ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2022. Т. 29, № 1. С. 33–45

УДК 519.174.7 DOI 10.33048/daio.2022.29.718

О СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСКАХ ЦЕПЕЙ, КРАТНЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЮ

М. А. Лисицына[1, a], *С. В. Августинович*[2, b]

[1] Военная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного,
Тихорецкий пр., 3, 194064 Санкт-Петербург, Россия
[2] Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: [a] lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com,
[b] avgust@math.nsc.ru

Аннотация. Раскраска вершин графа G называется совершенной, если цветовой состав окружения каждой вершины однозначно определяется цветом этой вершины. В работе дана полная характеризация совершенных раскрасок в произвольное конечное число цветов лексикографического произведения бесконечной цепи и паросочетания. Ил. 1, библиогр. 18.

Ключевые слова: совершенная раскраска, бесконечная цепь, паросочетание, лексикографическое произведение.

Введение

Рассмотрим простой неориентированный граф $G = (V, E)$ с множествами вершин V и рёбер E. Элементы конечного множества $I = \{1, 2, \dots, k\}$ будем называть *цветами.* Функция $\varphi\colon V \to I$ называется *совершенной раскраской* с матрицей параметров $M = (m_{ij})_{i,j=1}^{k}$, если она сюръективна и для всех i и j для любой вершины цвета i количество её соседей цвета j равно m_{ij}.

В теории совершенных структур есть задачи описания совершенных раскрасок произведений двух хорошо изученных графов. В таких исследованиях, как правило, речь идёт о прямом (декартовом) произведении (см., например, [1]). Однако кроме прямого существуют и другие типы произведений графов, достаточно полный обзор которых можно найти в [2]. Одним из интересных, но малоизученных является лексикографическое произведение графов. Напомним его определение.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0017).

Пусть G и H — произвольные графы. Граф, множество вершин которого является декартовым произведением $V(H) \times V(G)$, а две вершины (u_1, u_2) и (v_1, v_2) смежны тогда и только тогда, когда $\{u_1, v_1\} \in E(H)$ или $u_1 = v_1$ и $\{u_2, v_2\} \in E(G)$, называется *лексикографическим произведением* графов H и G и обозначается через $H \cdot G$. Таким образом, чтобы получить граф $H \cdot G$ нужно выполнить следующие действия: каждую вершину графа H заменить копией графа G (*G-блоком*), после чего соединить рёбрами пары вершин из соседних G-блоков. Для лексикографического произведения графов используется также термин *композиция графов*.

Бесконечной цепью C_∞ называется граф, в котором множество вершин совпадает с множеством целых чисел и две вершины u и v смежны, если $|u - v| = 1$. Лексикографическое произведение $C_\infty \cdot G$ назовём *G-кратной бесконечной цепью.*

Приведём схемы локального строения графов G и $C_\infty \cdot G$ (рис. 1).

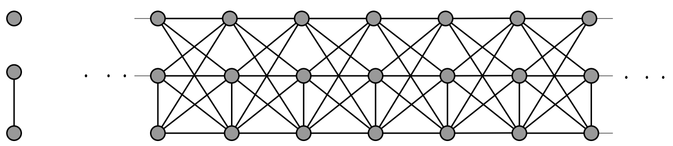

Рис. 1. Локальное строение графов G (слева) и $C_\infty \cdot G$ (справа)

Две раскраски графа $C_\infty \cdot G$ будем считать *эквивалентными*, если для каждого G-блока можно указать автоморфизм, который первую его раскраску переводит во вторую. Раскраску G-кратной бесконечной цепи назовём *периодической* с периодом длины $l \in \mathbb{N}$, если она эквивалентна себе самой, сдвинутой на l G-блоков.

Всюду далее через M_n обозначается граф паросочетания на $2n$ вершинах. В работе изучаются совершенные раскраски M_n-кратной цепи в произвольное конечное число цветов.

Ранее в [3] были описаны совершенные k-раскраски произведений $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ и $C_\infty \cdot K_n$ для любого конечного k, где $\overline{K}_n$ и K_n — пустой и полный графы на n вершинах соответственно. Там же доказана периодичность совершенных раскрасок этих графов.

Рассматриваемые графы содержат бесконечную цепь в качестве подграфа. Близкими в этом смысле к ним являются граф призмы P_∞, бесконечные циркулянтные графы и транзитивные решётки.

Совершенные раскраски графа бесконечной призмы в произвольное конечное число цветов перечислены в [1].

Первые результаты о совершенных раскрасках циркулянтных графов принадлежат Д. Б. Хорошиловой [4,5]. Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов с набором дистанций $\{1, 2, \ldots, n\}$ охарактеризованы в [6], а с набором $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ — в [7]. В [8] получены совершенные раскраски такого графа с дистанциями 1 и 2 в произвольное конечное число цветов.

В [9–11] описаны совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решётки $G(Z^2)$ в 2, 3 и $k \leqslant 9$ цветов соответственно. В [12, 13] доказано, что для любой совершенной раскраски бесконечной прямоугольной, треугольной и гексагональной решёток существует периодическая совершенная раскраска с той же матрицей параметров.

Совершенная раскраска называется *дистанционно-регулярной*, если её матрицу параметров можно привести к трёхдиагональному виду. Дистанционно-регулярные раскраски прямоугольной, треугольной и гексагональной решёток перечислены в [14–16] соответственно.

1. Предварительные сведения

Для исследования совершенных раскрасок графа $C_\infty \cdot M_n$ будем использовать те же понятия и методы, что и для цепей $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ и $C_\infty \cdot K_n$ [3].

Опишем конструкцию, порождающую широкий класс совершенных раскрасок лексикографического произведения $H \cdot G$ произвольных графов H и G.

Рассмотрим какую-нибудь совершенную раскраску графа H в цвета из множества $I = \{1, 2, \ldots, k\}$

$$\psi \colon V(H) \to I$$

и набор $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k\}$ совершенных раскрасок графа G в цвета $J_1, J_2, \ldots, J_k$ соответственно, причём $J_p \cap J_q = \varnothing$ для $p \neq q$. Определим раскраску $\psi \cdot \Phi(v_1, v_2)$ графа $H \cdot G$:

$$\psi \cdot \Phi \colon V(H) \times V(G) \to J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_k,$$
$$\psi \cdot \Phi(v_1, v_2) = \varphi_{\psi(v_1)}(v_2).$$

Такую раскраску вершин графа $H \cdot G$ назовём *дизъюнктной*. Приведённая в определении дизъюнктной раскраски формула является формальным отражением того, что каждому цвету i совершенной раскраски графа H соответствует совершенная раскраска φ_i графа G в множество цветов J_i.

Дизъюнктная конструкция для раскрасок впервые описана в [3]. Там же доказана лемма о том, что дизъюнктные раскраски лексикографических произведений графов совершенны.

Настоящая статья посвящена изучению совершенных раскрасок графа $C_\infty \cdot M_n$.

Нетрудно видеть, что лексикографическое произведение графов является ассоциативной операцией. Так как $M_n = \overline{K}_n \cdot E$, где E — граф, состоящий из одного ребра, то $C_\infty \cdot M_n = (C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$. Исследуемый граф, таким образом, может быть представлен двумя способами в виде лексикографического произведения двух множителей. Для представления $C_\infty \cdot M_n$ блоками являются паросочетания M_n, а для $(C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$ — рёбра E.

Важно отметить, что далее дизъюнктность и недизъюнктность раскрасок изучаемого графа будут рассматриваться относительно его представления в виде произведения именно $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ и E. Оказалось, что все его совершенные раскраски исчерпываются дизъюнктными. Основная трудность в доказательстве полученного результата — показать, что недизъюнктных совершенных раскрасок у графа нет.

Для исследования недизъюнктных совершенных раскрасок $C_\infty \cdot M_n$ будем применять технику объединения эквивалентных цветов, которая ранее использовалась для изучения совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решётки [12], а также для бесконечных цепей, кратных графам $\overline{K}_n$ и K_n [3].

Напомним необходимые определения и идею этого метода. Пусть G — регулярный граф и $\varphi\colon V \to I$ — его совершенная раскраска. Цвета i и j в совершенной раскраске φ называются *эквивалентными* ($i \sim j$), если после их отождествления раскраска остаётся совершенной. В [3] доказано, что такое отношение на множестве I является отношением эквивалентности.

Операция отождествления цветов в классах эквивалентности фактормножества $I/\sim$ называется *склеиванием*. Раскраска, полученная после склеивания цветов совершенной раскраски φ, называется *редуцированной* и обозначается через $\widehat{\varphi}$. Отметим, что $\widehat{\varphi}$ является совершенной раскраской. Кроме того, она может содержать эквивалентные цвета, т. е. к ней можно снова применить операцию склеивания.

Рассмотрим некоторую раскраску φ. *Расщеплением* φ назовём совершенную раскраску ψ, удовлетворяющую условию $\varphi = \widehat{\psi}$.

Реализация метода объединения эквивалентных цветов включает в себя два этапа. На первом этапе следует описать все редуцированные раскраски графа G, а на втором — получить все их допустимые расщепления.

2. Редуцированные раскраски M_n-кратной цепи

Совершенную раскраску графа $(C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$ назовём *рёберно монохромной*, если вершины каждого E-блока в ней окрашены одинаково.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Редуцированные раскраски лексикографического произведения графов $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ и E рёберно монохромны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный E-блок произведения $(C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$. Окружения концов такого ребра отличаются в точности на эти вершины. Следовательно, в совершенной раскраске φ они окрашены эквивалентными цветами. Значит, после применения операции склеивания к φ вершины такого E-блока окажутся соцветными. Лемма 1 доказана.

Лемма 2 и теорема 1 описывают все рёберно монохромные раскраски исследуемого графа.

Лемма 2. *При $n \geqslant 2$ рёберно монохромные совершенные раскраски графа $C_\infty \cdot M_n$ находятся во взаимно однозначном соответствии с совершенными раскрасками $\overline{K}_n$-кратной цепи.*

Доказательство. Так как граф $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ можно получить из графа $C_\infty \cdot M_n$ стягиванием рёбер в M_n-блоках, рёберно монохромной совершенной раскраске графа $C_\infty \cdot M_n$ соответствует совершенная раскраска $C_\infty \cdot \overline{K}_n$, в которой внутренняя степень каждого цвета меньше на 1. Лемма 2 доказана.

Полное описание совершенных раскрасок $\overline{K}_n$-кратной цепи получено в [3]. Дадим необходимые определения, чтобы его здесь привести.

Полураскраска двудольного графа $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ — это раскраска вершин одной его доли. Совершенная раскраска $\overline{K}_n$-кратной цепи называется *двудольной*, если множества цветов его различных полураскрасок не пересекаются. В противном случае множества цветов совпадают и совершенная раскраска называется *недвудольной*.

Итак, справедлива

Теорема 1 [3, теорема 1]**.** *Совершенные раскраски графа $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ исчерпываются следующим списком:*

1) *дизъюнктные совершенные раскраски;*

2) *недизъюнктные двудольные раскраски, полученные сопряжением произвольных 2-периодических полураскрасок;*

3) *недизъюнктные недвудольные раскраски, полученные сопряжением согласованных 2-периодических полураскрасок.*

Редуцированные раскраски M_n-кратной цепи получаются из совершенных раскрасок графа $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ заменой каждой вершины ребром с концами того же цвета.

Напомним, что в данной работе дизъюнктность и недизъюнктность раскрасок исследуемого графа рассматриваются для его представления в виде произведения $(C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$. Таким образом, для решения поставленной задачи остаётся охарактеризовать его недизъюнктные не рёберно монохромные раскраски, что и будет сделано в следующем разделе.

3. Недизъюнктные раскраски графа $(C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$

Теорема 2. *Недизъюнктные раскраски лексикографического произведения графов $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ и E при $n \geqslant 2$ не совершенны.*

Доказывать теорему 2 будем от противного. Согласно лемме 2 достаточно рассмотреть не рёберно монохромный случай.

Пусть у графа $(C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$ существуют недизъюнктные совершенные раскраски, которые не являются рёберно монохромными. Рассмотрим раскраску ψ с таким свойством в минимальное количество цветов, назовём её *минимальной контрраскраской*. E-блок, вершины которого окрашены цветами x и y, где x и y не обязательно различные, будем называть (xy)*-ребром*.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются несколько вспомогательных лемм.

В лемме 3 показано характеристическое свойство минимальной контрраскраски ψ.

Лемма 3. *Минимальная контрраскраска ψ содержит E-блоки (aa) и (ab) для некоторого $b \neq a$ и не содержит E-блоков (ac) и (bc) для $c \neq a$ и $c \neq b$.*

Доказательство. Концы одного из E-блоков окрашены в ψ разными цветами в силу её не рёберно монохромности. Без ограничения общности считаем, что это раскраска (ab) $(a \neq b)$. Класс эквивалентности $[a]$ фактор-множества цветов совершенной раскраски ψ не содержит элементов, отличных от a и b. В противном случае отождествим их с a и получим противоречие с минимальностью ψ. Таким образом, недизъюнктность раскраски ψ означает одновременное присутствие в ней E-блоков (aa) и (ab) (и/или (bb) и (ab)), а минимальность ψ влечёт отсутствие E-блоков (ac) и (bc) для $c \neq a$ и $c \neq b$. Лемма 3 доказана.

В леммах 4–7 доказаны свойства минимальной контрраскраски ψ.

Лемма 4. *Если E-блок в минимальной контрраскраске не содержит вершин цветов a и b, то его концы соцветны.*

Доказательство. Предположим противное: пусть концы некоторого E-блока окрашены цветами i и j, отличными от a и b и друг от друга.

Как уже отмечалось в лемме 1, цвета i и j эквивалентны. Отождествим их. Получим контрраскраску, количество цветов в которой на 1 меньше, чем в исходной, что противоречит её минимальности. Лемма 4 доказана.

Значение параметра m_{ii} будем называть *внутренней степенью* цвета i.

Лемма 5. *Для параметров минимальной контрраскраски верно равенство* $m_{ba} = m_{aa} + 1$.

Доказательство. Рассмотрим E-блок (ab) в минимальной контрраскраске ψ. Сравнивая цветовые составы окружений его концов, получим требуемое. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если M_n-блок в минимальной контрраскраске содержит (aa)-ребро, то все его вершины окрашены цветом a.*

Доказательство. Рассмотрим в такой раскраске M_n-блок с ребром (aa). Предположим, что в этом блоке есть вершина цвета c, отличного от a. Наличие в нём рёбер типа (ac) или (bc) противоречит утверждению леммы 3.

Тогда согласно лемме 4 вершина цвета c принадлежит ребру (cc). Заметим, что 1-окрестности концов рёбер типа (aa) и (cc) рассматриваемого M_n-блока совпадают за пределами этого блока. Значит, $a \sim c$. При отождествлении цветов a и c получим контрраскраску в меньшее количество цветов; противоречие.

Значит, все вершины такого M_n-блока окрашены цветом a. Лемма 6 доказана.

Аналогичное утверждение верно и для M_n-блоков с (bb)-ребром. Будем называть такие M_n-блоки блоками *типов* (aa) и (bb). Два M_n-блока графа $C_\infty \cdot M_n$ будем считать *соседними*, если они соответствуют смежным вершинам графа C_∞.

Лемма 7. *Внутренняя степень цвета a в минимальной контрраскраске не меньше $2n$.*

Доказательство. У M_n-блока типа (aa) есть M_n-блок-сосед, содержащий вершину цвета b, так как в окружении a-окрашенной вершины должна быть вершина такого цвета. Значит, верно $m_{ba} \geqslant 2n$. В силу леммы 5 и условия $n \geqslant 2$ получаем $m_{aa} \geqslant 3$.

Отсюда следует, что у M_n-блока типа (aa) один из соседних M_n-блоков содержит вершину цвета a. Окрестность такой вершины включает в себя этот M_n-блок с $2n$ вершинами цвета a. Следовательно, $m_{aa} \geqslant 2n$. Лемма 7 доказана.

После того как все необходимые вспомогательные утверждения сформулированы и доказаны, перейдём к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Напомним, что выдвинуто предположение о существовании недизъюнктных совершенных раскрасок графа $(C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$, которые не рёберно монохромны. Среди них выбрана раскраска ψ с минимальным количеством цветов — минимальная контрраскраска. Дальнейшие рассуждения в доказательстве будем приводить именно для неё.

Рассмотрим M_n-блок, в котором есть ребро (ab). В силу леммы 7 такой блок либо окружён с двух сторон M_n-блоками, содержащими только рёбра (ab), либо имеет хотя бы одним соседом M_n-блок типа (aa).

Первый вариант приводит нас к раскраске графа $(C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$, в которой рёбра всех M_n-блоков имеют тип (ab). Она является дизъюнктной совершенной раскраской.

Покажем, что второй вариант также противоречив. Для этого последовательно рассмотрим три случая: когда внутренняя степень цвета a равна $2n$, $2n+1$ и $2n+t$ для $2 \leqslant t \leqslant 2n$.

Случай $m_{aa} = 2n$. У M_n-блока типа (aa) не может быть такого же M_n-блока-соседа, иначе $m_{aa} \geqslant 2n+1$. Значит, у соседних M_n-блоков по n и $n-1$ рёбер типа (ab). Ребро, отличное от (ab), в последнем окрашено (cc) $(c \neq a,\ c \neq b)$ в силу леммы 4. В окрестности a-окрашенной вершины из M_n-блока типа (aa) содержится $2n-1$ вершин цвета b. Значит, вторым соседом M_n-блока с $n-1$ рёбрами (ab) и одним ребром (cc) является M_n-блок типа (bb). В окружении вершин цвета a из M_n-блока типа (aa) есть c-окрашенная вершина, а у вершин цвета a из M_n-блока с рёбрами (ab) и (cc) — нет; противоречие.

Случай $m_{aa} = 2n+1$. Рассмотрим M_n-блок с ребром (ab). Один из его M_n-блоков-соседей будет типа (aa). В противном случае получим $m_{aa} < 2n+1$. У этого M_n-блока типа (aa) оба соседа содержат по n рёбер типа (ab), иначе $m_{aa} \neq 2n+1$. Значит, окружение вершины цвета a из M_n-блока типа (aa) содержит ровно $2n$ b-окрашенных вершин. Следовательно, вторым соседом M_n-блока с рёбрами (ab) является M_n-блок типа (bb). Тогда для вершины цвета a в таком M_n-блоке верно $m_{aa} = 2n$; противоречие.

Случай $m_{aa} = 2n+t$ $(2 \leqslant t \leqslant 2n)$. Вновь рассмотрим M_n-блок с ребром (ab). Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем, что один его сосед — M_n-блок типа (aa), а второй M_n-блок-сосед состоит из t рёбер (ab) и $n-t$ рёбер с вершинами отличных от a и b цветов. В свою очередь, у M_n-блока типа (aa) один из M_n-блоков-соседей того же типа, а второй содержит $t-1$ рёбер (ab) и $n-t+1$ рёбер с вершинами отличных от a и b цветов. Последнее замечание верно, в частности, для исходного M_n-блока с ребром (ab). Рассмотрим a-окрашенную вершину соседнего с ним M_n-блока с t рёбрами типа (ab). Для неё верно $m_{aa} \leqslant 2n+t-1$; противоречие.

Таким образом, доказано, что минимальной контрраскраски ψ не существует. Значит, недизъюнктные не рёберно монохромные раскраски графа $(C_\infty \cdot \overline{K}_n) \cdot E$ не совершенны. Теорема 2 доказана.

Подведём итог выполненного исследования в следующей теореме.

Теорема 3. *Для $n \geqslant 2$ совершенные раскраски M_n-кратной цепи исчерпываются дизъюнктными раскрасками лексикографического произведения графов $C_\infty \cdot \overline{K}_n$ и E.*

Случай $n = 1$ для M_n-кратной цепи находится за рамками теоремы 3. Для $n = 1$ верно $C_\infty \cdot M_2 = C_\infty \cdot K_2$. Следовательно, он закрывается теоремой 4 (см. [3]), характеризующей совершенные раскраски K_n-кратной цепи.

Теорема 4 [3, теорема 2]**.** *Совершенные раскраски графа $C_\infty \cdot K_n$ исчерпываются следующим списком:*
1) *дизъюнктные совершенные раскраски;*
2) *недизъюнктные 3-периодические раскраски.*

Таким образом, для цепи, кратной паросочетанию M_n, описаны все совершенные раскраски в конечное число цветов.

Заключение

Многие задачи алгебраической комбинаторики можно решать с помощью компьютерных программ. Например, Д. С. Кротовым перечислены с помощью компьютера все совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решётки в k цветов для $k \leqslant 9$ [11]. В свою очередь, В. Д. Плаксина и П. А. Щербина создали программу для описания совершенных 4-раскрасок бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций [17]. Программа нашла контрпример к гипотезе О. Г. Паршиной о возможной характеризации совершенных раскрасок таких графов в произвольное конечное число цветов [18].

Пусть G — бесконечный граф. Время работы алгоритмов, которые ищут среди его раскрасок в k цветов совершенные, стремительно растёт с ростом k. Кроме того, даже для небольших k интересно не только перечислить все такие раскраски, но и получить их классификацию. Тем большую ценность приобретают результаты, которые характеризуют совершенные раскраски бесконечных графов в произвольное конечное число цветов [1,3,8]. В данной работе описаны все совершенные k-раскраски графа $C_\infty \cdot M_n$ для любых натуральных k и n.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лисицына М. А., Августинович С. В.** Совершенные раскраски призмы // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1116–1128.

2. **Taranenko A. A.** Algebraic properties of perfect structures // Linear Algebra Appl. 2020. V. 607. P. 286–306.
3. **Lisitsyna M. A., Avgustinovich S. V., Parshina O. G.** On perfect colorings of infinite multipath graphs // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 1863–1868.
4. **Хорошилова Д. Б.** О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 80–92.
5. **Хорошилова Д. Б.** О параметрах совершенных 2-раскрасок циркулянтных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 6. С. 82–89.
6. **Паршина О. Г.** Совершенные 2-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 2. С. 76–83.
7. **Parshina O. G., Lisitsyna M. A.** The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. P. 590–603.
8. **Лисицына М. А., Паршина О. Г.** Совершенные раскраски бесконечного циркулянтного графа с дистанциями 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Т. 24, № 3. С. 20–34.
9. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. V. 268, No. 1–3. P. 31–49.
10. **Пузынина С. А.** Совершенные раскраски вершин графа $G(Z^2)$ в три цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2005. Т. 12, № 1. С. 37–54.
11. **Krotov D. S.** Perfect colorings of Z^2: Nine colors. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2009. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:0901.0004).
12. **Пузынина С. А.** Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решётки // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2004. Т. 11, № 1. С. 79–92.
13. **Пузынина С. А.** О периодичности совершенных раскрасок бесконечной гексагональной и треугольной решеток // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 115–132.
14. **Августинович С. В., Васильева А. Ю., Сергеева И. В.** Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решётки // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 3. С. 3–10.
15. **Vasil'eva A. Yu.** Distance regular colorings of the infinite triangular grid // Abs. Int. Conf. "Mal'tsev Meeting" (Novosibirsk, Russia, Nov. 10–13, 2014). Novosibirsk: Sobolev Inst. Math., 2014. C. 98. Available at `http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf` (accessed Jan. 28, 2022).
16. **Avgustinovich S. V., Krotov D. S., Vasil'eva A. Yu.** Completely regular codes in the infinite hexagonal grid // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 987–1016.
17. **Plaksina V. D., Shcherbina P. A.** New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distances // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18, № 1. С. 530–533.

18. Parshina O. G. Perfect k-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances // Abs. Int. Conf. PhD Summer School on Groups and Graphs, Algorithms and Automata (Yekaterinburg, Russia, Aug. 9–15, 2015). 2015. P. 80. Available at `http://g2a2.imm.uran.ru/doc/G2A2_Abstracts.pdf` (accessed Jan. 28, 2022).

Лисицына Мария Александровна
Августинович Сергей Владимирович

Статья поступила
7 июня 2021 г.

После доработки —
8 ноября 2021 г.

Принята к публикации
29 ноября 2021 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2022. Vol. 29, No. 1. P. 33–45

UDC 519.174.7 DOI 10.33048/daio.2022.29.718

ON PERFECT COLORINGS OF PATHS DIVISIBLE BY A MATCHING

M. A. Lisitsyna[1, a] and *S. V. Avgustinovich*[2, b]

[1] Budyonny Military Academy of the Signal Corps,
3 Tikhoretsky Avenue, 194064 St. Petersburg, Russia

[2] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: [a] `lisitsyna.mariya.mathematician@gmail.com`,
[b] `avgust@math.nsc.ru`

Abstract. A vertex coloring of a graph G is called perfect if the color structure of the neighborhood of each vertex depends only on the color of this vertex. We give a complete characterization of perfect colorings with an arbitrary number of colors of the lexicographic product of the infinite path graph and the matching. Illustr. 1, bibliogr. 18.

Keywords: perfect coloring, equitable partition, infinite path graph, matching, lexicographic product.

REFERENCES

1. **M. A. Lisitsyna** and **S. V. Avgustinovich,** Perfect colorings of the prism graph, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **13**, 1116–1128 (2016) [Russian].
2. **A. A. Taranenko,** Algebraic properties of perfect structures, *Linear Algebra Appl.* **607**, 286–306 (2020).
3. **M. A. Lisitsyna, S. V. Avgustinovich,** and **O. G. Parshina,** On perfect colorings of infinite multipath graphs, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **17**, 1863–1868 (2020).
4. **D. B. Khoroshilova,** On two-colour perfect colourings of circular graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **16** (1), 80–92 (2009) [Russian].
5. **D. B. Khoroshilova,** On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **18** (6), 82–89 (2011) [Russian].

This research was carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF–2022–0017).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **16** (1) (2022).

6. **O. G. Parshina,** Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with continuous set of distances, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **21** (2), 76–83 (2014) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **8** (3), 357–361 (2014)].
7. **O. G. Parshina** and **M. A. Lisitsyna,** The perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of odd distances, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **17**, 590—603 (2020).
8. **M. A. Lisitsyna** and **O. G. Parshina,** Perfect colorings of infinite circulant graph with distances 1 and 2, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **24** (3), 20–34 (2017) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **11** (3), 381–388 (2017)].
9. **M. A. Axenovich,** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius, *Discrete Math.* **268** (1–3), 31–48 (2003).
10. **S. A. Puzynina,** Perfect colorings of vertices of the graph $G(Z^2)$ in three colors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **12** (1), 37–54 (2005) [Russian].
11. **D. S. Krotov,** Perfect colorings of Z^2: Nine colors (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2009) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:0901.0004).
12. **S. A. Puzynina,** Periodicity of perfect colorings of an infinite rectangular grid, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **11** (1), 79–92 (2004) [Russian].
13. **S. A. Puzynina,** On periodicity of perfect colorings of the infinite hexagonal and triangular grids, *Sib. Mat. Zh.* **52** (1), 115–132 (2011) [Russian] [*Sib. Math. J.* **52** (1), 91–104 (2011)].
14. **S. V. Avgustinovich, A. Yu. Vasil'eva,** and **I. V. Sergeeva,** Distance regular colorings of the infinite rectangular grid, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **18** (3), 3–10 (2011) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (3), 280–285 (2012)].
15. **A. Yu. Vasil'eva,** Distance regular colorings of the infinite triangular grid, in *Abs. Int. Conf. "Mal'tsev Meeting", Novosibirsk, Russia, Nov. 10–13, 2014* (Sobolev Inst. Math., Novosibirsk, 2014), p. 98. Available at `http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/14/Malmeet2014.pdf` (accessed Jan. 28, 2022).
16. **S. V. Avgustinovich, D. S. Krotov,** and **A. Yu. Vasil'eva,** Completely regular codes in the infinite hexagonal grid, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **13**, 987–1016 (2016).
17. **V. D. Plaksina** and **P. A. Shcherbina,** New perfect colorings of infinite circulant graphs with continuous sets of distances, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **18** (1), 530–533 (2021).
18. **O. G. Parshina,** Perfect k-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances, in *Groups and Graphs, Algorithms and Automata* (Abs. Int. Conf. PhD Summer Sch., Yekaterinburg, Russia, Aug. 9–15, 2015) (Ural. Fed. Univ., Yekaterinburg, 2015), p. 80. Available at `http://g2a2.imm.uran.ru/doc/G2A2_Abstracts.pdf` (accessed Jan. 28, 2022).

Maria A. Lisitsyna
Sergey V. Avgustinovich

Received June 7, 2021
Revised November 8, 2021
Accepted November 29, 2021