ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2022. Т. 29, № 1. С. 5–17

УДК 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2022.29.706

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОГО ДОМИНИРОВАНИЯ

В. В. Ворошилов

Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, 644077 Омск, Россия
E-mail: voroshil@gmail.com

Аннотация. Пусть $G = (V, E, w)$ — простой взвешенный неориентированный граф с неотрицательными весами рёбер. Пусть D — минимальное доминирующее множество вершин в G. Разрез, порождённый множеством D, — это множество рёбер, один из концов которых принадлежит D, а другой — $V \setminus D$. Весом разреза является сумма весов принадлежащих ему рёбер. Данная работа посвящена поиску разреза максимального веса среди всех минимальных доминирующих множеств в неориентированном графе. В частности, доказывается несуществование приближённого полиномиального алгоритма с гарантированной точностью, лучшей чем $|V|^{-\frac{1}{2}}$, в случае P $\neq$ NP. Ил. 3, библиогр. 8.

Ключевые слова: граф, разрез, доминирующее множество, взвешенный граф, задача оптимизации, аппроксимация.

Введение

В рамках задачи анализа экономической безопасности региона авторами в [1] предлагается собственная методика выделения ключевых показателей (так называемых индикаторов) экономической безопасности региона, исключающая субъективный фактор из процесса их определения. Этот набор должен быть статистически связан со всеми остальными показателями, иметь максимальное влияние на них и при этом быть минимально возможным по размеру.

Предложенная методика заключается в построении рёберно взвешенного ориентированного графа, вершинами которого являются показатели, а дугами — связи между ними. Неотрицательным весом дуги является степень влияния одного показателя на другой. Вес множества вершин определяется как сумма весов дуг, исходящих из вершин этого множества.

Чтобы выполнить требование статистической связи со всеми остальными показателями, поиск в графе предлагается выполнять исключительно среди доминирующих множеств. Напомним, что множество вершин S ориентированного графа $G = (V, A)$ называется *доминирующим*, если либо любая вершина v принадлежит S, либо в G существуют вершина $u \in S$ и дуга $(u, v) \in A$ (далее в работе семейство таких множеств будет обозначаться через $D(G)$).

Чтобы избежать двухкритериальности, авторами методики предлагается решать оптимизационную задачу поиска множества вершин максимального веса среди всех минимальных доминирующих множеств графа, т. е. тех, удаление любой вершины из которых приводит к потере свойства доминирования (далее семейство таких множеств будет обозначаться через $D_{\min}(G)$).

Формально упомянутая выше оптимизационная задача на взвешенном ориентированном графе $G = (V, A, w)$ с заданными неотрицательными весами его дуг может быть записана так:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in S} \sum\limits_{j \in N_+\{i\}} w(i, j) \to \max, \\ S \in D_{\min}(G), \end{cases} \tag{1}$$

где $N_+\{i\} = \{j \in V \mid (i, j) \in A\}$ — исходящая окрестность вершины i. Если перейти от весов дуг к весам вершин, равным сумме весов исходящих из неё дуг, то задача примет вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in S} w(i) \to \max, \\ S \in D_{\min}(G). \end{cases} \tag{2}$$

В таком виде она известна в специальной литературе как MAX MIN DOMINATING SET и подробно (в её неориентированном варианте) исследована в [2, 3]. В частности, показано, что она относится к классу NP-трудных и в случае $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не существует приближённых полиномиальных алгоритмов её решения с гарантированной оценкой точности $|V|^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$ для любого $\varepsilon > 0$. В то же время автору неизвестно, имеются ли работы, посвящённые её ориентированному варианту.

Нетрудно заметить, что при таком подходе в исходной экономической задаче учитываются не только степень влияния между показателями из множества и за его пределами, но и связи между показателями внутри самого множества, что может быть нежелательным побочным эффектом, поскольку степень влияния ключевых показателей на прочие более важна, чем взаимосвязи между ними.

Если же из целевой функции исключить дуги между вершинами множества S, то задача (1) превратится в следующую:

$$\begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in\{S\to\overline{S}\}} w(i,j) \to \max, \\ S \in D_{\min}(G), \end{cases} \tag{3}$$

где $\{S \to \overline{S}\}$ — разрез, порождённый множеством S, т. е. множество всех дуг, начало которых принадлежит S, а конец — $\overline{S} = V \setminus S$.

Эта задача под названием MAX MDS DICUT рассматривалась в [4], где приведено доказательство её принадлежности к классу NP-трудных. В то же время вопросы трудоёмкости аналогичной задачи для случая неориентированного графа (назовём её MAX MDS CUT), равно как и оценки гарантированной точности приближённых алгоритмов, освещены не были.

Прежде чем формально записать задачу MAX MDS CUT, приведём понятия разреза и доминирующего множества для неориентированного графа.

Под разрезом $(S, \overline{S})$, *порождённым множеством* $S \subseteq V$, во взвешенном неориентированном графе $G = (V, E, w)$ будем понимать множество рёбер, один конец которых принадлежит S, а другой — нет [5].

Множество вершин $D \subseteq V$ будем называть *доминирующим*, если любая вершина из $V \setminus D$ смежна какой-либо вершине из D. Будем говорить, что доминирующее множество *минимальное по включению* (или просто *минимальное*), если оно не содержит в себе доминирующих множеств меньшей мощности. Семейство всех минимальных доминирующих множеств будем обозначать через $D_{\min}(G)$.

Теперь задача может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in(S,\overline{S})} w(i,j) \to \max, \\ S \in D_{\min}(G). \end{cases} \tag{4}$$

В разд. 1 доказывается принадлежность этой задачи классу NP-трудных, обосновывается полиномиальность алгоритмов её точного решения для деревьев и двудольных графов. В разд. 2 показывается, что в случае $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не существует приближённых полиномиальных алгоритмов её решения с гарантированной оценкой точности $|V|^{\varepsilon-\frac{1}{2}}$ для любого $\varepsilon > 0$.

1. Класс сложности для неориентированного графа

Сформулируем задачу MAX MDS CUT в распознавательной форме.

Определение 1 (задача MAX MDS CUT в распознавательной форме). Пусть $G = (V, E, f)$ — простой взвешенный неориентированный граф, $f(e) \geqslant 0$ — веса его рёбер, $\beta \geqslant 0$ — параметр. Существует ли $S \in D_{\min}(G)$

такое, что
$$\sum_{e\in(S,\overline{S})} f(e) \geqslant \beta?$$

Нетрудно заметить, что эта задача может рассматриваться как аналог известной задачи о разрезе максимального веса (MAX CUT) [6] с дополнительным ограничением на характер множества S. Справедливости ради стоит отметить, что в [7] рассматривались варианты задачи MAX CUT с различными ограничениями на характер S, включая условие доминирования или ограничение размера множества, но именно минимальное доминирование изучено не было.

Теорема 1. *Задача* MAX MDS CUT *в распознавательной форме* NP-*полна.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что рассматриваемая задача, очевидно, относится к классу NP, поскольку недетерминированный алгоритм, «угадав» подходящее множество D, за время $O(|V|^2)$ сможет проверить, что оно является минимальным по включению доминирующим множеством, и сравнить значение целевой функции с заданным параметром.

Для доказательства NP-полноты выполним свед́ение к рассматриваемой задаче задачи MAX MIN DOMINATING SET, которая в виде задачи распознавания формулируется следующим образом. Пусть $G = (V, E, g)$ — простой взвешенный неориентированный граф, $g(v) \geqslant 0$ — веса его вершин, $\beta \geqslant 0$ — параметр. Существует ли $D \in D_{\min}(G)$ такое, что
$$\sum_{v\in D} g(v) \geqslant \beta?$$

Принадлежность задачи MAX MIN DOMINATING SET классу NP-полных была доказана в [2].

Итак, пусть имеется пример задачи MAX MIN DOMINATING SET в распознавательной форме с заданным графом G, весами его вершин g и параметром β.

Построим новый граф $G' = (V', E', f)$, в котором каждой вершине v из V поставим в соответствие пару вершин v, v' и соединяющее их ребро (v, v'). Каждому ребру между вершинами v и u поставим в соответствие три ребра (v, u), (v, u') и (v', u). Вес ребра $f(v, v')$ положим равным весу вершины v, веса остальных рёбер — равными 0. Пример исходного графа G и соответствующего ему G' см. на рис. 1 и 2. Очевидно, что такое построение можно выполнить за полиномиальное время относительно $|V|$, точнее за $O(|E|)$.

Легко показать, что любое минимальное по включению доминирующее множество в графе G будет таковым и в графе G'. В самом деле,

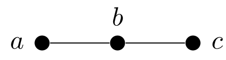

Рис. 1. Граф G

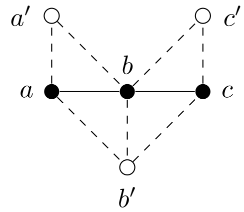

Рис. 2. Граф G'

в силу построения графа G' вершины u и u' будут смежными (или, наоборот, не смежными) с v тогда и только тогда, когда вершина u смежна (соответственно не смежна) с v в графе G.

Кроме того, в любое минимальное доминирующее множество графа G' не могут входить одновременно и вершина v, и парная ей вершина v', поскольку между ними есть ребро, а любая другая вершина смежна (или не смежна) одновременно как с v, так и с v'.

Пусть D — решение задачи MAX MIN DOMINATING SET. В силу вышеизложенного оно также будет минимальным по включению доминирующим множеством в G', при этом

$$\beta \leqslant \sum_{v \in D} g(v) = \sum_{v \in D} f(v, v') \leqslant \sum_{(i,j) \in (D, \overline{D})} f(i, j),$$

т. е. D также является и решением задачи MAX MDS CUT.

Пусть теперь D' — решение задачи MAX MDS CUT. Построим множество D, заменив в D' все вершины v' на v. Множество D будет минимальным по включению доминирующим множеством в G, поскольку любая вершина, смежная с v', также смежна с v (и наоборот, вершина u, не смежная с v, не будет смежной и с v'). Далее,

$$\beta \leqslant \sum_{(i,j) \in (D', \overline{D}')} f(i, j) = \sum_{(i,j) \in (D, \overline{D})} f(i, j) = \sum_{v \in D} f(v, v') = \sum_{v \in D} g(v),$$

т. е. D является решением задачи MAX MIN DOMINATING SET.

Таким образом доказано, что решение задачи MAX MIN DOMINATING SET существует тогда и только тогда, когда существует решение задачи MAX MDS CUT, т. е. выполнено полиномиальное сведéние известной NP-полной задачи к рассматриваемой. Теорема 1 доказана.

В силу того, что задача MAX MDS CUT в распознавательной форме относится к классу NP-полных, исходная оптимизационная задача NP-трудна.

Утверждение 1. *Задача* MAX MDS CUT *разрешима для двудольных графов за время* $O(|V| + |E|)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что граф не содержит изолированных вершин, поскольку они не влияют на результат целевой функции и всегда принадлежат минимальному доминирующему множеству.

Пусть $G = (V, E, f)$ — простой двудольный граф без изолированных вершин, $f(e) \geqslant 0$ — веса его рёбер.

Произвольным образом выберем долю графа и обозначим её S. Рассмотрим вершину $u \in \overline{S} = V \setminus S$. Поскольку граф не содержит изолированных вершин, существует как минимум одна вершина $v \in V$, смежная с u, но по определению двудольного графа v не может принадлежать $\overline{S}$, следовательно, $v \in S$ и множество S доминирующее.

С другой стороны, любая вершина $v \in S$ не смежна ни с одной другой вершиной из S, следовательно, множество $S \setminus \{v\}$ доминирующим уже не будет, а значит, S — минимальное доминирующее множество в графе.

Заметим при этом, что разрез $\{S \to \overline{S}\}$ содержит в себе все рёбра графа G, а значит, является разрезом максимального веса. Другими словами, любая из долей графа (в силу произвольности выбора доли) является решением задачи MAX MDS CUT для случая двудольного графа.

Поскольку найти доли в двудольном графе (в том числе и несвязном) можно методом поиска в ширину, имеющим трудоёмкость $O(|V| + |E|)$ (см., например, алгоритм 1), а вычислить значение целевой функции можно за $O(|E|)$, просто просуммировав веса всех рёбер, трудоёмкостью задачи MAX MDS CUT для двудольного графа будет величина $O(|V|+|E|)$. Утверждение 1 доказано.

Следствие 1. *Задача* MAX MDS CUT *разрешима для деревьев за время* $O(|V|)$.

Доказательство вытекает из того факта, что дерево является частным случаем двудольного графа, а $|E| = |V| - 1$. Следствие 1 доказано.

2. Оценка гарантированной точности приближённых алгоритмов

Для построения оценки гарантированной точности приближённых алгоритмов будем использовать своде́ние по Тьюрингу одной оптимизационной задачи к другой.

Алгоритм 1. Раскраска двудольного графа

Вход: E — список рёбер в виде пар с номерами вершин, n — количество вершин, m — количество рёбер

Выход: Массив S, $S[i]$ — номер доли для вершины i

```
▷ R — множество непомеченных вершин
▷ Q — множество помеченных вершин
▷ M[v] — множество смежных с v вершин
for i = 1 to n do
    S[i] ← 0
    Поместить i в R
end for
for i = 1 to m do
    Поместить E[i,1] в M[E[i,2]]
    Поместить E[i,2] в M[E[i,1]]
end for
while R ≠ ∅ do
    if Q = ∅ then
        Выбрать v1 из R произвольно; удалить v1 из R
        Поместить v1 в Q
        S[v1] ← 1
    else
        Выбрать v1 из Q произвольно; удалить v1 из Q
        p ← 3 − S[v1]
        for v2 ∈ M[v1] do
            if S[v2] = S[v1] then
                Ошибка: граф не двудольный
            end if
            if v2 ∈ R then
                Поместить v2 в Q; удалить v2 из R
                S[v2] ← p
            end if
        end for
    end if
end while
```

Сведéние по Тьюрингу является наиболее общим вариантом сведéния одной оптимизационной задачи к другой, включающим в себя в качестве частного случая широко известное и наиболее часто применяемое сведéние по Карпу. В [8] оно (с точностью до обозначений) определяется следующим образом: переборная задача P сводится за полиномиальное время к задаче Q в смысле Тьюринга (или просто сводится по Тьюрингу), если существует алгоритм A, который решает задачу P с помощью

гипотетической подпрограммы B решения задачи Q такой, что если B была бы полиномиальным алгоритмом для Q, то A был бы полиномиальным алгоритмом для P.

Обозначим через Q_{in} семейство всех индивидуальных задач I, каждая из которых — это простой ориентированный граф $I = (V, A, f)$ с неотрицательными весами его дуг, через S_q — функцию, которая каждой индивидуальной задаче (графу) I ставит в соответствие семейство всех его минимальных доминирующих множеств, а через f_q — целевую функцию. Тогда оптимизационную задачу MAX MDS CUT можно записать в виде $Q = \langle Q_{in}, S_q, f_q\rangle$. В данном случае

$$S_q(I) = D_{\min}(I),$$

$$f_q(I, S) = \sum_{e\in(S,\overline{S})} f(e).$$

Аналогичным образом введём обозначение $P = \langle P_{in}, S_p, f_p\rangle$ для оптимизационной задачи MAX MIN DOMINATING SET. Здесь P_{in} — семейство всех неориентированных взвешенных графов $I = (V, E, g)$ с заданными неотрицательными весами их вершин. Для каждой индивидуальной задачи I определены множество её допустимых решений

$$S_p(I) = D_{\min}(I)$$

и целевая функция

$$f_p(I, S) = \sum_{v\in S} g(v).$$

Теорема 2. *В случае* $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ *не существует полиномиального приближённого алгоритма решения задачи* Q *с гарантированной оценкой лучше чем* $|V|^{\varepsilon-\frac{1}{2}}$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно и существуют некоторое $\varepsilon > 0$ и полиномиальный приближённый алгоритм A решения задачи Q такие, что для любой индивидуальной задачи I из Q_{in} справедлива оценка

$$\frac{OPT(I)}{A(I)} \leqslant |V|^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

где V — множество вершин графа I, $OPT(I)$ и $A(I)$ — значения целевой функции для оптимального решения задачи I и найденного алгоритмом A допустимого решения соответственно.

Выполним сведе́ние по Тьюрингу задачи P к задаче Q.

Пусть имеется индивидуальная задача $I = (V, E, g) \in P_{in}$. Построим за время $O(|V|^2)$ новый граф $I' = (V', A', f)$ так, как это делалось при доказательстве теоремы 1. Поскольку любое минимальное по включению

доминирующее множество вершин графа I является таковым и в графе I', имеем $S_p(I) \subseteq S_q(I')$.

В итоге получаем, что для любого минимального доминирующего множества графа I, т. е. для любого $S \in S_p(I)$ верно

$$f_p(I, S) = \sum_{v \in S} g(v) = \sum_{e \in \{vv' \in A \,|\, v \in S\}} f(e) = \sum_{e \in (S, \overline{S})} f(e) = f_q(I', S),$$

откуда следует, что для любой $I \in P_{in}$ справедливо

$$OPT(I) \leqslant OPT(I'). \tag{5}$$

Кроме того, если в $S' \in S_q(I')$ все вершины $v' \notin V$ заменить на парные им $v \in V$, то получившееся множество S, во-первых, также является минимальным доминирующим, т. е. $S \in S_p(I) \subseteq S_q(I')$, а во-вторых,

$$\begin{aligned} f_q(I', S') = \sum_{v \in S' \cap V} f(v, v') + \sum_{v' \in S' \setminus V} f(v', v) \\ = \sum_{v \in S} f(v, v') = \sum_{v \in S} g(v) = f_p(I, S). \end{aligned} \tag{6}$$

Получаем схему алгоритма, изображённую на рис. 3. На ней B — это шаг построения графа I' из графа I, A — рассматриваемый полиномиальный алгоритм решения задачи Q, C — шаг построения множества $S = A(I)$ из множества $S' = A(I')$ заменой вершин v' на v; A, B, C полиномиальны относительно $|V|$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "B"] & I' \arrow[d, "A"] \\ A(I) & A(I') \arrow[l, "C"'] \end{tikzcd}$$

Рис. 3. Схема сведéния P к Q по Тьюрингу

В силу (5) и (6) имеем $OPT(I) = OPT(I')$, но тогда

$$\frac{OPT(I)}{A(I)} = \frac{OPT(I')}{A(I')} \leqslant |V|^{\frac{1}{2} - \varepsilon}.$$

Это означает, что нам удалось построить полиномиальный алгоритм, который для произвольной индивидуальной задачи I из P_{in} находит приближённое решение с гарантированной оценкой лучше чем $|V|^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$ с учётом того, что рассматривается задача на максимум. Однако в [3]

доказано, что такого полиномиального алгоритма не существует, если $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$. Таким образом, получено противоречие. Теорема 2 доказана.

Заключение

В рамках данной работы получена оценка трудоёмкости алгоритмов решения задачи поиска разреза максимального веса, порождённого минимальным доминирующим множеством, для случая неориентированного графа.

Было показано, что для графов общего вида задача относится к классу NP-трудных. Более того, при $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ не существует приближённого полиномиального алгоритма с гарантированной оценкой $|V|^{\varepsilon-\frac{1}{2}}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Что касается графов специального вида, то для связанных ациклических графов (деревьев) и двудольных графов приведён алгоритм поиска точного решения за полиномиальное время. При этом вопрос сложности алгоритмов поиска точных и приближённых решений для других графов специального вида пока остаётся открытым и является предметом будущих исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Симанчёв Р. Ю., Уразова И. В., Ворошилов В. В., Карпов В. В., Кораблёва А. А.** Выбор системы ключевых показателей экономической безопасности региона с использованием модели $(0, 1)$-программирования // Вестн. Омск. гос. ун-та. Сер. Экономика. 2019. Т. 17, № 3. С. 170–179.
2. **Cheston G. A., Fricke G., Hedetniemi S. T., Jacobs D. P.** On the computational complexity of upper fractional domination // Discrete Appl. Math. 1990. V. 27, No. 3. P. 195–207.
3. **Boria N., Della Croce F., Paschos V. Th.** On the max min vertex cover problem // Discrete Appl. Math. 2015. V. 196. P. 62–71.
4. **Ворошилов В. В.** Разрез наибольшего веса в орграфе, порождённый минимальным доминирующим множеством // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2020. Т. 27, № 4. С. 5–20.
5. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
6. **Karp R. M.** Reducibility among combinatorial problems // Complexity of Computer Computations. Proc. Symp. (New York, USA, March 20–22, 1972). New York: Plenum Press, 1972.
7. **Lee J., Nagarajan V., Shen X.** Max-cut under graph constraints // Integer Programming and Combinatorial Optimization. Proc. 18th Int. Conf. (Liège, Belgium, June 1–3, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 50–62 (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9682).

8. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

Ворошилов Владимир Владимирович

Статья поступила
19 февраля 2021 г.
После доработки —
1 декабря 2021 г.
Принята к публикации
2 декабря 2021 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2022. Vol. 29, No. 1. P. 5–17

UDC 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2022.29.706

COMPLEXITY OF THE MAX CUT PROBLEM WITH THE MINIMAL DOMINATION CONSTRAINT

V. V. Voroshilov

Dostoevsky Omsk State University,
55a Mir Avenue, 644077 Omsk, Russia
E-mail: `voroshil@gmail.com`

Abstract. Let $G = (V, E, w)$ be a simple weighted undirected graph with nonnegative weights of its edges. Let D be a minimal dominating set in G. Cutset induced by D is a set of edges with one vertex in the set D and the other in $V \setminus D$. The weight of a cutset is the total weight of all its edges. The paper deals with the problem of finding a cutset with maximum weight among all minimal dominating sets. In particular, nonexistence of polynomial approximation algorithm with ratio better than $|V|^{-\frac{1}{2}}$ in case of $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ is proved. Illustr. 3, bibliogr. 8.

Keywords: graph, cutset, dominating set, weighted graph, optimization problem, approximation.

REFERENCES

1. **R. Yu. Simanchev**, **I. V. Urazova**, **V. V. Voroshilov**, **V. V. Karpov,** and **A. A. Korableva,** Selection the key indicators system of the region economic security with use of the $(0, 1)$-programming model, *Vestn. Omsk. Univ., Ser. Ekonomika* **17** (3), 170–179 (2019) [Russian].
2. **G. A. Cheston**, **G. Fricke**, **S. T. Hedetniemi,** and **D. P. Jacobs,** On the computational complexity of upper fractional domination, *Discrete Appl. Math.* **27** (3), 195–207 (1990).
3. **N. Boria**, **F. Della Croce,** and **V. Th. Paschos,** On the max min vertex cover problem, *Discrete Appl. Math.* **196**, 62–71 (2015).
4. **V. V. Voroshilov,** A maximum dicut in a digraph induced by a minimal dominating set, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **27** (4), 5–20 (2020) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **14** (4), 792–801 (2020)].
5. **N. Christofides,** *Graph Theory: An Algorithmic Approach* (Academic Press, London, 1975; Mir, Moscow, 1978 [Russian]).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **16** (1) (2022).

6. R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, *Complexity of Computer Computations* (Proc. Symp. CCC, Yorktown Heights, USA, March 20–22, 1972) (Plenum Press, New York, 1972), pp. 85–103.

7. J. Lee, N. Viswanath, and **X. Shen,** Max-cut under graph constraints, *Programming and Combinatorial Optimization* (Proc. 18th Int. Conf., Liège, Belgium, June 1–3, 2016) (Springer, Cham, 2016), pp. 50–62 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9682).

8. M. R. Garey and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).

Vladimir V. Voroshilov

Received February 19, 2021
Revised December 1, 2021
Accepted December 2, 2021