросочетания веса $\lambda_1\widehat{x}_1 + \lambda_2\widehat{x}_2 + \cdots + \lambda_m\widehat{x}_m$. Так как число компонент $m$ фиксировано, алгоритм, в котором для каждой точки $\widehat{x} = (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \ldots, \widehat{x}_m) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$ осуществляется такая проверка, псевдополиномиальный. Теорема 7 доказана.

## Заключение

В работе рассмотрена задача поиска совершенного паросочетания в рёберно взвешенном полном двудольном графе с ограничениями на суммарный вес частей паросочетания. Эта задача NP-трудна в сильном смысле и является обобщением классической задачи о назначениях. В работе выделены полиномиально разрешимый и сильно NP-трудный случаи задачи, показана эквивалентность специального случая задачи задаче поиска в рёберно взвешенном двудольном графе совершенного паросочетания заданного веса. В работе [9] приводится эффективный $m$-приближённый алгоритм решения оптимизационной версии задачи НАИБОЛЬШАЯ ЧАСТЬ СОВЕРШЕННОГО ПАРОСОЧЕТАНИЯ. Заметим, что другие эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности в настоящее время неизвестны.

Автор благодарит рецензента за внимательное прочтение рукописи, найденные ошибки и конструктивные замечания, направленные на улучшение представления результатов работы, а также за идею значительного упрощения необходимых и достаточных условий в первоначальном варианте теоремы 2. Автор благодарит И. А. Близнеца за указание на полиномиальное сведéние задачи РАЗБИЕНИЕ к рассматриваемой в работе задаче для двух компонент.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Monge G.** Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais // Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris. 1781. P. 666–704. [French].
2. **Schrijver A.** On the history of combinatorial optimization (till 1960) // Handb. Oper. Res. Manag. Sci. 2005. Vol. 12. P. 1–68.
3. **Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.** Assignment problems. Philadelphia, PA: SIAM, 2009. 382 p.
4. **Pentico D. W.** Assignment problems: A golden anniversary survey // Eur. J. Oper. Res. 2007. Vol. 176. P. 774–793.
5. **Fulkerson D. R., Glicksberg I., Gross O.** A production line assignment problem // Tech. Rep. RM-1102. Santa Monica, CA: The Rand Corp., 1953.
6. **Koopmans T. C., Beckmann M. J.** Assignment problems and the location of economic activities // Econometrica. 1957. Vol. 25. P. 53–76.
7. **Демиденко В. М.** Квадратичная задача о назначениях с аддитивно монотонными матрицами и неполными матрицами анти-Монжа: условия эффективной разрешимости // Дискрет. математика. 2007. Т. 19. С. 105–132.
8. **Martello S., Pulleyblank W. R., Toth P., de Werra D.** Balanced optimization problems // Oper. Res. Lett. 1984. Vol. 3. P. 275–278.
9. **Barketau M., Pesch E., Shafransky Ya.** Minimizing maximum weight of subsets of a maximum matching in a bipartite graph // Discrete Appl. Math. 2015. Vol. 196. P. 4–19.

10. **Kress D., Meiswinkel S., Pesch E.** The partitioning min-max weighted matching problem // Eur. J. Oper. Res. 2015. Vol. 247. P. 745–754.
11. **Li X., Otto A., Pesch E.** Solving the single crane scheduling problem at rail transshipment yards // Discrete Appl. Math. 2019. Vol. 264. P. 134–147.
12. **Meiswinkel S.** On combinatorial optimization and mechanism design problems arising at container ports. Wiesbaden: Springer Gabler, 2018. 123 p.
13. **Pesch E., Kuzmicz K.** Non-approximability of the single crane container transshipment problem // Int. J. Prod. Res. 2020. Vol. 58. P. 3965–3975.
14. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
15. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
16. **Gurjar R., Korwar A., Messner J., Straub S., Thierauf T.** Planarizing gadgets for perfect matching do not exist // Mathematical Foundations of Computer Science 2012. Proc. 37th Int. Symp. (Bratislava, Slovakia, Aug. 27–31, 2012). Heidelberg: Springer, 2012. P. 478–490. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 7464).
17. **Ahuja R. K., Magnanti T. L., Orlin J. B.** Network flows: Theory, algorithms, and applications. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1993. 863 p.
18. **Корте Б., Фиген Й.** Комбинаторная оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: МЦНМО, 2015. 720 с.
19. **Cameron K.** Coloured matchings in bipartite graphs // Discrete Math. 1997. Vol. 169. P. 205–209.
20. **Itai A., Rodeh M.** Finding a minimum circuit in a graph // Proc. 9th Annu. ACM Symp. Theory of Computing (Boulder, CO, USA, May 2–4, 1977). New York: ACM, 1977. P. 1–10.
21. **Itai A., Rodeh M., Tanimoto S. L.** Some matching problems for bipartite graphs // J. ACM. 1978. Vol. 25, No. 4. P. 517–525.
22. **Papadimitriou C. H., Yannakakis M.** The complexity of restricted spanning tree problems // J. ACM. 1982. Vol. 29, No. 2. P. 285–309.
23. **Карзанов А. В.** О максимальных паросочетаниях заданного веса в полных и полных двудольных графах // Кибернетика. 1987. № 1. С. 7–11.
24. **Zhu G., Luo X., Miao Y.** Exact weight perfect matching of bipartite graph is NP-complete // Proc. World Congr. Engineering 2008 (London, UK, July 2–4, 2008). Vol. II. London: Newswood, 2008. P. 878–880.
25. **Gurjar R., Korwar A., Messner J., Thierauf T.** Exact perfect matching in complete graphs // ACM Trans. Comput. Theory. 2017. Vol. 9, No. 2. P. 8:1–8:20.
26. **Milanic M., Monnot J.** The exact weighted independent set problem in perfect graphs and related classes // Electron. Notes Discrete Math. 2009. Vol. 35. P. 317–322.
27. **Gabow H. N., Tarjan R. E.** Faster scaling algorithms for network problems // SIAM J. Comput. 1989. Vol. 18. P. 1013–1036.

**28.** **Ramshaw L., Tarjan R. E.** A weight-scaling algorithm for min-cost imperfect matchings in bipartite graphs // Proc. 53rd Annu. Symp. Foundations of Computer Science (New Brunswick, NJ, USA, Oct. 20–23, 2012). Piscataway: IEEE, 2012. P. 581–590.

**29.** **Gabow H. N., Tarjan R. E.** Faster scaling algorithms for general graph matching problems // J. ACM. 1991. Vol. 38, No. 4. P. 815–853.

*Дугинов Олег Иванович*

Статья поступила
15 июля 2019 г.

После доработки —
28 апреля 2021 г.

Принята к публикации
30 апреля 2021 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2021. Vol. 28, No. 3. P. 5–37

UDC 519.8 DOI 10.33048/daio.2021.28.667

# A WEIGHTED PERFECT MATCHING WITH CONSTRAINTS ON WEIGHTS OF ITS PARTS

*O. I. Duginov*

E-mail: duginov@bsu.by

**Abstract.** We consider the following strongly NP-hard problem. Given an edge–weighted balanced complete bipartite graph with a partition of its part into non-empty and pairwise disjoint subsets, the problem is to find a perfect matching of this graph such that maximum sum of weights of edges from the matching incident to vertices of a subset of the partition is minimum. We present a characterization of solutions of a special case of this problem, in which weights of graph edges take values from the set $\{0, 1, \Delta\}$, where $\Delta$ is an integer that is greater than the number of edges of the unit weight and there is a perfect matching of the graph that consists of edges with weights 0 and 1. Besides, we identify polynomially solvable and strongly NP-hard special cases of this problem. Finally, we show that if the number of subsets forming the partition is fixed then the considered problem is equivalent to the problem of finding a perfect matching of a given weight in an edge-weighted bipartite graph. Illustr. 5, bibliogr. 29.

**Keywords:** perfect matching, assignment problem, NP-hardness.

## REFERENCES

1. **G. Monge,** Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 666–704 (1781) [French].
2. **A. Schrijver,** On the history of combinatorial optimization (till 1960), *Handb. Oper. Res. Manag. Sci.* **12**, 1–68 (2005).
3. **R. Burkard, M. Dell'Amico,** and **S. Martello,** *Assignment Problems* (SIAM, Philadelphia, PA, 2009).
4. **D. W. Pentico,** Assignment problems: A golden anniversary survey, *Eur. J. Oper. Res.* **176**, 774–793 (2007).
5. **D. R. Fulkerson, I. Glicksberg,** and **O. Gross,** A production line assignment problem, *Tech. Rep. RM-1102* (The Rand Corp., Santa Monica, CA, 1953).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (3) (2021).

6. **T. C. Koopmans** and **M. J. Beckmann,** Assignment problems and the location of economic activities, *Econometrica* **25**, 53–76 (1957).
7. **V. M. Demidenko,** Quadratic assignment problems with additively monotone matrices and incomplete anti-Monge matrices: Conditions for effective solvability, *Diskretn. Mat.* **19**, 105–132 (2007) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **12**, 105–133 (2007)].
8. **S. Martello, W. R. Pulleyblank, P. Toth,** and **D. de Werra,** Balanced optimization problems, *Oper. Res. Lett.* **3**, 275–278 (1984).
9. **M. Barketau, E. Pesch,** and **Ya. Shafransky,** Minimizing maximum weight of subsets of a maximum matching in a bipartite graph, *Discrete Appl. Math.* **196**, 4–19 (2015).
10. **D. Kress, S. Meiswinkel,** and **E. Pesch,** The partitioning min-max weighted matching problem, *Eur. J. Oper. Res.* **247**, 745–754 (2015).
11. **X. Li, A. Otto,** and **E. Pesch,** Solving the single crane scheduling problem at rail transshipment yards, *Discrete Appl. Math.* **264**, 134–147 (2019).
12. **S. Meiswinkel,** *On Combinatorial Optimization and Mechanism Design Problems Arising at Container Ports* (Springer Gabler, Wiesbaden, 2018).
13. **E. Pesch** and **K. Kuzmicz,** Non-approximability of the single crane container transshipment problem, *Int. J. Prod. Res.* **58**, 3965–3975 (2020).
14. **V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov,** and **R. I. Tyshkevich,** *Lectures on Graph Theory* (Nauka, Moscow, 1990 [Russian]; B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994).
15. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).
16. **R. Gurjar, A. Korwar, J. Messner, S. Straub,** and **T. Thierauf,** Planarizing gadgets for perfect matching do not exist, in *Mathematical Foundations of Computer Science 2012* (Proc. 37th Int. Symp., Bratislava, Slovakia, Aug. 27–31, 2012) (Springer, Heidelberg, 2012), pp. 478–490 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 7464).
17. **R. K. Ahuja, T. L. Magnanti,** and **J. B. Orlin,** *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications* (Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1993).
18. **B. Korte** and **J. Vygen,** *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms* (Springer, Heidelberg, 2012; MTsNMO, Moscow, 2015 [Russian]) (Algorithms Comb., Vol. 21).
19. **K. Cameron,** Coloured matchings in bipartite graphs, *Discrete Math.* **169**, 205–209 (1997).
20. **A. Itai** and **M. Rodeh,** Finding a minimum circuit in a graph, in *Proc. 9th Annu. ACM Symp. Theory of Computing, Boulder, CO, USA, May 2–4, 1977* (ACM, New York, 1977), pp. 1–10.
21. **A. Itai, M. Rodeh,** and **S. L. Tanimoto,** Some matching problems for bipartite graphs, *J. ACM* **25** (4), 517–525 (1978).
22. **C. H. Papadimitriou** and **M. Yannakakis,** The complexity of restricted spanning tree problems, *J. ACM* **29** (2), 285–309 (1982).

**23.** **A. V. Karzanov,** Maximum matching of given weight in complete and complete bipartite graphs, *Kibernetika,* No. 1, 7–11 (1987) [Russian] [*Cybern. Syst. Anal.* **23**, 8–13 (1987)].

**24.** **G. Zhu, X. Luo,** and **Y. Miao,** Exact weight perfect matching of bipartite graph is NP-complete, in *Proc. World Congr. Engineering 2008, London, UK, July 2–4, 2008*, Vol. II (Newswood, London, 2008), pp. 878–880.

**25.** **R. Gurjar, A. Korwar, J. Messner,** and **T. Thierauf,** Exact perfect matching in complete graphs, *ACM Trans. Comput. Theory* **9** (2), 8:1–8:20 (2017).

**26.** **M. Milanic** and **J. Monnot,** The exact weighted independent set problem in perfect graphs and related classes, *Electron. Notes Discrete Math.* **35**, 317–322 (2009).

**27.** **H. N. Gabow** and **R. E. Tarjan,** Faster scaling algorithms for network problems, *SIAM J. Comput.* **18**, 1013–1036 (1989).

**28.** **L. Ramshaw** and **R. E. Tarjan,** A weight-scaling algorithm for min-cost imperfect matchings in bipartite graphs, in *Proc. 53rd Annu. Symp. Foundations of Computer Science, New Brunswick, NJ, USA, Oct. 20–23, 2012* (IEEE, Piscataway, 2012), pp. 581–590.

**29.** **H. N. Gabow** and **R. E. Tarjan,** Faster scaling algorithms for general graph matching problems, *J. ACM* **38** (4), 815–853 (1991).

*Oleg I. Duginov*

Received July 15, 2019
Revised April 28, 2021
Accepted April 30, 2021