ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2021. Т. 28, № 4. С. 70–89

УДК 519.658 DOI 10.33048/daio.2021.28.717

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ С ЗАПРЕЩЁННЫМИ ЗОНАМИ

Г. Г. Забудский[1, a], *Н. С. Веремчук*[2, b]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

[2] Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет,
пр. Мира, 5, 644080 Омск, Россия

E-mail: [a]`zabudsky@ofim.oscsbras.ru`, [b]`n-veremchuk@rambler.ru`

Аннотация. Приводится обзор постановок, моделей и методов решения задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещёнными зонами. Центры объектов связаны коммуникациями между собой и с зонами. Необходимо разместить объекты вне зон таким образом, чтобы суммарная стоимость связей объектов между собой и с зонами была минимальной. Основное внимание уделяется задаче на линии. Для нескольких линий связи прокладываются через виадук. Построены модели в теоретико-графовой формулировке и формулировке частично-целочисленного программирования с булевыми переменными. Найдены свойства, позволяющие рассматривать задачу как дискретную и декомпозировать её на ряд задач меньшей размерности. Разработаны алгоритмы поиска точного и приближённого решений, выделены полиномиально разрешимые случаи. Приведены результаты численных экспериментов. Библиогр. 32.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, задача размещения, запрещённые зоны.

Введение

Поиск оптимального размещения взаимосвязанных точечных объектов в метрическом пространстве без ограничений на их расположение называют задачей Вебера [1–5]. Она хорошо изучена на плоскости. Для

Исследование выполнено при поддержке Программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1 (проект № 0314–2019–0019).

прямоугольной метрики задача декомпозируется на две задачи линейного программирования [2]. Потоковые алгоритмы для её решения предложены в [5].

Габаритные объекты на плоскости часто аппроксимируют с помощью прямоугольников. Для задач раскроя и упаковки (когда объекты не связаны между собой) представлен обзор, например, в [6]. Для размещения взаимосвязанных прямоугольников в [7], в частности, предложены алгоритмы поиска локального и глобального оптимумов. В [8] допускается поворот объектов и параллельно с размещением строятся маршруты для прокладки связей.

Часто объекты размещают с соблюдением условий «регулярности». Например, технологическое оборудование размещают вдоль «красных» линий, которые параллельны одной из сторон цеха. Критериями могут быть, например, минимизация длины и ширины прямоугольной области, занимаемой оборудованием, либо минимальная суммарная стоимость связей. В [9] рассмотрена задача размещения прямоугольников на параллельных линиях с критерием минимизации длины и ширины занимаемой ими области. Для поиска парето-оптимальных решений применяются динамическое программирование и аппарат целочисленной оптимизации.

Задачи с запрещёнными зонами (областями, где нельзя размещать объекты) для прямоугольных взаимосвязанных объектов с условиями регулярности их размещения изучены недостаточно. В основном рассматриваются задачи для одной линии без учёта таких ограничений [5, 10–14]. Так, например, известная задача на линии с критерием минимальной суммарной стоимости связей — это One-Dimensional Space Allocation Problem (ODSAP). Для её решения разработаны алгоритмы ветвей и границ и динамического программирования [5, 13, 14].

В литературе основное внимание уделяется задачам размещения точечных объектов на плоскости с запрещёнными зонами. Обзор результатов по их исследованию приведён в [15]. Работа [16] — одна из наиболее ранних, в которой идёт речь о такой задаче. Рассматривается одна зона в виде круга. Решается задача Вебера для одного объекта, когда путь между двумя точками на плоскости не должен проходить через зону. Существенно позднее исследовалась подобная задача для случая двух эллиптических зон [17]. В [18] объект размещается при наличии многоугольных и эллиптических зон. В [19] рассматривалась задача размещения одного объекта с зонами в виде выпуклых многоугольников и был предложен алгоритм ветвей и границ. Исследование вычислительной сложности задачи размещения множества объектов с зонами представлено в [20]. Показано, в частности, что задача не может быть аппроксимирована за полиномиальное время. В [4] для проблемы

конкурентного размещения разработана новая модель, в которой по аналогии с гравитацией мощность объекта служит мерой его привлекательности. При размещении учитываются зона и бюджетные ограничения. Разработаны два алгоритма решения: один — на основе метода ветвей и границ, другой — с применением штрафных функций. Основные результаты по задачам размещения точечных объектов на плоскости с зонами представлены в монографии [21]. Задача размещения прямоугольников (прямоугольной упаковки) в полосе с зонами рассмотрена в [22]. Для её решения разработан алгоритм имитации отжига.

В данной работе приводится обзор исследований задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещёнными зонами и критерием минимальной суммарной стоимости связей. Рассматриваются постановки задач для одной и нескольких линий. В случае линий трассировка коммуникаций между объектами проводится через виадук. Построены модели частично-целочисленного программирования с булевыми переменными и комбинаторные модели в теоретико-графовой формулировке. Найдены свойства, позволяющие декомпозировать задачу и рассматривать её как дискретную. На основе этих свойств разработаны алгоритмы поиска точного и приближённого решений, выделены полиномиально разрешимые случаи. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

1. Задача на линии

В этом разделе сформулируем постановку задачи на линии и отметим её свойства. Опишем алгоритмы поиска точного и приближённых решений. Приведём результаты вычислительных экспериментов.

1.1. Постановка и свойства задачи. На отрезке длины LS с фиксированными прямоугольными объектами (запрещёнными зонами) размещаются прямоугольники, центры которых связаны между собой и с зонами. Необходимо расположить объекты вне зон так, чтобы они не пересекались и суммарная стоимость связей между всеми объектами была минимальной [23].

Обозначим через X_i и F_j объект и зону, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in J = \{1, \ldots, m\}$. Объекты и зоны — это прямоугольники с размерами $l_i \times h_i$ и $p_j \times d_j$, $i \in I$ и $j \in J$. Центры объектов соединены между собой и с центрами зон. Длины вертикальных компонент связей между объектами X_i и X_k, а также между объектом X_i и зоной F_j равны $\frac{h_i+h_k}{2}$ и $\frac{h_i+d_j}{2}$ соответственно, поэтому достаточно учитывать расстояние между проекциями их центров. Можно рассматривать задачу размещения точек с минимально допустимыми расстояниями, определяемыми размерами объектов и зон. Обозначим через x_i, b_j координаты центров X_i, F_j,

$i \in I$, $j \in J$, а через $w_{ij} \geqslant 0$, $u_{ik} \geqslant 0$ — удельные стоимости связей между X_i и F_j, X_i и X_k, $i, k \in I$, $j \in J$, $i < k$. Требуется разместить объекты $X_1, \ldots, X_n$ вне зон $F_1, \ldots, F_m$ так, чтобы они не пересекались и суммарная стоимость связей объектов между собой и с зонами была минимальной. Математическая модель имеет следующий вид:

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij}|x_i - b_j| + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}|x_i - x_k| \to \min, \tag{1}$$

$$|x_i - b_j| \geqslant \frac{l_i + p_j}{2}, \quad i \in I,\, j \in J, \tag{2}$$

$$|x_i - x_k| \geqslant \frac{l_i + l_k}{2}, \quad i, k \in I,\, i < k, \tag{3}$$

$$\frac{l_i}{2} \leqslant x_i \leqslant LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I. \tag{4}$$

Допустимая область B задачи (1)–(4) несвязная и состоит из набора r непересекающихся отрезков (блоков) B_k с длинами L_k, $B = \bigcup\limits_{k=\overline{1,r}} B_k$. Задача (1)–(4) NP-трудна, поиск её допустимого решения — это построение одномерной упаковки в контейнеры [24].

Для допустимого размещения будем называть *остатком* Δ_k в блоке B_k отрезок между двумя соседними объектами без общей границы либо между границей блока и соседним объектом. Пары элементов (объекты, зоны, остатки) будем называть *склеенными*, если они имеют общую границу.

Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — некоторое допустимое решение задачи (1)–(4), то через $I_k(x)$ обозначим множество номеров объектов в B_k, $|I_k(x)| = n_k$, $I = \bigcup\limits_{k=\overline{1,r}} I_k(x)$, а через $H_k(x)$ — совокупность остатков в B_k для x, при этом $|H_k(x)| \leqslant n_k + 1$. Тогда $x = (x^1, \ldots, x^r)$, где x^k — координаты объектов, расположенных в B_k с номерами из $I_k(x)$.

Утверждение 1 [23]. *Для произвольного допустимого решения x задачи (1)–(4) можно построить допустимое решение x' такое, что имеют место неравенства $|H_k(x')| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, r$, и $S(x') \leqslant S(x)$.*

Из утверждения 1 следует, что исходная непрерывная задача сводится к дискретной.

Обозначим через LB_k и RB_k координаты левой и правой границ блока B_k; $J_L(B_k)$ и $J_R(B_k)$ — множество зон левее и правее B_k; $I_L(B_k)$ и $I_R(B_k)$ — множество объектов левее и правее B_k соответственно. При фиксированном разбиении объектов по блокам целевую функцию $S(x)$

можно представить в виде [23]

$$S(x) = \sum_{k=1}^{r} S_k(x^k) + \overline{C},$$

где $\overline{C}$ — некоторая константа и

$$S_k(x^k) = \sum_{t\in I_k(x)} \sum_{\substack{s\in I_k(x),\\ s<t}} u_{st}|x_s - x_t| + \sum_{s\in I_k(x)} |x_s - LB_k|\Big(\sum_{j\in J_L(B_k)} w_{sj} + \sum_{i\in I_L(B_k)} u_{si}\Big) + \sum_{t\in I_k(x)} |x_t - RB_k|\Big(\sum_{j\in J_R(B_k)} w_{tj} + \sum_{i\in I_R(B_k)} u_{ti}\Big).$$

Таким образом, для нахождения оптимума задачи (1)–(4) при фиксированном разбиении объектов по блокам достаточно найти минимумы функций $S_k(x^k)$, $k = 1, \ldots, r$.

1.2. Алгоритм приближённого решения. Алгоритм [23] состоит в следующем. Находится очередное допустимое разбиение объектов по блокам, например, алгоритмом последовательно-одиночного размещения. Далее объекты переставляются в блоках с целью минимизации стоимости связей.

Блок B_k назовём *допустимым* для объекта X_i, если $L_k \geqslant l_i$, и *условно-допустимым*, если $L_k \geqslant \sum\limits_h l_h + l_i$, где $\sum\limits_h l_h$ — суммарная длина объектов, размещённых на данный момент в B_k. Блок B_k назовём *просмотренным* для X_i, если при фиксированном размещении $X_1, \ldots, X_{i-1}$ объект X_i размещался в B_k, иначе — *непросмотренным*.

Поиск допустимых разбиений. Для построения начального допустимого разбиения для каждого объекта в заданном порядке находится первый условно-допустимый блок. Если такого блока нет, то предыдущий объект удаляется из блока, и т. д. Для каждого следующего объекта поиск условно-допустимого блока начинается с B_1. Если допустимое разбиение не построено и при этом для X_1 просмотрены все условно-допустимые блоки, то задача не имеет допустимого решения.

Минимизация суммарной стоимости связей. Предлагается два варианта алгоритма. Объекты в блоках переставляются и склеиваются в зависимости от суммарной стоимости связей с объектами и зонами, расположенными левее (правее) блока.

Для каждого X_i в B_k определим суммарные стоимости связей Lw_i и Rw_i следующим образом:

$$Lw_i = \sum_{j \in J_L(B_k)} w_{ij} + \sum_{k \in I_L(B_k)} u_{ik}, \quad Rw_i = \sum_{j \in J_R(B_k)} w_{ij} + \sum_{k \in I_R(B_k)} u_{ik}.$$

В алгоритме A2 среди неразмещённых объектов в блоке выбирается объект X_t с максимальным отношением $|Lw_t - Rw_t|/l_t$. Далее если $Lw_t \geqslant Rw_t$, то X_t склеивается с левой границей блока с учётом уже размещённых объектов в нём, иначе — с правой. Во втором варианте для склеивания выбирается объект X_t с максимальной разностью стоимостей связей $|Lw_t - Rw_t|$ [23].

Отметим, что число разбиений объектов по блокам не превосходит r^n. Трудоёмкость алгоритма поиска приближённого решения составляет $O(r^n(mn^2 + n^3))$.

В работе [23] показано, в каком случае с помощью алгоритма A2 приближённого решения находится точное решение.

Утверждение 2 [23]. *Пусть* $u_{st} = 0$ *для любых* $s, t \in I_k(x)$, $s < t$, $k = 1, \ldots, r$, *и фиксировано разбиение объектов по блокам. Тогда оптимальное решение задачи* (1)–(4) *может быть найдено с помощью алгоритма* A2, *применяемого в каждом блоке.*

Назовём допустимое решение X задачи (1)–(4) *локальным минимумом*, если $S(x) \leqslant S(x')$ для любого x' такого, что $I_k(x) = I_k(x')$, $k = 1, \ldots, r$. Отметим, что в этом определении размер окрестности не фиксирован.

Из утверждения 2 следует, что для указанного случая с помощью алгоритма A2 локальный оптимум задачи находится за полиномиальное время.

1.3. Алгоритм ветвей и границ. Опишем алгоритм ветвей и границ на примере блока B_k [25]. Отметим, что левую и правую границы блока можно рассматривать как фиктивные объекты F_L и F_R, объединяющие объекты и зоны левее и правее блока B_k.

Ветвление. На первом уровне в дереве ветвления каждый из объектов с номерами из $I_k(x)$ поочерёдно склеивается с левой границей блока B_k [25]. На втором уровне каждый из неразмещённых объектов склеивается с правой границей блока B_k. На третьем и последующих уровнях каждый из неразмещённых объектов склеивается с объектом, расположенным у левой границы блока B_k. Число вершин дерева ветвления на первом уровне равно n_k, на втором — $n_k(n_k - 1)$, и т. д.

Нижние оценки. Обозначим на очередном уровне дерева ветвления узел A и множества номеров объектов, расположенных в B_k у его левой

и правой границ, через NF_l и NF_r соответственно. Будем считать, что объекты в множестве NF_l имеют номера от 1 до s, а в множестве NF_r — от $t+1$ до n_k. Тогда нижнюю границу $\xi(A)$ функции $S_k(x^k)$ для A можно представить [26] так:

$$\xi(A) = \xi_1(A) + \xi_2(A) + \xi_3(A).$$

Величина $\xi_1(A)$ — это суммарная стоимость связей между объектами, размещёнными в B_k, и объектами F_L, F_R, которая вычисляется точно. Величина $\xi_2(A)$ — нижняя оценка суммарной стоимости связей между неразмещёнными объектами в B_k с F_L, F_R и с объектами, размещёнными в B_k на данном уровне. Величина $\xi_3(A)$ — нижняя оценка суммарной стоимости связей неразмещённых объектов между собой. В [26] предложены два способа вычисления нижней оценки $\xi_2(A)$.

Первый способ. Для каждого $i \in I_k(x)\backslash\{NF_l \cup NF_r\}$ определим суммарные стоимости связей $SL(i)$ и $SR(i)$ с объектами F_L, F_R и с объектами, размещёнными в B_k, следующим образом:

$$SL(i) = Lw_i + \sum_{k \in NF_l} u_{ik}, \quad SR(i) = Rw_i + \sum_{k \in NF_r} u_{ik}.$$

Такие объекты упорядочиваются по невозрастанию отношений $SL(i)/l_i$ и последовательно склеиваются в этом порядке с левой границей B_k. Пусть объекты имеют номера от $s+1$ до t. Затем объекты упорядочиваются по невозрастанию отношений $SR(i)/l_i$ и последовательно склеиваются в этом порядке с правой границей B_k. Пусть объекты имеют номера от t до $s+1$. Тогда

$$\xi_2(A) = \xi_{2L}(A) + \xi_{2R}(A),$$

где

$$\xi_{2L}(A) = \sum_{q=s+1}^{t} \left(Lw_q \sum_{g=1}^{q-1} l_g + \sum_{i=1}^{s} u_{qi} \sum_{k=i+1}^{q-1} l_k \right),$$

$$\xi_{2R}(A) = \sum_{q=s+1}^{t} \left(Rw_q \sum_{g=q+1}^{n_k} l_g + \sum_{i=t+1}^{n_k} u_{qi} \sum_{k=q+1}^{i-1} l_k \right).$$

Доказательство того, что $\xi_2(A)$ — нижняя оценка суммарной стоимости связей неразмещённых объектов с F_L, F_R и с объектами, размещёнными в B_k, аналогично доказательству в [14].

Второй способ. Множество $I_k(x)\backslash\{NF_l \cup NF_r\}$ можно представить как объединение непересекающихся множеств $N_L \cup N_C \cup N_R$, где N_L, N_C, N_R — множества номеров объектов, для которых выполнены неравенства $SL(i) > SR(i)$, $SL(i) = SR(i)$, $SL(i) < SR(i)$.

Объекты с номерами из N_L упорядочиваются по невозрастанию отношений $(SL(i)-SR(i))/l_i$ и последовательно склеиваются в таком порядке с левой границей B_k. Объекты с номерами из N_R упорядочиваются по невозрастанию отношений $(SR(i)-SL(i))/l_i$ и последовательно склеиваются в таком порядке с правой границей B_k. Объекты с номерами из N_C размещаются между объектами с номерами из N_L и N_R в любом порядке [26].

Таким образом, для каждого $i \in I_k(x)\backslash\{NF_l \cup NF_r\}$ определяется координата центра. Пусть $I_k(x)\backslash\{NF_l \cup NF_r\} = \{s+1, \ldots, t\}$. Определим величину Z:

$$Z = \sum_{q=s+1}^{t} \left(Lw_q \sum_{g=1}^{q-1} l_g + \sum_{i=1}^{s} u_{qi} \sum_{k=i+1}^{q-1} l_k + Rw_q \sum_{h=q+1}^{n_k} l_h + \sum_{j=t+1}^{n_k} u_{qj} \sum_{v=q+1}^{j-1} l_v \right).$$

В [26] доказано, что значение Z — нижняя оценка суммарной стоимости связей неразмещённых объектов в B_k с объектами F_L, F_R и с объектами, размещёнными в B_k.

1.4. Модель частично-целочисленного линейного программирования. Запишем модель частично-целочисленного линейного программирования (ЧЦЛП) задачи (1)–(4). Введём непрерывные переменные $s_{ij} \geqslant 0$, $t_{ik} \geqslant 0$, $i,\ k \in I$, $j \in J$, $i < k$, и булевы переменные: $z^1_{ij} = 1$, если X_i левее F_j, иначе $z^1_{ij} = 0$, $i \in I$, $j \in J$; $z^2_{ik} = 1$, если X_i левее X_k, иначе $z^2_{ik} = 0$, $i,\ k \in I$, $i < k$. Модель ЧЦЛП задачи (1)–(4) имеет такой вид:

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} w_{ij} s_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} t_{ik} \to \min, \tag{5}$$

$$-s_{ij} \leqslant x_i - b_j \leqslant s_{ij}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{6}$$

$$-t_{ik} \leqslant x_i - x_k \leqslant t_{ik}, \quad i, k \in I,\ i < k, \tag{7}$$

$$\begin{cases} x_i - b_j - \frac{l_i + p_j}{2} + C z^1_{ij} \geqslant 0, \\ b_j - x_i - \frac{l_i + p_j}{2} + C\big(1 - z^1_{ij}\big) \geqslant 0, \end{cases} \quad i \in I,\ j \in J, \tag{8}$$

$$\begin{cases} x_i - x_k - \frac{l_i + l_k}{2} + C z^2_{ik} \geqslant 0, \\ x_k - x_i - \frac{l_i + l_k}{2} + C\big(1 - z^2_{ik}\big) \geqslant 0, \end{cases} \quad i, k \in I,\ i < k, \tag{9}$$

$$s_{ij} \geqslant 0, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{10}$$

$$t_{ik} \geqslant 0, \quad i, k \in I,\ i < k, \tag{11}$$

$$z^1_{ij} \in \{0,\ 1\}, \quad i \in I,\ j \in J, \tag{12}$$

$$z^2_{ik} \in \{0,\ 1\}, \quad i, k \in I,\ i < k, \tag{13}$$

$$\frac{l_i}{2} \leqslant x_i \leqslant LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I. \tag{14}$$

Константа C выбирается, например, следующим образом: $C = 2\sum\limits_{k=1}^{r} L_k$. Используя модель (5)–(14), можно решить задачу (1)–(4) с помощью пакета IBM ILOG CPLEX.

1.5. Результаты вычислительных экспериментов. В работе [23] описаны результаты вычислительных экспериментов по сравнению алгоритма приближённого решения A2 и решения задачи с помощью пакета IBM ILOG CPLEX с применением модели ЧЦЛП (5)–(14). Относительная погрешность решений, полученных алгоритмом A2, в среднем составила 3%. Для размерностей $|I| = 20$, $|J| = 10$ и $|I| = 40$, $|J| = 6$ не удалось получить решения с помощью пакета за время 1000 с; среднее время решения задачи таких размерностей с помощью A2 составило 214 с и 490 с при погрешности 3%.

В [25] описаны результаты вычислительных экспериментов по сравнению алгоритмов ветвей и границ (АВГ) и A2. Приближённый алгоритм находит решение значительно быстрее чем точный: например, для задач с размерностью $n = 15$, $m = 3$ время работы A2 меньше в 20 раз.

При сравнении алгоритма ветвей и границ и пакета можно отметить, что алгоритм находит решение в среднем в 5 раз быстрее. Для задач с размерностью $|I| = 20$, $|J| = 15$ и $|I| = 50$, $|J| = 20$ не получено оптимального решения пакетом за 1000 с, а среднее время решения с применением алгоритма составило 723 с и 898 с соответственно [25].

1.6. Теоретико-графовая формулировка. Как уже отмечалось, условия непересечения объектов и зон можно рассматривать как минимально допустимые расстояния между проекциями их центров. В этом разделе будем учитывать структуру связей между точечными объектами и ограничения на минимально допустимые расстояния между ними и зонами.

Структура связей между объектами задаётся с помощью графа $G = (V, E)$, $V = \{1, \ldots, n\}$, вершины которого соответствуют объектам, а рёбра — связям между ними. Вес ребра — это стоимость связи между соответствующими объектами. Если объект i должен быть размещён слева от объекта k, то (i, k) — дуга, и таким образом определяется частичный порядок на расположение вершин. Задаются удельные стоимости связей вершин с зонами. Необходимо разместить вершины графа на линии так, чтобы ограничения на минимально допустимые расстояния вершин между собой и с зонами не нарушались и суммарная стоимость всех связей была минимальной.

Если зоны отсутствуют, то сформулированная задача представляет собой ODSAP. В случае, когда G — произвольный невзвешенный и неориентированный граф, задача ODSAP NP-трудна [24]. Для решения задачи

ODSAP предложены полиномиальные алгоритмы, когда G — корневое дерево [11] или последовательно-параллельный (двухполюсный ориентированный) граф [27].

Пусть $D(s,t)$ — ориентированный граф, состоящий из двух или более цепей, идущих от вершины s к вершине t и не имеющих других общих вершин, кроме s и t. Класс *двухполюсных* (*последовательно-параллельных*) *орграфов* определим индуктивно следующим образом:

а) ориентированная цепь — это двухполюсный орграф;

б) граф, полученный из двухполюсного путём замены любой дуги (s,t) на граф $D(s,t)$, является двухполюсным орграфом.

Если в ориентированном корневом дереве произвольные дуги заменить двухполюсным орграфом, то полученный граф будем называть *композицией корневых деревьев и двухполюсных орграфов.*

Рассмотрим двухполюсный орграф G и произвольный блок B_k. По заданному графу G построим взвешенный граф $G' = (V', E')$ в B_k, $V' = I_k \cup \{s,t\}$, где s — фиктивный объект, включающий объекты и зоны слева от B_k, t — фиктивный объект, включающий объекты и зоны справа от B_k. Множество I_k (опустим указание x) можно представить как объединение a множеств, которые соответствуют вершинам цепей в G. Через c_i обозначим число вершин на цепи i, $i = 1,\dots,a$. Пусть множество I_k содержит следующие номера вершин цепей: $I_k = \{(1,\dots,c_1);\ (c_1+1,\dots,c_1+c_2);\ \dots;\ (c_1+c_2+\dots+c_{a-1}+1,\dots,c_1+c_2+\dots+c_a)\}$.

Опишем алгоритм построения дуг графа G' [28].

(1) Если $i,j \in I_k$ и $(i,j)\in E$, то $(i,j)\in E'$.

(2) Проводим дуги $(s,i)\in E'$ от вершины s до начальных вершин цепей G', $i = \left\{1, c_1+1, \dots, \sum\limits_{y=1}^{a-1} c_y + 1\right\}$.

(3) Проводим дуги $(j,t)\in E'$ от конечных вершин цепей до вершины t из G', $j = \left\{c_1, c_1+c_2, \dots, \sum\limits_{y=1}^{a} c_y\right\}$.

Обозначим через u'_{ij} вес дуги $(i,j)\in E'$. Вершину цепи, из которой выходит дуга, входящая в вершину i, обозначим через $l(i)$. Аналогично через $r(i)$ обозначим вершину цепи, в которую входит дуга из вершины i. Если S_y — номер последней вершины на цепи с номером y, то $S_y = \sum\limits_{i=1}^{y} c_i$, при этом полагаем, что $c_0 = 0$. Определяем веса дуг в графе G' следующим образом:

$$u'_{ij} = u_{ij} + \sum_{p=j}^{c_b} \sum_{q\in J_L(B_k)} w_{pq} + \sum_{p=1}^{i} \sum_{q\in J_R(B_k)} w_{pq},$$
$$i,j\in I_k,\ (i,j)\in E,\ b = 1,\dots,a,$$

$$u'_{si} = u_{i,l(i)} + \sum_{p=S_{b-1}+1}^{S_b} \sum_{q\in J_L(B_k)} w_{pq},$$
$$b = 1,\dots,a,\ i \in \{1, c_1+1, \dots, S_{a-1}+1\},$$
$$u'_{jt} = u_{j,r(j)} + \sum_{p=S_{b-1}+1}^{S_b} \sum_{q\in J_R(B_k)} w_{pq},$$
$$b = 1,\dots,a,\ j \in \{c_1, c_1+c_2, \dots, S_a\}.$$

В результате построены дуги в графе G' и определены их веса.

Утверждение 3 [28]. *Если G — двухполюсный ориентированный граф, то G' также является двухполюсным ориентированным графом.*

Пусть G — корневое дерево. Обозначим поддерево с корнем в вершине i через $G(i)$, а множество его вершин — через $V(G(i))$. В блоке B_k дуги графа G' проводятся, как для двухполюсных орграфов. Определим веса дуг в G'. Для этого множество вершин, входящих в цепь от вершины s до вершины k, обозначим через $V'(k)$. Далее полагаем

$$u'_{ij} = u_{ij} + \sum_{p\in V(G'(j))} \sum_{q\in J_L(B_k)} w_{pq} + \sum_{p\in V'(i)} \sum_{q\in J_R(B_k)} w_{pq},$$
$$u'_{si} = u_{i,l(i)} + \sum_{p\in V(G'(i))} \sum_{q\in J_L(B_k)} w_{pq},$$
$$u'_{jt} = u_{j,r(j)} + \sum_{p\in V'(j)} \sum_{q\in J_R(B_k)} w_{pq}.$$

Утверждение 4 [28]. *Если граф G — корневое дерево, то G' — множество двухполюсных ориентированных графов.*

Таким образом, если G является корневым деревом или двухполюсным орграфом, то граф G' — множество двухполюсных орграфов.

Замечание 1. В общем случае, когда G является композицией двухполюсных орграфов и корневых деревьев, G' также будет множеством двухполюсных орграфов [28].

В [28] доказано, что решение задачи размещения для графа G' даёт решение задачи для графа G в блоке B_k. Таким образом, решение задачи размещения в блоке для указанных выше графов сводится к решению задачи для двухполюсных орграфов.

Напомним алгоритм оптимального расположения вершин двухполюсного орграфа [27]. Сначала на каждой из цепей, соединяющих s и t, находится дуга минимального веса. Если дуг несколько, то берётся любая из них. Далее по этим дугам граф разрезается на два корневых дерева:

первое дерево LT с корнем в вершине s, а второе дерево RT — с корнем в вершине t с противоположной ориентацией дуг. Находится оптимальное размещение вершин каждого из деревьев с учётом весов дуг, по которым производится разрез, с помощью алгоритма из [11]. Размещение вершин графа строится следующим образом: сначала размещаются вершины дерева LT, а затем — вершины дерева RT в обратном порядке.

Для случая, когда G — двухполюсный орграф, корневое дерево или композиция корневых деревьев и двухполюсных орграфов, алгоритм поиска локального оптимума для фиксированного разбиения вершин по блокам состоит в следующем. Последовательно строим графы $G'_1, \ldots, G'_r$, используя процедуры, описанные выше. В каждом блоке находим оптимальное размещение, применяя алгоритм для двухполюсного орграфа.

Трудоёмкость алгоритма оптимального размещения вершин в каждом блоке оценивается $O(n \log n)$ [27], а трудоёмкость алгоритма поиска локального оптимума для указанных графов не превосходит $O(mn \log n)$.

Замечание 2. В [29] приведён пример, когда G — не двухполюсный орграф, но G'_i — двухполюсные орграфы, т. е. локальный оптимум также находится за полиномиальное время.

Замечание 3. Отметим, что если между исходными объектами (соответственно между вершинами графа) заданы не условия непересечения, а минимально допустимые расстояния, удовлетворяющие неравенству треугольника, то задача ODSAP NP-трудна для двухполюсных орграфов и корневых деревьев [30]. Соответственно задача с зонами также NP-трудна для таких графов.

2. Задача на линиях

Здесь приведём постановку задачи на линиях и модели нелинейного программирования для прямоугольной метрики и когда трассировка связей осуществляется через виадук.

2.1. Постановка и модель для прямоугольной метрики. Рассмотрим задачу регулярного размещения взаимосвязанных объектов на линиях с запрещёнными зонами [25]. Задан набор размещаемых прямоугольных объектов. Центры объектов соединены между собой и с центрами зон. Необходимо разместить объекты на линиях вне запрещённых зон так, чтобы они не пересекались между собой, а общая стоимость связей объектов между собой и с зонами была минимальна.

Обозначим центры объектов X_i и зон F_j через (x_i, y_i) и (b_{1j}, b_{2j}) соответственно, где $i \in I$ и $j \in J$. Линии фиксированы, и их левые границы — это точки $(0, Ly_t)$, где $t \in Q = \{1, \ldots, q\}$ и $Ly_1 < \cdots < Ly_q$. Предположим, что линии зафиксированы так, что каждый объект может быть

размещён на любой линии. Расстояния измеряются в прямоугольной метрике. Введём булевы переменные z_{it} для $i \in I$, $t \in Q$. Если объект X_i размещается на линии с номером t, то $z_{it} = 1$, иначе $z_{it} = 0$.

Модель нелинейного программирования примет такой вид:

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij}(|x_i - b_{1j}| + |y_i - b_{2j}|) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n} u_{ik}(|x_i - x_k| + |y_i - y_k|) \to \min, \quad (15)$$

$$|x_i - b_{1j}| \geqslant z_{it}\frac{l_i + p_j}{2}, \quad i \in I,\ j \in JL_t,\ t \in Q, \quad (16)$$

$$|x_i - x_k| \geqslant (z_{it} + z_{kt} - 1)\frac{l_i + l_k}{2}, \quad i,k \in I,\ i < k,\ t \in Q, \quad (17)$$

$$\frac{l_i}{2} \leqslant x_i \leqslant LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I, \quad (18)$$

$$y_i = \sum_{t=1}^{q} z_{it} Ly_t, \quad i \in I, \quad (19)$$

$$\sum_{t=1}^{q} z_{it} = 1, \quad i \in I, \quad (20)$$

$$z_{it} \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ t \in Q. \quad (21)$$

Замечание 4. Отметим, что задача (15)–(21) не декомпозируется на задачи по каждой из линий, если проекции блоков на разных линиях не пересекаются.

2.2. Трассировка коммуникаций через виадук. Рассмотрим случай двух линий. Пусть связи (коммуникации) между объектами и зонами, расположенными на разных линиях, проходят через виадук V [31]. Размер виадука V (вертикальный отрезок) равен $\delta y = Ly_2 - Ly_1$. Обозначим через x_0 абсциссу точки размещения виадука, через JL_t — множество номеров зон, находящихся на линии с номером t, $t = 1, 2$.

Модель нелинейного программирования [31] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{t=1}^{2}\sum_{i\in I}\sum_{j\in JL_t} & w_{ij}(z_{it}|x_i - b_{1j}| \\ & + (1 - z_{it})(|x_i - x_0| + |b_{1j} - x_0| + \delta y)) \\ & + \sum_{t=1}^{2}\sum_{i\in I}\sum_{k\in I,\, k>i} u_{ik}(z_{it}z_{kt}|x_i - x_k| \\ & + z_{it}(1 - z_{kt})(|x_i - x_0| + |x_k - x_0| + \delta y)) \to \min, \end{aligned} \quad (22)$$

при ограничениях

$$|x_i - b_{1j}| \geqslant z_{it}\frac{l_i + p_j}{2}, \quad i \in I,\, j \in JL_t,\, t = 1, 2, \tag{23}$$

$$|x_i - x_k| \geqslant (z_{it} + z_{kt} - 1)\frac{l_i + l_k}{2}, \quad i, k \in I,\, i < k,\, t = 1, 2, \tag{24}$$

$$\frac{l_i}{2} \leqslant x_i \leqslant LS - \frac{l_i}{2}, \quad i \in I, \tag{25}$$

$$y_i = \sum_{t=1}^{2} z_{it} Ly_t, \quad i \in I, \tag{26}$$

$$\sum_{t=1}^{2} z_{it} = 1, \quad i \in I, \tag{27}$$

$$z_{it} \in \{0, 1\}, \quad i \in I,\ t = 1, 2. \tag{28}$$

(а) Виадук V расположен справа от блока B_k, т. е. $x_0 > RB_k$. Пусть номера зон и объектов слева от B_k на той же линии, что и B_k, образуют множества $J_L(B_k)$ и $I_L(B_k)$. Все остальные зоны и объекты, в том числе расположенные на разных линиях, образуют множества $J_R(B_k)$ и $I_R(B_k)$ соответственно. Таким образом, $J_R(B_k) = J\backslash J_L(B_k)$, $I_R(B_k) = I\backslash I_L(B_k)$.

(б) Виадук V расположен слева от B_k, т. е. $x_0 < LB_k$. Тогда полагаем, что номера зон и объектов справа от B_k на той же линии, что и B_k, образуют множества $J_R(B_k)$ и $I_R(B_k)$. Все остальные зоны и объекты, в том числе расположенные на разных линиях, образуют множества $J_L(B_k)$ и $I_L(B_k)$ соответственно.

Таким образом, объекты и зоны слева и справа от блока B_k определены для любого расположения виадука. Далее для каждого объекта X_i в B_k определим общую стоимость коммуникаций Lw_i и Rw_i таким же образом, как и ранее.

Для задачи (22)–(28) также будут справедливы свойства декомпозиции целевой функции и возможность рассматривать её как дискретную, поэтому можно применять разработанные приближённые и точные алгоритмы решения.

2.3. Результаты вычислительных экспериментов. В [32] проведено численное исследование задачи размещения прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещёнными зонами и виадуком. Поиск локального оптимума выполнен с применением модели (22)–(28) и пакета IBM ILOG CPLEX. Рассматривались два случая. В первом виадук с заданным шагом последовательно фиксировался, далее решалась

задача для каждого расположения виадука. Во втором случае находилось оптимальное размещение виадука с помощью модели (22)–(28) и пакета IBM ILOG CPLEX.

С помощью перебора вариантов расположения виадука поиск приближённого значения локального оптимума осуществлялся значительно быстрее. Например, для задачи с 15 объектами находилось приближённое решение, отклоняющееся от точного на 12% за время, в 105 раз меньшее, чем при решении задачи поиска оптимального размещения виадука.

Заключение

Приведён обзор исследований задачи размещения взаимосвязанных прямоугольных объектов на параллельных линиях с запрещёнными зонами и критерием минимума суммарной стоимости связей. Рассматривались постановки задач для одной и нескольких линий. В случае одной линии построены модели в теоретико-графовой формулировке и формулировке частично-целочисленного программирования с булевыми переменными. Найдены свойства, позволяющие декомпозировать задачу и рассматривать её как дискретную. Разработаны алгоритмы поиска точного и приближённого решений, выделены полиномиально разрешимые случаи. В случае нескольких линий построены модели целочисленного программирования для прямоугольной метрики и когда связи проходят через виадук. Показано, что при фиксированном расположении виадука можно применять алгоритмы, разработанные для одной линии. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bischoff M., Klamroth K.** An efficient solution method for Weber problems with barriers based on genetic algorithms // Eur. J. Oper. Res. 2007. Vol. 177. P. 22–41.
2. **Cabot A. V., Francis R. L., Stary M. A.** A network flow solution to a rectilinear distance facility location problem // AIIE Trans. 1970. Vol. 2, No. 2. P. 132–141.
3. **Kuhn H. W.** A note on Fermat's problem // Math. Program. 1973. Vol. 4. P. 98–107.
4. **McGarvey R. G., Cavalier T. M.** Constrained location of competitive facilities in the plane // Comput. Oper. Res. 2005. Vol. 32. P. 539–578.
5. **Picard J. C., Ratliff D. H.** A cut approach to the rectilinear distance facility location problem // Oper. Res. 1978. Vol. 26, No. 3. P. 422–433.
6. **Мухачёва Э. А.** Обзор и перспективы развития комбинаторных методов решения задач раскроя и упаковки // Мат. междунар. конф. «Дискретный анализ и исследование операций». Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. С. 80–87.

7. **Панюков А. В.** Задача размещения прямоугольных объектов с минимальной стоимостью связывающей сети // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 70–87.
8. **Ерзин А. И., Чо Д. Д.** Задача одновременного размещения и маршрутизации при проектировании интегральных схем // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 177–190.
9. **Забудский Г. Г., Амзин И. В.** Алгоритмы компактного размещения технологического оборудования на параллельных линиях // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 86–94.
10. **Picard J. C., Queyranne M.** On the one-dimensional space allocation problem // Oper. Res. 1981. Vol. 29, No. 2. P. 371–391.
11. **Adolphson D., Hu T. C.** Optimal linear ordering // SIAM J. Appl. Math. 1973. Vol. 25, No. 3. P. 403–423.
12. **Chan A. W., Francis R. L.** Some layout problems on the line with interdistance constraints costs // Oper. Res. 1979. Vol. 27, No. 5. P. 952–971.
13. **Love R. F., Wong J. Y.** On solving a one-dimensional space allocation problem with integer programming // INFOR. 1976. Vol. 14, No. 2. P. 139–143.
14. **Simmons D. M.** One-dimensional space allocation: an ordering algorithm // Oper. Res. 1969. Vol. 17, No. 5. P. 812–826.
15. **Ouyang R., Beacher M. R., Ma D., Noor-E-Alam Md.** Navigating concave regions in continuous facility location problems // Comput. Ind. Eng. 2020. Vol. 143. 106385.
16. **Katz N., Cooper L.** Facility location in the presence of forbidden regions, I: Formulation and the case of Euclidean distance with one forbidden circle // Eur. J. Oper. Res. 1981. Vol. 6, No. 2. P. 166–173.
17. **Prakash M. A., Raju K., Raju V. R.** Facility location problems in the presence of two elliptical forbidden regions // Int. Conf. Mater. Process. Charact. 2018. Vol. 5, No. 2. P. 4000–4007.
18. **Prakash M. A., Raju K., Raju V. R.** Facility location in the presence of mixed forbidden regions // Int. J. Appl. Eng. Res. 2018. Vol. 13, No. 1. P. 91–97.
19. **McGarvey R. G., Cavalier T. M.** A global optimal approach to facility location in the presence of forbidden regions // Comput. Ind. Eng. 2003. Vol. 45, No. 1. P. 1–15.
20. **Maier A., Hamacher H. W.** Complexity results on planar multifacility location problems with forbidden regions // Math. Methods Oper. Res. 2019. Vol. 89. P. 433–484.
21. **Nickel S., Puerto J.** Location theory. A unified approach. Springer, 2009.
22. **Руднев А. С.** Алгоритм имитации отжига для решения задач двумерной упаковки в контейнеры с запрещёнными областями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 4. С. 43–66.
23. **Забудский Г. Г., Веремчук Н. С.** Алгоритм приближённого решения задачи Вебера на линии с запрещёнными зонами // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 1. С. 82–96.
24. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

25. Zabudsky G. G., Veremchuk N. S. Branch and bound method for the Weber problem with rectangular facilities on lines in the presence of forbidden gaps // Optimization Problems and Their Applications. Rev. Sel. Pap. 7th Int. Conf. (Omsk, Russia, July 8–14, 2018). Cham: Springer, 2018. P. 29–41. (Commun. Comput. Inf. Sci.; Vol. 871).

26. Zabudsky G. G., Veremchuk N. S. About local optimum of the Weber problem on line with forbidden gaps // Discrete Optimization and Operations Research. Suppl. Proc. 9th Int. Conf. DOOR (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). Aachen: RWTH Aachen Univ., 2017. P. 115–124. (CEUR Workshop Proc.; Vol. 1623). Available at `http://ceur-ws.org/Vol-1623` (accessed Aug. 2, 2021).

27. Забудский Г. Г. О задаче линейного упорядочения вершин параллельно-последовательных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2000. Т. 7, № 1. С. 61–64.

28. Zabudsky G. G., Veremchuk N. S. On the one-dimensional space allocation problem with partial order and forbidden zones // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Rev. Sel. Pap. 18th Int. Conf. (Yekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019). Cham: Springer, 2019. P. 131–143. (Commun. Comput. Inf. Sci.; Vol. 1090).

29. Zabudsky G. G., Veremchuk N. S. About one-dimensional space allocation problem with forbidden zones // J. Phys. Conf. Ser. 2019. Vol. 1260, No. 8. P. 082006:1–082006:8.

30. Забудский Г. Г. О сложности задачи размещения на линии с ограничениями на минимальные расстояния // Изв. вузов. Математика. 2005. Т. 12. С. 11–14.

31. Zabudsky G. G., Veremchuk N. S. Multi-facility placement on lines with forbidden zones and routing of communications // J. Phys. Conf. Ser. 2020. Vol. 1546. P. 012106:1–012106:9.

32. Zabudsky G. G., Veremchuk N. S. Numerical research of placement problem on lines with forbidden zones and routing communications // J. Phys. Conf. Ser. 2021. Vol. 1791. P. 012089:1–012089:7.

Забудский Геннадий Григорьевич
Веремчук Наталья Сергеевна

Статья поступила
3 июня 2021 г.
После доработки —
2 июля 2021 г.
Принята к публикации
5 июля 2021 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2021. Vol. 28, No. 4. P. 70–89

UDC 519.658 DOI 10.33048/daio.2021.28.717

OPTIMIZATION OF LOCATION OF INTERCONNECTED FACILITIES ON PARALLEL LINES WITH FORBIDDEN ZONES

G. G. Zabudsky[1, a] and *N. S. Veremchuk*[2, b]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

[2] Siberian State Automobile and Highway University,
5 Mira Avenue, 644080 Omsk, Russia

E-mail: [a] `zabudsky@ofim.oscsbras.ru`, [b] `n-veremchuk@rambler.ru`

Abstract. An overview of statements, models and methods for solving location problem of interconnected rectangular facilities on parallel lines with forbidden zones is given. The centers of the facilities are connected by communications with each other and with forbidden zones. It is necessary to place facilities outside the zones in such a way that the total cost of communications facilities to each other and to the zones was minimal. The main focus is on the problem on the line. For several lines communication are through a viaduct. Models of graph–theoretic formulation and partially integer programming with Boolean variables are constructed. Properties are found that allow us to consider the problem as discrete and decompose it into a number of problems of smaller dimension. Algorithms for finding exact and approximate solutions are developed, and polynomial solvable cases are identified. The results of numerical experiments are presented. Bibliogr. 32.

Keywords: discrete optimization, location problem, forbidden zones.

REFERENCES

1. **M. Bischoff, K. Klamroth,** An efficient solution method for Weber problems with barriers based on genetic algorithms, *Eur. J. Oper. Res.* **177**, 22–41 (2007).
2. **A. V. Cabot, R. L. Francis,** and **M. A. Stary,** A network flow solution to a rectilinear distance facility location problem, *AIIE Trans.* **2**, 132–141 (1970).
3. **H. W. Kuhn,** A note on Fermat's problem, *Math. Program.* **4**, 98–107 (1973).

This research is supported by the Program for Fundamental Scientific Research of SB RAS No. I.5.1 (Project 0314–2019–0019).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **15** (4) (2021).

4. **R. G. McGarvey** and **T. M. Cavalier,** Constrained location of competitive facilities in the plane, *Comput. Oper. Res.* **32**, 539–578 (2005).
5. **J. C. Picard** and **D. H. Ratliff,** A cut approach to the rectilinear distance facility location problem, *Oper. Res.* **26** (4), 422–433 (1978).
6. **E. A. Mukhacheva,** A review and prospects of development of combinatorial methods for solution of cutting and packing problems, in *Proc. All-Russian Conf. "Discrete Optimization and Operation Research," Novosibirsk, Russia, June 24—28, 2002* (Inst. Mat., Novosibirsk, 2002), pp. 80–87 [Russian].
7. **A. V. Panyukov,** The problem of locating rectangular plants with minimal cost for the connecting network, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **8** (1), 70–87 (2001) [Russian].
8. **A. I. Erzin** and **D. D. Cho,** Concurrent placement and routing in the design of integrated circuits, *Avtom. Telemekh.,* No. 12, 177–190 (2003) [Russian] [*Autom. Remote Control,* **64** (12), 1988–1999 (2003)].
9. **G. G. Zabudsky** and **I. V. Amzin,** Algorithms of compact location for technological equipment on parallel lines, *Sib. Zh. Ind. Mat.* **16** (3), 86–94 (2013) [Russian].
10. **J. C. Picard** and **M. Queyranne,** On the one-dimensional space allocation problem, *Oper. Res.* **29** (2), 371–391 (1981).
11. **D. Adolphson** and **T. C. Hu,** Optimal linear ordering, *SIAM J. Appl. Math.* **25** (3), 403–423 (1973).
12. **A. W. Chan** and **R. L. Francis,** Some layout problems on the line with interdistance constraints costs, *Oper. Res.* **27** (5), 952–971 (1979).
13. **R. F. Love** and **J. Y. Wong,** On solving a one-dimentional space allocation problem with integer programming, *INFORR* **14** (2), 139–143 (1976).
14. **D. M. Simmons,** One-dimensional space allocation: An ordering algorithm, *Oper. Res.* **17** (5), 812–826 (1969).
15. **R. Ouyang, M. R. Beacher, D. Ma,** and **Md. Noor-E-Alam,** Navigating concave regions in continuous facility location problems, *Comp. Ind. Eng.* **143**, 106385 (2020).
16. **N. Katz** and **L. Cooper,** Facility location in the presence of forbidden regions, I: Formulation and the case of Euclidean distance with one forbidden circle, *Eur. J. Oper. Res.* **6** (2), 166–173 (1981).
17. **M. A. Prakash, K. Raju,** and **V. R. Raju,** Facility location problems in the presence of two elliptical forbidden regions, *Int. Conf. Mater. Process. Charact.* **5** (2), 4000–4007 (2018).
18. **M. A. Prakash, K. Raju,** and **V. R. Raju,** Facility location in the presence of mixed forbidden regions, *Int. J. Appl. Eng. Res.* **13** (1), 91–97 (2018).
19. **R. G. McGarvey** and **T. M. Cavalier,** A global optimal approach to facility location in the presence of forbidden regions, *Comput. Ind. Eng.* **45** (1), 1–15 (2003).
20. **A. Maier** and **W. H. H.,** Complexity results on planar multifacility location problems with forbidden regions, *Math. Methods Oper. Res.* **89**, 433–484 (2019).
21. **S. Nickel** and **J. Puerto,** *Location Theory. A Unified Approach* (Springer, Heidelberg, 2009).

22. **A. S. Rudnev,** Simulated annealing based algorithm for the rectangular bin packing problem with impurities, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **17** (4), 43–66 (2010) [Russian].
23. **G. G. Zabudsky** and **N. S. Veremchuk,** An algorithm for approximate solution to the Weber problem on a line with forbidden gaps, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **23** (1), 82–96 (2016) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **10** (1), 136–144 (2016)].
24. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).
25. **G. G. Zabudsky** and **N. S. Veremchuk,** Branch and bound method for the weber problem with rectangular facilities on lines in the presence of forbidden gaps, in *Optimization Problems and Their Applications* (Rev. Sel. Pap. 7th Int. Conf., Omsk, Russia, July 8–14, 2018) (Springer, Cham, 2018), pp. 29–41 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 871).
26. **G. G. Zabudsky** and **N. S. Veremchuk,** About local optimum of the Weber problem on line with forbidden gaps, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Suppl. Proc. 9th Int. Conf. DOOR, Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016) (RWTH Aachen Univ., Aachen, 2017), pp. 115–124 (CEUR Workshop Proc., Vol. 1623). Available at `http://ceur-ws.org/Vol-1623` (accessed Aug. 2, 2021).
27. **G. G. Zabudsky,** On the problem of the linear ordering of vertices of parallel-sequential graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **7** (4), 61–64 (2000) [Russian].
28. **G. G. Zabudsky** and **N. S. Veremchuk,** On the one-dimensional space allocation problem with partial order and forbidden zones, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (Rev. Sel. Pap. 18th Int. Conf., Yekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019) (Springer, Cham, 2019), pp. 131–143 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1090).
29. **G. G. Zabudsky** and **N. S. Veremchuk,** About one-dimensional space allocation problem with forbidden zones, *J. Phys., Conf. Ser.* **1260** (8), 082006:1–082006:8 (2019).
30. **G. G. Zabudsky,** On the complexity of the problem of arrangement on a line with constraints on minimum distances, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.,* No. 12, 11–14 (2005) [Russian].
31. **G. G. Zabudsky** and **N. S. Veremchuk,** Multi-facility placement on lines with forbidden zones and routing of communications, *J. Phys., Conf. Ser.* **1546**, 012106:1–012106:9 (2020).
32. **G. G. Zabudsky** and **N. S. Veremchuk,** Numerical research of placement problem on lines with forbidden zones and routing communications, *J. Phys., Conf. Ser.* **1791**, 012089:1–012089:7 (2021).

Gennady G. Zabudsky
Natalia S. Veremchuk

Received June 3, 2021
Revised July 2, 2021
Accepted July 5, 2021