

ЗАДАЧИ НЕВЫПУКЛОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ФАЗИРОВАННЫХ АНТЕННЫХ РЕШЁТОК

Н. Н. Тюнин

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева,
ул. Певцова, 13, 644043 Омск, Россия
E-mail: n.n.tyunin@gmail.com

Аннотация. Задача оптимизации фазированных антенных решёток коротковолнового диапазона сформулирована как задача квадратичного программирования. Для исследования структуры множества локальных оптимумов применены метод штрафных функций и алгоритм градиентного подъёма. Проведено сравнение работы данного алгоритма с известным решателем BARON. Табл. 2, ил. 3, библиогр. 32.

Ключевые слова: квадратичное программирование, локальный оптимум, антенная решётка, градиентная оптимизация, вычислительный эксперимент.

Введение

Фазированными антенными решётками (ФАР) называются антенные системы, представляющие собой регулярные решётки излучателей, соединённые со специальными устройствами, обеспечивающими распределение фаз и амплитуд в излучателях для получения направленного излучения (см., например, [1]). Использование таких систем широко распространено в диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ), поскольку к достоинствам данного диапазона относятся малые размеры антенн и более широкая абсолютная полоса частот. Однако радиоволны указанного диапазона испытывают сильное затухание в атмосфере, вследствие чего радиосистемы СВЧ диапазона характеризуются малой дальностью действия. ФАР высокочастотного диапазона (ВЧ), также называемого

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 19–37–90066.

коротковолновым (КВ), менее распространены ввиду больших габаритов, однако возможность увеличения дальности действия привлекает к ним особый интерес [2–4].

Рассматриваемая в статье задача состоит в максимизации направленности излучения ФАР за счёт выбора фаз и амплитуд в каждом излучателе. Задача осложняется за счёт взаимного влияния излучателей друг на друга. В СВЧ диапазоне такое влияние можно нивелировать с помощью дополнительных устройств (см. [5, § 6.7]), после чего задача существенно упрощается [6]. В случае же с ВЧ диапазоном, в котором используются иначе спроектированные излучатели, такое допущение невозможно.

Использование математических методов широко распространено для решения задач радиофизики. В частности, имеются работы об использовании алгоритмов полуопределённой релаксации [7], методов градиентной оптимизации [6], метаэвристик [6, 8–10], методов линейной алгебры [11, 12], методов теории аппроксимации [13] и т. д. В некоторых случаях рассматривается возможность приближённого решения задачи с использованием методов выпуклого программирования [14].

В данной работе мы рассматриваем подход к решению задачи максимизации направленности излучения ФАР в заданном направлении при ограничениях, накладываемых на мощность, подаваемую на каждый из излучателей. Такая задача может быть решена только численными методами [11]. Для использования градиентного метода задача сводится к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций. Выбор градиентного алгоритма связан с тем, что отыскание даже локального оптимума в задаче невыпуклого квадратичного программирования может представлять собой NP-трудную задачу, и одним из методов, уместных в таких случаях, является градиентный алгоритм [15]. Согласно [16] использование метода сопряжённых градиентов для решения данной задачи не будет приводить к существенным улучшениям по сравнению с простым градиентным подъёмом. Данное утверждение нашло согласие с результатами предварительных вычислительных экспериментов, проведённых нами для некоторых из рассматриваемых задач.

Для оценки качества результатов градиентного алгоритма производится их сравнение с решениями, полученными с помощью решателя BARON в пакете GAMS. BARON использует алгоритмы метода ветвей и границ, усиленные различными методами распространения ограничений и двойственности для уменьшения диапазонов переменных в ходе работы алгоритма [17]. Его использование также представляет альтернативный подход к решению данной задачи, но поскольку BARON является коммерческим решателем, производство расчётов требует приобретения лицензии, что не всегда приемлемо.

Вообще говоря, при использовании метода градиентного подъёма получение глобального оптимума не гарантируется. Приблизиться к глобальному оптимуму позволяет многократный запуск алгоритма из случайным образом сгенерированных точек. Кроме того, многократный запуск позволяет оценить количество локальных оптимумов, что является некоторым критерием сложности индивидуальной задачи [18]. Анализ структуры локальных оптимумов позволяет также выявить наличие нетривиальных симметрий.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 вводятся основные обозначения, даётся постановка задачи в комплексных числах, приводятся примеры рассматриваемых моделей ФАР. В п. 1.1 задача формулируется в вещественных числах, далее в п. 1.2 приводится оценка нормы допустимых решений, в п. 1.3 даётся процедура масштабирования в допустимую область решения определённого типа, а в п. 1.4 описываются необходимые условия локальной оптимальности. В разд. 2 приводится описание эксперимента: в п. 2.1 даётся описание рассматриваемых типов ФАР, в п. 2.2 приводятся результаты сравнения работы градиентного алгоритма и решателя BARON, а в п. 2.3 — результаты анализа структуры локальных оптимумов. Общие выводы по результатам статьи даны в заключении. Алгоритм исследования локальных оптимумов представлен в приложении А.

1. Основные обозначения и формулировка задачи

Как и в работах [12, 19], мы изучаем антенные решётки КВ диапазона, состоящие из широкополосных вертикальных излучателей (ШВИ) (рис. 1(а)) и широкополосных вертикальных диполей (ШВД) (рис. 1(б)). Кроме того, в рассмотрение включены решётки симметричных вертикальных диполей (СВД) (рис. 1(в)) и решётки ШВИ кольцевой структуры (рис. 1(г)).

Каждый ШВИ состоит из 8 проводов, которые составляют «каплеобразный» вертикальный излучатель, обеспеченный системой противовесов. Система противовесов каждого излучателя состоит из 6 проводов, расположенных параллельно земле. ШВД спроектирован аналогично ШВИ с той разницей, что вместо системы противовесов подключён другой «каплеобразный» вертикальный излучатель, направленный в противоположную сторону. СВД являются диполями стандартной конфигурации, т. е. представляют собой прямолинейный проводник, длина которого много больше его радиуса, питаемый от генератора посередине. Решётки ШВИ кольцевой структуры представляют собой несколько «каплеобразных» вертикальных излучателей, расположенных по кругу с некоторым фиксированным шагом. Система противовесов для такой решётки состоит из радиальных проводников, причём через каждый излучатель

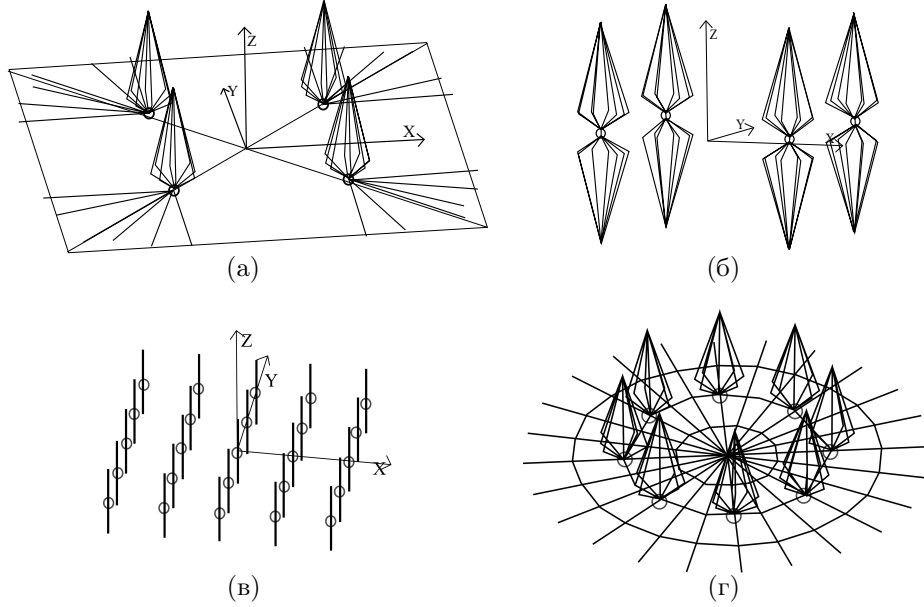


Рис. 1. ФАР различных конфигураций

проходит один такой проводник. Кроме того, система противовесов состоит из поперечных проводников, соединяющих соседние излучатели, а также параллельных ему проводников в данном секторе. В принципе, в рассмотрение могут быть включены излучатели, спроектированные любым другим образом, если для них предоставлены соответствующие входные данные задачи оптимизации ФАР. Здесь под входными данными понимаются матрицы компонент полей и матрицы проводимости, которые можно получить с помощью некоторой программы моделирования антенн.

Нашей задачей является максимизация излучения антенной решётки в заданном направлении при ограничениях на мощность, подводимую к каждому излучателю. В терминах комплексных токов, подводимых к излучателям, эта задача сформулирована в [11, 12]. Пусть l — индекс компоненты вектора направления: $l = 1$ для азимутального и $l = 2$ для полярного угла. Расстояние до приёмника принимается во много раз превышающим размеры ФАР, поэтому индекс l итерирует только эти два значения. Суммарное электромагнитное поле $f_{\Sigma}^{(l)}$, выраженное в комплексных единицах, вводится как

$$f_{\Sigma}^{(l)} = \sum_{i=1}^N I_i \tilde{f}_i^{(l)}, \quad (1)$$

где N — число точек питания антенной системы, I_i — комплексный ток в i -й точке питания; $\tilde{f}_i^{(l)}$ — парциальное поле, т. е. поле, которое излучается при подаче единичного тока на i -ю точку питания излучающей системы, в то время как ток в других точках питания равен нулю. В качестве количественной меры оценки электромагнитного поля используется напряжённость электрического поля. Отметим, что из определения парциального поля следует, что $\tilde{f}_i^{(l)}$ имеет размерность поля, нормированного к току. Справедливость выражения (1) следует из линейности уравнений Максвелла (более подробно см. [11]). Таким образом, суммарное поле $f_\Sigma^{(l)}$ является суперпозицией парциальных полей от каждой точки питания излучающей системы.

Значения $f_i^{(l)}$ и $f_\Sigma^{(l)}$ — функции направления и частоты, которые могут быть вычислены с помощью некоторой программы моделирования антенн (здесь используем NEC-2 [20]).

Через \bar{f} обозначим комплексное сопряжение к f . Как было упомянуто выше, цель — максимизация направленности излучения. В качестве количественной меры оценки направленности излучения понимается плотность мощности поля в заданном направлении, обозначаемая через F . Через компоненты электромагнитного поля F выражается так:

$$F = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_\Sigma^{(l)} f_\Sigma^{(l)} \quad (2)$$

и является целевой функцией задачи. При максимизации F необходимо учитывать ограничения на активную мощность, которую способны выдавать усилители, питающие антенную систему. В силу закона Ома такие ограничения могут быть выражены в терминах только токов или только напряжений. Чтобы найти мощность i -го источника, вводим соответствующие комплексные напряжения U_i :

$$U_i = \sum_{j=1}^N z_{ij} I_j, \quad (3)$$

где z_{ij} — элементы $(N \times N)$ -матрицы сопротивлений $\mathbf{Z} = (z_{ij})$.

В некоторых случаях более удобно использовать матричную нотацию, в рамках которой вводим вектор-столбец токов \mathbf{i} и вектор-столбец напряжений \mathbf{u} , состоящие из N элементов. Целевая функция в таком случае записывается следующим образом:

$$F = \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i}, \quad (4)$$

где верхний индекс $+$ означает эрмитово сопряжение,

$$\mathbf{A} = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \sum_{l=1}^2 \bar{f}_i^{(l)} f_j^{(l)}. \quad (5)$$

Тем самым соотношение между токами и напряжениями записывается следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}\mathbf{i}. \quad (6)$$

Существуют различные формы ограничений, которые соответствуют различным антенным системам. Например, можно ограничить суммарную мощность P по всем точкам питания. В этом случае задача оптимизации формулируется так:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ \mathbf{i}^+ \mathbf{B} \mathbf{i} = 1, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4P}(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^+). \quad (8)$$

Такая задача может быть решена аналитически [11].

Задача усложняется, когда ограничение на мощность накладывается по каждой точке питания. В этом случае задача формулируется в таком виде:

$$\begin{cases} \mathbf{i}^+ \mathbf{A} \mathbf{i} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{i}^+ \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{i} \leq 1, \\ \mathbf{i} \in \mathbb{C}^N, \end{cases} \quad (9)$$

где \mathbb{C} — поле комплексных чисел, n — число точек питания, на которые накладываются ограничения (в общем случае n может быть не равно N),

$$\mathbf{B}^{(k)} = \frac{1}{4P_{\max}^{(k)}}(\mathbf{Z}^+ \mathcal{P}^{(k)} + \mathcal{P}^{(k)} \mathbf{Z}), \quad (10)$$

$P_{\max}^{(k)}$ — максимально допустимая мощность в k -й точке питания, $\mathcal{P}^{(k)}$ — матрицы-проекторы, имеющие единственный ненулевой элемент $\mathcal{P}_{kk}^{(k)} = 1$. Матрицы-проекторы имеют размер $N \times N$.

В [11] доказаны следующие утверждения.

(1) Все матрицы $\mathbf{B}^{(k)}$ имеют не больше чем два ненулевых собственных значения. Одно из собственных значений положительно, остальные отрицательные или нулевые.

(2) Матрицы \mathbf{A} и $\mathbf{B}^{(k)}$ эрмитово-самосопряжённые, т. е. $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ для всех $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$.

(3) Матрица \mathbf{A} положительно полуопределена.

(4) Кроме того, из физических соображений вытекает, что матрица $\mathbf{B}_{\text{sum}} := \sum_{k=1}^n \mathbf{B}^{(k)}$ положительно определена, так как суммарная активная мощность, поглощаемая пассивной цепью, не может быть отрицательной либо нулём, поскольку часть энергии обязательно излучается [11].

1.1. Формулировка задачи в действительных числах. Для разработки алгоритма решения задачи удобно переформулировать её в вещественных числах. Обозначим соответствующие матрицы: $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$ для целевой функции и $\mathbf{H}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$, $k = \overline{1, n}$, для ограничений. Пусть $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^N$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N^2}$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ — вектор, первые N компонент которого являются вещественными частями соответствующих компонент вектора \mathbf{y} , в то время как остальные компоненты соответствуют мнимым, т. е.:

$$\mathbf{y}_i \in \mathbb{C} \leftrightarrow (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{N+i}), \quad \mathbf{x}_i = \text{Re}(\mathbf{y}_i), \quad \mathbf{x}_{N+i} = \text{Im}(\mathbf{y}_i), \quad i = \overline{1, N}.$$

Через $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$ обозначим матрицу

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{Re}(\mathbf{A}) & -\text{Im}(\mathbf{A}) \\ \hline \text{Im}(\mathbf{A}) & \text{Re}(\mathbf{A}) \end{array} \right). \quad (11)$$

Легко проверить, что

$$\begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{A}\mathbf{y}) \\ \text{Im}(\mathbf{A}\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \text{Re}(\mathbf{y}) \\ \text{Im}(\mathbf{y}) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Из того, что матрица \mathbf{A} эрмитово-самосопряжённая, следует, что матрица \mathbf{G} симметричная. Действительно, так как \mathbf{A} эрмитово-самосопряжённая, $\text{Re}(\mathbf{A})$ симметрична и $\text{Im}(\mathbf{A})$ кососимметрична. Это значит, что

$$\mathbf{G}^\top = \left(\begin{array}{c|c} \text{Re}(\mathbf{A}) & (\text{Im}(\mathbf{A}))^\top \\ \hline (-\text{Im}(\mathbf{A}))^\top & \text{Re}(\mathbf{A}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \text{Re}(\mathbf{A}) & -\text{Im}(\mathbf{A}) \\ \hline \text{Im}(\mathbf{A}) & \text{Re}(\mathbf{A}) \end{array} \right) = \mathbf{G}.$$

Таким образом, \mathbf{G} является симметрической матрицей. То же самое применимо к матрицам ограничений $\mathbf{H}^{(k)} \in \mathbb{R}^{(2N)^2}$, $k = \overline{1, n}$. В вещественных числах задача (9) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x} \leq 1, \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (13)$$

Задача (13) имеет целевую функцию, заданную квадратичной формой с положительно полуопределённой матрицей \mathbf{G} . Каждое ограничение формулируется квадратичной формой, определённой симметричной

матрицей $\mathbf{H}^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, с двумя парами идентичных собственных значений, два из которых положительны, а другие два отрицательны или равны нулю, все остальные собственные числа равны нулю.

Следует отметить, что задача (9), сформулированная в комплексных числах, имеет симметрию относительно преобразования $\mathbf{i} \rightarrow e^{j\phi} \mathbf{i}$ всех комплексных координат (по произвольному углу ϕ). Через j здесь обозначена мнимая единица. Для доказательства рассмотрим некоторую квадратичную форму, определённую матрицей \mathbf{M} :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} e^{j\phi})^+ \mathbf{M} (\mathbf{v} e^{j\phi}) &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N |v_k| |v_l| m_{kl} e^{j(\phi_l + \phi - \phi_k - \phi)} \\ &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N |v_k| |v_l| m_{kl} e^{j(\phi_l - \phi_k)}. \end{aligned}$$

Глобально-оптимальное решение задачи невыпуклого математического программирования вида (13) может быть найдено методом ветвей и границ [21, 31] или с использованием методов ДС программирования [23, 24]. Локально-оптимальное решение задачи может быть найдено средствами градиентной оптимизации или методом Ньютона [25]. В случае большой размерности могут быть применены различные метаэвристики (см. [26, 27]).

1.2. Верхняя оценка нормы допустимых решений. В вычислительных экспериментах бывает полезно ограничить множество допустимых решений задачи шаром или параллелепипедом, так как это позволяет более обоснованно выбрать начальное решение для итерационных методов с мультистартом или сократить перебор в методе ветвей и границ.

Отмеченную симметрию можно применить для уменьшения размерности области поиска на единицу, например, зафиксировав $\text{Im}(y_N) = 0$, что эквивалентно добавлению ограничения $x_{2N} = 0$ к задаче (13).

Кроме того, можно оценить множество допустимых решений в терминах евклидова расстояния до начала координат. Отметим, что если \mathbf{x} удовлетворяет всем ограничениям задачи (13), то

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq N.$$

Обозначим $\mathbf{H}_{\text{sum}} := \sum_{k=1}^n \mathbf{H}^{(k)}$. Отметим, что из положительной определённости \mathbf{B}_{sum} следует положительная определённость \mathbf{H}_{sum} . Отсюда мы можем предположить, что наименьшее собственное число матрицы \mathbf{H}_{sum}

(обозначим его через λ_{\min}) положительно. Тогда, принимая во внимание тот факт, что

$$\min\{\mathbf{z}^T \mathbf{H}_{\text{sum}} \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N}, \|\mathbf{z}\| = 1\} = \lambda_{\min}$$

(см., например, [28, § 1.0.2]), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{H}_{\text{sum}} \mathbf{x} &\geq \|\mathbf{x}\|^2 \lambda_{\min}, \\ \|\mathbf{x}\| &\leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}. \end{aligned} \quad (14)$$

1.3. Масштабирование произвольного решения в допустимую область. Для данной задачи существует преобразование, позволяющее привести к допустимой области решение \mathbf{x} , которое нарушает только ограничивающие неравенства задачи (13) вида $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$:

$$\mathbf{x}' := \alpha(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{x}, \quad \alpha(\mathbf{x}) := \max_{k=1, n} \mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}. \quad (15)$$

Поскольку как целевая функция, так и ограничения представлены квадратичными формами, применение такой операции приведёт к пропорциональному уменьшению в $\alpha(\mathbf{x})$ раз значений каждой из квадратичных форм. Другими словами, если в некоторой точке \mathbf{x} значения каждой из квадратичных форм, задающих ограничения, больше 0, причём значения некоторых из них больше 1, то по формуле (15) можно определить множитель, умножение которого на вектор \mathbf{x} ведёт к тому, что наибольшее из значений квадратичных форм, задающих ограничения, будет равно 1. Данная процедура применяется для выбора начального решения, а также для масштабирования итогового решения.

1.4. Проверка необходимых условий локальной оптимальности. Как уже было отмечено, нахождение даже локального оптимума в случае решения задачи невыпуклого квадратичного программирования, вообще говоря, NP-трудно. В связи с этим, применительно к градиентному подъёму можно ожидать ситуаций, в которых при поиске локального оптимума потребуется чрезмерно большое число итераций или произойдёт преждевременная остановка вдалеке от локального оптимума. Из этого следует, что имеет смысл предусмотреть процедуру, позволяющую определить случаи, когда полученное решение не является локальным оптимумом. Для этого была применена процедура проверки необходимых условий локальной оптимальности [15]. Суть данной проверки в том, что мы линеаризуем задачу вблизи точки остановки градиентного алгоритма. Для этого в окрестности решения \mathbf{x}_0 вводим малое приращение \mathbf{u} . При этом каждая квадратичная форма, представленная

симметричной матрицей \mathbf{M} , преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0^\top \mathbf{M} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0^\top \mathbf{M} \mathbf{y} + \mathbf{y}^\top \mathbf{M} \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}^\top \mathbf{M} \mathbf{y}.$$

Учитывая симметричность каждой квадратичной формы и пренебрегая квадратичными по \mathbf{y} слагаемыми, для задачи (13) получаем

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0^\top \mathbf{G} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^\top \mathbf{G} \mathbf{y} \rightarrow \max, \\ 0 \leq \mathbf{x}_0^\top \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^\top \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{y} \leq 1, \\ \dots \\ 0 \leq \mathbf{x}_0^\top \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{x}_0^\top \mathbf{H}^{(n)} \mathbf{y} \leq 1, \\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2N}. \end{cases} \quad (16)$$

В случае локальной оптимальности решения \mathbf{x}_0 модуль $|\mathbf{y}^\top \mathbf{G} \mathbf{y}|$ должен быть равен нулю.

Следует отметить, что решение задачи (16) не подтверждает локальной оптимальности, а лишь предоставляет вспомогательную процедуру, благодаря которой из всего множества решений, найденных в результате многократного запуска из случайно сгенерированной точки градиентного подъёма, можно исключить решения, заведомо не являющиеся локальными оптимумами. Такие решения могут быть получены в результате преждевременного завершения работы градиентного метода по точности, если значения целевой функции слабо меняются за итерацию алгоритма или текущее решение оказалось в стационарной точке, не являющейся локальным оптимумом (последнее случается крайне редко).

2. Вычислительный эксперимент

Процедура решения задачи оптимизации ФАР при ограничении мощности по каждой точке питания состоит в следующем.

- (1) Для каждого излучателя в решётке рассчитать парциальные компоненты полей $f_i^{(l)}$, $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, 2}$.
- (2) Вычислить матрицы \mathbf{G} и $\mathbf{H}^{(k)}$, $k = \overline{1, n}$, из п. 1.1.
- (3) Оценить радиус допустимой области при помощи формул из п. 1.2.
- (4) Решить задачу (13) с дополнительными ограничениями $x_N = 0$, $\|\mathbf{x}\| \leq \sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$.

Данный подход может гарантировать нахождение как локального, так и глобального оптимумов — в зависимости от решателя, используемого на шаге 4. Как один из базовых оптимизационных методов, рассматриваем метод градиентной оптимизации (максимизационный вариант) с алгоритмом одномерного поиска Дэвиса, Свенна и Кэмпбелла (ДСК) [25]. Далее целевая функция задачи (13) обозначается символом \widetilde{F} .

В нашей работе от задачи условной оптимизации переходим к задаче безусловной оптимизации методом штрафных функций, а именно — методом внешней точки [29, 30]:

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{G} \mathbf{x} - r \cdot \sum_{k=1}^n (\min(0, \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}) + \min(0, 1 - \mathbf{x}^\top \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}))^4 \rightarrow \max, \quad (17)$$

где r — достаточно большой штрафной параметр. Глобально-оптимальное решение для задачи (17) может не быть допустимым для изначальной задачи (13), но увеличение штрафного параметра r уменьшает нарушение ограничений. Кроме того, имея решение \mathbf{x} , которое нарушает в задаче (13) только неравенства вида $\mathbf{x}^\top \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$, будем ссылаться на результаты градиентной оптимизации с использованием восстановления допустимости (15) после срабатывания критерия останова. Алгоритм градиентной оптимизации повторяется многократно, при этом в качестве стартовой точки используется случайно сгенерированный вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$. Распределение случайной величины \mathbf{x} описано в п. 2.2. Для каждого найденного решения выполняется проверка на удовлетворение необходимым условиям локальной оптимальности путём решения задачи (16). Затем решение линеаризованной задачи, удовлетворяющее необходимым условиям локальной оптимальности, снова подаётся на вход алгоритма градиентной оптимизации, остальные решения отсеиваются. Последний шаг применяется, поскольку решение задачи (16) может оказаться за пределами допустимой области задачи (13). В этом случае данный этап показывает, как далеко решение линеаризованной задачи находится от решения, найденного градиентным алгоритмом. Подробное описание алгоритма см. в приложении А.

С целью отыскания глобального оптимума задачи (13) посредством решателя BARON [31], основанного на методе ветвей и границ с использованием локальной оптимизации для поиска начального приближения, необходимо предоставить ограничивающий параллелепипед или верхнюю оценку евклидовой нормы допустимых решений. Для этого может быть использовано неравенство (14). Для всех решаемых в этом эксперименте задач была рассмотрена возможность применения процедуры сужения допустимой области.

2.1. Тестовые примеры. Вычислительный эксперимент проведён для задач, построенных на основе трёх типов ФАР: широкополосных вертикальных излучателей, широкополосных вертикальных диполей и симметричных вертикальных диполей. При моделировании полей использован пакет NEC2, для которого были предоставлены соответствующие геометрические конфигурации антенных систем. В качестве рабочей частоты выбрано 5 МГц. Рассмотрены квадратные ФАР конфигурации 2x2,

3x3 и 5x5. Заранее отметим, что конфигурация 5x5 рассмотрена только для решёток СВД, поскольку NEC2 не смог обработать 5x5 ШВИ и 5x5 ШВД из-за высокой сложности этих моделей. В случае с ФАР кольцевой структуры рассмотрены решётки, состоящие из 8 и 16 излучателей.

Решётки ШВИ смоделированы расположенными на высоте 0,2 м над поверхностью земли (проводимость земли равна 0,01 См/м, относительная диэлектрическая проницаемость 10). Решётки ШВИ и СВД размещены в свободном пространстве. В случае ШВЕ и ШВД расстояние между соседними излучателями равно 20 м, высота каждого излучателя ШВИ равна 15 м, расстояния между концами каждого излучателя ШВД равно 30 м. В случае СВД рассмотрены два типа излучателей: с длинами излучателя 10 м и 30 м и расстояниями между соседними излучателями 5 м и 10 м соответственно. СВД с длиной излучателя 10 м в исследовании помечены штрихом (СВД'). Система противовесов ФАР кольцевой структуры поднята над землёй на 2 м, для того чтобы ослабить влияние потерь в земле. Расстояние между соседними излучателями в этих ФАР равно 8 м. В качестве направления максимизации излучения выбраны азимутальный угол 45° и полярный угол 70° .

2.2. Результаты вычислительного эксперимента. Сравним результаты работы градиентного метода и решателя BARON в его режиме по умолчанию. Во всех экспериментах, описанных ниже, установлено ограничение по времени 1000 с. Все эксперименты проводились на ЭВМ с процессором Intel i7 (тактовая частота 2,8 ГГц), ОЗУ 16 ГБ. В случае сходимости градиентного метода (завершение по минимально допустимому приращению целевой функции 10^{-4}) алгоритм перезапускается заново до истечения запаса времени.

Для каждой задачи была применена процедура получения верхней оценки нормы допустимых решений (см. п. 1.2). При выполнении этой процедуры для многих задач получались близкие к нулю (или даже нулевые) собственные числа, что делало невозможным их дальнейшее использование для оценки нормы $\sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$. В табл. 1 такие оценки задачи отмечены прочерком в соответствующем столбце. Так как из физических соображений собственные числа должны быть строго положительны, проблемы с вычислением верхней оценки нормы допустимых решений свидетельствуют о допущенной погрешности при вычислении матриц, определяющих квадратичные формы задачи (13). В частности, одной из таких проблем является несимметричный вид вещественных матриц. В таком случае их следует привести к симметричному виду путём усреднения симметричных относительно главной диагонали компонент.

Таблица 1

Результаты вычислительного эксперимента

Тип	λ_{\min}	$\sqrt{\frac{N}{\lambda_{\min}}}$	Град.		BARON	
			\tilde{F}	t, c	\tilde{F}	t, c
ШВИ 2x2	0,0215	13,6	138,2	0,054	139,2	0,12
ШВИ 3x3	0,0177	70	575,7	0,93	580,6	0,34
ШВД 2x2	0,009	21	459,7	0,13	463,6	0,27
ШВД 3x3	0,0013	6767	915	24,4	925	0,34
СВД 2x2	$2 \cdot 10^{-3}$	44	357	1,9	361	0,16
СВД 3x3	$5,6 \cdot 10^{-9}$	$8,4 \cdot 10^5$	1138	25,6	1261	0,38
СВД 5x5	—	—	5318	1000	6716	1000
СВД' 2x2	$7,76 \cdot 10^{-9}$	$22 \cdot 10^3$	233	2,52	253	0,25
СВД' 3x3	0,0008	$1 \cdot 10^4$	664	71	1153	1,48
СВД' 5x5	—	—	1382,7	1000	33,5	217,94
Кольц. 8	$3 \cdot 10^{-3}$	154	217	8,06	218	0,23
Кольц. 16	$6,7 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^6$	727	90,9	734	1,37

При каждой инициализации градиентного метода стартовая точка \mathbf{x} выбирается независимо с равномерным распределением в кубе $[-5000, 5000]^{2N}$. Такой выбор оказался достаточным для всех задач, кроме СВД 2x2, чтобы получить решение, по целевой функции соответствующее решению, предоставляемому решателем BARON. Лучшее из найденных таким образом решений принимается за конечный результат. Параметр штрафа r в методе градиентной оптимизации установлен равным 10^6 на всех запусках. Такое значение было определено эмпирически. В табл. 1 приводятся результаты вычислительного эксперимента. Значения целевой функции \tilde{F} в точке, полученной алгоритмом градиентного подъёма, приводятся после процедуры масштабирования (15). Для решателя BARON версии 18.5.8 было выбрано то же самое ограничение сверху на процессорное время, что и для градиентного метода (группа колонок BARON), и 50000 с для проверки глобальной оптимальности. Во всех таблицах колонка t содержит время до получения лучшего найденного решения или до установления глобальной оптимальности. Во всех запусках градиентного метода были получены решения, где активными оказались все ограничения вида $\mathbf{x}^T \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x} \leq 1$.

Из табл. 1 видно, что на всех видах решёток, кроме решёток СВД конфигураций 3x3 и 5x5, а также СВД' конфигураций 2x2 и 3x3, разница в значениях целевой функции не превосходит 1%. Для решёток СВД конфигураций 3x3 и 5x5, а также СВД' конфигураций 2x2 и 3x3 градиентный алгоритм существенно уступает по качеству найденного решения. Более детальное исследование для СВД' конфигураций 2x2 и 3x3 показало, что BARON предоставляет решение с очень малой областью

притяжения. Суть такого исследования заключалась в том, что к решению, полученному с помощью решателя BARON, добавлялось некоторое возмущение, после чего модифицированная точка подавалась на вход градиентного алгоритма. Очень малые возмущения (до 0,5% относительно нормы решения) исходной точки не мешали градиентному алгоритму найти точку, лежащую в окрестности решения, найденного с помощью решателя BARON. Однако, принимая на вход возмущённое порядка 0,5% относительно нормы решение решателя BARON, градиентный подъём приводил к решению со значением целевой функции $\tilde{F} = 233$ в случае СВД' 2x2. При этом используемая процедура проверки локальной оптимальности не дала опровержения локальной оптимальности решения со значением целевой функции $\tilde{F} = 253$, предоставленного решателем BARON. Аналогичные результаты получены как для СВД, так и для СВД' конфигурации 3x3. Особое внимание привлекают решётки СВД и СВД' конфигурации 5x5, поскольку за предоставленный временной промежуток градиентный подъём так и не достиг критерия остановки. BARON в случае СВД' 5x5 за это же время достиг решения, значительно худшего по целевой функции. Вероятно, как BARON, так и градиентный подъём сошлись бы к более качественному решению, если бы не были ограничены по времени. Кроме решёток ШВИ и ШВД конфигурации 2x2, BARON демонстрирует лучшее время счёта. Однако следует отметить, что для обоих алгоритмов время, затраченное на поиск решения, было либо существенно меньше, либо сравнимо со временем, затраченным на построение исходных данных пакетом моделирования NEC, что делает оба подхода равноценными по времени работы с практической точки зрения. Важным результатом, не приведённым в табл. 1, является то, что для ФАР конфигураций ШВИ 2x2, ШВД 2x2 и ШВИ 3x3 доказана глобальная оптимальность найденного решателем BARON решения.

В качестве иллюстрации физических свойств полученных решений на рис. 2 приведён горизонтальный план диаграммы направленности ФАР для решений, найденных с помощью метода градиентной оптимизации. Под диаграммой направленности понимается графическое представление зависимости коэффициента усиления антенны от её направления в заданной плоскости. Такая диаграмма позволяет наглядно оценить, на какое направление приходится максимум излучения, и провести качественную оценку работы алгоритма. На рис. 2 изображена диаграмма направленности для решётки ШВИ размера 2x2 (штриховая линия) и ШВИ 3x3 (сплошная линия). Для решений, полученных с помощью решателя BARON для этих задач, диаграммы аналогичны. Ещё раз отметим, что при эксперименте направление оптимизации представлено углами в сферических координатах: азимутальный угол принят равным 45° , полярный угол — 70° . Как видно из горизонтального плана

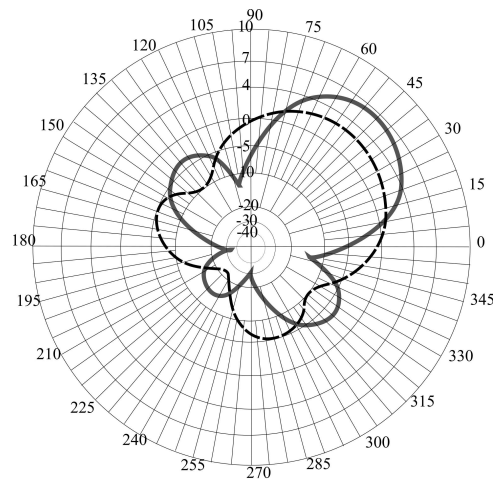


Рис. 2. Горизонтальный план диаграммы направленности для решёток ШВИ 2х2 (штриховая) и ШВИ 3х3 (сплошная)

диаграммы направленности при значении полярного угла 70° , максимальному излучению соответствует направление оптимизации 45° . Сравнение диаграмм показывает, что использование решёток с большим числом излучателей позволяет уменьшить излучение в других направлениях.

2.3. Количество локальных оптимумов и их расположение.

Для оценки общего числа локальных оптимумов использовался метод переписи Шнабеля. Данный метод имеет применение в экологии и заключается в выводе статистических оценок численности популяции на основе числа особей, помеченных в результате эксперимента, из популяции с неизменным составом, где каждая особь имеет константную вероятность отлова. В [18] предлагается адаптация такого метода для оценки числа локальных оптимумов. В табл. 2 приводится статистика по числу различных точек останова (в пределах заданной точности) процедуры мультистарта в течение 1000 с процессорного времени. Для каждого решения применена процедура линеаризации задачи и проверки необходимых условий локальной оптимальности, описанная в п. 1.4. Приемлемыми считались отличия целевой функции линеаризованной задачи от значения целевой функции, найденного градиентным методом, менее чем на 1%. Здесь M — число выполненных запусков за отведённое время, M_{ne} — число групп решений, отличающихся не более чем на 10% по каждой из координат, M_f — число групп значений целевой функции у таких неэквивалентных решений (с точностью до 10%, приведённых в табл. 1), $M_{y \approx 0}$ — число групп решений, для которых были выполнены

Таблица 2

Число полученных решений

ФАР	M	M_{ne}	M_f	\mathcal{B}_{M_f}	\mathcal{L}_{M_f}	$M_{y \approx 0}$	$\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$	$\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$
ШВИ 2x2	18368	4	1	1	1	4	4	4
ШВД 2x2	7678	4	1	1	1	4	4	4
СВД 2x2	523	1	1	1	1	1	1	1
СВД 3x3	39	9	2	2	2	5	5	5
СВД' 2x2	396	370	3	3	3	338	1000	1213
СВД' 3x3	14	14	3	3	3	1	1	1
ШВИ 3x3	1070	3	1	1	1	3	3	3
ШВД 3x3	41	4	4	4	4	1	1	1
Кольц. 8	124	9	2	2	2	9	9	9
Кольц. 16	11	6	1	1	1	6	6	6

необходимые условия локальной оптимальности, \mathcal{B} и \mathcal{L} — оценки нижней границы и максимального правдоподобия числа локальных оптимумов, рассчитанные по методу переписи Шнабеля. Доверительная вероятность для данного метода была выбрана равной 95%. Оценки для числа решений с различными значениями целевой функции обозначены \mathcal{B}_{M_f} и \mathcal{L}_{M_f} . Оценки для числа решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности, обозначены через $\mathcal{B}_{M_{y \approx 0}}$ и $\mathcal{L}_{M_{y \approx 0}}$. В случаях СВД и СВД' конфигурации 5x5 в течение 1000 с градиентный метод не достиг решения, удовлетворяющего условию остановки, поэтому данный результат не включён в табл. 2.

Как видно из табл. 2, во всех экспериментах в некоторых запусках найдены неразличимые с практической точки зрения решения. Для квадратных решёток ШВИ и ШВД найдено по одному такому решению. Решётки кольцевой структуры и СВД' 2x2 имеют значительное разнообразие как по найденным векторам решений, так и по значениям целевой функции. Относительно решений, для которых были выполнены необходимые условия локальной оптимальности, можно сказать, что с большой вероятностью для задачи СВД' 2x2, были найдены далеко не все возможные решения. О решётке СВД' 3x3 известно, что градиентный подъём был остановлен в точке, не лежащей в окрестности решения, предоставленного решателем BARON.

На рис. 3 приведены диаграммы локальных оптимумов. По оси ординат отложены значения целевой функции, а по оси абсцисс — расстояние до лучшего известного решения. В случае (а) точки обозначают результаты для кольцевых решёток, состоящих из 8 излучателей, ромбы — для кольцевых решёток, состоящих из 16 излучателей, треугольники — для СВД 3x3. В случае (б) точками обозначены результаты для СВД' 2x2,

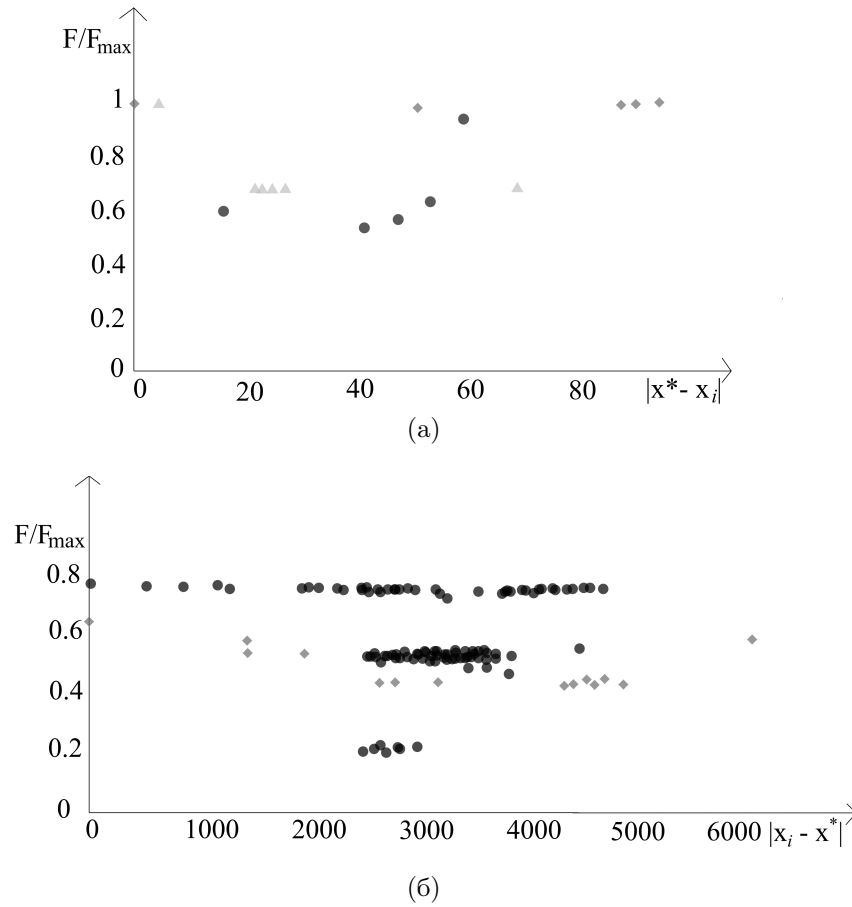


Рис. 3. Структура множества найденных решений для задач ШВИ, ШВД, СВД (а) и СВД' (б)

ромбами — для СВД' 3×3 . Диаграмма показывает, что значения, соответствующие одному и тому же значению целевой функции, могут находиться достаточно далеко друг от друга, что позволяет сделать предположение о наличии неучтённых симметрий задачи (о множестве линейных симметрий задачи см. в [32]).

Заключение

В статье рассмотрена проблема оптимизации направленности излучения фазированных антенных решёток при ограничении мощности каждой точки питания. Для данной задачи была составлена модель квадратичного программирования в вещественных числах. Поскольку такая

проблема не может быть решена аналитически, использованы численные методы, а именно, BARON и градиентный алгоритм. Произведено сравнение результатов работы пакета BARON и градиентного алгоритма в вычислительном эксперименте. Исследованы свойства задачи невыпуклого квадратичного программирования.

Было выявлено, что в примерах, составленных на моделях, имеющих практическую значимость (ШВИ и ШВД различных конфигураций), разница в качестве найденных решений не превосходит 1%. Время работы для таких задач в случае обоих методов существенно меньше времени, затраченного на генерацию входных данных. Кроме того, при исследовании структуры локальных оптимумов выявлено, что не во всех рассмотренных примерах локальные оптимумы уникальны, при том, что значения целевой функции во многих решениях принимают одинаковое значение. Возможно, следует уделить внимание изучению симметрии допустимой области.

Автор благодарит А. В. Еремеева и А. С. Юркова за ценные замечания.

Приложение А

Здесь приводится подробное описание алгоритма исследования структуры локальных оптимумов. Для удобства изложения алгоритм разбит на процедуры «Одномерный поиск», «Градиентный подъём» и «Исследование локальных оптимумов».

1. Одномерный поиск.

Дано:

- вектор начального решения \mathbf{x} размерности $2N$,
- вектор направления одномерного поиска \mathbf{d} размерности $2N$,
- точность вычислений $\varepsilon_{1\text{dim}}$.

Требуется: найти вектор $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \gamma\mathbf{d}$ такой, что

- $\widetilde{F}(\mathbf{x}) < \widetilde{F}(\mathbf{x}')$,
- $\widetilde{F}(\mathbf{x} + (\gamma + \varepsilon_{1\text{dim}})\mathbf{d}) < \widetilde{F}(\mathbf{x}')$.

1. Инициализировать параметр одномерного поиска $\beta := 1$, вектор $\mathbf{x}' := \mathbf{x}$, счётчик итераций $j := 1$.

2. Если $\widetilde{F}(\mathbf{x}' + \beta\mathbf{d}) < \widetilde{F}(\mathbf{x}')$, то уменьшить $\beta := \beta/2$. В противном случае, в зависимости от значения счётчика:

- при $j = 1$ положить $\mathbf{x}_a := \mathbf{x}'$,
- при $j = 2$ положить $\mathbf{x}_b := \mathbf{x}'$,
- при $j = 3$ положить $\mathbf{x}_c := \mathbf{x}'$,
- при $j > 3$ положить $\mathbf{x}_a := \mathbf{x}_b$, $\mathbf{x}_b := \mathbf{x}_c$, $\mathbf{x}_c := \mathbf{x}'$.

При этом вне зависимости от значений счётчика $\beta := 2\beta$, $\mathbf{x}' := \mathbf{x}' + \beta\mathbf{d}$.

3. Если $\beta < \varepsilon_{1\text{dim}}$ и $j < 3$, то вернуть \mathbf{x}' .
4. Если $\beta < \varepsilon_{1\text{dim}}$ и $j \geq 3$, то переходим к шагу 5, иначе — на шаг 2.
5. По точкам $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_c$ строим квадратичную аппроксимацию:

$$\mathbf{x}^* := (\mathbf{x}_b - 3\beta\mathbf{d}) + \left(1 + \frac{\widetilde{F}(\mathbf{x}_a) - \widetilde{F}(\mathbf{x}_c)}{2(\widetilde{F}(\mathbf{x}_a) - 2\widetilde{F}(\mathbf{x}_b) + \widetilde{F}(\mathbf{x}_c))}\right)\beta\mathbf{d}.$$

2. Градиентный подъём.

Дано:

- вектор начального решения \mathbf{x}_0 размерности $2N$,
- точность вычислений $\varepsilon_{\text{grad}}$,
- точность вычислений одномерного поиска $\varepsilon_{1\text{dim}}$,
- время принудительного завершения работы алгоритма t_{finish} .

Требуется: найти вектор \mathbf{x} такой, что для всех \mathbf{d} , $|\mathbf{d}| = 1$, выполняется

$$\widetilde{F}(\mathbf{x} + \varepsilon_{\text{grad}}\mathbf{d}) < \widetilde{F}(\mathbf{x}).$$

1. Инициализировать вектор $\mathbf{x} := \mathbf{x}_0$.
2. Вычислить и нормировать градиент целевой функции:

$$\mathbf{d} := \frac{\nabla \widetilde{F}(\mathbf{x})}{|\nabla \widetilde{F}(\mathbf{x})|}.$$

3. Вычислить \mathbf{x}^* алгоритмом одномерного поиска 1 с параметрами $\mathbf{x}, \mathbf{d}, \varepsilon_{1\text{dim}}$.
4. Записать в t текущее время. Если $t \geq t_{\text{finish}}$, вернуть \mathbf{x}^* .
5. Если $|\widetilde{F}(\mathbf{x}) - \widetilde{F}(\mathbf{x}^*)| < \varepsilon_{\text{grad}}$, вернуть \mathbf{x}^* , иначе положить $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ и повторить шаги 2–5.

3. Исследование локальных оптимумов.

Дано:

- x_{max} — верхняя оценка нормы допустимой области,
- точность вычислений $\varepsilon_{\text{grad}}$,
- точность вычислений одномерного поиска $\varepsilon_{1\text{dim}}$,
- время принудительного завершения работы алгоритма t_{finish} ,
- y_{max} — максимально допустимая норма вектора \mathbf{y} .

Требуется: провести исследование структуры локальных оптимумов, как описано в разд. 2.

1. Инициализировать компоненты начального вектора \mathbf{x}_0 случайной величиной, равномерно распределённой в интервале $[-x_{\text{max}}, x_{\text{max}}]$.
2. Вычислить допустимый вектор \mathbf{x} путём масштабирования \mathbf{x}_0 в допустимую область:

$$\mathbf{x} := \left(\max_{k=1,n} \mathbf{x}_0^\top \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{x}_0\right)^{-1/2} \mathbf{x}_0.$$

3. Вычислить \mathbf{x}^* алгоритмом градиентного подъёма с параметрами \mathbf{x} , $\varepsilon_{\text{grad}}$, $\varepsilon_{1\text{dim}}$, t_{finish} .
4. Записать в t текущее время. Если $t < t_{\text{finish}}$, то перейти на шаг 1.
5. Для каждого найденного решения установить $\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}^*$, составить линейаризованную задачу (16) и найти её решение \mathbf{x}_{1p}^* .
6. Исключить решения, для которых $|\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}_{1p}^*| > \mathbf{y}_{\text{max}}$. Для оставшихся решений установить $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{1p}^*$ и повторить шаги 2–3. Оценить норму разницы $|\mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}^*|$. Вернуть \mathbf{x}_0^* с лучшим значением $\widetilde{F}(\mathbf{x}_0^*)$ в качестве результата.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hansen R. C. Phased array antennas. Hoboken, NJ: Wiley, 2009. 580 p.
2. Kudzin V. P., Lozovsky V. N., Shlyk N. I. The compact linear antenna array system of the short-wave band consisting of «butterfly» radiators // Proc. IX Int. Conf. Antenna Theory and Techniques (Odessa, Ukraine, Sept. 16–20, 2013). Piscataway: IEEE, 2013. P. 252–253.
3. Wilensky R. High-power, broad-bandwidth HF dipole curtain array with extensive vertical and azimuthal beam control // IEEE Trans. Broadcast. 1988. Vol. 34, No. 2. P. 201–209.
4. Yin Ya., Deng J. Design of short wave communication system with phased array antenna // Electron. Eng. 2007. Vol. 33, No. 9. P. 31–33. [Chinese].
5. Сазонов Д. М. Антенны и устройства СВЧ. М.: Высш. шк., 1988.
6. Indenbom M., Izhutkin V., Sharapov A., Zonov A. Synthesis of conical phased antenna arrays optimization of amplitude distribution parameters // Proc. IX Int. Conf. Optimization and Applications (Petrovac, Montenegro, Oct. 1–5, 2018). Lancaster, PA: DEStech Publ., 2018. P. 273–285.
7. Fuchs B. Application of convex relaxation to array synthesis problems // IEEE Trans. Antennas Propag. 2014. Vol. 62, No. 2. P. 634–640.
8. Akdagli A., Guney K. Shaped-beam pattern synthesis of equally and unequally spaced linear antenna arrays using a modified tabu search algorithm // Microw. Opt. Technol. Lett. 2003. Vol. 36, No. 1. P. 16–20.
9. Boriskin A. V., Balaban M. V., Galan O. Yu., Sauleau R. Efficient approach for fast synthesis of phased arrays with the aid of a hybrid genetic algorithm and a smart feed representation // Proc. 2010 IEEE Int. Symp. Phased Array Systems and Technology (Waltham, MA, USA, Oct. 12–15, 2010). Piscataway: IEEE, 2010. P. 827–832.
10. Akdagli A., Guney K. Parallel genetic-algorithm optimization of shaped beam coverage areas using planar 2-D phased arrays // IEEE Trans. Antennas Propag. 2007. Vol. 55, No. 6. P. 1745–1753.
11. Юрков А. С. Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решёток декаметрового диапазона длин волн. Омск: ОНИИП, 2014. 65 с.

12. **Юрков А. С.** Максимизация направленности фазированных антенных решёток коротковолнового диапазона // *Техника радиосвязи*. 2016. № 2. С. 46–53.
13. **Obukhovets V. A.** Antenna array iterative synthesis algorithm // *Proc. 2017 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (Divnomorskoe, Krasnodar Reg., Russia, June 26–30, 2017)*. Piscataway: IEEE, 2017. P. 58–60.
14. **Echeveste J. I., de Aza M. G., Zapata J.** Shaped beam synthesis of real antenna arrays via finite-element method, floquet modal analysis, and convex programming // *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2016. Vol. 64, No. 4. P. 1279–1286.
15. **Murty K.** Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming // *Math. Program.* 1987. Vol. 39. P. 117–129.
16. **Нестеров Ю. Е.** Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010. 280 с.
17. **Ryoo H. S., Sahinidis N. V.** Global optimization of nonconvex NLPs and MINLPs with applications in process design // *Comput. Chem. Eng.* 1995. Vol. 19, No. 5. P. 551–566.
18. **Еремеев А. В., Ривс К. Р.** О доверительных интервалах для числа локальных оптимумов // *Математические структуры и моделирование*. 2017. Вып. 41. С. 55–74.
19. **Юрков А. С.** О влиянии потерь в земле на работу четырёхэлементной ФАР КВ диапазона // *Техника радиосвязи*. 2014. № 1. С. 78–81.
20. **Burke J. J., Poggio A. J.** Numerical electromagnetics code. Livermore, CA: Lawrence Livermore Nat. Lab., 1981. Available at <https://www.nec2.org> (accessed March 11, 2021).
21. **Horst R., Tuy H.** Global optimization: Deterministic approaches. Heidelberg: Springer, 1996. 730 p.
22. **Tawarmalani M., Sahinidis N. V.** Global optimization of mixed-integer nonlinear programs: A theoretical and computational study // *Math. Program.* 2004. Vol. 99, No. 3. P. 563–591.
23. *Handbook of global optimization*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. 880 p. (Nonconvex Optim. Its Appl.; Vol. 2).
24. **Strekalovsky A. S.** Global optimality conditions in nonconvex optimization // *J. Optim. Theory Appl.* 2017. Vol. 173, No. 3. P. 770–792.
25. **Himmelblau D. M.** Applied nonlinear programming. New York: McGraw-Hill, 1972. 498 p.
26. **Kennedy J., Eberhart R.** Particle swarm optimization // *Proc. Int. Conf. Neural Networks (Perth, Australia, Nov. 27–Dec. 1, 1995)*. Vol. 4. Piscataway: IEEE, 1995. P. 1942–1948.
27. **Storn R., Price K.** Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces // *J. Global Optim.* 1997. Vol. 11, No. 4. P. 341–359.
28. **Horn R. A., Johnson C. R.** Matrix analysis. New York: Camb. Univ. Press, 1990. 561 p.

- 29. Ерёмин В. В., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
- 30. Aoki M.** Introduction to optimization techniques: Fundamentals and applications of nonlinear programming. New York: Macmillan, 1971. 335 p.
- 31. Tawarmalani M., Sahinidis N. V.** Global optimization of mixed-integer nonlinear programs: A theoretical and computational study // *Math. Program.* 2004. Vol. 99, No. 3. P. 563–591.
- 32. Ereemeev A. V., Yurkov A. S.** On symmetry groups of some quadratic programming problems // *Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Proc. 19th Int. Conf. MOTOR 2020 (Novosibirsk, Russia, July 6–10, 2020)*. Cham: Springer, 2020. P. 35–48. (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 12095).

Тюнин Николай Николаевич

Статья поступила
15 июня 2020 г.
После доработки —
7 марта 2021 г.
Принята к публикации
9 марта 2021 г.

THE PROBLEMS OF NON-CONVEX QUADRATIC
PROGRAMMING RELATED TO PHASED
ANTENNA ARRAYS OPTIMIZATION

N. N. Tyunin

Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics,
13 Pevtsov Street, 644043 Omsk, Russia
E-mail: n.n.tyunin@gmail.com

Abstract. The problem of short wave phased antenna arrays optimization was formulated as a quadratic programming problem. A penalty functions method and gradient ascent algorithm were applied to analyze a structure of a local optima set. The results of the proposed algorithm were compared with the results of the well-known BARON solver. Tab. 2, illustr. 3, bibliogr. 32.

Keywords: Quadratic programming, local optimum, antenna array, gradient optimization, computational experiment.

REFERENCES

1. **R. C. Hansen**, *Phased Array Antennas* (Wiley, Hoboken, NJ, 2009).
2. **V. P. Kudzin**, **V. N. Lozovsky**, and **N. I. Shlyk**, The compact linear antenna array system of the short-wave band consisting of «butterfly» radiators, in *Proc. IX Int. Conf. Antenna Theory and Techniques, Odessa, Ukraine, Sept. 16–20, 2013* (IEEE, Piscataway, 2013), pp. 252–253.
3. **R. Wilensky**, High-power, broad-bandwidth HF dipole curtain array with extensive vertical and azimuthal beam control, *IEEE Trans. Broadcast.* **34** (2), 201–209 (1988).
4. **Ya. Yin** and **J. Deng**, Design of short wave communication system with phased array antenna, *Electron. Eng.* **33** (9), 31–33 (2007). [Chinese].
5. **D. M. Sazonov**, *Antennas and Microwave Devices* (Vysshaya Shkola, Moscow, 1988) [Russian].

This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 19–37–90066).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (3) (2021).

6. **M. Indenbom, V. Izhutkin, A. Sharapov, and A. Zonov**, Synthesis of conical phased antenna arrays optimization of amplitude distribution parameters, in *Proc. IX Int. Conf. Optimization and Applications, Petrovac, Montenegro, Oct. 1–5, 2018* (DEStech Publ., Lancaster, PA, 2018), pp. 273–285.
7. **B. Fuchs**, Application of convex relaxation to array synthesis problems, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **62** (2), 634–640 (2014).
8. **A. Akdagli and K. Guney**, Shaped-beam pattern synthesis of equally and unequally spaced linear antenna arrays using a modified tabu search algorithm, *Microw. Opt. Technol. Lett.* **36** (1), 16–20 (2003).
9. **A. V. Boriskin, M. V. Balaban, O. Yu. Galan, and R. Sauleau**, Efficient approach for fast synthesis of phased arrays with the aid of a hybrid genetic algorithm and a smart feed representation, in *Proc. 2010 IEEE Int. Symp. Phased Array Systems and Technology, Waltham, MA, USA, Oct. 12–15, 2010* (IEEE, Piscataway, 2010), pp. 827–832.
10. **A. Akdagli and K. Guney**, Parallel genetic-algorithm optimization of shaped beam coverage areas using planar 2-D phased arrays, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **55** (6), 1745–1753 (2007).
11. **A. S. Yurkov**, *Optimization of Excitation of Transmitting Phased Antenna Arrays of Decameter Wavelength Range* (ONIIP, Omsk, 2014) [Russian].
12. **A. S. Yurkov**, Maximizing the directivity of shortwave phased array antennas, *Tech. Radiosvyazi*, No. 2, 46–53 (2016) [Russian].
13. **V. A. Obukhovets**, Antenna array iterative synthesis algorithm, in *Proc. 2017 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves, Divnomorskoe, Krasnodar Reg., Russia, June 26–30, 2017* (IEEE, Piscataway, 2017), pp. 58–60.
14. **J. I. Echeveste, M. G. de Aza, and J. Zapata**, Shaped beam synthesis of real antenna arrays via finite-element method, floquet modal analysis, and convex programming, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **64** (4), 1279–1286 (2016).
15. **K. Murty**, Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming, *Math. Program.* **39**, 117–129 (1987).
16. **Yu. E. Nesterov**, *Introduction to Convex Optimization* (MTsNMO, Moscow, 2010) [Russian].
17. **H. S. Ryoo and N. V. Sahinidis**, Global optimization of nonconvex NLPs and MINLPs with applications in process design, *Comput. Chem. Eng.* **19** (5), 551–566 (1995).
18. **A. V. Ereemeev and K. R. Rives**, Confidence intervals for the number of local optima, *Mat. Strukt. Model.*, No. 41, 55–74 (2017) [Russian].
19. **A. S. Yurkov**, On the influence of losses in the ground on the operation of the four-element PAA HF range, *Tech. Radiosvyazi*, No. 1, 78–81 (2014) [Russian].
20. **J. J. Burke and A. J. Poggio**, *Numerical Electromagnetics Code* (Lawrence Livermore Nat. Lab., Livermore, CA, 1981). Available at <https://www.nec2.org> (accessed March 11, 2021).
21. **R. Horst and H. Tuy**, *Global Optimization: Deterministic Approaches* (Springer, Heidelberg, 1996).

22. **M. Tawarmalani** and **N. V. Sahinidis**, Global optimization of mixed-integer nonlinear programs: A theoretical and computational study, *Math. Program.* **99** (3), 563–591 (2004).
23. *Handbook of Global Optimization* (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995) (Non-convex Optim. Its Appl., Vol. 2).
24. **A. S. Strekalovsky**, Global optimality conditions in nonconvex optimization, *J. Optim. Theory Appl.* **173** (3), 770–792 (2017).
25. **D. M. Himmelblau**, *Applied Nonlinear Programming* (McGraw-Hill, New York, 1972).
26. **J. Kennedy** and **R. Eberhart**, Particle swarm optimization, in *Proc. Int. Conf. Neural Networks, Perth, Australia, Nov. 27–Dec. 1, 1995*, Vol. 4 (IEEE, Piscataway, 1995), pp. 1942–1948.
27. **R. Storn** and **K. Price**, Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces, *J. Global Optim.* **11** (4), 341–359 (1997).
28. **R. A. Horn** and **C. R. Johnson**, *Matrix Analysis* (Camb. Univ. Press, New York, 1990).
29. **V. V. Eryomin** and **N. N. Astafiev**, *Introduction to the Theory of Linear and Convex Programming* (Nauka, Moscow, 1976) [Russian].
30. **M. Aoki**, *Introduction to Optimization Techniques: Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming* (Macmillan, New York, 1971).
31. **M. Tawarmalani** and **N. V. Sahinidis**, Global optimization of mixed-integer nonlinear programs: A theoretical and computational study, *Math. Program.* **99** (3), 563–591 (2004).
32. **A. V. Ereemev** and **A. S. Yurkov**, On symmetry groups of some quadratic programming problems, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (Proc. 19th Int. Conf. MOTOR 2020, Novosibirsk, Russia, July 6–10, 2020) (Springer, Cham, 2020), pp. 35–48 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 12095).

Nikolay N. Tyunin

Received June 15, 2020

Revised March 7, 2021

Accepted March 9, 2021