ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2021. Т. 28, № 3. С. 38–48

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2021.28.709

О НЕСУЩЕСТВОВАНИИ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$

А. А. Махнев[a], *М. П. Голубятников*[b]

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
ул. Софьи Ковалевской, 16, 620108 Екатеринбург, Россия
E-mail: [a]makhnev@imm.uran.ru, [b]mike_ru1@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются Q-полиномиальные графы диаметра 4. Кроме бесконечной серии массивов пересечений $\{m(2m+1), (m-1)(2m+1), m^2, m; 1, m, m-1, m(2m+1)\}$ известны следующие допустимые массивы пересечений Q-полиномиальных графов диаметра 4 с не более чем 4096 вершинами: $\{5, 4, 4, 3; 1, 1, 2, 2\}$ (нечётный граф на 9 вершинах), $\{9, 8, 7, 6; 1, 2, 3, 4\}$ (свёрнутый 9-куб), $\{36, 21, 10, 3; 1, 6, 15, 28\}$ (половинный 9-куб) и $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$. В работе доказано, что дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$ не существует. Библиогр. 5.

Ключевые слова: Q-полиномиальный граф, дистанционно регулярный граф.

Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (через $\lambda(a,b)$), если a и b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Пусть Γ — граф диаметра d, $i \in \{1, 2, 3, \ldots, d\}$. Граф Γ_i имеет то же самое множество вершин, и вершины u, w смежны в Γ_i, если $d_\Gamma(u, w) = i$.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 19–71–10067).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа $k = b_0$ — степень графа, $c_2 = \mu$.

Через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются через p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ (см. [1]).

С каждым дистанционно регулярным графом можно связать P-полиномиальную схему отношений (см. [1, разд. 2.7]). Если эта схема Q-полиномиальна, то граф называется Q-полиномиальным (см. [1, гл. 8]). Матрица P собственных значений и дуальная матрица собственных значений Q схемы отношений определены в [1, разд. 2.7]

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (j,i) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений графа и связаны равенством $PQ = QP = vI$, где I — единичная матрица порядка $d+1$. Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j\rangle$. Фактически w_j являются строками матрицы P, а $m_j u_j$ — столбцами матрицы Q (см. теорему 17.12 в [2]).

Перечислим [1, с. 419–421] отличные от $\{m(2m+1), (m-1)(2m+1), m^2, m; 1, m, m-1, m(2m+1)\}$ допустимые массивы пересечений примитивных Q-полиномиальных графов Γ диаметра 4.

1. $\{5, 4, 4, 3; 1, 1, 2, 2\}$ — нечётный граф на 9 точках, $v = 1+5+20+40+60 = 126$, спектр $5^1, 3^{27}, 1^{42}, -2^{48}, -4^8$, $\Gamma_{1,2}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(126, 25, 8, 4)$.

2. $\{9, 8, 7, 6; 1, 2, 3, 4\}$ — свёрнутый 9-куб, $v = 1+9+36+84+126 = 256$, спектр $9^1, 5^{36}, 1^{126}, -3^{84}, -7^9$, $\Gamma_{1,2}$ — сильно регулярный граф с параметрами $(256, 45, 16, 6)$.

3. $\{36, 21, 10, 3; 1, 6, 15, 28\}$ — половинный 9-куб, $v = 1+9+36+84+126 = 256$, спектр $36^1, 20^9, 8^{36}, 0^{84}, -1^{126}$.

4. $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$ — формально самодуальный граф, $v = 1+53+530+1484+848 = 2916$, спектр $53^1, 29^{53}, 11^{530}$, $-1^{1484}, -7^{848}$.

Первые три графа — единственные с данным массивом пересечений. Вопрос о существовании последнего графа оставался открытым.

Теорема 1. *Дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$ *не существует.*

Для данного графа тройные числа пересечений имеют сложные дробные выражения, для которых метод симметризации применить не удалось. К счастью, удалось получить противоречие, применяя к тройным числам пересечений сравнения по модулю 5.

1. Тройные числа пересечений

В доказательстве теоремы 1 используются тройные числа пересечений [3].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Числа пересечений дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$ вычисляются по рекуррентной формуле [1, лемма 4.1.7]:

$$p^i_{j+1,h} = \frac{1}{c_{j+1}}\bigl(p^i_{j,h-1}b_{h-1} + p^i_{jh}(a_h - a_j) + p^i_{j,h+1}c_{h+1} - p^i_{j-1,h}b_{j-1}\bigr),$$

$$p^i_{0h} = \delta_{ih}, \quad p^i_{j0} = \delta_{ij}, \quad p^i_{j,d+1} = 0,$$

$$p^i_{1h} = \begin{cases} c_i, & \text{если } h = i-1,\\ a_i, & \text{если } h = i,\\ b_i, & \text{если } h = i+1,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера и $a_i = b_0 - b_i - c_i$.

Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right] = \left|\left\{{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right\}\right|$. Числа $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3}\right]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. В отличие от двойных чисел пересечения p^i_{jh}, тройные числа пересечений зависят от выбора вершин. Опишем способ вычисления некоторых тройных чисел пересечений, предложенный в [3].

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u, v)$, $U = d(v, w)$, $V = d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x, u) = 0$, то число $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и считая число вершин, находящихся на расстоянии $i \in \{1, 2, 3\}$ от третьей, получим систему линейных диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{d}[ljh] = p^U_{jh} - [0jh], & \text{если } j, h \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum\limits_{l=1}^{d}[ilh] = p^V_{ih} - [i0h], & \text{если } i, h \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum\limits_{l=1}^{d}[ijl] = p^W_{ij} - [ij0], & \text{если } i, j \in \{1, 2, 3\}. \end{cases}$$

Более того, используя неравенство треугольника, получаем $[ijh] = 0$ при $|i - j| > W$ или $i + j < W$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}.$$

Если параметр Крейна q^h_{ij} равен 0, то $S_{ijh}(u, v, w) = 0$ по [3, теорема 3].

Таким образом, тройные числа пересечений удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=1}^{d}[ljh] = p^U_{jh} - [0jh], & \text{если } j, h \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum\limits_{l=1}^{d}[ilh] = p^V_{ih} - [i0h], & \text{если } i, h \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum\limits_{l=1}^{d}[ijl] = p^W_{ij} - [ij0], & \text{если } i, j \in \{1, 2, 3\}, \\ \sum\limits_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right], & \text{если } q^h_{ij} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \left\{\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right\}$, $[ijh] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ ijh \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uwv \\ ihj \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} vuw \\ jih \end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} wvu \\ hji \end{smallmatrix}\right]$. Вычисление чисел $[ijh]' = \left[\begin{smallmatrix} uwv \\ ihj \end{smallmatrix}\right]$, $[ijh]^* = \left[\begin{smallmatrix} vuw \\ jih \end{smallmatrix}\right]$ и $[ijh]^\sim = \left[\begin{smallmatrix} wvu \\ hji \end{smallmatrix}\right]$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. Граф с массивом пересечений $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$. Тогда Γ имеет $1 + 53 + 530 + 1484 + 848 = 2916$ вершин, спектр $53^1, 29^{53}, 11^{530}, -1^{1484}, -7^{848}$ и дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 53 & 530 & 1484 & 848 \\ 1 & 29 & 110 & -28 & -112 \\ 1 & 11 & -16 & -28 & 32 \\ 1 & -1 & -10 & 26 & -16 \\ 1 & -7 & 20 & -28 & 14 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Числа пересечения графа* Γ *принимают следующие значения:*

(1) $p^1_{11} = 12$, $p^1_{12} = 40$, $p^1_{22} = 210$, $p^1_{23} = 280$, $p^1_{33} = 756$, $p^1_{34} = 448$, $p^1_{44} = 400$;

(2) $p^2_{11} = 4$, $p^2_{12} = 21$, $p^2_{13} = 28$, $p^2_{22} = 144$, $p^2_{23} = 252$, $p^2_{24} = 112$, $p^2_{33} = 756$, $p^2_{34} = 448$, $p^2_{44} = 288$;

(3) $p^3_{12} = 10$, $p^3_{13} = 27$, $p^3_{14} = 16$, $p^3_{22} = 90$, $p^3_{23} = 270$, $p^3_{24} = 160$, $p^3_{33} = 754$, $p^3_{34} = 432$, $p^3_{44} = 240$;

(4) $p^4_{13} = 28$, $p^4_{22} = 70$, $p^4_{23} = 280$, $p^4_{24} = 420$, $p^4_{33} = 756$, $p^4_{34} = 420$, $p^4_{44} = 222$.

Доказательство. Значения параметров p^l_{ij} получим по лемме 4.1.7 из [1]. Лемма 1 доказана.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $\{rst\} = \left\{ {uvw \atop rst} \right\}$ и $[rst] = \left[{uvw \atop rst} \right]$. Положим $\Delta = \Gamma_2(u)$ и $\Lambda = \Delta_3$. Тогда Λ является регулярным графом степени 252 на 530 вершинах.

Лемма 2. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = 2$ *и* $d(v,w) = 1$. *Тогда тройные числа пересечений равны*

(1) $[111] = -r_1 + 4$, $[112] = [121] = r_1$, $[122] = -r_1 - \frac{3}{2}r_2 + 23$, $[123] = [132] = \frac{3}{2}r_2 - 2$, $[133] = -\frac{3}{2}r_2 + 30$;

(2) $[211] = r_1 - r_2 + 8$, $[212] = [221] = -r_1 + r_2 + 12$, $[222] = -17r_1 - \frac{17}{4}r_2 + 123$, $[223] = [232] = 18r_1 + \frac{13}{4}r_2 + 9$, $[233] = -18r_1 - \frac{93}{4}r_2 + 291$, $[234] = [243] = 20r_2 - 48$, $[244] = -20r_2 + 160$;

(3) $[311] = r_2$, $[312] = [321] = -r_2 + 28$, $[322] = 18r_1 - \frac{17}{4}r_2 + 71$, $[323] = [332] = -18r_1 + \frac{21}{4}r_2 + 153$, $[333] = -54r_1 + \frac{27}{4}r_2 + 459$, $[334] = [343] = 72r_1 - \frac{12}{4}r_2 + 144$, $[344] = -72r_1 + 12r_2 + 304$;

(4) $[422] = 10r_2 - 8$, $[423] = [432] = -10r_2 + 120$, $[433] = 72r_1 + 18r_2 - 24$, $[434] = [443] = -72r_1 - 8r_2 + 352$, $[444] = 72r_1 + 8r_2 - 64$,

при этом $r_1 \in \{0, 1, \ldots, 4\}$, $r_2 \in \{4, 8\}$.

Доказательство получается упрощением формул (1).

По лемме 2 имеем $33 \leqslant [233] = -18r_1 - \frac{93}{4}r_2 + 291 \leqslant 198$.

Лемма 3. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. *Тогда тройные числа пересечений равны*

(1) $[111] = \frac{8}{1075}r_3 - \frac{163}{4300}r_4 - \frac{79}{6450}r_5 + \frac{37}{215}r_6 + \frac{271}{1075}r_7 + \frac{33}{4300}r_8 + \frac{53}{43}$, $[112] = \frac{4}{43}r_3 - \frac{17}{172}r_4 - \frac{2}{645}r_5 + \frac{71}{43}r_6 + \frac{97}{215}r_7 - \frac{111}{860}r_8 - \frac{3073}{215}$, $[113] = -\frac{108}{1075}r_3 + \frac{147}{1075}r_4 + \frac{33}{2150}r_5 - \frac{392}{215}r_6 - \frac{756}{1075}r_7 + \frac{261}{2150}r_8 + \frac{3668}{215}$, $[121] = -\frac{4}{215}r_3 + \frac{17}{860}r_4 + \frac{3}{215}r_5 + \frac{3}{43}r_6 - \frac{71}{215}r_7 - \frac{81}{860}r_8 + \frac{147}{43}$, $[122] = \frac{20}{43}r_3 - \frac{85}{172}r_4 - \frac{17}{172}r_5 + \frac{140}{43}r_6 + \frac{97}{43}r_7 + \frac{9}{86}r_8 - \frac{966}{43}$, $[123] = -\frac{96}{215}r_3 + \frac{102}{215}r_4 + \frac{73}{860}r_5 - \frac{143}{43}r_6 - \frac{414}{215}r_7 - \frac{9}{860}r_8 + \frac{1722}{43}$, $[131] = \frac{12}{1075}r_3 + \frac{39}{2150}r_4 - \frac{11}{6450}r_5 - \frac{52}{215}r_6 + \frac{84}{1075}r_7 + \frac{93}{1075}r_8 - \frac{28}{43}$, $[132] = -\frac{24}{43}r_3 + \frac{51}{86}r_4 + \frac{263}{2580}r_5 - \frac{211}{43}r_6 - \frac{582}{215}r_7 + \frac{21}{860}r_8 + \frac{12418}{215}$, $[133] = \frac{588}{1075}r_3 - \frac{657}{1075}r_4 - \frac{431}{4300}r_5 + \frac{1107}{215}r_6 + \frac{2826}{1075}r_7 - \frac{477}{4300}r_8 - \frac{6258}{215}$;

(2) $[211] = \frac{12}{43}r_3 - \frac{51}{172}r_4 - \frac{11}{258}r_5 + \frac{127}{43}r_6 + \frac{41}{43}r_7 - \frac{15}{172}r_8 - \frac{1001}{43}$, $[212] = -\frac{12}{43}r_3 + \frac{51}{172}r_4 + \frac{11}{258}r_5 - \frac{170}{43}r_6 - \frac{41}{43}r_7 + \frac{15}{172}r_8 + \frac{1904}{43}$, $[213] = r_6$, $[221] = r_7$, $[222] = \frac{65}{43}r_3 - \frac{459}{172}r_4 - \frac{241}{516}r_5 + \frac{1100}{43}r_6 + \frac{455}{43}r_7 - \frac{89}{86}r_8 - \frac{4365}{43}$, $[223] = -\frac{17}{43}r_3 + \frac{255}{172}r_4 + \frac{51}{172}r_5 - \frac{420}{43}r_6 - \frac{162}{43}r_7 - \frac{27}{86}r_8 + \frac{2898}{43}$, $[224] = -\frac{48}{43}r_3 + \frac{51}{43}r_4 + \frac{22}{129}r_5 - \frac{680}{43}r_6 - \frac{336}{43}r_7 + \frac{58}{43}r_8 + \frac{7616}{43}$, $[231] = -\frac{12}{43}r_3 + \frac{51}{172}r_4 + \frac{11}{258}r_5 - \frac{127}{43}r_6 - \frac{84}{43}r_7 + \frac{15}{172}r_8 + \frac{1904}{43}$, $[232] = -\frac{53}{43}r_3 + \frac{102}{172}r_4 + \frac{73}{172}r_5 - \frac{930}{43}r_6 - \frac{414}{43}r_7 - \frac{9}{172}r_8 + \frac{8610}{43}$, $[233] = \frac{321}{43}r_3 - \frac{1719}{172}r_4 - \frac{275}{172}r_5 + \frac{3537}{43}r_6 + \frac{1602}{43}r_7 + \frac{9}{86}r_8 - \frac{22638}{43}$, $[234] = -\frac{256}{43}r_3 + \frac{315}{43}r_4 + \frac{146}{129}r_5 - \frac{2480}{43}r_6 - \frac{1104}{43}r_7 - \frac{6}{43}r_8 + \frac{22960}{43}$, $[242] = r_8$, $[243] = -\frac{304}{43}r_3 + \frac{366}{43}r_4 + \frac{56}{43}r_5 - \frac{3160}{43}r_6 - \frac{1440}{43}r_7 + \frac{9}{43}r_8 + \frac{30576}{43}$, $[244] = \frac{304}{43}r_3 - \frac{366}{43}r_4 - \frac{56}{43}r_5 + \frac{3160}{43}r_6 + \frac{1440}{43}r_7 - \frac{52}{43}r_8 - \frac{25760}{43}$;

(3) $[311] = -\frac{308}{1075}r_3 + \frac{719}{1075}r_4 + \frac{59}{1075}r_5 - \frac{672}{215}r_6 - \frac{1296}{1075}r_7 + \frac{171}{2150}r_8 + \frac{1120}{43}$, $[312] = \frac{8}{43}r_3 - \frac{17}{86}r_4 - \frac{17}{430}r_5 + \frac{99}{43}r_6 + \frac{108}{215}r_7 + \frac{9}{215}r_8 - \frac{1932}{215}$, $[313] = \frac{108}{1075}r_3 - \frac{147}{1075}r_4 - \frac{33}{2150}r_5 + \frac{177}{215}r_6 + \frac{756}{1075}r_7 - \frac{261}{2150}r_8 + \frac{2352}{215}$, $[321] = \frac{4}{215}r_3 - \frac{17}{860}r_4 - \frac{3}{215}r_5 - \frac{3}{43}r_6 - \frac{144}{215}r_7 + \frac{81}{860}r_8 + \frac{756}{43}$, $[322] = r_3$, $[323] = -\frac{219}{215}r_3 - \frac{843}{860}r_4 + \frac{3}{215}r_5 + \frac{3}{43}r_6 + \frac{144}{215}r_7 - \frac{81}{860}r_8 + \frac{10080}{43}$, $[324] = r_4$, $[331] = \frac{288}{1075}r_3 - \frac{1353}{4300}r_4 - \frac{44}{1075}r_5 + \frac{687}{215}r_6 + \frac{2016}{1075}r_7 - \frac{747}{4300}r_8 - \frac{672}{43}$, $[332] = \frac{93}{1075}r_3 - \frac{375}{86}r_4 - \frac{203}{430}r_5 + \frac{1941}{43}r_6 + \frac{4932}{215}r_7 - \frac{234}{215}r_8 - \frac{58128}{215}$, $[333] = -\frac{8613}{1075}r_3 + \frac{45603}{4300}r_4 + \frac{1503}{2150}r_5 - \frac{18792}{215}r_6 - \frac{42876}{1075}r_7 + \frac{27}{4300}r_8 + \frac{281988}{215}$, $[334] = \frac{240}{43}r_3 - \frac{255}{43}r_4 - \frac{8}{43}r_5 + \frac{1680}{43}r_6 + \frac{648}{43}r_7 + \frac{54}{43}r_8 - \frac{11592}{43}$, $[342] = -\frac{144}{43}r_3 + \frac{196}{43}r_4 + \frac{22}{43}r_5 - \frac{2040}{43}r_6 - \frac{1008}{43}r_7 + \frac{45}{43}r_8 + \frac{22848}{43}$, $[343] = \frac{384}{43}r_3 - \frac{408}{43}r_4 - \frac{30}{43}r_5 + \frac{3720}{43}r_6 + \frac{1656}{43}r_7 + \frac{9}{43}r_8 - \frac{34440}{43}$, $[344] = -\frac{240}{43}r_3 + \frac{212}{43}r_4 + \frac{8}{43}r_5 - \frac{1680}{43}r_6 - \frac{648}{43}r_7 - \frac{54}{43}r_8 + \frac{30856}{43}$;

(4) $[422] = -\frac{128}{43}r_3 + \frac{136}{43}r_4 + \frac{73}{129}r_5 - \frac{1240}{43}r_6 - \frac{552}{43}r_7 + \frac{40}{43}r_8 + \frac{11480}{43}$, $[423] = \frac{80}{43}r_3 - \frac{42}{43}r_4 - \frac{17}{129}r_5 + \frac{560}{43}r_6 + \frac{216}{43}r_7 + \frac{18}{43}r_8 - \frac{3864}{43}$, $[424] = \frac{48}{43}r_3 - \frac{94}{43}r_4 - \frac{22}{129}r_5 + \frac{680}{43}r_6 + \frac{336}{43}r_7 - \frac{58}{43}r_8 - \frac{2800}{43}$, $[432] = -\frac{16}{43}r_3 + \frac{60}{43}r_4 - \frac{7}{129}r_5 - \frac{800}{43}r_6 - \frac{456}{43}r_7 + \frac{48}{43}r_8 + \frac{11368}{43}$, $[433] = r_5$, $[434] = \frac{16}{43}r_3 - \frac{60}{43}r_4 - \frac{122}{129}r_5 + \frac{800}{43}r_6 + \frac{456}{43}r_7 - \frac{48}{43}r_8 + \frac{7896}{43}$, $[442] = \frac{144}{43}r_3 - \frac{196}{43}r_4 - \frac{22}{129}r_5 + \frac{2040}{43}r_6 + \frac{1008}{43}r_7 - \frac{88}{43}r_8 - \frac{18032}{43}$, $[443] = -\frac{80}{43}r_3 + \frac{42}{43}r_4 - \frac{26}{129}r_5 - \frac{560}{43}r_6 - \frac{216}{43}r_7 - \frac{18}{43}r_8 + \frac{23128}{43}$, $[444] = -\frac{64}{43}r_3 + \frac{154}{43}r_4 + \frac{48}{129}r_5 - \frac{1480}{43}r_6 - \frac{792}{43}r_7 + \frac{106}{43}r_8 + \frac{7288}{43}$,

при этом $r_3 \in \{0, 1, \ldots, 128\}$, $r_4 \in \{0, 1, \ldots, 112\}$, $r_5 \in \{48, 49, \ldots, 447\}$, $r_6 \in \{0, 1, \ldots, 19\}$, $r_7 \in \{0, 1, \ldots, 21\}$, $r_8 \in \{0, 1, \ldots, 100\}$.

Доказательство получается упрощением формул (1).

По лемме 3 имеем $0 \leqslant [233] = \frac{321}{43}r_3 - \frac{1719}{172}r_4 - \frac{275}{172}r_5 + \frac{3537}{43}r_6 + \frac{1602}{43}r_7 + \frac{9}{86}r_8 - \frac{22638}{43} \leqslant 2803$. Так как Λ — регулярный граф степени 252, то $0 \leqslant [233] \leqslant 252$.

Лемма 4. *Пусть $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *r_5 делится на 3;*

(2) *$2r_5 - r_8$ и $2r_7 + 1$ делятся на 5;*

(3) *$-r_3 - r_4 + 1$ и $r_3 + 2r_5 + 2$ делятся на 5.*

Доказательство. Имеем $43[423] = 80r_3 - 42r_4 - \frac{17}{3}r_5 + 560r_6 + 216r_7 + 18r_8 - 3864$, поэтому r_5 делится на 3.

Далее, $215[113] = -\frac{108}{5}r_3 + \frac{147}{5}r_4 + \frac{33}{10}r_5 - 392r_6 - \frac{756}{5}r_7 + \frac{261}{10}r_8 + 3668$, поэтому $2r_3 + 2r_4 - 2r_5 - r_7 + r_8$ делится на 5.

Аналогично $215[133] = \frac{588}{5}r_3 - \frac{657}{5}r_4 - \frac{431}{20}r_5 + 1107r_6 + \frac{2826}{5}r_7 - \frac{477}{20}r_8 - 6258$, поэтому $3r_3 + 3r_4 - \frac{1}{4}r_5 + r_7 + \frac{3}{4}r_8$ делится на 5. Складывая с равенством $2r_3 + 2r_4 - 2r_5 - r_7 + r_8$, получим, что $-\frac{9}{4}r_5 + \frac{7}{4}r_8$ и $r_5 + 2r_8$ делится на 5.

Теперь $43[111] = \frac{8}{25}r_3 - \frac{163}{100}r_4 - \frac{79}{150}r_5 + \frac{37}{5}r_6 + \frac{271}{25}r_7 + \frac{33}{100}r_8 + 53$, поэтому число $\frac{8}{5}r_3 - \frac{3}{20}r_4 + \frac{11}{30}r_5 + \frac{1}{5}r_7 - \frac{7}{20}r_8$ целое и $96r_3 - 9r_4 + 22r_5 + 12r_7 - 21r_8$ делится на 60. В частности, $2r_3 + 2r_4 + 4r_5 + 4r_7 - 2r_8$ делится на 5, и с учётом делимости $2r_3 + 2r_4 - 2r_5 - r_7 + r_8$ на 5 число $2r_5 - r_8$ делится на 5. Отсюда $2r_3 + 2r_4 - r_7$ делится на 5.

Так как $43[112] = 4r_3 - \frac{17}{4}r_4 - \frac{2}{15}r_5 + 71r_6 + \frac{97}{5}r_7 - \frac{111}{20}r_8 - \frac{3073}{5}$, то $-24r_5 + 48r_7 - 3r_8 + 24$ и $-30r_5 + 48r_7 + 24$ делятся на 5. Отсюда $2r_7 + 1$, $4r_3 + 4r_4 + 1$ делятся на 5 и $r_7 \in \{2, 7, 12, 17\}$.

Наконец, $43[321] = \frac{4}{5}r_3 - \frac{17}{20}r_4 - \frac{3}{5}r_5 - 3r_6 - \frac{144}{5}r_7 + \frac{81}{20}r_8 + 756$, поэтому $16r_3 - 2r_4 - 12r_5 - 16r_7 + 4r_8$, $8r_3 - r_4 - 2r_5 - 1$ делятся на 5 и $r_3 + 2r_5 + 2$ делится на 5. Лемма 4 доказана.

Завершим доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 1. Положим $r_8 = 2r_5 + 5s$, $r_3 = -2r_5 - 2 + 5t$, $-r_3 - r_4 + 1 = -5r$. Тогда $r_4 = -r_3 + 1 + 5r = 2r_5 + 3 - 5t + 5r$. Имеем $215[332] = \frac{93}{5}r_3 - 375 \cdot \frac{5}{2}r_4 - \frac{203}{2}r_5 + 1941 \cdot 5r_6 + 4932r_7 - 234r_8 - 58128$, поэтому $3r_3$, $r_5 + 1$, $r_4 - 1$ и $r_8 - 2$ делятся на 5.

Аналогично $215[111] = \frac{8}{5}r_3 - \frac{163}{20}r_4 - \frac{79}{30}r_5 + 37r_6 + \frac{271}{5}r_7 + \frac{33}{20}r_8 + 265$, поэтому $-2r_3 + r_4 - r_5 - r_7 - r_8$ делится на 5; противоречие с тем, что $1 + 1 + 1 - 2$ не делится на 5.

Итак, дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$ не существует. Теорема 1 доказана.

Приведём второй вариант доказательства теоремы, основанный на исследовании собственных значений локального подграфа.

Пусть Γ является Q-полиномиальным дистанционно регулярным графом диаметра d. Тогда для него определяется многочлен $T_2(\lambda)$ степени $d+1$, называемый многочленом Тервиллигера (см. [5, параграф 4]). Если μ — неглавное собственное значение подграфа $\Gamma(x)$ для некоторой вершины x, то $T_2(\mu) \geqslant 0$.

Лемма 5. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$. *Тогда многочлен Тервиллигера графа* Γ *равен*

$$T_2(\lambda) = -(2\lambda^2 - 9\lambda - 21)(3\lambda + 7)(3\lambda - 17).$$

Доказательство. Прямые вычисления с использованием формул из [5, леммы 4.4–4.6] дают равенства

$$p_2^{+-}(\lambda) = -28(\lambda + 1),$$
$$p_2^{++}(\lambda) = -\lambda^2 + 8\lambda + 49,$$
$$p_2^{--}(\lambda) = 18\lambda^2 + 3\lambda - 35,$$
$$T_2(\lambda) = p_2^{++}(\lambda)p_2^{--}(\lambda) - (p_2^{+-}(\lambda))^2 = -(2\lambda^2 - 9\lambda - 21)(3\lambda + 7)(3\lambda - 17).$$

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$. По теореме 4.4.3 из [1] неглавные собственные значения его локального подграфа лежат в промежутке $\big(-\frac{7}{3}, \frac{17}{3}\big)$.

С другой стороны, многочлен Тервиллигера [4] графа Γ имеет вид

$$T_2(x) = -(2x^2 - 9x - 21)(3x + 7)(3x - 17);$$

противоречие с тем, что $T_2(\lambda) < 0$ для любого $\lambda \in \big(-\frac{7}{3}, \frac{17}{3}\big)$. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Heidelberg: Springer, 1989.
2. **Cameron P.** Permutation groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1999. 220 p. (Lond. Math. Soc. Student Texts; Vol. 45).
3. **Coolsaet K., Jurishich A.** Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory, Ser. A. 2008. Vol. 115 P. 1086–1095.
4. **Gavrilyuk A. L., Koolen J. H.** A characterization of the graphs of bilinear $d \times d$-forms over F_2 // Combinatorica. 2010. Vol. 39. P. 289–321.

5. **Gavrilyuk A. L., Koolen J. H.** The Terwilliger polynomial of a Q-polynomial distance-regular graph and its application to the pseudo-partition graphs // Linear Algebra Appl. 2015. Vol. 466. P. 117–140.

Махнев Александр Алексеевич
Голубятников Михаил Петрович

Статья поступила
31 марта 2021 г.

После доработки —
6 мая 2021 г.

Принята к публикации
7 мая 2021 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2021. Vol. 28, No. 3. P. 38–48

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2021.28.709

ON NONEXISTENCE OF DISTANCE REGULAR GRAPHS WITH THE INTERSECTION ARRAY $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$

A. A. Makhnev[a] and *M. P. Golubyatnikov*[b]

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 Sofia Kovalevskaya Street, 620108 Yekaterinburg, Russia

E-mail: [a]`makhnev@imm.uran.ru`, [b]`mike_ru1@mail.ru`

Abstract. We consider Q-polynomial graphs of diameter 4. Apart from infinite series intersection arrays $\{m(2m+1), (m-1)(2m+1), m^2, m; 1, m, m-1, m(2m+1)\}$ there are the following admissible intersection arrays of Q-polynomial graphs of diameter 4 with at most 4096 vertices: $\{5, 4, 4, 3; 1, 1, 2, 2\}$ (odd graph on 9 vertices), $\{9, 8, 7, 6; 1, 2, 3, 4\}$ (folded 9-cube), $\{36, 21, 10, 3; 1, 6, 15, 28\}$ (half 9-cube), and $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$. In the paper it is proved that a distance regular graph with an intersection array $\{53, 40, 28, 16; 1, 4, 10, 28\}$ does not exist. Bibliogr. 4.

Keywords: Q-polynomial graph, distance regular graph.

REFERENCES

1. **A. E. Brouwer, A. M. Cohen,** and **A. Neumaier,** *Distance-Regular Graphs* (Springer-Verlag, Heidelberg, 1989).
2. **P. Cameron,** *Permutation Groups* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999) (London Math. Soc. Stud. Texts, Vol. 45).
3. **K. Coolsaet** and **A. Jurishich**, Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **115**, 1086–1095 (2008).
4. **A. L. Gavrilyuk** and **J. H. Koolen,** A characterization of the graphs of bilinear $d \times d$-forms over F_2, *Combinatorica* **39**, 289–321 (2010).

This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 19–71–10067).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (3) (2021).

5. A. L. Gavrilyuk and **J. H. Koolen,** The Terwilliger polynomial of a Q-polynomial distance-regular graph and its application to the pseudo-partition graphs, *Linear Algebra Appl.* **466**, 117–140 (2015).

Aleksandr A. Makhnev
Mikhail P. Golubyatnikov

Received March 31, 2021
Revised May 6, 2021
Accepted May 7, 2021