ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2021. Т. 28, № 4. С. 90–116

УДК 519.816+519.854.2 DOI 10.33048/daio.2021.28.712

СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАРЕТО СПЕЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ В ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ С ДВУМЯ КРИТЕРИЯМИ

А. О. Захаров[1, a], *Ю. В. Коваленко*[2, b]

[1] Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетская наб., 7–9, 199034 Санкт-Петербург, Россия

[2] Институт математики им. С. Л. Соболева,
ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия

E-mail: [a] zakh.alexey@gmail.com, [b] julia.kovalenko.ya@yandex.ru

Аннотация. Исследуются дискретные задачи оптимизации с двумя критериями в контексте аксиоматического подхода к сужению множества Парето. Строятся оценки степени сужения множества Парето специальной структуры и в общем случае в зависимости от значений коэффициента компромисса лица, принимающего решение. Проводится апробация результатов на семействах задач о покрытии и маршрутизации. Ил. 4, библиогр. 19.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, двухкритериальная задача, сужение множества Парето, отношение предпочтения лица, принимающего решение.

Введение

Теория принятия решений при многих критериях интенсивно развивается и находит многочисленные применения в различных областях. Данная теория направлена помочь лицу, принимающему решение (ЛПР), на основе анализа и оценки его взглядов, вкусов и предпочтений выбрать действительно наилучшее решение или, по крайней мере, избежать принятия заведомо неперспективных решений.

Работа первого автора (разд. 1, 3, 5) выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–07–00298); второго автора (разд. 2, 4, 6) — при поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1 (проект № 0314–2019–0019).

Рассмотрение комбинаторных задач выбора именно с несколькими критериями в большей степени отвечает практике, поскольку любая проблема в действительности имеет многосторонний характер. Здесь в качестве оптимума, как правило, рассматривается множество Парето. Однако ЛПР может столкнуться с трудностью выбора альтернатив, которые оптимальны в силу его предпочтений, так как на практике множество Парето оказывается довольно широким. Известны следующие направления по решению многокритериальных задач принятия решений: методы многокритериальной теории полезности [1–4, 6]; так называемые методы «outranking approach» [1–4,6]; методы вербального анализа решений [1,3,6,7]; различные итеративные процедуры [1–3]; методы условной, последовательной оптимизации [3]; аксиоматический подход к сужению множества Парето [3, 8].

Следует отметить, что большинство из отмеченных методов эвристические, поскольку авторы не могут указать границы того класса многокритериальных задач, для которых применение соответствующих методов гарантированно приводит к наилучшему решению, а также предлагаемое в качестве оптимального решение не всегда является парето-оптимальным. В настоящей работе рассматривается аксиоматический подход к сужению множества Парето [8], отличающийся очерчиванием класса задач, к которым он применим. Он заключается в рассмотрении бинарного отношения предпочтения ЛПР, подчинённого определённым аксиомам «разумного выбора», и введении информации об этом отношении, так называемых «квантов информации». Их учёт заключается в построении множества, которое является более узкой оценкой сверху для множества выбираемых вариантов («оптимальный» выбор при удовлетворении всех гипотетических предпочтений ЛПР), чем множество Парето. Таким образом, производится сужение множества Парето на основе предпочтений ЛПР, что является отличительной чертой данного метода.

Наша работа начинается с представления основных понятий аксиоматического подхода к сужению множества Парето в соответствии с [8]. Далее выделяется два типа структур множества Парето двухкритериальной дискретной задачи и оценивается влияние параметров информации на сужение множества Парето, если задан один и два «кванта информации». Также строятся оценки для более общей структуры множества Парето. Приводятся семейства примеров задач о покрытии и маршрутизации, и проводится анализ степени сужения множества Парето. Предварительные результаты по данной теме представлены на конференциях OPTA-2018, MTSU-2019 и MOTOR-2020 (см. [9–11]).

1. Аксиоматический подход к сужению множества Парето

Дискретная задача многокритериальной оптимизации $\langle X, f \rangle$ задаётся конечным множеством допустимых решений X и векторным критерием $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, определённым на множестве X. Как правило, оптимальным решением такой задачи считается множество парето-оптимальных решений $P_f(X) = \{x \in X \mid \nexists\, x^* \in X \colon f(x^*) \geqslant f(x)\}$. При этом два вектора находятся в отношении $f(x^*) \geqslant f(x)$, называемом отношением предпочтения по Парето, если $f_i(x^*) \geqslant f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, $f(x^*) \neq f(x)$. Пусть $Y = f(X)$. Тогда множество Парето равно $P(Y) = \{y \in Y \mid \nexists\, y^* \in Y \colon y^* \geqslant y\}$. Будем считать, что множество Парето задаётся с учётом исключения классов эквивалентности, определяемых отношением эквивалентности: $x' \sim x''$ тогда и только тогда, когда $f(x') = f(x'')$.

В настоящей работе рассматривается дискретная двухкритериальная задача выбора $\langle X, f, \succ \rangle$:

- конечное множество допустимых решений X;
- векторный критерий $f = (f_1, f_2)$, заданный на множестве X;
- асимметричное бинарное отношение предпочтения $\succ$, определённое на множестве допустимых векторов Y.

Запись $y' \succ y''$ означает, что по мнению ЛПР вектор y' предпочтительнее вектора y''. Бинарное отношение $\succ$ подчиняется так называемым аксиомам «разумного выбора», принятие которых выражает «разумность» действий ЛПР в процессе принятия решений: (1) иррефлексивность; (2) транзитивность; (3) инвариантность относительно линейного положительного преобразования; (4) согласованность критериев с отношением предпочтения: если $y'_i > y''_i$ и $y'_l = y''_l$, $l \neq i$, то $y' \succ y''$ для всех $l, i \in \{1, 2\}$; (5) аксиома «исключения»: для любых $y', y'' \in Y$ таких, что $y' \succ y''$ (y'' не выбирается в паре), вариант y'' не будет выбран ЛПР и из всего множества Y.

Совокупность решений (векторов), которым ЛПР отдаст предпочтение в результате выбора, называется множеством выбираемых решений (векторов) и обозначается через $C(X)$ ($C(Y) = f(C(X))$ соответственно). Отметим, что точного определения множества выбираемых решений нет, что говорит о целесообразности поиска оценок сверху.

В [8] установлен принцип Эджворта — Парето: в условиях аксиом «разумного выбора» для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливо включение $C(Y) \subseteq P(Y)$. Другими словами, если ЛПР ведёт себя «разумно», то выбираемые решения парето-оптимальны. Однако очерченная граница поиска «оптимальных» решений на практике, как правило, является довольно широкой, что не позволяет прийти к окончательному результату. Поэтому справедливо стремление сузить данную

область и по возможности упростить выбор. В этом и заключается основная идея аксиоматического подхода: использование дополнительной информации об отношении предпочтения ЛПР $\succ$ для построения более точной оценки сверху множества $C(Y)$, чем множество Парето $P(Y)$. В связи с этим было введено понятие «кванта информации».

Определение 1. Будем говорить, что задан «квант информации» об отношении предпочтения $\succ$ с параметрами $w_i, w_j > 0$, если для вектора $y' \in \mathbb{R}^2$ такого, что $y'_i = w_i > 0$ и $y'_j = -w_j < 0$, справедливо соотношение $y' \succ 0_2$, где $0_2 = (0, 0)$. Критерий i называют более значимым, а критерий j — менее значимым. Здесь $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$.

Согласно определению ЛПР все равно выбирает y', несмотря на то, что вектор y' в паре с нулевым вектором проигрывает по критерию j. Это может говорить лишь о том, что для него важнее критерий i, по которому вектор y' больше нуля. Таким образом, установление отношения $\succ$ между парой недоминируемых по Парето векторов означает получение дополнительной информации о предпочтениях ЛПР.

Параметр $\theta = \frac{w_j}{w_i + w_j}$ показывает величину относительной потери и называется коэффициентом компромисса, причём $\theta \in (0, 1)$. Ввиду инвариантности отношения $\succ$ относительно линейного положительного преобразования в определении 1 также можно положить $y'_i = 1 - \theta$ и $y'_j = -\theta$. Далее будем рассматривать только «квант информации», определённый через коэффициент θ, и использовать обозначение $f_i \to f_j\colon \theta$. Следующая теорема показывает, каким образом «квант информации» учитывается в процессе принятия решений.

Теорема 1 [8]**.** *Пусть задан «квант информации» $f_i \to f_j\colon \theta$. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливы включения $C(Y) \subseteq \widehat{P}(Y) \subseteq P(Y)$. Здесь $\widehat{P}(Y) = f(P_{\widehat{f}}(X))$, а $P_{\widehat{f}}(X)$ есть множество парето-оптимальных решений относительно векторного критерия $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)$, где $\widehat{f}_j = \theta f_i + (1 - \theta) f_j$, $\widehat{f}_i = f_i$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$.*

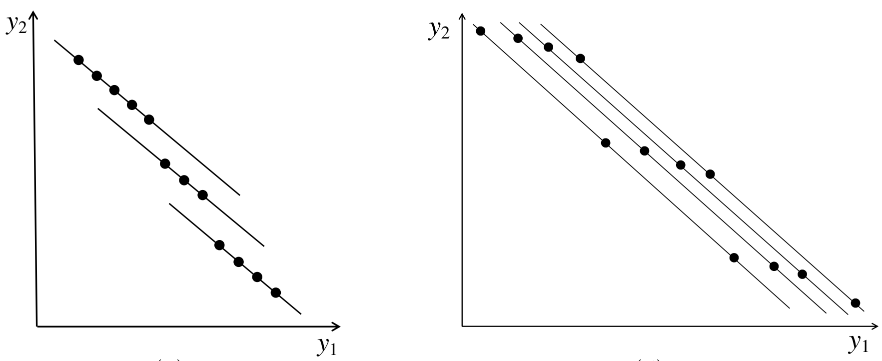
Таким образом строится «новая» двухкритериальная задача с тем же множеством возможных решений X и векторным критерием $\widehat{f}$, полученным из критерия f. Множество парето-оптимальных решений $P_{\widehat{f}}(X)$ относительно критерия $\widehat{f}$ даст более точную оценку сверху множества выбираемых векторов $C(Y)$, чем множество Парето $P(Y)$, не выходя за его пределы.

При рассмотрении двух «квантов информации» одновременно справедлива следующая теорема. Выполнение условия $\theta_{ij} + \theta_{ji} < 1$ необходимо и достаточно для непротиворечивости информации [8].

Теорема 2 [8]. *Пусть заданы два «кванта информации» $f_i \to f_j\colon \theta_{ij}$ и $f_j \to f_i\colon \theta_{ji}$, причём $\theta_{ij} + \theta_{ji} < 1$. Тогда для любого множества выбираемых векторов $C(Y)$ справедливы включения $C(Y) \subseteq \widehat{P}(Y) \subseteq P(Y)$. Здесь $\widehat{P}(Y) = f(P_{\widehat{f}}(X))$, $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2)$, где $\widehat{f}_i = (\theta_{ji} - 1)f_i + \theta_{ji} f_j$, $\widehat{f}_j = \theta_{ij} f_i + (\theta_{ij} - 1) f_j$, $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$.*

2. Множества Парето специальной структуры

В этом разделе выделяется два вида структур множества Парето: *«каскад»* и *«лестница»* (рис. 1) и приводятся процедуры идентификации указанных структур.



(а) (б)

Рис. 1. Примеры множеств Парето со структурами
(а) «каскад» ($p = 3$) и (б) «лестница» ($p = 4$, $q = 3$)

2.1. Структура «каскад». «Каскадом» будем называть множество Парето, элементы которого лежат на p параллельных прямых $l_1, \ldots, l_p$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$P(Y) = \bigcup_{i=1}^{p} \big\{ \big(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}\big) \mid y_2^{(i)} = a^{(i)} - k y_1^{(i)},\ y_1^{(i)} \in Y_1^{(i)} \big\},$$

где $Y_1^{(i)} = \big\{ y_1^{i,1}, \ldots, y_1^{i,s_i} \mid y_1^{i,1} < \cdots < y_1^{i,s_i} \big\}$, $s_i > 1$, для всех $i \in \{1, \ldots, p\}$ таких, что $y_1^{j,s_j} < y_1^{j+1,1}$ для всех $j \in \{1, \ldots, p-1\}$. Предполагается, что свободные члены удовлетворяют условию $a^{(1)} > a^{(2)} > \cdots > a^{(p)}$.

Проверка того, имеет ли множество Парето $P(Y)$ структуру «каскад», может быть выполнена за время $O(nln(n))$, где $n = |P(Y)|$. Для этого упорядочим векторы из $P(Y)$ согласно возрастанию значений по первому критерию. Построим прямую l_1: $y_2 = a^{(1)} - k^{(1)} y_1$, содержащую первые два элемента последовательности. Далее просматриваем элементы по порядку до тех пор, пока не будет обнаружен элемент (y_1', y_2'),

не принадлежащий прямой l_1. Строим прямую l_2: $y_2 = a^{(2)} - k^{(2)}y_1$, содержащую (y'_1, y'_2) и следующий за ним вектор последовательности. Если угловые коэффициенты равны, $k^1 = k^2$, то продолжаем просматривать векторы и строить прямые аналогичным образом. В противном случае останавливаемся с результатом отсутствия структуры «каскад» для множества $P(Y)$. Если же угловые коэффициенты всех построенных прямых совпадают, то результатом процедуры является положительный ответ о наличии структуры «каскад» для множества $P(Y)$.

В случае $p = 1$ структуры «лестница» и «каскад» вырождаются в единственную прямую [10].

2.2. Структура «лестница». «Лестницей» будем называть множество Парето, элементы которого лежат на p параллельных прямых $l_1, \ldots, l_p$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$P(Y) = \bigcup_{i=1}^{p} \big\{ \big(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}\big) \mid y_2^{(i)} + ky_1^{(i)} - a^{(i)} = 0,\, y_2^{(i)} \in Y_2^{(i)} \big\},$$

где $Y_2^{(i)} = \big\{y_2^{i,1}, \ldots, y_2^{i,q}\big\}$ для всех $i \in \{1, \ldots, p\}$, $y_2^{1,j} > \cdots > y_2^{p,j}$ для всех $j \in \{1, \ldots, q\}$, $y_1^{p,l} < y_1^{1,l+1}$ для всех $l \in \{1, \ldots, q-1\}$, $q > 1$. Здесь q обозначает число точек на каждой прямой, а свободные члены удовлетворяют условию $a^{(1)} < a^{(2)} < \cdots < a^{(p)}$.

Проверка того, имеет ли множество Парето $P(Y)$ структуру «лестница», может быть выполнена за время $O(n^2)$, где $n = |P(Y)|$. Упорядочим векторы из $P(Y)$ согласно возрастанию значений по первому критерию $\big(y_1^1, y_2^1\big), \ldots, \big(y_1^n, y_2^n\big)$. Рассмотрим все возможные варианты числа параллельных прямых в структуре «лестница». Ясно, что таких вариантов заведомо не больше чем n.

Приведём процедуру идентификации для случая λ прямых. Построим прямые, проходящие через каждую пару точек $\big(y_1^1, y_2^1\big)$ и $\big(y_1^{\lambda+1}, y_2^{\lambda+1}\big)$, $\big(y_1^2, y_2^2\big)$ и $\big(y_1^{\lambda+2}, y_2^{\lambda+2}\big)$, …, $\big(y_1^\lambda, y_2^\lambda\big)$ и $\big(y_1^{2\lambda}, y_2^{2\lambda}\big)$. Если среди построенных прямых найдутся непараллельные друг другу, то останавливаемся с результатом отсутствия структуры «лестница» для множества $P(Y)$ при λ прямых. В противном случае проверяем, принадлежат ли точки вида $\big(y_1^{l\lambda+i}, y_2^{l\lambda+i}\big)$, $l = 2, \ldots, \big\lfloor \frac{n}{\lambda} \big\rfloor$, i-й прямой, $i = 1, \ldots, \lambda$. Если указанное условие нарушается по крайней мере для одной точки, то останавливаемся с результатом отсутствия структуры «лестница» для множества $P(Y)$ при λ прямых. Если же все точки принадлежат требуемым прямым, то результатом процедуры является положительный ответ о наличии структуры «лестница» для множества $P(Y)$ при λ прямых.

Отметим, что множество Парето может характеризоваться структурами «каскад» и «лестница» одновременно. Например, если множество

Парето имеет структуру «каскад», то структура «лестница» также имеет место, когда $s_i = q$, $i = 1, \ldots, p$, и точки вида $\left(y_1^{i,l}, a^{(i)} - ky_1^{i,l}\right)$, $i = 1, \ldots, p$, лежат на одной прямой для каждого фиксированного $l = 1, \ldots, q$. При этом все q полученных прямых имеют один и тот же угловой коэффициент. В контексте структуры «лестница», если точки вида $\left(\frac{1}{k}a^{(i)} - \frac{1}{k}y_2^{i,l}, y_2^{i,l}\right)$, $i = 1, \ldots, p$, лежат на одной прямой для каждого фиксированного $l = 1, \ldots, q$ и для всех q прямых угловые коэффициенты равны, то имеет место и структура «каскад». Пример представлен в п. 6.3.

Здесь и далее будут рассматриваться только прямые с отрицательным угловым коэффициентом, поэтому для удобства под угловым коэффициентом прямой будем понимать его значение по абсолютной величине.

3. Сужение множества Парето со структурой «каскад»

Теорема 3. *Пусть множество Парето $P(Y)$ имеет структуру «каскад» с p прямыми $l_1, \ldots, l_p$, а $\widehat{n}$ — число точек, лежащих на прямой l_1.*

1) *Предположим, что $f_1 \to f_2\colon \theta$. Если $\theta \in \left(0, \frac{k}{k+1}\right)$, то сужение множества Парето $\widehat{P}(Y)$ совпадает с самим множеством Парето $P(Y)$. Если $\theta \in \left[\frac{k}{k+1}, 1\right)$, то множество $\widehat{P}(Y)$ содержит не более p элементов.*

2) *Предположим, что $f_2 \to f_1\colon \theta$. Если $\theta \in \left(0, \frac{1}{k+1}\right)$, то сужение множества Парето $\widehat{P}(Y)$ содержит по крайней мере $\widehat{n}$ элементов. Если $\theta \in \left[\frac{1}{k+1}, 1\right)$, то множество $\widehat{P}(Y)$ состоит из одного элемента.*

Доказательство. 1) Согласно определению 1 существует вектор $y' \in \mathbb{R}^2$ с компонентами $y_1' = 1 - \theta$ и $y_2' = -\theta$ такой, что $y' \succ 0_2$. Рассмотрим выпуклый конус $M_\theta = \operatorname{cone}\{e^1, e^2, y'\} \setminus \{0_2\}$. В [8] доказано, что включение $\bar{y} - \widehat{y} \in M_\theta$ эквивалентно тому, что $\widehat{y} \notin \widehat{P}(Y)$, т. е. $\widehat{y}$ не принадлежит сужению множества Парето. В таком случае говорят, что вектор $\bar{y}$ доминирует вектор $\widehat{y}$ относительно конуса M_θ ($\bar{y} \in \widehat{y} + M_\theta$ — вектор $\bar{y}$ принадлежит конусу M_θ с вершиной в точке $\widehat{y}$ (рис. 2)).

Параметр θ влияет на грань конуса M_θ, образованную лучом с направляющим вектором y'. Коэффициент угла наклона равен $k' = \frac{\theta}{1-\theta}$. Таким образом, если $\theta < \frac{k}{k+1}$, то грань конуса лежит в заштрихованной области; если $\theta > \frac{k}{k+1}$, то грань конуса лежит в закрашенной области (см. рис. 2).

Рассмотрим влияние, которое значение коэффициента θ оказывает на мощность сужения множества Парето $\widehat{P}(Y)$. Если $\theta < \frac{k}{k+1}$, то для произвольного вектора $\bar{y} \in P(Y)$ не найдётся такого вектора $\widehat{y} \in P(Y)$, что $\bar{y} \in \widehat{y} + M_\theta$. Значит, в данном случае сужения нет и $\widehat{P}(Y) = P(Y)$.

Если $\theta \geqslant \frac{k}{k+1}$, то для любой точки $\widehat{y} \in P(Y)$, кроме крайних нижних на каждой прямой (имеющих наибольшее значение по первой координате для фиксированной прямой), найдётся точка $\bar{y} \in P(Y)$, которая будет доминировать $\widehat{y}$ относительно конуса M_θ. Это означает, что сужение множества Парето $\widehat{P}(Y)$ состоит не более чем из p точек. Сужение до менее чем p точек зависит от взаимного расположения прямых и точек на них.

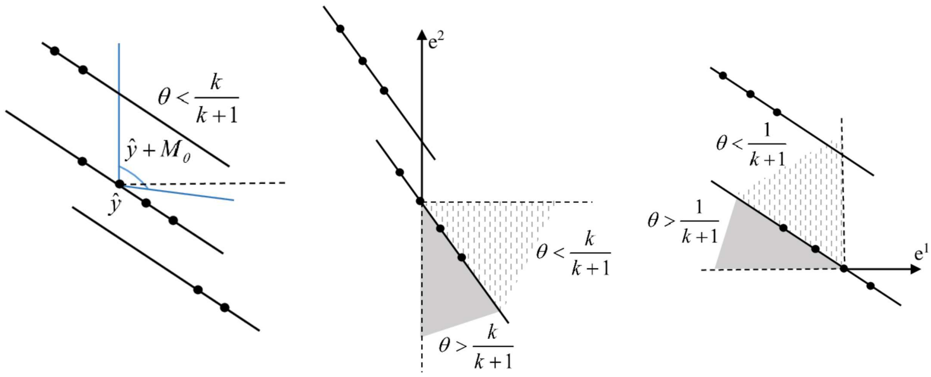


Рис. 2. Грани конуса M_θ в случае одного кванта информации

2) Согласно определению 1 $y' \succ 0_2$, где вектор $y' \in \mathbb{R}^2$ характеризуется компонентами $y'_1 = -\theta$ и $y'_2 = 1 - \theta$. Аналогично п. 1 $\bar{y} - \widehat{y} \in M_\theta$ тогда и только тогда, когда $\widehat{y} \notin \widehat{P}(Y)$, но вектор y' имеет иной вид и коэффициент угла наклона соответствующей грани равен $k' = \frac{1-\theta}{\theta}$. Заштрихованная область соответствует $\theta < \frac{1}{k+1}$, закрашенная — $\theta > \frac{1}{k+1}$ (см. рис. 2).

В случае $\theta < \frac{1}{k+1}$ число доминируемых точек из множества Парето относительно конуса M_θ лежит в пределах от нуля до всех точек из $P(Y)$, кроме точек верхней прямой l_1. В случае $\theta \geqslant \frac{1}{k+1}$ требуется рассматривать только точки верхней прямой l_1. Недоминируемой будет точка с наименьшим значением по первой координате (самая верхняя), т. е. сужение будет состоять из одной точки. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть множество Парето $P(Y)$ имеет структуру «каскад» с p прямыми $l_1, \ldots, l_p$, а $\widehat{n}$ — число точек, лежащих на прямой l_1. Предположим, что $f_1 \to f_2\colon \theta_{12}$ и $f_2 \to f_1\colon \theta_{21}$, причём $\theta_{12} + \theta_{21} < 1$.*

1) *Если $\theta_{12} < \frac{k}{k+1}$ и $\theta_{21} \geqslant \frac{1}{k+1}$, то $|\widehat{P}(Y)| = 1$.*

2) *Если $\theta_{21} < \frac{1}{k+1}$ и $\theta_{12} \geqslant \frac{k}{k+1}$, то $|\widehat{P}(Y)| \leqslant p$.*

3) *Если $\theta_{12} < \frac{k}{k+1}$ и $\theta_{21} < \frac{1}{k+1}$, то $|\widehat{P}(Y)| \geqslant \widehat{n}$.*

Доказательство. Задание квантов информации означает, что для векторов выполнены соотношения $y' = (1 - \theta_{12}, -\theta_{12}) \succ 0_2$ и $y'' =$

$(-\theta_{21}, 1-\theta_{21},) \succ 0_2$. Согласно [8] в случае двух квантов информации рассматривается выпуклый конус $M_{\theta_{12},\theta_{21}} = \mathrm{cone}\{e^1, e^2, y', y''\} \setminus \{0_2\}$. Образующими являются только векторы y', y'', поэтому в действительности $M_{\theta_{12},\theta_{21}} = \mathrm{cone}\{y', y''\} \setminus \{0_2\}$. Условие $\theta_{12} + \theta_{21} < 1$ необходимо и достаточно для непротиворечивости двух квантов [8] и геометрически выражается в выпуклости конуса $M_{\theta_{12},\theta_{21}}$.

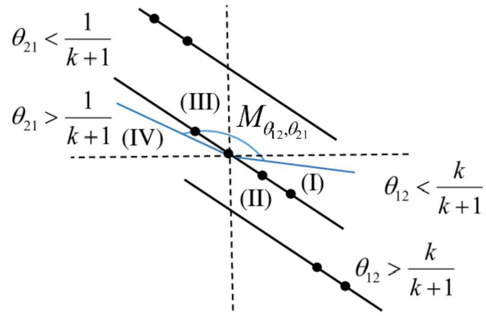


Рис. 3. Пример конуса $M_{\theta_{12},\theta_{21}}$ в случае двух квантов информации

Аналогично доказательству теоремы 3 можно выделить области расположения лучей, образованных векторами y', y'', в зависимости от значений коэффициентов θ_{12}, θ_{21}:

$$\text{(I) } \theta_{12} < \frac{k}{k+1}, \quad \text{(II) } \theta_{12} > \frac{k}{k+1},$$
$$\text{(III) } \theta_{21} < \frac{1}{k+1}, \quad \text{(IV) } \theta_{21} > \frac{1}{k+1}.$$

В силу неравенства $\theta_{12} + \theta_{21} < 1$ возможны только три комбинации: (I) и (III), (I) и (IV), (II) и (III) (рис. 3).

Если грани конуса $M_{\theta_{12},\theta_{21}}$ расположены в областях (I) и (III), то число доминируемых точек варьируется от нуля до всех точек из множества $P(Y)$, кроме точек верхней прямой l_1. Если рассматривать области (I) и (IV), то расположение грани y'' в области (IV) согласно теореме 3 даёт сужение до одной точки. В случае (II) и (III) принадлежность грани y' области (II) даёт сужение как минимум до p элементов (количество прямых). Область (III) степень сужения не усилит.

Таким образом, области (I) и (III) дают п. 3 теоремы, области (I) и (IV) соответствуют п. 1, области (II) и (III) — п. 2. Теорема 4 доказана.

4. Сужение множества Парето со структурой «лестница»

Теорема 5. *Пусть множество Парето $P(Y)$ имеет структуру «лестница» с p прямыми $l_1, \ldots, l_p$, каждая из которых содержит q точек.*

1) *Предположим, что* $f_1 \to f_2\colon \theta$. *Если* $\theta \in \bigl(0, \frac{k}{k+1}\bigr)$, *то сужение множества Парето* $\widehat{P}(Y)$ *содержит по крайней мере* q *элементов. Если* $\theta \in \bigl[\frac{k}{k+1}, 1\bigr)$, *то множество* $\widehat{P}(Y)$ *состоит из одного элемента.*

2) *Предположим, что* $f_2 \to f_1\colon \theta$. *Если* $\theta \in \bigl(0, \frac{1}{k+1}\bigr)$, *то сужение множества Парето* $\widehat{P}(Y)$ *содержит по крайней мере* $p+q-1$ *элементов. Если* $\theta \in \bigl[\frac{1}{k+1}, 1\bigr)$, *то множество* $\widehat{P}(Y)$ *включает в себя не более* p *элементов.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 5 используется тот же приём, что и в теореме 3. Рассматриваем выпуклый конус M_θ, соответствующий бинарному отношению $\succ$ с учётом заданного кванта информации. Далее, определяем, какие точки множества Парето будут доминироваться относительно конуса M_θ в зависимости от значений коэффициента компромисса θ.

1) Задание кванта информации означает, что для вектора $y' \in \mathbb{R}^2$ с компонентами $y'_1 = 1 - \theta$ и $y'_2 = -\theta$ выполнено соотношение $y' \succ 0_2$. Выпуклый конус M_θ определяется как $\mathrm{cone}\{e^1, e^2, y'\} \setminus \{0_2\}$, где образующими являются векторы y', e^2.

Если $\theta < \frac{k}{k+1}$, то коэффициент угла наклона грани конуса M_θ, соответствующей вектору y', будет меньше коэффициента угла наклона k прямых l_i. Значит, возможны ситуации, когда не будет доминироваться ни одна точка относительно конуса M_θ, так и когда недоминируемыми останутся только точки прямой l_p (с наибольшим свободным членом a_p, см. рис. 1). Таким образом, мощность множества $\widehat{P}(Y)$ меняется в пределах от q до $|P(Y)|$ элементов, когда $\theta \in \bigl(0, \frac{k}{k+1}\bigr)$.

Рассмотрим ситуацию, когда $\theta \geqslant \frac{k}{k+1}$. При $\theta = \frac{k}{k+1}$ грань конуса M_θ, соответствующая вектору y', имеет коэффициент угла наклона k и параллельна любой из прямых $l_1, \ldots, l_p$. Значит, недоминируемой будет только одна точка — самая нижняя. Следовательно, при $\theta \in \bigl[\frac{k}{k+1}, 1\bigr)$ сужение множества Парето состоит из одного элемента.

2) В случае задания кванта информации $f_2 \to f_1\colon \theta$ имеем вектор $y' \succ 0_2$, $y'_1 = -\theta$ и $y'_2 = 1-\theta$, конус $M_\theta = \mathrm{cone}\{e^1, e^2, y'\} \setminus \{0_2\}$, у которого образующими, в отличие от п. 1, будут векторы e^1, y'.

Если $\theta < \frac{1}{k+1}$, то грань конуса M_θ, задаваемая вектором y', будет иметь угловой коэффициент больше чем k. Здесь множество точек, которые могут оказаться доминируемыми относительно конуса M_θ, варьируется от пустого множества до всех, кроме точек с прямой $y_2 = -ky_1 + a_p$ (q элементов) и всех верхних точек с каждой прямой $l_1, \ldots, l_p$ (p элементов). Поскольку одна точка была подсчитана 2 раза, то $|\widehat{P}(Y)| \geqslant p+q-1$.

Если $\theta \geqslant \frac{1}{k+1}$, то коэффициент угла наклона грани меньше либо равен k. При $\theta = \frac{1}{k+1}$ все точки прямой l_i, кроме самой верхней точки,

доминируемые. Далее при увеличении θ наступает момент, когда все верхние точки каждой прямой будут продоминированы (кроме верхней точки прямой l_1). Таким образом, если $\theta \in \big[\frac{1}{k+1}, 1\big)$, то для сужения множества Парето верно соотношение $|\widehat{P}(Y)| \leqslant p$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть множество Парето $P(Y)$ имеет структуру «лестница» с p прямыми $l_1, \ldots, l_p$, каждая из которых содержит q векторов. Предположим, что $f_1 \to f_2\colon \theta_{12}$ и $f_2 \to f_1\colon \theta_{21}$, причём $\theta_{12} + \theta_{21} < 1$.*

1) *Если $\theta_{21} < \frac{1}{k+1}$ и $\theta_{12} \geqslant \frac{k}{k+1}$, то $|\widehat{P}(Y)| = 1$.*

2) *Если $\theta_{12} < \frac{k}{k+1}$ и $\theta_{21} \geqslant \frac{1}{k+1}$, то $|\widehat{P}(Y)| \leqslant p$.*

3) *Если $\theta_{21} < \frac{1}{k+1}$ и $\theta_{12} < \frac{k}{k+1}$, то $|\widehat{P}(Y)| \geqslant q$.*

Доказательство. Согласно правилам задания двух квантов информации существуют два вектора $y' = (1 - \theta_{12}, -\theta_{12}) \succ 0_2$ и $y'' = (-\theta_{21}, 1 - \theta_{21},) \succ 0_2$, причём отношению предпочтения $\succ$ соответствует выпуклый конус $M_{\theta_{12},\theta_{21}} = \mathrm{cone}\{y', y''\} \setminus \{0_2\}$.

Аналогично доказательству теоремы 4 рассмотрим области (I), (II), (III), (IV) и три их допустимые комбинации: (I) и (III), (I) и (IV), (II) и (III) (см. рис. 3).

Пусть грани конуса $M_{\theta_{12},\theta_{21}}$ расположены в областях (I) и (III). Принадлежность грани, соответствующей вектору y', области (I) ограничивает множество $\widehat{P}(Y)$ снизу q элементами. Грань, задаваемая вектором y'' и лежащая в области (III), даст оценку снизу $p + q - 1$. Таким образом, получаем справедливость п. 3.

Если рассматривать области (I) и (IV), то расположение грани y'' в области (IV) согласно теореме 5 даст оценку сверху для $\widehat{P}(Y)$ — p элементов. Область (I) степень сужения не усилит. Значит, композиция (I) и (IV) обеспечивает неравенство $|\widehat{P}(Y)| \leqslant p$.

Теперь исследуем случай (II) и (III). Здесь усиление в смысле степени сужения даёт область (II), принадлежность грани y' которой гарантирует выполнение $|\widehat{P}(Y)| = 1$.

Аналогично теореме 4 области (I) и (III) дают п. 3 теоремы, области (I) и (IV) соответствуют п. 2, области (II) и (III) — п. 1. Теорема 6 доказана.

Представленные результаты, в частности, свидетельствуют о том, что если множество Парето имеет структуру «каскад» или «лестница», причём число прямых ограничено константой или полиномом относительно длины входа задачи, то при соответствующем задании «кванта информации» мощность сужения будет также константой или полиномиальной относительно длины входа.

5. Сужение множества Парето в общем случае

Для любой дискретной задачи с двумя критериями можно найти минимальный по мощности набор параллельных прямых (с отрицательным угловым коэффициентом) такой, что все элементы множества Парето $P(Y)$ лежат на этих прямых. Трудоёмкость данной процедуры поиска составляет $O(n^4)$ операций, где $n = |P(Y)|$. Действительно, проводим через каждую пару векторов множества $P(Y)$ прямую l_i, $i = 1, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$. Если прямая l_i имеет отрицательный угловой коэффициент, то строим прямые, параллельные прямой l_i и проходящие через различные точки множества Парето, затем подсчитываем количество различных прямых. Рассмотрев все возможные варианты, находим требуемое множество параллельных прямых.

Теорема 7. *Пусть множество Парето равно*

$$P(Y) = \bigcup_{i=1}^{p} \{(y_1, y_2) \mid y_2 = a^{(i)} - ky_1,\ y_1 \in \widetilde{Y_1}\},$$

где $\widetilde{Y_1}$ — конечное множество точек, $a^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, и $k > 0$ — произвольные константные значения. Предположим, что $f_1 \to f_2\colon \theta_{12}$ и/или $f_2 \to f_1\colon \theta_{21}$ (в случае двух квантов информации выполняется условие непротиворечивости $\theta_{12} + \theta_{21} < 1$). Если $\theta_{12} \geqslant \frac{k}{k+1}$ или $\theta_{21} \geqslant \frac{1}{k+1}$, то $|\widehat{P}(Y)| \leqslant p$.

Доказательство. Как и ранее при доказательстве теорем 3–6, наличие одного или двух квантов информации означает, что отношению предпочтения сопоставляется соответствующий выпуклый конус M.

Согласно доказательствам теорем 3 и 4, если задан квант информации $f_1 \to f_2\colon \theta_{12}$, то при $\theta_{12} \geqslant \frac{k}{k+1}$ грань конуса M, соответствующая вектору $y' \in \mathbb{R}^2$, $y'_1 = 1 - \theta_{12}$ и $y'_2 = -\theta_{12}$, будет иметь коэффициент угла наклона больше или равный k. Значит, на каждой прямой останется не более одной точки, не доминируемой относительно конуса M. Следовательно, более одной точки с каждой прямой не может попасть в сужение множества Парето.

Аналогично, если задан квант информации $f_2 \to f_1\colon \theta_{21}$, то при $\theta_{21} \geqslant \frac{1}{k+1}$ грань конуса M, соответствующая вектору $y'' \in \mathbb{R}^2$, $y''_1 = -\theta_{21}$ и $y''_2 = 1 - \theta_{21}$, будет иметь коэффициент угла наклона меньше или равный k. Значит, более одной точки с каждой прямой не может попасть в сужение множества Парето.

Таким образом, при $\theta_{12} \geqslant \frac{k}{k+1}$ или $\theta_{21} \geqslant \frac{1}{k+1}$ каждая из параллельных прямых будет содержать не более одной точки множества Парето, не доминируемой относительно конуса M. Теорема 7 доказана.

Отметим, что получение более узкой оценки, чем $|\widehat{P}(Y)| \leqslant p$ при $\theta_{12} \geqslant \frac{k}{k+1}$ или $\theta_{21} \geqslant \frac{1}{k+1}$, зависит от расположения точек на прямых и коэффициентов компромисса. Теорема 7, по сути, опирается на минимальное число параллельных прямых, которые можно провести через точки множества Парето.

Во всех предыдущих теоремах структурно множество Парето рассматривалось как множество, точки которого лежат на определённом числе параллельных прямых. Теперь переходим к представлению в виде цепочки ломаных и соответствующих им прямых.

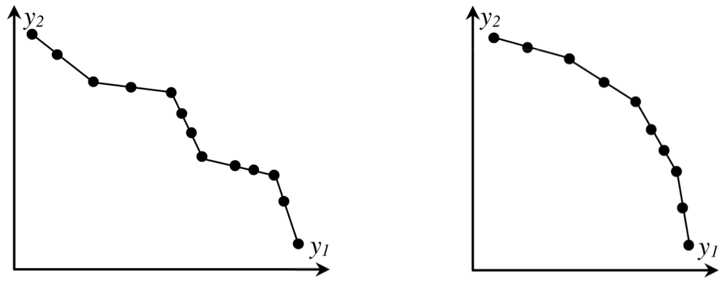


Рис. 4. Примеры «северо-восточной» границы многогранника (невыпуклый и выпуклый случаи)

Рассмотрим множество Парето произвольной двухкритериальной дискретной задачи. Если соединить точки множества Парето, то получится ломаная L, которая будет «северо-восточной» границей некоторого многогранника. Причём такой многогранник может быть как выпуклым, так и невыпуклым (рис. 4). Трудоёмкость построения ломаной составляет $O(nln(n))$, где $n = |P(Y)|$. Здесь реализуется упорядочивание точек множества Парето по первой координате и дальнейшее последовательное соединение точек отрезками прямых.

Ломаную L будем задавать p прямыми $y_2 = a^{(i)} - k^{(i)}y_1$, $i = 1, \dots, p$, так что $k^{(1)} \leqslant k^{(2)} \leqslant \dots \leqslant k^{(p)}$. В общем случае порядок отрезков ломаной не обязательно совпадает с порядком индексации $i = 1, \dots, p$. Совпадение будет в случае, когда ломаная является границей выпуклого многогранника. Введём обозначения n_i, где $n_i + 1$ — число точек на i-й прямой.

Теорема 8. *Пусть множество Парето равно*

$$P(Y) = \bigcup_{i=1}^{p} \{(y_1, y_2) \mid y_2 = a^{(i)} - k^{(i)}y_1,\ y_1 \in \widetilde{Y_1}\},$$

где $\widetilde{Y_1}$ — конечное множество точек, $a^{(i)}$, $i = 1, \dots, p$, и $0 < k^{(1)} \leqslant k^{(2)} \leqslant \dots \leqslant k^{(p)}$. Предположим, что $f_1 \to f_2 \colon \theta$.

1) *Если* $\theta < \frac{k^{(1)}}{k^{(1)}+1}$, *то сужение множества Парето* $\widehat{P}(Y)$ *совпадает с самим множеством Парето* $P(Y)$.

2) *Если* $\theta \geqslant \frac{k^{(i)}}{k^{(i)}+1}$, *то сужение множества Парето* $\widehat{P}(Y)$ *содержит не более* $|P(Y)| - \sum\limits_{j=1}^{i} n_j$ *элементов,* $i = 1, \ldots, p-1$.

3) *Если* $\theta \geqslant \frac{k^{(p)}}{k^{(p)}+1}$, *то сужение множества Парето состоит из одного элемента.*

Доказательство. 1) Рассмотрим точки двух произвольных отрезков ломаной, соответствующих прямым $\bar{y}$: $\bar{y}_2 = a^{(i)} - k^{(i)}\bar{y}_1$ и $\widehat{y}$: $\widehat{y}_2 = a^{(j)} - k^{(j)}\widehat{y}_1$, где $\bar{y}_1 < \widehat{y}_1$. Проведём через точку $\bar{y}$ прямую l': $y_2 = a' - k'y_1$ с угловым коэффициентом $k' < k^{(1)}$ и рассмотрим конус $M' = \mathrm{cone}\{e^2, (1, -k')\} \setminus \{0_2\} + \bar{y}$, соответствующий $\theta < \frac{k^{(1)}}{k^{(1)}+1}$.

Исходя из структуры ломаной и $k' < k^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$, получаем, что $\bar{y}_2 - \widehat{y}_2 > k'(\widehat{y}_1 - \bar{y}_1)$. Возьмём на прямой l' точку y': $\widehat{y}_1 = y'_1$. Тогда $\bar{y}_2 - y'_2 = k'(\widehat{y}_1 - \bar{y}_1)$.

Значит, точка y' расположена выше точки $\widehat{y}$, следовательно, $\widehat{y} \notin M'$. В силу произвольности выбора точек и прямых имеем $\widehat{P}(Y) = P(Y)$ при $\theta < \frac{k^{(1)}}{k^{(1)}+1}$.

2) Рассмотрим две произвольные точки одной прямой с угловым коэффициентом $k^{(i)}$. Доказательство основывается на том, что одна из двух точек будет доминировать другую относительно конуса $M = \mathrm{cone}\{e^1, (1-\theta, -\theta)\} \setminus \{0_2\}$ тогда и только тогда, когда $\theta \geqslant \frac{k^{(i)}}{k^{(i)}+1}$. Следовательно, если $\theta \geqslant \frac{k^{(i)}}{k^{(i)}+1}$, то в сужение множества Парето войдёт не более одной точки прямой с индексом $j = 1, \ldots, i$.

3) Аналогично п. 1 рассмотрим точки двух произвольных отрезков прямых, а именно $\bar{y}$: $\bar{y}_2 = a^{(i)} - k^{(i)}\bar{y}_1$ и $\widehat{y}$: $\widehat{y}_2 = a^{(j)} - k^{(j)}\widehat{y}_1$, где $\bar{y}_1 < \widehat{y}_1$. Проведём через точку $\bar{y}$ прямую l'': $y_2 = a'' - k''y_1$ с угловым коэффициентом $k'' \geqslant k^{(p)}$ и рассмотрим конус $M'' = \mathrm{cone}\{e^2, (1, -k'')\} \setminus \{0_2\} + \bar{y}$, соответствующий $\theta \geqslant \frac{k^{(p)}}{k^{(p)}+1}$.

На основании построения ломаной и справедливости неравенства $k'' \geqslant k^{(p)}$, $i = 1, \ldots, p$, имеем $\bar{y}_2 - \widehat{y}_2 \leqslant k''(\widehat{y}_1 - \bar{y}_1)$. Возьмём на прямой l'' точку y'': $\widehat{y}_1 = y''_1$, тогда $\bar{y}_2 - y''_2 = k''(\widehat{y}_1 - \bar{y}_1)$.

Значит, точка y'' расположена не выше точки $\widehat{y}$, следовательно, $\widehat{y} \in M''$. В результате в сужении множества Парето останется только крайняя правая точка из $P(Y)$ при $\theta \geqslant \frac{k^{(p)}}{k^{(p)}+1}$. Теорема 8 доказана.

Следствие 1. *Пусть ломаная L соответствует выпуклому многограннику (см. рис. 4), т. е. угловые коэффициенты отрезков ломаной слева направо не убывают. Тогда при $\frac{k^{(i)}}{k^{(i)}+1} \leqslant \theta < \frac{k^{(i+1)}}{k^{(i+1)}+1}$ сужение множества Парето $\widehat{P}(Y)$ содержит ровно $|P(Y)| - \sum\limits_{j=1}^{i} n_j$ элементов, $i = 1, \ldots, p-1$.*

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы 8, но задан квант информации $f_2 \to f_1 \colon \theta$.*

1) *Если $\theta < \frac{1}{k^{(p)}+1}$, то $\widehat{P}(Y) = P(Y)$.*

2) *Если $\theta \geqslant \frac{1}{k^{(i)}+1}$, то $\widehat{P}(Y)$ содержит не более чем $|P(Y)| - \sum\limits_{j=i}^{p} n_j$ элементов, $i = 2, \ldots, p$.*

3) *Если $\theta \geqslant \frac{1}{k^{(1)}+1}$, то $|\widehat{P}(Y)| = 1$.*

Доказательство. Здесь используются рассуждения, аналогичные рассуждениям доказательства теоремы 8.

1) Рассмотрим точки двух произвольных отрезков ломаной L, а именно $\bar{y}$: $\bar{y}_2 = a^{(i)} - k^{(i)}\bar{y}_1$ и $\widehat{y}$: $\widehat{y}_2 = a^{(j)} - k^{(j)}\widehat{y}_1$, где $\bar{y}_1 > \widehat{y}_1$. Проведём через точку $\bar{y}$ прямую l': $y_2 = a' - k'y_1$, $k' > k^{(p)}$, и рассмотрим конус $M' = \mathrm{cone}\{e^1, (-1, k')\} \setminus \{0_2\} + \bar{y}$, соответствующий $\theta < \frac{1}{k^{(p)}+1}$.

Исходя из структуры ломаной и неравенства $k' > k^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$, получаем $\widehat{y}_2 - \bar{y}_2 < k'(\bar{y}_1 - \widehat{y}_1)$. Возьмём на прямой l' точку y': $y'_1 = \widehat{y}_1$, тогда $y'_2 - \bar{y}_2 = k'(\bar{y}_1 - \widehat{y}_1)$.

Значит, точка y' расположена выше точки $\widehat{y}$, следовательно, $\widehat{y} \notin M'$. В силу произвольности выбора точек и отрезков ломаной имеем $\widehat{P}(Y) = P(Y)$ при $\theta < \frac{1}{k^{(p)}+1}$.

2) Доказательство аналогично доказательству п. 2 теоремы 8, при этом $M = \mathrm{cone}\{e^2, (-\theta, 1-\theta)\} \setminus \{0_2\}$. При условии $\theta \geqslant \frac{1}{k^{(i)}+1}$ среди точек множества Парето на прямой с индексом $j = i, \ldots, p$ в сужение множества Парето войдёт не более одной точки.

3) Аналогично п. 1 рассмотрим точки двух произвольных отрезков ломаной L, а именно $\bar{y}$: $\bar{y}_2 = a^{(i)} - k^{(i)}\bar{y}_1$ и $\widehat{y}$: $\widehat{y}_2 = a^{(j)} - k^{(j)}\widehat{y}_1$, где $\bar{y}_1 > \widehat{y}_1$. Проведём через точку $\bar{y}$ прямую l'': $y_2 = a'' - k''y_1$, $k'' \leqslant k^{(1)}$, и рассмотрим конус $M'' = \mathrm{cone}\{e^1, (-1, k'')\} \setminus \{0_2\} + \bar{y}$, соответствующий $\theta \geqslant \frac{1}{k^{(1)}+1}$.

Поскольку $k'' \leqslant k^{(i)})i = 1, \ldots, p$, то $\widehat{y}_2 - \bar{y}_2 \geqslant k''(\bar{y}_1 - \widehat{y}_1)$. Возьмём на прямой l'' точку y'': $y''_1 = \widehat{y}_1$, тогда $y''_2 - \bar{y}_2 = k''(\bar{y}_1 - \widehat{y}_1)$.

Значит, точка y'' расположена не выше точки $\widehat{y}$, следовательно, $\widehat{y} \in M''$. В результате в сужении множества Парето останется только крайняя левая точка из $P(Y)$ при $\theta \geqslant \frac{1}{k^{(1)}+1}$. Теорема 9 доказана.

Следствие 2. *Если ломаная L соответствует выпуклому многограннику (см. рис. 4), то при* $\frac{1}{k^{(i)}+1} \leqslant \theta < \frac{1}{k^{(i-1)}+1}$ *сужение множества Парето* $\widehat{P}(Y)$ *содержит ровно* $|P(Y)| - \sum\limits_{j=i}^{p} n_j$ *элементов,* $i = 2, \ldots, p$.

На основании теорем 8 и 9 приходим к следующему результату.

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы 8, но задано два «кванта информации» одновременно* $f_1 \to f_2\colon \theta_{12}$ *и* $f_2 \to f_1\colon \theta_{21}$, $\theta_{12} + \theta_{21} < 1$. *Тогда справедливы следующие оценки мощности сужения множества Парето* $\widehat{P}(Y)$.

1) *Если* $\theta_{21} < \frac{1}{k^{(p)}+1}$ *и* $\theta_{12} < \frac{k^{(1)}}{k^{(1)}+1}$, *то* $\widehat{P}(Y) = P(Y)$.

2) *Если* $\theta_{21} \geqslant \frac{1}{k^{(i)}+1}$ *и* $\theta_{12} < \frac{k^{(1)}}{k^{(1)}+1}$, *то*

$$|\widehat{P}(Y)| \leqslant |P(Y)| - \sum_{j=i}^{p} n_j, \quad i = 2, \ldots, p.$$

3) *Если* $\theta_{12} \geqslant \frac{k^{(i)}}{k^{(i)}+1}$ *и* $\theta_{21} < \frac{1}{k^{(p)}+1}$, *то*

$$|\widehat{P}(Y)| \leqslant |P(Y)| - \sum_{j=1}^{i} n_j, \quad i = 1, \ldots, p-1.$$

4) *Если* $\theta_{12} \geqslant \frac{k^{(i)}}{k^{(i)}+1}$ *и* $\theta_{21} \geqslant \frac{1}{k^{(i')}+1}$, *то*

$$|\widehat{P}(Y)| \leqslant |P(Y)| - \sum_{j=1}^{i} n_j - \sum_{j=i'}^{p} n_j, \quad i = 1, \ldots, p-1,\ i' = i+1, \ldots, p.$$

5) *Если* $\theta_{21} \geqslant \frac{1}{k^{(1)}+1}$ *или* $\theta_{12} \geqslant \frac{k^{(p)}}{k^{(p)}+1}$, *то* $|\widehat{P}(Y)| = 1$.

6. Примеры задач дискретной оптимизации

В настоящем разделе строятся семейства задач дискретной оптимизации, где множество Парето имеет структуру «каскад» и/или «лестница». Рассматриваются такие задачи, где допустимое решение есть некоторое подмножество из заданного в исходных данных множества вариантов (альтернатив). В частности, приводятся примеры задачи маршрутизации с альтернативными способами перемещения между пунктами и задачи о покрытии с альтернативными подмножествами покрывающих элементов. Семейства задач с указанными структурами множества Парето будут обладать тем свойством, что все имеющиеся варианты разбиваются на группы и допустимые решения формируются путём выбора одного варианта в каждой группе. Это позволит получить прямые, структурированные в требуемой форме.

6.1. Задача о покрытии. Рассмотрим модификацию классической задачи о покрытии с двумя критериями. Пусть $R = (r_{ji})$ обозначает 0-1 матрицу с N_r строками и N_c столбцами, а $c = (c_i)$, $u = (u_i)$ — N_c-мерные векторы, представляющие веса столбцов. Предполагается, что $c_i > 0$ и $u_i > 0$, $i = 1, \ldots, N_c$. Будем говорить, что столбец i покрывает строку j, если $r_{ji} = 1$. Подмножество столбцов S называется допустимым, если каждая строка j покрыта хотя бы одним столбцом $i \in S$. Суммарные веса $f_1(S) = \sum\limits_{i \in S} u_i$ и $f_2(S) = \sum\limits_{i \in S} (-c_i)$ максимизируются на всех возможных подмножествах S таких, что $|S| \leqslant b$, где b — заданная константа из множества $\{1, \ldots, N_c\}$.

Приложением задачи о покрытии является задача управления поставками. Здесь строки соответствуют типам заказов, а столбцы интерпретируются как транспортные компании, которые могут поставлять отдельные типы заказов. Если $r_{ji} = 1$, то это означает, что компания i может осуществить поставку заказа типа j, $i = 1, \ldots, N_c$, $j = 1, \ldots, N_r$. Величины c_i и u_i задают стоимость обслуживания и уровень производительности компании $i = 1, \ldots, N_c$. Константа b определяет верхнюю границу на число компаний, выбранных для обслуживания. Аналогичную интерпретацию имеет задача управления производством, где строки представляют типы работ, а производственные компании задают столбцы.

Ещё одним приложением является задача размещения центров обслуживания. Центры могут размещаться в N_c точках некоторого региона, состоящего из N_r зон (или имеющего N_r транспортных маршрутов). Матрица $R = (r_{ji})$ указывает зоны (или маршруты), которые могут обслуживаться центрами в точках региона. Стоимость размещения и коэффициент эффективности для центра в точке i задаются соответственно величинами c_i и u_i. Максимальное количество открытых центров не должно превосходить b. В работах [12–15] представлены другие интерпретации задачи о покрытии и её обобщений.

6.2. Задача маршрутизации. Рассмотрим задачу маршрутизации с одним транспортным средством, представляющую собой обобщение задачи коммивояжёра. Даны конечные множества $M_1, \ldots, M_n$, называемые мегаполисами, и начальный пункт t_0, не принадлежащий ни одному из указанных множеств. Обозначим через n_j число элементов в множестве M_j, и пусть $M_j = \{m_{j1}, \ldots, m_{jn_j}\}$. Заданы стоимости (и эффективности) перемещений между пунктами $c(t_0, m_{ji})$, $c(m_{ji}, t_0)$ и $c(m_{ji}, m_{j'i'})$ (и $u(t_0, m_{ji})$, $u(m_{ji}, t_0)$ и $u(m_{ji}, m_{j'i'})$), а также стоимости (и эффективности) посещения пунктов мегаполисов $c'(m_{ji})$ (и $u'(m_{ji})$). Допустимое решение представляет собой пару: перестановка π (маршрут), определяющая порядок посещения мегаполисов, и последовательность τ (трасса),

задающая пункты посещения. Для решения $(\pi,\,\tau)$ суммарные стоимость и эффективность вычисляются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
c(\pi,\tau) = c(t_0, m_{\pi(1),\tau(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} c(m_{\pi(i),\tau(i)}, m_{\pi(i+1),\tau(i+1)}) \\
+ \sum_{i=1}^{n} c'(m_{\pi(i),\tau(i)}) + c(m_{\pi(n),\tau(n)}, t_0) \to \min, \\
u(\pi,\tau) = u(t_0, m_{\pi(1),\tau(1)}) + \sum_{i=1}^{n-1} u(m_{\pi(i),\tau(i)}, m_{\pi(i+1),\tau(i+1)}) \\
+ \sum_{i=1}^{n} u'(m_{\pi(i),\tau(i)}) + u(m_{\pi(n),\tau(n)}, t_0) \to \max\,.
\end{aligned}
$$

Приложением задачи маршрутизации является задача составления расписаний по удовлетворению потребностей клиентов [16]. У клиента имеется n потребностей, которые могут быть удовлетворены в пунктах, находящихся на некотором расстоянии друг от друга (например, прохождение медицинских обследований в сетях клиник). Для каждой потребности i известны пункты M_i, где она может быть реализована. Заданы длительности и степени комфорта перемещения между пунктами, а также длительности и степени комфорта обслуживания потребностей в пунктах. Требуется найти расписания удовлетворения потребностей клиента, при которых суммарная длительность минимизируется, а суммарная степень комфорта максимизируется.

Также рассматриваемая задача маршрутизации возникает при работе с базами данных с индексными методами доступа [17], имеет приложения в задачах о демонтаже оборудования АЭС (выводимого из эксплуатации), инженерных задачах, связанных с маршрутизацией перемещений инструмента при высокоточной листовой резке на станках с числовым программным управлением (см., например, [18, 19]).

6.3. Примеры множества Парето.

Структуры «каскад» и «лестница». Здесь и далее пусть T — произвольная положительная константа. Рассмотрим множество Парето, состоящее из pq элементов и имеющее вид

$$
\begin{aligned}
P_1(Y) = \{(T + (l-1)p + i; -T - (l-1)(2p-1) - i), \\
i = 1, \ldots, p,\; l = 1, \ldots, q\}.
\end{aligned}
$$

Данное множество Парето иллюстрирует структуры «каскад» и «лестница» одновременно. Если рассматривать множество Парето с точки зрения структуры «лестница», то $P(Y)$ состоит из p параллельных прямых,

содержащих по q точек вида

$$y_2^i = -\frac{2p-1}{p}y_1^i + \left(T\frac{p-1}{p} + i\frac{p-1}{p}\right),$$
$$y_1^i \in Y_1^i = \{T + (l-1)p + i,\, l = 1, \dots, q\},$$

$i = 1, \dots, p$. На каждой прямой расстояние между соседними точками составляет p по первому критерию и равно $2p-1$ по второму критерию. Если же рассматривать множество Парето с точки зрения структуры «каскад», то $P(Y)$ содержит q параллельных прямых, каждая из которых включает в себя p точек вида

$$y_2^l = -y_1^l + (l-1)(1-p), \quad y_1^l \in Y_1^l = \{T + (l-1)p + i,\, i = 1, \dots, p\},$$

$l = 1, \dots, q$. Соседние точки одной прямой находятся на единичном расстоянии друг от друга по двум критериям.

Если $f_1 \to f_2\colon \theta$, то в случае $p > 1$

(1) при $\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ сужения нет;

(2) при $\theta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2p-1}{3p-1}\right)$ сужение множества Парето состоит из q точек;

(3) при $\theta \in \left[\frac{2p-1}{3p-1}, 1\right)$ сужение множества Парето одноэлементно.

Если $f_2 \to f_1\colon \theta$, то в случае $p > 1$

(1) при $\theta \in \left(0, \frac{p}{3p-1}\right)$ сужение множества Парето содержит по крайней мере $p+q-1$ точек;

(2) при $\theta \in \left[\frac{p}{3p-1}, \frac{1}{2}\right)$ сужение множества Парето состоит из p элементов;

(3) при $\theta \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ сужение множества Парето одноэлементно.

Если $f_1 \to f_2\colon \theta_{12}$ и $f_2 \to f_1\colon \theta_{21}$, то в случае $p > 1$

(1) при $\theta_{12} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\theta_{21} \in \left(0, \frac{p}{3p-1}\right)$ сужение множества Парето состоит по крайней мере из $\max\{p, q\}$ элементов; при $\theta_{12} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2p-1}{3p-1}\right)$ и $\theta_{21} \in \left[\frac{p}{3p-1}, \frac{1}{2}\right)$ сужение множества Парето состоит из не более чем $\min\{p, q\}$ элементов;

(2) при $\theta_{21} \in \left[\frac{p}{3p-1}, \frac{1}{2}\right)$ и $\theta_{12} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ сужение множества Парето состоит из p элементов; при $\theta_{21} \in \left(0, \frac{p}{3p-1}\right)$ и $\theta_{12} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2p-1}{3p-1}\right)$ сужение множества Парето состоит из q элементов;

(3) при $\theta_{21} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ или $\theta_{12} \in \left[\frac{2p-1}{3p-1}, 1\right)$ сужение множества Парето состоит из одного элемента.

Во всех рассмотренных случаях пп. (2) и (3) гарантируют точное число элементов в сужении множества Парето. В то же время п. (1) во втором и третьем случаях даёт нижнюю оценку числа элементов в сужении множества Парето.

Задача о покрытии. Пусть $N_r = 2$, $b = 2$ и $N_c = p + q$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Первые p столбцов покрывают только первую строку, а следующие q столбцов покрывают только вторую строку, т. е. $r_{1,i} = 1$, $r_{2,i} = 0$, $r_{1,l+p} = 0$, $r_{2,l+p} = 1$ для $i = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$. Следовательно, любое допустимое решение состоит из одного из первых p столбцов и одного из последних q столбцов.

Пусть веса столбцов задаются так, что $u_i = c_i = i$ для столбцов с индексом $i = 1, \ldots, p$ и $u_{l+p} = T + (l-1)p$, $c_{l+p} = T + (l-1)(2p-1)$ для столбцов с индексом $l + p$, $l = 1, \ldots, q$. Тогда множество Парето для указанного семейства примеров равно $P_1(Y)$.

Задача маршрутизации. Пусть $n = 2$, $M_1 = \{m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{1p}\}$, $M_2 = \{m_{21}, m_{22}, \ldots, m_{2q}\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \geqslant 0$ — произвольные заданные константы такие, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$. Определим веса дуг по первому критерию:

$$u(t_0, m_{1i}) = i, \quad u(m_{1i}, m_{2l}) = (l-1)p, \quad u(m_{2l}, t_0) = \alpha T$$

и веса дуг по второму критерию:

$$c(t_0, m_{1i}) = i, \quad c(m_{1i}, m_{2l}) = (l-1)(2p-1), \quad c(m_{2l}, t_0) = \alpha' T,$$

где $i = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$. Веса дуг из начального пункта во второй мегаполис, из второго мегаполиса в первый мегаполис и из первого мегаполиса в начальный пункт равны бесконечности. Веса посещения пунктов мегаполисов равны

$$u'(m_{1i}) = \beta T, \quad u'(m_{2l}) = \gamma T, \quad c'(m_{1i}) = \beta' T, \quad c'(m_{2l}) = \gamma' T,$$

$i = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$. Тогда все маршруты, посещающие сначала первый мегаполис, а затем второй, парето-оптимальны, а множество Парето равно $P_1(Y)$.

Структура «лестница». Рассмотрим множество Парето следующего вида:

$$P_2(Y) = \{(T + (l-1)p + i; -T - (l-1)(p+1) - i(i+1)/(2p)), \\ i = 1, \ldots, p, \; l = 1, \ldots, q\}.$$

Данное множество имеет структуру «лестница», но не характеризуется структурой «каскад». Имеем p параллельных прямых, содержащих по q точек вида

$$y_2^i = -\frac{p+1}{p} y_1^i + \left(\frac{T}{p} + \frac{i(2p - i + 1)}{2p}\right), \\ y_1^i \in Y_1^i = \{T + (l-1)p + i, \; l = 1, \ldots, q\},$$

$i = 1, \ldots, p$. Расстояние между соседними точками прямой составляет p по первому критерию и равно $p + 1$ по второму критерию.

Предположим, что $f_1 \to f_2 \colon \theta$. Тогда в случае $p > 1$
(1) если $\theta \in \left(0, \frac{p+1}{2p+1}\right)$, то $|\widehat{P}(Y)| \geqslant q$;
(2) если $\theta \in \left[\frac{p+1}{2p+1}, 1\right)$, то $|\widehat{P}(Y)| = 1$.
Предположим, что $f_2 \to f_1 \colon \theta$. Тогда в случае $p > 1$
(1) если $\theta \in \left(0, \frac{p}{2p+1}\right)$, то $|\widehat{P}(Y)| \geqslant p + q - 1$;
(2) если $\theta \in \left[\frac{p}{2p+1}, 1\right)$, то $|\widehat{P}(Y)| \leqslant p$.
Предположим, что $f_1 \to f_2 \colon \theta_{12}$ и $f_2 \to f_1 \colon \theta_{21}$. Тогда в случае $p > 1$
(1) если $\theta_{21} \in \left(0, \frac{p}{2p+1}\right)$ и $\theta_{12} \in \left(0, \frac{p+1}{2p+1}\right)$, то $|\widehat{P}(Y)| \geqslant q$;
(2) если $\theta_{12} \in \left(0, \frac{p+1}{2p+1}\right)$ и $\theta_{21} \in \left[\frac{p}{2p+1}, 1\right)$, то $|\widehat{P}(Y)| \leqslant p$;
(3) если $\theta_{12} \in \left[\frac{p+1}{2p+1}, 1\right)$ и $\theta_{21} \in \left(0, \frac{p}{2p+1}\right)$, то $|\widehat{P}(Y)| = 1$.

Задача о покрытии. Пример строится по тому же правилу, что и в предыдущем подпункте, за исключением весов столбцов, т. е. $N_r = 2$, $b = 2$, $N_c = p + q$, причём первые p столбцов покрывают только первую строку, а последние q столбцов покрывают только вторую строку.

Зададим веса $u_i = i$, $c_i = \frac{i(i+1)}{2p}$ для столбцов с индексами $i = 1, \ldots, p$ и $u_{l+p} = T + (l-1)p$, $c_{l+p} = T + (l-1)(p+1)$ для столбцов с индексами $l+p$, $l = 1, \ldots, q$. В таком случае множество Парето определяется $P_2(Y)$.

Задача маршрутизации. Пример строится так же, как и в предыдущем подпункте за исключением весов дуг, т. е. $n = 2$, $M_1 = \{m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{1p}\}$, $M_2 = \{m_{21}, m_{22}, \ldots, m_{2q}\}$.

Пусть веса дуг по первому критерию равны

$$u(t_0, m_{1i}) = i, \quad u(m_{1i}, m_{2l}) = (l-1)p, \quad u(m_{2l}, t_0) = \alpha T,$$

а веса дуг по второму критерию равны

$$c(t_0, m_{1i}) = \frac{i(i+1)}{2p}, \quad c(m_{1i}, m_{2l}) = (l-1)(p+1), \quad c(m_{2l}, t_0) = \alpha' T,$$

где $i = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$. Веса остальных дуг равны бесконечности по двум критериям. Веса посещения пунктов мегаполисов равны

$$u'(m_{1i}) = \beta T, \quad u'(m_{2l}) = \gamma T, \quad c'(m_{1i}) = \beta' T, \quad c'(m_{2l}) = \gamma' T,$$

$i = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$. Тогда все маршруты, посещающие сначала первый мегаполис, а затем второй, парето-оптимальны, а множество Парето равно $P_2(Y)$.

Структура «каскад». Рассмотрим множество Парето

$$\begin{aligned} P_3(Y) = \{(&T + (l-1)p/2 + (l-1)p + i; \\ &- T - (l-1)p/2 - (l-1)p - (2l-2)(p-1) - i), \\ &i = 1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, q/2\} \cup \{(T + lp/2 + (l-1)p + p/2 + i; \end{aligned}$$

$$- T - lp/2 - (l-1)p - (2l-1)(p-1) - p/2 - i),$$
$$i = 1,\dots,p/2,\ l = 1,\dots,p/2\}.$$

Оно имеет структуру «каскад», но не обладает структурой «лестница». Множество Парето состоит из q параллельных прямых, каждая из которых содержит p или $\frac{p}{2}$ точек вида

$$y_2^{2l-1} = -y_1^{2l-1} + (2l-2)(1-p),$$
$$y_1^{2l-1} \in Y_1^{2l-1} = \{T + (l-1)p/2 + (l-1)p + i,\ i = 1,\dots,p\}, \quad l = 1,\dots,q/2;$$
$$y_2^{2l} = -y_1^{2l} + (2l-1)(1-p),$$
$$y_1^{2l} \in Y_1^{2l} = \{T + (l+1)p/2 + (l-1)p + i,\ i = 1,\dots,p/2\}, \quad l = 1,\dots,q/2.$$

Расстояния между соседними точками одной прямой равны единице.

Предположим, что $f_1 \to f_2 \colon \theta$. Тогда в случае $p > 1$
(1) если $\theta \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$, то сужения нет;
(2) если $\theta \in \big[\frac{1}{2}, 1\big)$, то $|\widehat{P}(Y)| \leqslant q$.

Предположим, что $f_2 \to f_1 \colon \theta$. Тогда в случае $p > 1$
(1) если $\theta \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$, то $|\widehat{P}(Y)| \geqslant p$;
(2) если $\theta \in \big[\frac{1}{2}, 1\big)$, то $|\widehat{P}(Y)| = 1$.

Предположим, что $f_1 \to f_2 \colon \theta_{12}$ и $f_2 \to f_1 \colon \theta_{21}$. Тогда в случае $p > 1$
(1) если $\theta_{21} \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$ и $\theta_{12} \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$, то $|\widehat{P}(Y)| \geqslant p$;
(2) если $\theta_{12} \in \big[\frac{1}{2}, 1\big)$ и $\theta_{21} \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$, то $|\widehat{P}(Y)| \leqslant q$;
(3) если $\theta_{21} \in \big[\frac{1}{2}, 1\big)$ и $\theta_{12} \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$, то $|\widehat{P}(Y)| = 1$.

Задача о покрытии. Пусть $N_r = 3$, $b = 2$ и $N_c = p + q$, где $p, q \in \mathbb{N}$ и p чётное. Первые $\frac{p}{2}$ столбцов покрывают только первую строку, т. е. $r_{1,i} = 1$, $r_{2,i} = 0$, $r_{3,i} = 0$ для $i = 1,\dots,\frac{p}{2}$, следующие $\frac{p}{2}$ столбцов покрывают первую и вторую строки, т. е. $r_{1,\frac{p}{2}+i} = 1$, $r_{2,\frac{p}{2}+i} = 1$, $r_{3,\frac{p}{2}+i} = 0$ для $i = 1,\dots,\frac{p}{2}$. Нечётные столбцы $p + 2l - 1$ покрывают вторую и третью строки, т. е. $r_{1,p+2l-1} = 0$, $r_{2,p+2l-1} = 1$, $r_{3,p+2l-1} = 1$ для $l = 1,\dots,\frac{q}{2}$, а чётные столбцы $p+2l$ покрывают только третью строку, т. е. $r_{1,p+2l} = 0$, $r_{2,p+2l} = 0$, $r_{3,p+2l} = 1$ для $l = 1,\dots,\frac{q}{2}$. Следовательно, множество допустимых решений составляют пары столбцов i и $p+2l-1$, где $i = 1,\dots,p$ и $l = 1,\dots,\frac{q}{2}$, и пары столбцов i и $p+2l$, где $i = \frac{p}{2}+1,\dots,p$ и $l = 1,\dots,\frac{q}{2}$.

Пусть веса равны $u_i = c_i = i$ для столбцов $i = 1,\dots,p$ и

$$u_{p+2l-1} = T + (l-1)p/2 + (l-1)p, \quad u_{p+2l} = T + lp/2 + (l-1)p,$$
$$c_{p+2l-1} = T + (l-1)p/2 + (l-1)p + (2l-2)(p-1),$$
$$c_{p+2l} = T + lp/2 + (l-1)p + (2l-1)(p-1)$$

для $l = 1,\dots,\frac{q}{2}$. Тогда множество Парето имеет вид $P_3(Y)$.

Задача маршрутизации. Пусть $n = 2$, $M_1 = \{m_{11}, m_{12}, \ldots, m_{1p}\}$ (p чётное), $M_2 = \{m_{21}, m_{22}, \ldots, m_{2q}\}$, $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \geqslant 0$ — произвольные заданные константы такие, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$.

Пусть веса дуг по первому критерию равны

$$u(t_0, m_{1i}) = i, \quad u(m_{2l}, t_0) = \alpha T, \quad i = 1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, q;$$

$$u(m_{1i}, m_{2,2l-1}) = (l-1)p/2 + (l-1)p, \quad i = 1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, q/2,$$

$$u(m_{1i}, m_{2,2l}) = lp/2 + (l-1)p \quad i = p/2+1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, q/2.$$

Веса дуг по второму критерию равны

$$c(t_0, m_{1i}) = i, \quad c(m_{2l}, t_0) = \alpha' T, \quad i = 1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, q;$$

$$c(m_{1i}, m_{2,2l-1}) = (l-1)p/2 + (l-1)p + (2l-2)(p-1),$$
$$i = 1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, q/2,$$

$$c(m_{1i}, m_{2,2l}) = lp/2 + (l-1)p + (2l-1)(p-1),$$
$$i = p/2+1, \ldots, p,\ l = 1, \ldots, q/2.$$

Веса остальных дуг равны бесконечности. Веса посещения пунктов мегаполисов равны

$$u'(m_{1i}) = \beta T, \quad u'(m_{2l}) = \gamma T, \quad c'(m_{1i}) = \beta' T, \quad c'(m_{2l}) = \gamma' T,$$

$i = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$. Тогда все маршруты, посещающие сначала первый мегаполис, а затем второй, парето-оптимальны, а множество Парето равно $P_3(Y)$.

Заключение

Проведено исследование задач дискретной оптимизации с двумя критериями в контексте аксиоматического подхода к сужению множества Парето. Выделены и проанализированы два типа структур множества Парето: «каскад» и «лестница», построены семействах задач о покрытии и маршрутизации с указанными структурами. Выводы показывают граничные значения для коэффициента компромисса, когда сужение множества Парето имеет место. Представленные результаты помогают ЛПР в формировании окончательного выбора и корректировке коэффициента компромисса.

Дальнейшие исследования могут быть направлены на изучение более сложных структур множества Парето, например, суперпозиции структур «каскад» и «лестница» и их обобщений. Также представляет интерес анализ случаев, когда исходные данные и/или информация о предпочтениях ЛПР являются нечёткими I или II рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ларичев О. И.** Теория и методы принятия решений, а также хроника событий в волшебных странах. М.: Логос, 2006. 392 с.
2. **Лотов А. В., Поспелова И. И.** Многокритериальные задачи принятия решений. М.: МАКС Пресс, 2008. 197 с.
3. **Петровский А. Б.** Теория принятия решений. М.: Изд. центр «Академия», 2009. 400 с.
4. **Ishizaka A., Nemery P.** Multi-criteria decision analysis: Methods and software. Hoboken, NJ: Wiley, 2013. 328 p.
5. **Ehrgott M., Figueira J. L., Greco S.** Trends in multiple criteria decision analysis. New York: Springer, 2010. 412 p.
6. **Greco S., Ehrgott M., Figueira J. L.** Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys. New York: Springer, 2016. 1347 p.
7. **Ларичев О. И.** Вербальный анализ решений. М.: Наука, 2006. 181 с.
8. **Ногин В. Д.** Сужение множества Парето. Аксиоматический подход. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. 272 с.
9. **Zakharov A. O., Kovalenko Yu. V.** Reduction of the Pareto set in bicriteria Asymmetric Traveling Salesman Problem // Optimization Problems and Their Applications. Rev. Sel. Pap. 7th Int. Conf. (Omsk, Russia, July 8–14, 2018). Cham: Springer, 2018. P. 93–105. (Commun. Comput. Inf. Sci.; Vol. 871).
10. **Zakharov A. O., Kovalenko Yu. V.** Construction and reduction of the Pareto set in asymmetric travelling salesman problem with two criteria // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14, № 4. С. 378–392.
11. **Zakharov A. O., Kovalenko Yu. V.** Structures of the Pareto set and their reduction in bicriteria discrete problems // J. Phys. Conf. Ser. 2019. Vol. 1260, No. 8. P. 082007:1–082007:8.
12. **Christofides N.** Graph theory: An algorithmic approach. London: Acad. Press, 1975. 400 p.
13. **Еремеев А. В., Заозерская Л. А., Колоколов А. А.** Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2000. Т. 7, № 2. С. 22–46.
14. **Нечепуренко М. И., Попков В. К., Майнагашев С. М., Кауль С. М., Проскуряков В. А., Кохов В. А., Грызунов А. Б.** Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. Новосибирск: Наука, 1990. 521 с.
15. **Kolokolov A. A., Zaozerskaya L. A.** Solving a bicriteria problem of optimal service centers location // J. Math. Model. Algorithms. 2013. Vol. 12. P. 105–116.
16. **Saksena J.** Mathematical model for scheduling clients through welfare agencies // J. Can. Oper. Res. Soc. 1970. Vol. 8. P. 185–200.
17. **Henry-Labordere A.** The record balancing problem: A dynamic programming solution of a generalized traveling salesman problem // Rev. Franç. Inform. Rech. Opér. 1969. Vol. 3, No. B-2. P. 43–49.

18. **Хачай М. Ю., Незнахина Е. Д.** Приближенные схемы для обобщенной задачи коммивояжера // Тр. Ин-та математики и механики. 2016. Т. 22, № 3. С. 283–292.
19. **Ченцов А. Г., Хачай М. Ю., Хачай Д. М.** Точный алгоритм с линейной трудоемкостью для одной задачи обхода мегаполисов // Тр. Ин-та математики и механики. 2015. Т. 21, № 3. С. 309–317.

Захаров Алексей Олегович
Коваленко Юлия Викторовна

Статья поступила
19 апреля 2021 г.
После доработки —
8 июня 2021 г.
Принята к публикации
10 июня 2021 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2021. Vol. 28, No. 4. P. 90–116

UDC 519.816+519.854.2 DOI 10.33048/daio.2021.28.712

THE REDUCTION OF THE PARETO SET OF A SPECIAL STRUCTURE IN BICRITERIA DISCRETE PROBLEMS

A. O. Zakharov[1, a] and *Yu. V. Kovalenko*[2, b]

[1] St. Petersburg State University,
7–9 Universitetskaya Embankment, 199034 St. Petersburg, Russia
[2] Sobolev Institute of Mathematics,
13 Pevtsov Street, 644099 Omsk, Russia
E-mail: [a] `zakh.alexey@gmail.com`, [b] `julia.kovalenko.ya@yandex.ru`

Abstract. We investigate bicriteria discrete optimization problems in the context of the axiomatic approach of the Pareto set reduction. The degree of the reduction with respect to values of the coefficient of compromise is evaluated for special structures and general case of the Pareto set. The results are applied to the set covering problem and vehicle routing problems. Illustr. 4, bibliogr. 19.

Keywords: discrete optimization, bicriteria problem, the Pareto set reduction, preference relation of the decision maker.

REFERENCES

1. **O. I. Larichev,** *Decision-Making Theory and Methods, as well as a Chronicle of Events in Magical Lands* (Logos, Moscow, 2006) [Russian].
2. **A. V. Lotov** and **I. I. Pospelova,** *Multi-Criteria Decision Making Problems* (MAKS Press, Moscow, 2008) [Russian].
3. **A. B. Petrovsky,** *Decision Making Theory* (Akademiya, Moscow, 2009) [Russian].
4. **A. Ishizaka** and **P. Nemery,** *Multi-Criteria Decision Analysis: Methods and Software* (Wiley, Hoboken, NJ, 2013).
5. **M. Ehrgott, J. L. Figueira,** and **S. Greco,** *Trends in Multiple Criteria Decision Analysis* (Springer, New York, 2010).

The work of the first author (Sections 1, 3, 5) is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 20–07–00298); the work of the second author (Sections 2, 4, 6) is supported by the Program of Fundamental Scientific Research of SB RAS No. I.5.1 (Project 0314–2019–0019).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (4) (2021).

6. **S. Greco, M. Ehrgott,** and **J. L. Figueira,** *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys* (Springer, New York, 2016).
7. **O. I. Larichev,** *Verbal Analysis of Solutions* (Nauka, Moscow, 2006) [Russian].
8. **V. D. Nogin,** *Pareto Set Reduction: An Axiomatic Approach* (FIZMATLIT, Moscow, 2016) [Russian].
9. **A. O. Zakharov** and **Yu. V. Kovalenko,** Reduction of the Pareto set in bicriteria Asymmetric Traveling Salesman Problem, in *Optimization Problems and Their Applications* (Proc. 7th Int. Conf. OPTA 2018, Omsk, Russia, July 8–14, 2018) (Springer, Heidelberg, 2018), pp. 93–105 (CCIS, Vol. 871).
10. **A. O. Zakharov** and **Yu. V. Kovalenko,** Construction and reduction of the Pareto set in Asymmetric Travelling Salesman Problem with two criteria, *Vestn. S. Petersburg Univ., Appl. Math. Comput. Sci. Control Processes* **14** (4), 378–392 (2018).
11. **A. O. Zakharov** and **Yu. V. Kovalenko,** Structures of the Pareto set and their reduction in bicriteria discrete problems, *J. Phys., Conf. Series* **1260** (8), 082007:1–082007:8 (2019).
12. **N. Christofides,** *Graph Theory. An Algorithmic Approach* (Academic Press, London, 1975).
13. **A. V. Eremeev, L. A. Zaozerskaya,** and **A. A. Kolokolov,** A set covering problem: Complexity, algoritms, experimental research, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **7** (2), 22–46 (2000) [Russian].
14. **M. I. Nechepurenko, V. K. Popkov, S. M. Majnagashev, S. B. Kaul', V. A. Proskuryakov, V. A. Kohov,** and **A. B. Gryzunov,** *Algorithms and Programs for Solving Problems on Graphs and Networks* (Nauka, Novosibirsk, 1990) [Russian].
15. **A. A. Kolokolov** and **L. A. Zaozerskaya,** Solving a bicriteria problem of optimal service centers location, *J. Math. Model. Algorithms* **12**, 105–116 (2013).
16. **J. Saksena,** Mathematical model for scheduling clients through welfare agencies, *J. Can. Oper. Res. Soc.* **8**, 185–200 (1970).
17. **A. Henry-Labordere,** The record balancing problem: A dynamic programming solution of a generalized traveling salesman problem, *Rev. Franç. Inform. Rech. Opér.* **3** (B-2), 43–49 (1969).
18. **M. Yu. Khachai** and **E. D. Neznakhina,** Approximation schemes for the Generalized Traveling Salesman Problem, *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN* **22** (3), 283–292 (2016) [Russian] [*Proc. Steklov Inst. Math.* **299** (1), 97–105 (2017)].
19. **A. G. Chentsov, M. Yu. Khachai,** and **D. M. Khachai,** An exact algorithm with linear complexity for a problem of visiting megalopolises, *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN* **21** (3), 309–317 (2015) [Russian] [*Proc. Steklov Inst. Math.* **295** (1), 38–46 (2016)].

Aleksey O. Zakharov
Yulia V. Kovalenko

Received April 19, 2021
Revised June 8, 2021
Accepted June 10, 2021