ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2021. Т. 28, № 4. С. 61–69

УДК 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2021.28.715

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ПОМЕЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ k-ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ БЕЗ МОСТОВ

В. А. Воблый

Всероссийский институт научной и технической информации,
ул. Усиевича, 20, 125190, Москва, Россия
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

Аннотация. Получена асимптотика для числа помеченных связных последовательно-параллельных k-циклических n-вершинных графов без мостов при большом числе вершин и фиксированном числе k. Доказывается, что почти все помеченные последовательно-параллельные k-циклические связные графы без мостов при фиксированном k являются блоками. Библиогр. 17.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, блок, граф без мостов, последовательно-параллельный граф, k-циклический граф, асимптотика, случайный граф.

Определение 1. *Последовательно-параллельным* графом называется граф, не содержащий подразбиения полного графа K_4 [1].

Определение 2. *Цикломатическим числом* (*циклическим рангом*) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом рёбер графа и числом его вершин; k*-циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k.

Определение 3. Для связного графа *точкой сочленения* называется его вершина, после удаления которой граф становится несвязным. Ребро графа с таким же свойством называется *мостом. Блок* — это связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения [2, с. 41].

Определение 4. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу [3].

Последовательно-параллельные графы используются при построении надёжных коммуникационных сетей [4].

Бодирский, Хименес, Канг и Ной [1] нашли асимптотику для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [5] выведена явная формула для числа помеченных последовательно-параллельных 2-связных графов с заданным числом вершин. В [6] перечислены точно и асимптотически помеченные последовательно-параллельные k-циклические 2-связные графы.

Хенлон и Робинсон [7] получили для производящей функции помеченных графов без мостов функционально-дифференциальное уравнение, а также нелинейное уравнение с частными производными. Однако из них не найдена соответствующая асимптотика. В [8] перечислены помеченные бициклические и трициклические графы без мостов. В [9] асимптотически перечислены помеченные связные k-циклические графы без мостов. В [10] найдены число помеченных связных внешнепланарных k-циклических графов без мостов и асимптотика для числа таких графов с большим количеством вершин.

В данной статье получена асимптотика для числа помеченных связных последовательно-параллельных k-циклических графов без мостов с большим числом вершин при фиксированном k. Доказывается, что почти все помеченные связные последовательно-параллельные k-циклические графы без мостов при фиксированном k являются блоками.

Теорема 1. *Для числа $SP(n,k)$ помеченных связных последовательно-параллельных k-циклических n-вершинных графов без мостов при фиксированном $k \geqslant 1$ и $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$SP(n,k) \sim \frac{n!n^{3k-4}}{(k-1)!(2k-1)!2^k}\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим через $S(n,k)$ число помеченных связных k-циклических n-вершинных графов без мостов. В [11] получена формула

$$S(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]Y_k(n1!\overline{B}'_1(z), n2!\overline{B}'_2(z), \dots, nk!\overline{B}'_k(z))z^{-n}\,, \qquad (2)$$

где $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета [12, с. 25], $\overline{B}_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных k-циклических блоков, а $Y_k(x_1,\dots,x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Для этих многочленов известно выражение [13, с. 173]

$$Y_k(x_1,\dots,x_k) = \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1!\dots m_k!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1}\dots\left(\frac{x_k}{k!}\right)^{m_k},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k, т. е. по всем неотрицательным решениям $(m_1,m_2,\dots,m_k)$ уравнения $m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = k$, $m_i \geqslant 0$, $i = 1,\dots,k$.

Формула (2) верна не только для всего класса связных графов, но и для его блочно-устойчивого подкласса [14]. Известно, что класс последовательно-параллельных графов является блочно-устойчивым классом графов [3].

Для числа $B(n,k)$ помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков с n вершинами и фиксированным числом $k \geqslant 1$ при $n \to \infty$ в [6] найдена асимптотика

$$B(n,k) \sim \frac{n!n^{3k-4}}{(k-1)!(2k-1)!2^k}.$$

Обозначим

$$B_k(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B(n,k)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=3}^{\infty} c_k n^{3k-4} z^n, \quad c_k = \frac{1}{(k-1)!(2k-1)!2^k}.$$

Радиус сходимости R степенного ряда для $B_k(z)$ равен 1, так как

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{B(n,k)\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_k n^{3k-4}} = 1.$$

Следовательно, $B_k(z)$ — аналитическая функция при $|z| < 1$ и

$$B_k'(z) = \sum_{n=3}^{\infty} B(n,k)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} B(n+1,k)\frac{z^n}{n!}.$$

При фиксированном k и $n \to \infty$ имеем

$$B(n+1,k) \sim c_k(n+1)!(n+1)^{3k-4} \sim c_k n! n^{3k-3}.$$

Используем следующую теорему Титчмарша [15, с. 231–232].

Теорема Титчмарша. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0,$$

и пусть ряды сходятся при $0 < z < 1$ *и расходятся при* $z = 1$. *Тогда если* $a_n \sim Cb_n$ *при* $n \to \infty$, *то* $f(z) \sim Cg(z)$ *при* $z \to 1$.

В нашем случае имеем

$$a_n = \frac{B(n+1,k)}{n!}, \quad f(z) = B_k'(z), \quad b_n = c_k n^{3k-3}, \quad g(z) = c_k \sum_{n=0}^{\infty} n^{3k-3} z^n.$$

Найдем радиус сходимости R степенных рядов для $f(z)$, $g(z)$:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_k n^{3k-3}} = 1.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, ряды для $f(z)$ и $g(z)$ расходятся при $z \to 1$, все условия теоремы Титчмарша выполнены, следовательно, получим

$$B_k'(z) \sim c_k \sum_{n=0}^{\infty} n^{3k-3} z^n \quad \text{при } z \to 1.$$

Известно [13, с. 212] тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^m z^n = \left(z\frac{d}{dz}\right)^m \frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{m} S(m,i) z^i \frac{d^i}{dz^i}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{m} S(m,i) \frac{i! z^i}{(1-z)^{i+1}},$$

где $S(m,i)$ — числа Стирлинга 2-го рода, $S(m,m) = 1$, поэтому при $z \to 1$ имеем

$$B_k'(z) \sim c_k \frac{(3k-3)!}{(1-z)^{3k-2}},$$

$$SP(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]$$
$$\times \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \left(\frac{n1! B_1'(z)}{1!}\right)^{m_1} \dots \left(\frac{nk! B_k'(z)}{k!}\right)^{m_k} z^{-n}$$
$$= \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}] \sum_{m=1}^{k} n^m \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} (B_1'(z))^{m_1} \dots (B_k'(z))^{m_k} z^{-n},$$

где второе суммирование проводится по всем разбиениям $\pi_m(k)$ числа k, т. е. по всем неотрицательным решениям $(m_1, m_2, \dots, m_k)$ уравнения $m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = k$ при условии $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$. Обозначим

$$F_{k,m}(z) = \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} (B_1'(z))^{m_1} \dots (B_k'(z))^{m_k} = \sum_p a_p(k,m) z^p.$$

Тогда

$$SP(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}] \sum_{m=1}^{k} n^m \sum_p a_p(k,m) z^{p-n}$$
$$= \frac{(n-1)!}{nk!} \sum_{m=1}^{k} n^m a_{n-1}(k,m).$$

Поскольку последовательно-параллельный унициклический блок — это простой цикл, а число таких циклов с n вершинами равно $\frac{(n-1)!}{2}$, найдём

$$B_1(z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2} \frac{z^n}{n!}, \quad B_1'(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} z^n = \frac{z^2}{2(1-z)}.$$

При $z \to 1$ получим

$$F_{k,m}(z) \sim \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \left(\frac{z^2}{2(1-z)} \right)^{m_1} \prod_{i=2}^{k} \left(\frac{(3i-3)! c_i}{(1-z)^{3i-2}} \right)^{m_i}$$

$$= \sum_{\pi_m(k)} \frac{k! z^{2m_1}}{m_1! \dots m_k! 2^{m_1}} \frac{\prod\limits_{i=2}^{k} ((3i-3)! c_i)^{m_i}}{(1-z)^{3(2m_2+\dots+km_k)-2(m_2+\dots+m_k)+m_1}}$$

$$\sim \frac{c_{k,m}}{(1-z)^{3k-2m}},$$

$$c_{k,m} = \sum_{\pi_m(k)} \frac{k! \prod\limits_{i=2}^{k} ((3i-3)! c_i)^{m_i}}{m_1! \dots m_k! 2^{m_1}}.$$

По теореме о переносе асимптотики с производящей функции на коэффициенты её разложения [16, с. 392] имеем

$$a_n(k,m) \sim c_{k,m} \frac{n^{3k-2m-1}}{(3k-2m-1)!} \quad \text{при } n \to \infty,$$

$$SP(n,k) \sim \frac{(n-1)!}{nk!} \sum_{m=1}^{k} n^m \frac{c_{k,m}(n-1)^{3k-2m-1}}{(3k-2m-1)!} \sim \frac{c_{k,1}}{k!(3k-3)!} n! n^{3k-4}.$$

Так как при $m = 1$ $m_1 = \dots = m_{k-1} = 0$, $m_k = 1$ — единственное решение системы $m_1 + 2m_2 + \dots + km_k = k$, $m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$, $m_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, k$, то

$$c_{k,1} = k!(3k-3)! c_k,$$
$$SP(n,k) \sim c_k n! n^{3k-4} \quad \text{при } k \geqslant 2.$$

Очевидно, что последовательно-параллельный унициклический граф без мостов — простой цикл, поэтому $SP(n,1) = \frac{(n-1)!}{2}$ и $c_1 = \frac{1}{2}$. Теорема 1 доказана.

Зададим на множестве помеченных связных последовательно-параллельных k-циклических n-вершинных графов без мостов равномерное распределение вероятностей. Поскольку асимптотика из формулы (1)

совпадает с асимптотикой для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков [6], получим

Следствие 1. *Почти все помеченные связные последовательно-параллельные k-циклические графы без мостов при фиксированном k являются блоками.*

Отметим, что в [9] доказано, что почти все помеченные связные k-циклические графы без мостов при фиксированном k являются блоками. Однако вероятность того, что помеченный связный внешнепланарный k-циклический n-вершинный граф без мостов является блоком при фиксированном k и $n \to \infty$, асимптотически равна $\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ [10].

Следствие 2. *Пусть $P_k(n)$ — вероятность того, что помеченный связный k-циклический граф с n вершинами без мостов является последовательно-параллельным графом. Тогда при фиксированном $k \geqslant 2$ и $n \to \infty$*

$$P_k(n) \sim \frac{(3k-4)!}{b_{k-1}(k-1)!(2k-1)!2^k}, \quad P_1(n) \sim 1,$$

где b_k — коэффициенты Райта [17],

$$b_1 = \frac{1}{12}, \quad b_2 = \frac{5}{48}, \quad B_k = \sum_{s=1}^{k-1} s(k-s)b_s b_{k-s}, \quad k \geqslant 2,$$
$$2(k+1)b_{k+1} = (3k+2)(kb_k + 3B_k), \quad k \geqslant 2.$$

Доказательство. Обозначим через $C(n,k)$ число помеченных связных k-циклических n-вершинных графов без мостов. В [9] при фиксированном $k \geqslant 1$ и $n \to \infty$ найдена асимптотика

$$C(n,k) \sim d_k n! n^{3k-4},$$

где $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_k = \frac{b_{k-1}}{(3k-4)!}$, $k \geqslant 2, b_k$ — коэффициенты Райта. Тогда при фиксированном $k \geqslant 2$ и $n \to \infty$ имеем

$$P_k(n) = \frac{SP(n,k)}{C(n,k)} \sim \frac{c_k n! n^{3k-4}}{d_k n! n^{3k-4}} \sim \frac{(3k-4)!}{b_{k-1}(k-1)!(2k-1)!2^k}.$$

Кроме того, $P_1(n) \sim 1$, так как $SP(n,1) \sim \frac{n!}{2n}$ и $C(n,1) \sim \frac{n!}{2n}$. Следствие 2 доказано.

В частности, $P_1(n) \sim 1$, $P_2(n) \sim 1$, $P_3(n) \sim \frac{3}{5}$.

Автор благодарит рецензента за внимательное чтение рукописи статьи и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Comb. 2007. Vol. 28, No. 8. P. 2091–2105.
2. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
3. **McDiarmid C., Scott A.** Random graphs from a block stable class // Eur. J. Comb. 2016. Vol. 58. P. 96–106.
4. **Radhavan S.** Low-connectivity network design on series-parallel graphs // Networks. 2004. Vol. 43, No. 3. P. 163–176.
5. **Воблый В. А.** Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26, № 1. С. 20–32.
6. **Воблый В. А.** О перечислении помеченных последовательно-параллельных k-циклических 2-связных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2021. Т. 28, № 1. С. 5–14.
7. **Hanlon P., Robinson R. W.** Counting bridgeless graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. 1982. Vol. 33. P. 276–305.
8. **Воблый В. А.** Перечисление помеченных бициклических и трициклических графов без мостов // Мат. заметки. 2012. Т. 91, вып. 2. С. 308–311.
9. **Воблый В. А.** Об асимптотическом перечислении помеченных связных k-циклических графов без мостов // Мат. заметки. 2020. Т. 107, вып. 2. С. 304–306.
10. **Воблый В. А.** О числе помеченных внешнепланарных k-циклических графов без мостов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2020. Т. 27, № 1. С. 5–16.
11. **Воблый В. А.** О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 2. С. 5–20.
12. **Гульден Я., Джексон Д.** Перечислительная комбинаторика, М.: Наука, 1990. 504 с.
13. **Риордан Дж.** Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982. 256 с.
14. **Воблый В. А.** Об одном подходе к перечислению помеченных связных графов: обзор результатов // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. прил. Темат. обзоры. 2020. Т. 188. С. 106–118.
15. **Титчмарш Е.** Теория функций. М.: Наука, 1980. 464 с.
16. **Flajolet P.** Analytic combinatorics. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2009. 826 p.
17. **Wright E. M.** The number of connected sparsely edged graphs. IV // J. Graph Theory. 1983. Vol. 7, No. 2. P. 219–229.

Воблый Виталий Антониевич

Статья поступила
10 мая 2021 г.

После доработки —
8 августа 2021 г.

Принята к публикации
16 августа 2021 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2021. Vol. 28, No. 4. P. 61–69

UDC 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2021.28.715

ASYMPTOTIC ENUMERATION OF LABELED SERIES-PARALLEL k-CYCLIC BRIDGELESS GRAPHS

V. A. Voblyi

All-Russian Institute for Scientific and Technical Information,
20 Usievich Street, 125190 Moscow, Russia
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

Abstract. We deduce asymptotic formulas for the number of labeled connected series-parallel k-cyclic graphs with given order and fixed number k. We prove that almost all labeled series-parallel k-cyclic connected graphs without bridges for a fixed number of k are blocks. Bibliogr. 17.

Keywords: enumeration, labeled graph, block, bridgeless graph, series-parallel graph, k-cyclic graph, asymptotics, random graph.

REFERENCES

1. **M. Bodirsky, O. Gimenez, M. Kang,** and **M. Noy,** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs, *Eur. J. Comb.* **28** (8), 2091–2105 (2007).
2. **F. Harary,** *Graph Theory* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1969; Mir, Moscow, 1973 [Russian]).
3. **C. McDiarmid** and **A. Scott,** Random graphs from a block stable class, *Eur. J. Comb.* **58** (11), 96–106 (2016).
4. **S. Radhavan,** Low-connectivity network design on series-parallel graphs, *Networks* **43** (3), 163–176 (2004).
5. **V. A. Voblyi,** The second Riddel relation and its consequences, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **26** (1), 20–32 (2019) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **13** (1), 168–174 (2019)].
6. **V. A. Voblyi,** On the enumeration of labeled series-parallel k-cyclic 2-connected graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **28** (1), 5–14 (2021) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **15** (1), 169–174 (2021)].
7. **P. Hanlon** and **R. W. Robinson,** Counting bridgeless graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B*, **33**, 276–305 (1982).
8. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled connected bicyclic and tricyclic graphs without bridges, *Mat. Zametki* **91** (1), 293–297 (2012) [Russian].

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (4) (2021).

9. V. A. Voblyi, On the asymptotic enumeration of labeled connected k-cyclic graphs without bridges, *Mat. Zametki* **107** (2), 304–306 (2020) [Russian].

10. V. A. Voblyi, On the number of labeled outerplanar k-cyclic bridgeless Graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **27** (1), 5–16 (2020) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **14** (1), 205–211 (2020)].

11. V. A. Voblyi, Enumeration of labeled connected graphs with given order and size, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **23** (2), 5–20 (2016) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **10** (2), 302–310 (2016)].

12. I. P. Goulden and **D. M. Jackson,** *Combinatorial Enumeration* (Wiley, New York, 1983; Nauka, Moscow, 1990).

13. J. Riordan, *Combinatorial Identities* (Wiley, New York, 1968; Nauka, Moscow, 1982 [Russian]).

14. V. A. Voblyi, On an approach to enumeration of labeled connected graphs: A review, *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh. Temat. Obz.* **188**, 106–118 (2020).

15. E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions* (Oxford Univ. Press, London, 1975; Nauka, Moscow, 1980 [Russian]).

16. P. Flajolet, *Analytic Combinatorics* (Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009).

17. E. M. Wright, The number of connected sparsely edged graphs. IV, *J. Graph Theory*, **7** (2), 219–229 (1983).

Vitaly A. Voblyi

Received May 10, 2021
Revised August 8, 2021
Accepted August 16, 2021