ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2022. Т. 29, № 1. С. 46–55

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2022.29.723

О МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ОТКРЫТЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ГРАФАХ С ОДИНАКОВЫМ ЧИСЛОМ ВЕРШИН И РЁБЕР

А. В. Пяткин[1,2,a], *О. И. Черных*[2,b]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2] Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: [a] artem@math.nsc.ru, [b] o.chernykh@g.nsu.ru

Аннотация. Открытым треугольником (ОТ) называется трёхвершинный подграф с двумя рёбрами, т. е. индуцированный путь длины 2. В работе получена формула для максимально возможного числа ОТ в n-вершинных графах с n рёбрами и дана полная характеризация графов, на которых достигается этот максимум. Ил. 2, библиогр. 10.

Ключевые слова: открытые треугольники, индуцированные подграфы, унициклические графы.

Введение

Большую роль при анализе социальных сетей играет подсчёт числа различных порождённых подграфов заданной структуры [1–3]. Особенно важен при этом так называемый триадный перечень, т. е. число всевозможных трёхвершинных подграфов, встречающихся в сети [4–7]. Это связано с тем, что триада (три актора и существующие между ними связи) в социологии считается минимальной социальной группой. С помощью триадного перечня можно анализировать структурную сбалансированность социальной сети, а также определять такие её параметры, как однородность, транзитивность, сплочённость и склонность к кластеризации.

Естественным образом возникает вопрос описания графов с наибольшим числом тех или иных видов трёхвершинных подграфов, а также определения этого числа. Один из первых результатов на эту тему был

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–01–00045).

получен в работах [8, 9], где была установлена точная формула максимального суммарного числа трёхвершинных подграфов с одним или двумя рёбрами в неориентированном n-вершинном графе. Если обозначить через $\Delta_i(G)$ число трёхвершинных подграфов с i рёбрами в неориентированном графе G, то в [8, 9] доказано, что

$$\max_G\{\Delta_1(G)+\Delta_2(G)\} = \begin{cases} t^3-t^2 & \text{при } n=2t,\\ 8t^3+2t^2 & \text{при } n=4t+1,\\ 8t^3+14t^2+8t+1 & \text{при } n=4t+3. \end{cases} \tag{1}$$

В статье [10] дана характеризация графов с максимальным $\Delta_2(G)$ и доказано, что максимум достигается на полных двудольных графах с примерно равными долями $G = K_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor,\lceil \frac{n}{2}\rceil}$ и имеет место формула

$$\max_G\{\Delta_2(G)\} = \begin{cases} t^3-t^2 & \text{при } n=2t,\\ t^3+t(t-1)/2 & \text{при } n=2t+1. \end{cases} \tag{2}$$

Отметим, что при чётных n значения в (1) и (2) совпадают. Также в [10] была поставлена задача максимизации $\Delta_2(G)$ в графах с фиксированным числом вершин n и рёбер m. Ясно, что при $m<n$ максимум $\Delta_2(G)$ равен $(m^2-m)/2$ и достигается на графе $G = K_{1,m}\cup(n-m-1)K_1$. Однако при $m \geqslant n$ вопрос оставался открытым. В настоящей статье делается первый шаг к решению этой проблемы, а именно, получена полная характеризация графов с максимальным $\Delta_2(G)$ при $n=m$.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 выводится ряд общих свойств графов с максимальным $\Delta_2(G)$, содержащих n вершин и m рёбер. В разд. 2 доказывается основной результат работы — теорема 1. В заключении приводятся некоторые комментарии к работе.

1. Предварительные результаты

Следуя [10], будем называть *открытым треугольником* (ОТ) простой неориентированный граф, состоящий из трёх вершин и двух рёбер. Другими словами, ОТ — это индуцированный путь длины 2. Тогда $\Delta_2(G)$ — это в точности число ОТ в графе G.

Пусть G — граф с максимальным числом открытых треугольников, имеющий n вершин и m рёбер. Выведем ряд общих свойств графа G, которые пригодятся при доказательстве основного результата.

Утверждение 1. *Если G не связный, то только одна компонента нетривиальна* (*т. е. имеет рёбра*).

Доказательство. Пусть в графе G имеются хотя бы две компоненты C_1 и C_2, содержащие рёбра. Пусть x — вершина максимальной степени Δ в графе G. Можно считать, что $x \in C_1$. Выберем произвольную вершину $y \in C_2$ степени $d \geqslant 1$ в C_2. Тогда y смежна с какой-то вершиной $z \in C_2$. Если мы удалим ребро yz и добавим ребро xz, то получим новый граф G'. Оценим $\Delta_2(G') - \Delta_2(G)$. Новое ребро xz образует ОТ с каждым ребром, инцидентным x; следовательно, в графе G' появятся Δ новых открытых треугольников. При этом если в C_2 были ОТ с центром в z, содержащие ребро yz, то им соответствуют новые ОТ в G', получающиеся при замене этого ребра на xz. Мы теряем только ОТ с центром в y, содержащие ребро yz, но их не больше чем $d-1$. Таким образом,

$$\Delta_2(G') - \Delta_2(G) \geqslant \Delta - (d-1) = (\Delta - d) + 1 > 0,$$

т. е. в G' больше открытых треугольников, чем в G; противоречие. Следовательно, компонента C_2 не имеет рёбер. Утверждение 1 доказано.

Таким образом, граф с максимальным числом открытых треугольников либо связный, либо имеет только одну компоненту с рёбрами, а остальные компоненты являются изолированными вершинами. Обозначим через $N(x)$ множество соседей вершины x.

Утверждение 2. *Если G содержит k изолированных вершин и x — вершина степени $d \in \{1,\dots,k+1\}$, то либо $G = kK_1 \cup K_{d,1}$, либо x смежна с d вершинами максимальной степени Δ в G, граф G не содержит других вершин степени Δ и множество $N(x)$ независимо.*

Доказательство. Обозначим изолированные вершины графа G через $z_1,\dots,z_k$.

Пусть вершина x соединена с вершинами $x_1,\dots,x_d$ с помощью рёбер $e_1,\dots,e_d$. Обозначим степени вершин $x_1,\dots,x_d$ через $d_1,\dots,d_d$ соответственно. Сначала рассмотрим граф $G' = G \setminus \{e_1,\dots,e_d\}$, полученный удалением этих рёбер. В G могло быть не более $\binom{d}{2}$ ОТ с центром в вершине x и не более d_i-1 ОТ с центром в вершине x_i, содержащих ребро e_i. Значит,

$$\Delta_2(G') \geqslant \Delta_2(G) - \binom{d}{2} - \sum_{i=1}^{d}(d_i-1), \tag{3}$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда множество $N(x)$ независимо.

Пусть y — вершина максимальной степени Δ' в графе G'. Очевидно, что $\Delta' \geqslant d_i - 1$ для всех $i = 1,\dots,d$. Рассмотрим граф $G'' = G' \cup \{yx, yz_1,\dots,yz_{d-1}\}$, полученный добавлением d рёбер, соединяющих y с изолированными вершинами в графе G' (это возможно, поскольку $k \geqslant d-1$, а вершина x изолирована в G'). Оценим $\Delta_2(G'')$. Очевидно, любая пара из добавленных рёбер образует ОТ (всего таких треугольников будет $\binom{d}{2}$); кроме того, каждое новое ребро образует ОТ с каждым из рёбер, инцидентных вершине y в графе G' (всего имеется $d\Delta'$ ОТ такого типа). Используя (3), получим

$$\Delta_2(G'') = \Delta_2(G') + \binom{d}{2} + d\Delta' \geqslant \Delta_2(G) + \sum_{i=1}^{d}(\Delta' - d_i + 1) \geqslant \Delta_2(G). \quad (4)$$

Поскольку по выбору G имеет место неравенство $\Delta_2(G) \geqslant \Delta_2(G'')$, оба неравенства в (4) должны быть равенствами. Это означает, что $N(x)$ независимо и $d_i = \Delta' + 1$ для всех $i = 1, \ldots, d$. В частности, все вершины не из $X = \{x, x_1, \ldots, x_d\}$ имеют степень меньше чем d_i.

Сначала предположим, что $d < \Delta$. Тогда, очевидно, $\Delta' \geqslant \Delta - 1$, а значит, $d_i = \Delta' + 1 = \Delta$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $d = \Delta$. В этом случае неравенство $\Delta' \geqslant \Delta - 1$ может не выполняться. С другой стороны, все вершины графа G имеют степень не больше d, а значит, могут быть рассмотрены в качестве x из условия утверждения. По доказанному $N(x)$ независимо и для всех $i = 1, \ldots, d$ имеет место равенство $d_i = \Delta' + 1$ (в частности, все вершины, не входящие в X, имеют степень меньше Δ). Для любого $i = 1, \ldots, d$ рассмотрим в качестве x вершину x_i и проведём те же самые рассуждения для неё. Получим, что $N(x_i)$ независимо и все соседи x_i имеют одинаковую степень. Поскольку вершина x имеет степень $d = \Delta$, а степени вершин не из X меньше Δ, x является единственным соседом вершины x_i. Тогда из утверждения 1 вытекает, что $G = kK_1 \cup K_{d,1}$. Утверждение 2 доказано.

Заметим, что граф вида $G = kK_1 \cup K_{d,1}$ является единственным примером графа с максимальным числом ОТ при $m < n$.

Утверждения 1 и 2 позволяют сформулировать следующее структурное свойство графа с максимальным числом ОТ.

Следствие 1. *Пусть $m \geqslant n$. Если граф G имеет k изолированных вершин и одну связную компоненту C, то либо степень всех вершин в C не меньше $k+2$, либо для некоторого единственного $d \leqslant k+1$ компонента C содержит одну или несколько вершин степени d, смежных с d попарно не смежными вершинами максимальной степени Δ, а степени всех остальных вершин в C (если они есть) лежат в интервале $[k+2, \Delta-1]$. В частности, если G связен ($k = 0$), то либо его минимальная степень не меньше 2, либо все висячие вершины примыкают к единственной вершине степени Δ.*

Утверждение 3. *Если G связен, а x — вершина максимальной степени Δ, то расстояние от x до любой вершины y не превосходит 2.*

Доказательство. Предположим, что расстояние между x и y больше 2. Тогда x и y не имеют общих соседей, а значит, не входят одновременно ни в один ОТ. Рассмотрим произвольное ребро yz, инцидентное y.

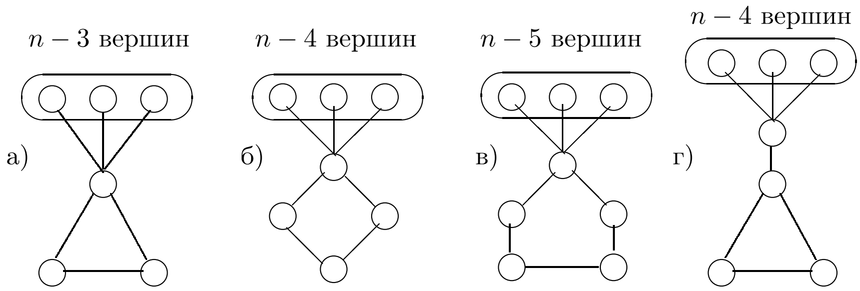

Рис. 1. Варианты графа G в связном случае

Обозначим через d_y и d_z степени вершин y и z соответственно. Пусть $G_1 = G \setminus \{yz\}$ и $G_2 = G_1 \cup \{xy\}$. Очевидно, что

$$\Delta_2(G_1) \geqslant \Delta_2(G) - (d_y - 1) - (d_z - 1).$$

Поскольку x не смежна с соседями y, а y не смежна с соседями x, имеем

$$\Delta_2(G_2) = \Delta_2(G_1) + \Delta + d_y - 1 \geqslant \Delta_2(G) + \Delta - d_z + 1 > \Delta_2(G),$$

так как $d_z \leqslant \Delta$; противоречие. Утверждение 3 доказано.

2. Основной результат

Обозначим через T_i и S_i графы, полученные добавлением i висячих рёбер, инцидентных произвольной вершине графов K_3 и C_4 соответственно (рис. 1а и 1б). Отметим, что эти графы содержат $i+3$ и $i+4$ вершин соответственно. Обозначим через $f(m,n)$ максимальное число ОТ в графе с n вершинами и m рёбрами.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $n = m$. Тогда $f(3,3) = 0,\ f(4,4) = 4,\ f(5,5) = 6$ и $f(n,n) = (n^2 - 3n)/2$ при $n \geqslant 6$. При этом в случае $n \neq 6$ оптимальные графы единственны и равны $K_3,\ C_4,\ S_1$ и T_i при $i \geqslant 4$. Для $n = 6$ оценка $f(6,6) = 9$ достигается на трёх графах: $T_3,\ S_2$ и $K_{2,3} \cup K_1$.*

Доказательство. Пусть G — граф с максимальным числом ОТ среди всех графов на n вершинах с $m = n$ рёбрами. При $n = 3$ имеем единственный граф K_3, не содержащий ОТ. При $n = 4$ таких графов два: $S_0 = C_4$ и T_1, но первый из них содержит 4 ОТ, а второй — 2 ОТ. Пусть теперь $n \geqslant 5$.

Сначала предположим, что G связен. Тогда он является унициклическим, т. е. содержит ровно один цикл, при удалении рёбер которого получается лес. Согласно следствию 1 все висячие вершины (если они

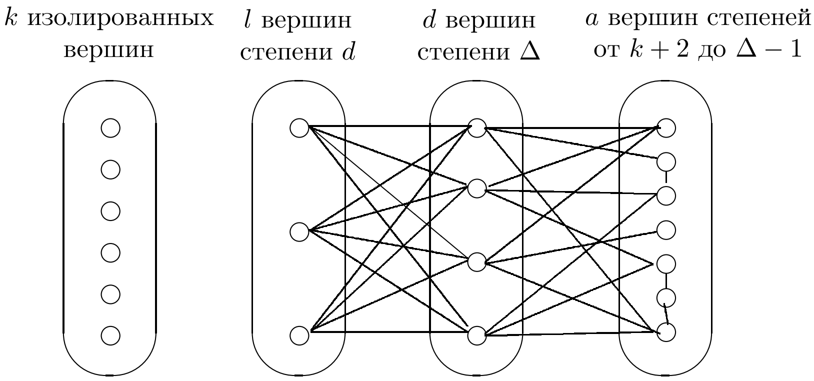

Рис. 2. Структура графа G в несвязном случае

есть) должны примыкать к единственной вершине x максимальной степени. Используя утверждение 3, получим четыре возможных варианта графа G (см. рис. 1).

а) $G = T_{n-3}$. Тогда $\Delta_2(G) = (n-1)(n-2)/2 - 1 = (n^2-3n)/2$.

б) $G = S_{n-4}$. Тогда $\Delta_2(G) = (n-2)(n-3)/2 + 3 = (n^2-5n+12)/2$.

в) G получен добавлением $n-5$ висячих вершин, инцидентных произвольной вершине цикла C_5. Имеем $\Delta_2(G) = (n-3)(n-4)/2 + 4 = (n^2-7n+20)/2 \leqslant \Delta_2(T_{n-3})$ при $n \geqslant 5$, причём при $n > 5$ неравенство строгое.

г) G получен отождествлением висячей вершины звезды $K_{1,n-3}$ и произвольной вершины треугольника K_3. Получим

$$\Delta_2(G) = (n-3)(n-4)/2 + 2,$$

что меньше, чем в предыдущем случае.

Заметим, что $\Delta_2(T_{n-3}) - \Delta_2(S_{n-4}) = n-6$. Следовательно, для связного графа G при $n=5$ максимальное число ОТ, равное 6, достигается для $G = S_1$; при $n > 6$ оно достигается для графа T_{n-3} и равно $(n^2-3n)/2$; а при $n=6$ имеем $\Delta_2(T_3) = \Delta_2(S_2) = 9$.

Пусть теперь граф G несвязен. По утверждению 1 G содержит $k \geqslant 1$ изолированных вершин и одну нетривиальную компоненту. По следствию 1 эта компонента либо имеет минимальную степень не менее $k+2$, либо содержит l вершин степени $d \in \{1,\ldots,k+1\}$, смежных с d вершинами степени Δ, а оставшееся множество V' состоит из $a = n-k-l-d$ вершин, степени которых лежат в интервале $[k+2, \Delta-1]$ (в частности, $\Delta \geqslant k+3$, если $V' \neq \varnothing$). Схематически такой граф G представлен на рис. 2. Рассмотрим три случая.

1) Предположим, что минимальная степень нетривиальной компоненты графа G не меньше $k+2$. Тогда $n = m \geqslant (n-k)(k+2)/2 =$

$n - k + (n-k)k/2$, откуда $n - k \leqslant 2$, что невозможно, так как нетривиальная компонента должна содержать не менее чем $k+3$ вершин.

2) Допустим, что $l > 0$, но $V' = \varnothing$, т. е. $a = 0$. Тогда $n = k + l + d$ и $m = ld$. Значит, $k + l + d = ld = n$, откуда следует, что $d > 1$, при этом

$$\Delta_2(G) = l\binom{d}{2} + d\binom{l}{2} = dl(d+l-2)/2$$
$$= n(n-k-2)/2 < (n^2 - 3n)/2 = \Delta_2(T_{n-3})$$

при $k > 1$. Если $k = 1$, то из неравенств $1 < d \leqslant k + 1 = 2$ следует, что $d = 2$. Тогда, очевидно, $l = 3$ и получим граф $G = K_{2,3} \cup K_1$, для которого имеет место равенство $\Delta_2(G) = 9$.

3) Пусть $a \geqslant 1$. Оценим число рёбер в G как полусумму степеней вершин: $m \geqslant (ld + d\Delta + a(k+2))/2 = n - k - l - d + (ld + d\Delta + ak)/2$. Так как $n = m$ и $\Delta \geqslant k + 3$, имеем

$$2k + 2l + 2d \geqslant dl + d\Delta + ak \geqslant dl + dk + 3d + ak. \tag{5}$$

Очевидно, что $dl + dk + 3d + ak > 2k + 2l + 2d$ при $d \geqslant 2$. Таким образом, $d = 1$ и (5) принимает вид $\Delta + l + ak \leqslant 2k + 2l + 2$. Поскольку $a \geqslant k + 3 - d = k + 2$ и $\Delta \geqslant l + 1$, получим $2l + 1 + k^2 + 2k \leqslant 2k + 2l + 2$, т. е. $k = 1$ и $a \geqslant 3$. Отсюда $\Delta + l + 3 \leqslant 2l + 4$ и, следовательно, $\Delta = l + 1$ и $a = 3$. Тогда хотя бы две из трёх вершин в V' имеют степень не больше чем 2, что противоречит условию, что их степень не меньше $k + 2 = 3$. Таким образом, этот случай невозможен. Теорема 1 доказана.

Заключение

В работе исследована проблема определения максимального числа ОТ в графах с n вершинами и m рёбрами, а также характеризации графов, на которых достигается этот максимум. Получено решение данной задачи при $m = n$. В качестве ближайшей перспективы можно попытаться обобщить полученные результаты на случай $m = n + \mathrm{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Milo R., Shen-Orr S., Itzkovitz S., Kashtan N., Chklovskii D., Alon U.** Network motifs: Simple building blocks of complex networks // Science. 2002. V. 298. P. 824–827.
2. **Robins G.** A tutorial on methods for the modeling and analysis of social network data // J. Math. Psychol. 2013. V. 57. P. 261–274.
3. **Schank T., Wagner D.** Finding, counting and listing all triangles in large graphs, an experimental study // Experimental and Efficient Algorithms. Proc. 4th Int. Workshop (Santorini Island, Greece, May 10–13, 2005). Heidelberg: Springer, 2005. P. 606–609. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 3503).

4. **Batagelj V., Mrvar A.** A subquadratic triad census algorithm for large sparse networks with small maximum degree // Social Networks. 2001. V. 23. P. 237–243.
5. **Johnsen E. C.** Structure and process: Agreement models for friendship formation // Social Networks. 1986. V. 8. P. 257–306.
6. **Moody J.** Matrix methods for calculating the triad census // Social Networks. 1998. V. 20. P. 291–299.
7. **Wasserman S., Faust K.** Social network analysis: Methods and applications. New York: Camb. Univ. Press, 1994.
8. **Goodman A. W.** On sets of acquaintances and strangers at any party // Amer. Math. Mon. 1959. V. 66, No. 9. P. 778–783.
9. **Sauvé L.** On chromatic graphs // Amer. Math. Mon. 1961. V. 68, No. 2. P. 107–111.
10. **Pyatkin A., Lykhovyd E., Butenko S.** The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order // Optim. Lett. 2018. V. 13, No. 8. P. 1927–1935.

Пяткин Артём Валерьевич
Черных Оксана Ильинична

Статья поступила
26 июля 2021 г.
После доработки —
27 сентября 2021 г.
Принята к публикации
28 сентября 2021 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2022. Vol. 29, No. 1. P. 46–55

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2022.29.723

ON THE MAXIMUM NUMBER OF OPEN TRIANGLES IN GRAPHS WITH THE SAME NUMBER OF VERTICES AND EDGES

A. V. Pyatkin[1,2,a] and *O. I. Chernykh*[2,b]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
[2] Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: [a] `artem@math.nsc.ru`, [b] `o.chernykh@g.nsu.ru`

Abstract. An open triangle (OT) is a 3-vertex subgraph with two edges, i. e. an induced path of length 2. A formula for the maximum number of OT in n-vertex graphs with n edges is proved in the paper. We also present a full characterization of graphs for which the maximum is attained. Illustr. 2, bibliogr. 10.

Keywords: open triangles, induced subgraphs, unicyclic graphs.

REFERENCES

1. **R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii,** and **U. Alon,** Network motifs: Simple building blocks of complex networks, *Science* **298**, 824–827 (2002).
2. **G. Robins,** A tutorial on methods for the modeling and analysis of social network data, *J. Math. Psychol.* **57**, 261–274 (2013).
3. **T. Schank** and **D. Wagner,** Finding, counting and listing all triangles in large graphs, an experimental study, *Experimental and Efficient Algorithms* (Proc. 4th Int. Workshop, Santorini Island, Greece, May 10–13, 2005) (Springer, Heidelberg, 2005), pp. 606–609 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 3503).
4. **V. Batagelj** and **A. Mrvar,** A subquadratic triad census algorithm for large sparse networks with small maximum degree, *Soc. Networks* **23**, 237–243 (2001).
5. **E. C. Johnsen,** Structure and process: agreement models for friendship formation, *Soc. Networks* **8**, 257–306 (1986).

This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project 20–01–00045).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **16** (1) (2022).

6. **J. Moody,** Matrix methods for calculating the triad census, *Soc. Networks* **20**, 291–299 (1998).
7. **S. Wasserman** and **K. Faust,** Social Network Analysis: Methods and Applications (Camb. Univ. Press, New York, 1994).
8. **A. W. Goodman,** On sets of acquaintances and strangers at any party, *Amer. Math. Mon.* **66** (9), 778–783 (1959).
9. **L. Sauvé,** On chromatic graphs, *Amer. Math. Mon.* **68** (2), 107–111 (1961).
10. **A. Pyatkin, E. Lykhovyd,** and **S. Butenko,** The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order, *Optim. Lett.* **13** (8), 1927–1935 (2018).

Artem V. Pyatkin
Oksana I. Chernykh

Received July 26, 2021
Revised September 27, 2021
Accepted September 28, 2021