

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ
ДЛЯ ДВУХЭТАПНОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ МОДЕЛИ
КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ

В. Л. Береснев^а, А. А. Мельников^б

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: ^аberesnev@math.nsc.ru, ^бmelnikov@math.nsc.ru

Аннотация. Рассматривается задача конкурентного размещения предприятий в условиях неопределённости параметров спроса, для которого представлен конечный набор возможных сценариев. Задача формулируется в виде двухуровневой модели, построенной на основе игры Штакельберга и классической модели размещения предприятий. В двухуровневой модели первый игрок (Лидер) имеет две возможности для открытия предприятия. Предполагается, что предприятие Лидера может быть открыто либо до того, как фактический сценарий спроса будет выявлен, либо после. Фиксированные затраты, связанные с открытием предприятия, в первом случае ниже. Таким образом, постоянные затраты могут быть снижены путём принятия заблаговременного решения об открытии предприятий на первом этапе и коррекции его на втором.

Мы предлагаем процедуру вычисления верхней границы для значения прибыли Лидера в рассматриваемой модели. Подход основан на формировании семейства вспомогательных двухуровневых подзадач. Оптимальные решения подзадач образуют допустимое решение исходной задачи. Верхняя граница вычисляется путём применения процедуры генерации отсечений для усиления релаксаций подзадач. Табл. 1, ил. 1, библиогр. 10.

Ключевые слова: игра Штакельберга, бинарное правило поведения потребителей, двухуровневая модель размещения, пессимистическое оптимальное решение.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21–41–09017).

Введение

Изучается обобщение задачи конкурентного размещения предприятий (CompFLP) [1], учитывающее неопределённости в параметрах спроса. Задача CompFLP может быть сформулирована как двухуровневая задача смешанного целочисленного линейного программирования, построенная на основе игры Штакельберга и классической задачи размещения предприятий. В ней рассматривается два конкурирующих игрока, именуемые Лидер и Последователь, открывающие предприятия с целью максимизации дохода от захвата части потребительского спроса на рынке. Лидер открывает свои предприятия первым, а затем, зная решение Лидера, своё решение принимает Последователь.

Предполагается, что в рассматриваемой ситуации Лидер не располагает полной информацией о клиентах. В принятии решения он оперирует конечным списком возможных сценариев (реализаций) набора клиентов, предполагая, что один из сценариев будет реализован в будущем. Литература по работе с неопределённостью в моделях конкурентного размещения относительно скудна из-за высокой вычислительной сложности таких моделей. Можно упомянуть работу [2], где хорошо известная модель конкурентного размещения, называемая $(r|p)$ -центроид, с поведением клиентов, описываемым правилом Хаффа (Huff), сформулирована для ситуации, когда реализованный сценарий определяет количество объектов Последователя. Авторы акцентируют внимание не на вопросах разработки алгоритмов, а на анализе свойств решений, полученных в рамках модели. В [3] задача Последователя сформулирована в терминах робастной оптимизации, в которой ведётся поиск размещения новых предприятий, обеспечивающего лучшее значение целевой функции в случае наихудшего состава атрибутов клиентов. Статьи [4,5] рассматривают модели конкурентного размещения, тесно связанные с той, которая изучается в настоящей работе. В моделях параметры спроса имеют конечное число возможных значений и вероятности принятия определённого значения известны. Лидер оптимизирует прибыль, которая гарантируется с определённым уровнем надёжности.

Указанные работы рассматривают одноэтапный процесс принятия решения о размещении предприятий Лидера, что в силу специфики модели становится существенным ограничивающим фактором. В [5] отмечено, что решение о размещении предприятий сильно зависит от сценария спроса, поэтому универсальное местоположение, подходящее для всех рассматриваемых сценариев, при условии оптимизации наихудшего случая часто является чрезмерно консервативным. В то же время заблаговременные решения, принятые до раскрытия сценария, могут быть менее дорогостоящими. Чтобы дать Лидеру возможность сочетать сильные стороны заблаговременных и информированных решений, используем

двухэтапное оптимизационное моделирование [6]. На первом этапе сценарий спроса неизвестен, но фиксированная стоимость открытия предприятий Лидера более низкая. После этого раскрывается сценарий, и на основе полученной информации могут быть открыты дополнительные предприятия. После второго этапа принятия решений Лидером Последователь реагирует открытием своих предприятий.

Для сформулированной модели мы рассматриваем задачу поиска пессимистического оптимального решения. Обычно эта постановка двухуровневой задачи более сложная. Она подразумевает, что Последователь выбирает такое оптимальное решение своей задачи, которое наименее предпочтительно для Лидера в смысле его целевой функции. Более распространён подход, связанный с рассмотрением оптимистической постановки, и наш подход естественным образом адаптируется под неё, поэтому далее ограничимся лишь пессимистическим случаем.

Поиск оптимального решения в рамках рассматриваемой модели требует эффективных способов оценки подмножеств решений. В настоящей статье излагается подход к вычислению верхней границы целевой функции Лидера на подмножествах пессимистичных допустимых решений. Подход основан на построении семейства подзадач, соответствующих индивидуальным сценариям, и вычислении верхних границ для полученных подзадач. Эти верхние границы используют специальные ограничения [7] для усиления оценочных задач, полученных из релаксации, применяемой к моделям двухуровневого программирования, называемой в англоязычной литературе *high-point relaxation* (НРР-релаксация) [8]. Для указанных ограничений, названных *c*-отсечениями, вводится удобная параметризация, а также описывается алгоритм генерации отсечений, где вспомогательные оптимизационные задачи используются для отыскания наиболее сильных отсечений для заданного значения параметра.

Таким образом, основными результатами, представленными в настоящей работе, являются формулировка двухэтапной модели конкурентного размещения предприятий; распространение подхода к вычислению верхней границы целевой функции, основанном на усилении НРР-релаксации двухуровневой модели дополнительными ограничениями (*c*-отсечениями), применительно к рассматриваемой модели; а также данные предварительных исследований в рамках дальнейшего развития указанного подхода к усилению НРР-релаксации, опирающегося на вспомогательные оптимизационные задачи для генерации наиболее сильных *c*-отсечений.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 рассматривается математическая модель двухэтапной задачи конкурентного размещения предприятий в виде двухуровневой задачи смешанного целочисленного

программирования. Обсуждается понятие пессимистического допустимого решения этой задачи и вводится семейство двухуровневых подзадач, оптимальные решения которых вместе образуют пессимистическое допустимое решение исходной задачи. В разд. 2 рассматривается общая идея вычисления верхней границы целевой функции модели. Разд. 3 описывает подход к построению s -отсечений для усиления НРР-релаксации двухуровневых подзадач, а в разд. 4 представлена процедура вычисления верхней границы для подмножеств допустимых решений. Иллюстрация работы процедуры вычисления верхней границы на небольшом числовом примере представлена в разд. 5. В заключении мы подводим итоги полученных результатов и обсуждаем дальнейшие направления работы.

1. Формулировка задачи

Для формальной записи двухэтапной задачи конкурентного размещения предприятий будем использовать следующие множества индексов:

I — множество мест возможного размещения предприятий;

S — множество возможных сценариев спроса;

J_s , $s \in S$, — множество потребителей, включённых в сценарий s ; без ограничения общности будем полагать, что $J_{s_1} \cap J_{s_2} = \emptyset$ для $s_1 \neq s_2$. Тогда пусть $J = \bigcup_{s \in S} J_s$ обозначает множество потребителей, рассматриваемых сценариями спроса.

В модели также будут использоваться следующие параметры:

f_i и $F_i \geq f_i$, $i \in I$, обозначают фиксированные затраты Лидера, связанные с открытием предприятия i на первом и втором этапах соответственно;

g_i , $i \in I$, — фиксированные затраты Последователя, связанные с открытием предприятия i ;

r_{ij} и q_{ij} , $i \in I$, $j \in J$, обозначают величину дохода от обслуживания потребителя j предприятием i открытым Лидером и Последователем соответственно.

Будем полагать, что поведение потребителей описывается бинарным правилом выбора (в англоязычной литературе *binary patronizing rule*). Данное правило подразумевает, что потребитель выбирает для обслуживания единственное предприятие. Выбор предприятия подчинён предпочтениям потребителя, представленным линейным порядком \succeq на множестве I . Для потребителя $j \in J$ и пары предприятий $i_1, i_2 \in I$ будем писать $i_1 \succeq_j i_2$ в случае, если предприятие i_1 не менее предпочтительно для потребителя j чем i_2 . Обозначение $i_1 \succ_j i_2$ эквивалентно тому, что $i_1 \succeq_j i_2$ и $i_1 \neq i_2$. В модели полагаем, что потребитель может быть обслужен любым предприятием, которое более предпочтительно, чем каждое из предприятий конкурента.

Переменные модели имеют следующую интерпретацию:

x_i , $i \in I$, равна единице, если предприятие i открыто Лидером на первом этапе, и нулю иначе;

x_{is} и z_{is} , $i \in I$, $s \in S$, равны единице, если предприятие i открыто Лидером либо Последователем соответственно на втором этапе в случае реализации сценария s , и нулю иначе;

x_{ij} и z_{ij} , $i \in I$, $j \in J$, равны единице, если предприятие i , открытое Лидером либо Последователем соответственно, назначено на обслуживание потребителя j , и нулю в противном случае.

С использованием введённых обозначений задача отыскания оптимального решения в модели двухэтапного конкурентного размещения предприятий может быть записана следующим образом:

$$\max_{(x_i), (x_{is}), (x_{ij})} \left(- \sum_{i \in I} f_i x_i + \min_{s \in S} \left(- \sum_{i \in I} F_i x_{is} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_s} p_{ij} x_{ij} \right) \right), \quad (1)$$

$$z_{is}^o + \sum_{k: i \succeq_j k} x_{kj} \leq 1, \quad i \in I, s \in S, j \in J_s, \quad (2)$$

$$x_i + x_{is} \geq x_{ij}, \quad i \in I, s \in S, j \in J_s, \quad (3)$$

$$x_i, x_{is}, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, s \in S, j \in J_s, \quad (4)$$

$$(z_{is}^o), (z_{ij}^o) \text{ — оптимальное решение задачи Последователя,} \quad (5)$$

$$\max_{(z_{is}), (z_{ij})} \sum_{s \in S} \left(- \sum_{i \in I} g_i z_{is} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_s} q_{ij} z_{ij} \right), \quad (6)$$

$$x_i + x_{is} + z_{is} \leq 1, \quad i \in I, s \in S, \quad (7)$$

$$x_i + x_{is} + \sum_{k: i \succeq_j k} z_{kj} \leq 1, \quad i \in I, s \in S, j \in J_s, \quad (8)$$

$$z_{is} \geq z_{ij}, \quad i \in I, s \in S, j \in J_s, \quad (9)$$

$$z_{is}, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, s \in S, j \in J_s. \quad (10)$$

Целевая функция (1) выражает значение дохода Лидера в случае реализации худшего сценария спроса. Благодаря ограничениям (2) потребитель обслуживается предприятием Лидера, которое для потребителя более предпочтительно, чем каждое из предприятий Последователя. Наконец, неравенства (3) гарантируют, что потребители обслуживаются только открытыми предприятиями. Ограничения задачи Последователя аналогичны. Дополнительная группа неравенств (7) запрещает сторонам открывать предприятие в одном и том же месте.

Задачу верхнего уровня (1)–(5) будем обозначать \mathcal{L} , а задачу нижнего уровня (6)–(10) — \mathcal{F} . Задачу (1)–(10) целиком обозначим через $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Рассмотрим понятие допустимого решения сформулированной задачи. Для заданных значений $x = (x_i)$ задача $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ распадается на $|S|$ независимых подзадач, соответствующих отдельным сценариям. Пусть

$I^0(x) = \{i \in I \mid x_i = 0\}$ и $I^1(x) = \{i \in I \mid x_i = 1\}$. Дополнительно положим $F'_i = F_i$ для $i \in I^0(x)$ и $F'_i = f_i$ для $i \in I^1(x)$. Для заданного $s \in S$ соответствующая подзадача имеет вид обычной задачи конкурентного размещения CompFLP [9]:

$$\max_{(x_{is}), (x_{ij})} \left(- \sum_{i \in I} F'_i x_{is} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_s} p_{ij} x_{ij} \right), \quad (11)$$

$$z_{is}^o + \sum_{k: i \succeq_j k} x_{kj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J_s, \quad (12)$$

$$x_{is} \geq x_{ij}, \quad i \in I, j \in J_s, \quad (13)$$

$$x_{is} = 1, \quad i \in I^1(x), \quad (14)$$

$$x_{is}, x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J_s, \quad (15)$$

$$(z_{is}^o), (z_{ij}^o) \text{ — оптимальное решение задачи,} \quad (16)$$

$$\max_{(z_{is}), (z_{ij})} \left(- \sum_{i \in I} g_i z_{is} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_s} q_{ij} z_{ij} \right), \quad (17)$$

$$x_{is} + z_{is} \leq 1, \quad i \in I, \quad (18)$$

$$x_{is} + \sum_{k: i \succeq_j k} z_{kj} \leq 1, \quad i \in I, \quad (19)$$

$$z_{is} \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J_s, \quad (20)$$

$$z_{is}, z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J_s. \quad (21)$$

Задачу верхнего уровня (11)–(16) этой модели обозначим через $\mathcal{L}_s(x)$, а задачу нижнего уровня (17)–(21) — через \mathcal{F}_s . Обозначение $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$ будет соответствовать задаче (11)–(21) целиком.

Напомним способ введения понятия допустимого решения для задачи $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$. Говорим, что пара (X_s, Z_s) является *допустимым решением* задачи $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$, порождённым вектором $x_s = (x_{is}), i \in I$, если $X_s = ((x_{is}), (x_{ij}))$ является допустимым решением задачи $\mathcal{L}_s(x)$ и $Z_s = ((z_{is}), (z_{ij}))$ является оптимальным решением задачи \mathcal{F}_s . Пусть $L_s(x, X_s, Z_s)$ — значение целевой функции задачи $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$ на допустимом решении (X_s, Z_s) . Решение (X_s, Z_s) будем называть *пессимистическим допустимым решением*, если $L_s(x, X_s, Z_s) \leq L_s(x, X'_s, Z'_s)$ для любого допустимого решения (X'_s, Z'_s) , порождённого x_s . Пессимистическое допустимое решение, максимизирующее значение целевой функции (11), будем называть *пессимистическим оптимальным решением* задачи $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$.

Тройку (x, X, Z) , $X = ((x_{is}), (x_{ij}))$, $Z = ((z_{is}), (z_{ij}))$, будем называть *пессимистическим допустимым решением* исходной задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, если каждая его составная часть (X_s, Z_s) , $X_s = ((x_{is}), (x_{ij}))$, $Z_s = ((z_{is}), (z_{ij}))$,

образует оптимальное пессимистическое решение соответствующей подзадачи $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$. Пусть $L(x)$ — значение целевой функции (1) на пессимистическом допустимом решении (x, X, Z) . Тогда $L(x) = \min_{s \in S} L_s(X_s, Z_s)$ и пессимистическим оптимальным решением (x^*, X^*, Z^*) исходной задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ будем называть то, для которого выполняется $L(x^*) \geq L(x)$ для всех пессимистических допустимых решений (x, X, Z) .

2. Верхняя граница

Для нахождения пессимистического оптимального решения задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ путём реализации схемы неявного перебора нам необходима процедура вычисления оптимистических оценок целевой функции на подмножествах булевых векторов. Пусть частичное решение $y = (y_i)$, $i \in I$, с компонентами $y_i \in \{0, 1, *\}$ задаёт фиксированные переменные (x_i) . Множества $I^1(y) = \{i \in I \mid y_i = 1\}$ и $I^0(y) = \{i \in I \mid y_i = 0\}$ содержат индексы переменных, значение которых фиксировано равным единице и нулю соответственно. Индексы $i \in I$, для которых $y_i = *$, соответствуют переменным, значение которых не фиксировано и может принимать любое из значений. Булев вектор x , удовлетворяющий условию $x_i = y_i$ для $i \in I^1(y) \cup I^0(y)$, будем называть *продолжением* частичного решения y .

Определение подзадачи $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$ можно распространить на случай, когда частичное решение y используется вместо булева вектора x . Для этого в определении $(\mathcal{L}_s(y), \mathcal{F}_s)$ положим $F'_i = F_i$ для $i \in I^0(y)$ и $F'_i = f_i$ в противном случае. Значение целевой функции (11) для допустимого решения (X_s, Z_s) задачи $(\mathcal{L}_s(y), \mathcal{F}_s)$ обозначим через $L_s(y, X_s, Z_s)$. Тогда верно следующее утверждение, представляющее нам подход для вычисления верхней границы для задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$.

Утверждение 1. Пусть x является продолжением частичного решения y для сценария $s \in S$. Тогда пессимистическое допустимое решение (X_s, Z_s) задачи $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$ является пессимистическим допустимым решением задачи $(\mathcal{L}_s(y), \mathcal{F}_s)$ и для него выполняется неравенство $L_s(x, X_s, Z_s) \leq L_s(y, X_s, Z_s)$.

Для сценария $s \in S$ и продолжения x частичного решения y рассмотрим оптимальные пессимистические решения (X_s, Z_s) и (X'_s, Z'_s) задач $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$ и $(\mathcal{L}_s(y), \mathcal{F}_s)$ соответственно. Для значения $L(x)$ целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ верны соотношения

$$L(x) \leq L_s(x, X_s, Z_s) \leq L_s(y, X_s, Z_s) \leq L_s(y, X'_s, Z'_s),$$

и тем самым вычисление верхней границы для целевой функции задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ на пессимистических допустимых решениях, порождённых

продолжениями частичного решения y , сводится к вычислению верхней границы для задачи $(\mathcal{L}_s(y), \mathcal{F}_s)$.

3. Усиление НРР-релаксации

Аналогично стандартным задачам смешанного целочисленного программирования на максимум, для которых верхние границы целевой функции вычисляются путём применения релаксаций, таких как линейная релаксация, удаление ограничений и т. п., приводящих к задачам, решение которых обычно оказывается значительно более простой процедурой, мы используем для $(\mathcal{L}_s(y), \mathcal{F}_s)$ НРР-релаксацию двухуровневой задачи. Идея данной релаксации состоит в снятии ограничений оптимальности для переменных нижнего уровня. При этом также оказываются ненужными переменные (z_{ij}) и связанные с ними ограничения, которые можно удалить из релаксации для сокращения её размера. В итоге приходим к следующей одноуровневой задаче:

$$\max_{(x_{is}), (x_{ij}), (z_{is})} \left(- \sum_{i \in I} F'_i x_{is} + \sum_{j \in J_s} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right), \quad (22)$$

$$z_{is} + \sum_{k: i \succeq_j k} x_{kj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J_s, \quad (23)$$

$$x_{is} \geq x_{ij}, \quad i \in I, j \in J_s, \quad (24)$$

$$x_{is} + z_{is} \leq 1, \quad i \in I, \quad (25)$$

$$x_{is} = 1, \quad i \in I^1(y), \quad (26)$$

$$x_{is}, x_{ij}, z_{is} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J_s. \quad (27)$$

В процессе вычисления верхней границы опираемся на указанную выше оценочную задачу, расширенную дополнительными ограничениями, которые являются следствиями оптимальности решения задачи Последователя и подталкивают переменные (z_{is}) принимать ненулевые значения. Такую расширенную релаксацию будем называть *усиленной оценочной задачей* или для краткости SEP. Пусть пара (X_s, z_s) , $X_s = ((x_{is}), (x_{ij}))$, $z_s = (z_{is})$, является допустимым решением этой задачи и $U_s(X_s, z_s)$ — соответствующее значение целевой функции.

В [7] предложена конструкция ограничений, названных s -отсечениями. S -отсечения запрещают значительную часть допустимых решений НРР-релаксации, не являющихся частью какого-либо допустимого решения задачи $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$ для некоторого продолжения x частичного решения y . Указанные отсечения имеют вид

$$\sum_{i \in N_{j'}(I')} z_{is} \geq 1 + \sum_{i \in I'} (x_{is} - 1) - \sum_{i \in N_{j'}(I')} x_{is}, \quad (28)$$

где $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J$, а подмножество $N_{J'}(I')$ эффективно вычисляется для любой заданной пары подмножеств (I', J') , как это будет описано далее.

Генерация s -отсечений направлена на улучшение качества релаксации, и стратегия генерации должна обеспечивать баланс времени, потраченного на вычисление границы, и её качества. В силу экспоненциального размера семейства s -отсечений они добавляются в изначальную НРР-релаксацию пошагово в итеративной процедуре генерации отсечений. На итерации данной процедуры отыскивается оптимальное решение задачи SEP и генерируется s -отсечение этого решения, которое далее добавляется к SEP. Зачастую для отсечения оптимального решения текущей задачи SEP подходит несколько s -отсечений. Для ускорения процесса уточнения верхней границы целесообразно выбирать наиболее общие s -отсечения, к примеру, с помощью эвристических подходов. Также можно сформулировать вспомогательную задачу, в которой среди подходящих s -отсечений отыскивается отсечение с минимальным числом вовлечённых в него переменных.

4. Алгоритм вычисления верхней границы

Значение верхней границы $U(y)$ для подмножества допустимых решений задачи $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$, порождённых частичным решением y , может быть вычислено как $U(y) = \min_{s \in S} U_s(X_s, z_s)$, где $U_s(X_s, z_s)$ — оптимальное значение целевой функции задачи SEP, построенной для сценария s . Процедура вычисления верхней границы представлена алгоритмом 1.

Условие порождения s -отсечения (CGC). Для пары подмножеств (I', J') , где $I' \subseteq I$, $J' \subseteq J_s$, $I', J' \neq \emptyset$, можно сформулировать

Алгоритм 1. Вычисление верхней границы на множестве решений, порождённых продолжениями частичного решения y

Вход: частичное решение y .

- 1: **if** $y \in \{0, 1\}^n$ **then**
 - 2: **return** $U(y) = L(y, X, Z)$ для пессимистического допустимого решения (y, X, Z)
 - 3: **else**
 - 4: **for** $s \in S$ **do**
 - 5: Построить НРР-релаксацию задачи $(\mathcal{L}_s(y), \mathcal{F}_s)$
 - 6: Сгенерировать начальный набор s -отсечений
 - 7: Провести процедуру генерации s -отсечений и вычислить оптимальное решение задачи SEP (X_s, z_s)
 - 8: **return** $U(y) = \min_{s \in S} U_s(X_s, z_s)$
-

достаточное условие порождения с-отсечения. Для этого нам потребуются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_j(I') &\text{ обозначает элемент } i' \in I', \text{ для которого } i' \succeq_j i \text{ для всех } i \in I'; \\ \alpha_j(x), x \neq 0, &\text{ обозначает элемент } \alpha_j(I^1(x)); \\ \alpha_{J'}(I') &\text{ — множество } \{\alpha_j(I') \mid j \in J'\}; \\ N_j(I') &\text{ — множество } \{k \in I \mid k \succ_j i' \text{ для любого } i' \in I'\}; \\ N_j(x) = N_j(I^1(x)), N_{J'}(I') &= \bigcup_{j \in J'} N_j(I'). \end{aligned}$$

Неравенство вида (28) удовлетворяется всеми пессимистическими допустимыми решениями задачи $(\mathcal{L}_s(x), \mathcal{F}_s)$ в случае, если найдётся $k \in N_{J'}(I')$, для которого открытие Последователем предприятия k не снижает его доход в сценарии s , но сокращает доход Лидера. Формально говоря, элемент k должен удовлетворять условиям

$$\sum_{j \in J'_k} p_{\alpha_j(I')j} > 0, \quad \sum_{j \in J'_k} q_{kj} \geq g_k,$$

где $J'_k = \{j \in J' \mid k \succ_j \alpha_j(I')\}$.

Процедура генерации с-отсечений. Любая пара множеств (I', J') , удовлетворяющая условию CGC, подходит для порождения с-отсечения, уточняющего оценку НРР-релаксации. При этом удаление элементов из множеств I' и J' при условии сохранения CGC сокращает число переменных, участвующих в с-отсечении, делая его более общим. Мы используем вспомогательную задачу смешанного целочисленного линейного программирования для отыскания пары подмножеств, порождающей с-отсечение с наименьшим числом вовлечённых в него переменных. Эта задача может быть решена точно или приближённо с использованием методов общего назначения или эвристик. В своих экспериментах мы используем в этих целях коммерческий пакет. Отметим, что опора на число вовлечённых в отсечение переменных является одним из возможных подходов к выбору отсечения, добавляемого в релаксацию, и альтернативные подходы также могут быть рассмотрены, что является одним из возможных направлений дальнейших исследований.

Генерация начального набора с-отсечений. Для ускорения получения качественных оценок с помощью high-point релаксации на этапе построения начальной оценочной задачи SEP стремимся исключить тривиальные решения, добавив с-отсечения, порождение которых можно провести относительно быстро. Просматриваем все пары (i', k) , $i', k \in I$, проверяя условие CGC для пары множеств $(I', J_k(I'))$, где $I' = \{i'\}$ и $J_k = \{j \in J_s \mid k \succ_j i'\}$. Для всех пар, удовлетворяющих CGC, запускается процедура генерации с-отсечения.

Основной цикл генерации с-отсечений. Имея решение (X_s, z_s) задачи SEP, рассматриваем векторы размещения $x_s = (x_{is})$ и $z_s = (z_{is})$

игроков. Для пары множеств (I', J') , определённой как $J' = \{j \in J_s \mid \alpha_j(x_s) \succ_j \alpha_j(z_s)\}$ и $I' = \alpha_{J'}(I^1(x_s))$, проверяется условие CGC, в случае выполнения которого запускается процедура генерации s -отсечений. Отсечение, порождённое процедурой, запрещает решение (X_s, z_s) и уточняет значение верхней границы. Таким образом, при необходимости можно отыскать решение обновлённой задачи SEP и повторить основной цикл. Повторение цикла может быть прервано преждевременно на основании каких-либо критериев остановки. В наших экспериментах генерация останавливается, когда значение верхней границы оказывается хуже значения целевой функции на текущем рекордном решении либо когда s -отсечение более сгенерировать не удаётся.

5. Числовой пример

Рассмотрим иллюстративный пример двухэтапной задачи конкурентного размещения предприятий, устроенный следующим образом. Был сгенерирован граф, расстояния в котором определяют предпочтения потребителей. Число мест возможного размещения предприятий равно семи, им соответствуют вершины графа, изображённые на рис. 1 кружками, числа в которых обозначают индекс места. Рёбра графа представляют транспортные связи между местами возможного размещения, а числа на рёбрах — длины указанных связей.

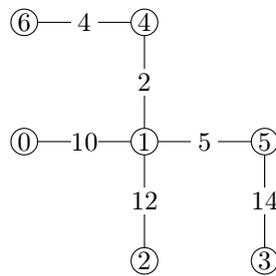


Рис. 1. Граф связей между местами возможного размещения

Введём в рассмотрение три сценария спроса, отличающихся только предпочтениями потребителей. Помимо вершин, представляющих места возможного размещения предприятий, в графе также имеется 20 вершин, не изображённых на рисунке и представляющих потребителей. В каждом из сценариев каждая вершина, представляющая потребителя, соединена рёбрами с тремя выбранными случайным образом местами возможного размещения. Длины рёбер — случайные целые числа, взятые с равномерным распределением на отрезке $[2, 14]$. Кратчайшие расстояния между вершинами-потребителями и местами возможного размещения определяют предпочтения потребителя: из двух мест возможного размещения

предпочтительным является то, расстояние до которого меньше. Сценарии отличаются связями между вершинами-потребителями и местами возможного размещения, моделируя ситуацию наличия нескольких альтернативных сценариев развития транспортной сети, определяющей доступность предприятий для потребителей.

Для $j \in J$ мы генерируем случайным образом величину b_j и полагаем $p_{ij} = q_{ij} = b_j$ для всех $i \in I$. Параметры модели выбираются целочисленными с равномерным распределением на указанных отрезках:

$$f_i \text{ на отрезке } [7, 13], \quad g_i \text{ на отрезке } [4, 10], \quad b_j \text{ на отрезке } [1, 5].$$

Фиксированные затраты на открытие предприятий на втором этапе полагаем равными $F_{is} = f_i + 3$ для всех $i \in I$ и $s \in S$.

Полученный пример был решён точно алгоритмом полного перебора, просматривающего все решения Лидера на первом этапе $x = (x_i)$ и вычисляющим пессимистическое допустимое решение, порождённое x . Заметим, что указанная процедура сама по себе нетривиальна, поскольку требует решения задач CompFLP, соответствующих отдельным сценариям. Для этого используем алгоритм ветвей и границ, описанный в работе [9]. Вся процедура занимает около пяти минут на рабочей станции, проводящей вычисления в двенадцати рабочих потоках. Возникающие задачи смешанного целочисленного программирования решаются с использованием решателя Gurobi 9.1 [10].

В дополнение к отысканию оптимального решения сгенерированного примера мы вычислили верхнюю границу на подмножестве решений, в которых множество ненулевых компонент вектора размещения первого этапа содержит ненулевые компоненты оптимального решения. В табл. 1 приведена информация об оптимальном решении двухэтапной задачи конкурентного размещения и усиленной оценочной задаче, построенной для каждого из сценариев. Таблица содержит следующие столбцы:

x — индексы ненулевых компонент вектора размещения Лидера (x_i) на первом этапе (строка «этап 1») и (x_{is}) в строках $s = 1, 2, 3$;

x_{ub} — индексы ненулевых компонент переменных (x_{is}) в оптимальном решении задачи SEP, соответствующей каждому из сценариев;

z — индексы ненулевых компонент переменных размещения Последователя (z_{is}) в соответствующем сценарии;

z_{ub} — индексы ненулевых компонент переменных (z_{is}) в оптимальном решении задачи SEP, соответствующей каждому из сценариев;

L_s — значение прибыли Лидера, полученной в соответствующем сценарии;

UB_s — значение верхней границы для прибыли Лидера, полученной в соответствующем сценарии, вычисляемое как оптимальное значение

Таблица 1

Оптимальные решения двухэтапной задачи и задачи SEP

	x	x_{ub}	z	z_{ub}	L_s	UB_s	с-отсечения
Этап 1	2 6						
$s = 1$	1 2 6	1 2 6	0 4	0 3	20	23	01**0**, 01**0*1
$s = 2$	0 2 6	0 2 6	4	1	19	19	
$s = 3$	1 2 6	2 6	0 5	1 5	20	21	0110***, *11**0*

целевой функции задачи SEP за вычетом фиксированных затрат первого этапа.

Столбец «с-отсечения» содержит кодировку с-отсечений, порождённых в основном цикле генерации с-отсечений при вычислении верхней границы. Напомним, что помимо основного цикла в задаче SEP имеются также с-отсечения из начального набора, которые мы не приводим в данной таблице. Кодировка с-отсечений представлена вектором $e = (e_i)$, $e_i \in \{0, 1, *\}$, $i \in I$, который можно интерпретировать следующим образом. Для кодировки e соответствующее с-отсечение представлено неравенством

$$\sum_{i \in I^0(e)} z_{is} \geq 1 + \sum_{i \in I^1(e)} (x_{is} - 1) - \sum_{i \in I^0(e)} x_{is}.$$

Отметим, что любое с-отсечение может быть таким образом закодировано единственным вектором e , однако не всем векторам с компонентами $\{0, 1, *\}$ соответствуют правильные с-отсечения.

Заметим, что для примеров, сгенерированных по описанным выше правилам, оптимальное значение НРР-релаксации для сценария $s \in S$ может быть вычислено по формуле

$$- \sum_{i \in I^1(y)} f_i + \sum_{j \in J_s} b_j.$$

Таким образом, для частичного решения y такого, что $y_i = *$ для всех $i \in I$ кроме $y_2 = y_6 = 1$, верхняя граница, предоставляемая НРР-релаксацией, для каждого из сценариев равна $f_2 + f_6 + \sum_{j \in J_s} b_j = -15 + 67 = 52$.

Поскольку значение $\sum_{j \in J_s} b_j$ не зависит от s , итоговая верхняя граница, которую мы могли бы иметь без усиления НРР-релаксации, также равна 52. Как видно из табл. 1, верхняя граница, вычисляемая с помощью SEP, значительно более точная. Сгенерированные с-отсечения заставляют переменные размещения Лидера и Последователя принимать нетривиальные значения в сравнении с просто устроенным оптимальным решением НРР-релаксации. Сравнивая векторы x и x_{ub} , а также z

и z_{ub} , заключаем, что состав ненулевых компонент решения SEP для заданного сценария до определённой степени близок составу оптимального решения подзадачи этого сценария.

Рассматривая информацию о сгенерированных для каждого из сценариев s -отсечениях, видим, что в сценарии 1 сгенерировано s -отсечение $01^{**}0^{*}1$, которое доминируется s -отсечением $01^{**}0^{**}$. В самом деле, процедура генерации отсечений способна породить частично дублирующиеся s -отсечения на различных итерациях, либо при различных значениях параметров, характеризующих s -отсечение. На данном этапе не используем проверки на предмет наличия в наборе сгенерированных отсечений избыточности, однако такие процедуры могут быть в дальнейшем реализованы на основе описанных кодировок отсечений.

Заключение

В настоящей работе сформулирована новая модель из класса конкурентных моделей размещения предприятий. В ней рассматривается конкурирующая сторона Лидер, принимающая решение в условиях, когда множество клиентов не определено. Особенностью модели является форма решения, позволяющая отыскивать предварительные шаги Лидера, которые менее консервативны, чем найденные в результате анализа худшего случая, и при этом не более рискованные, поскольку учитывают стоимость подстройки под реализованный в итоге сценарий. Рассмотрены аспекты, связанные с вычислением верхних границ для целевой функции предложенной модели. Показано, что верхняя граница может быть вычислена путём отыскания верхних границ для семейства двухуровневых задач, имеющих вид конкурентной задачи размещения с единственным сценарием спроса. Для вычисления верхней границы подзадачи модифицирован подход, основанный на построении дополнительных ограничений (s -отсечений) для усиления НРР-релаксации подзадачи. Подобное усиление показало свою эффективность в алгоритме ветвей и границ для различных дискретных моделей конкурентного размещения без неопределённостей. Модификация позволяет построение наиболее сильных s -отсечений, сокращающих время, затрачиваемое для вычисления верхней границы требуемой точности. В дальнейшем планируется разработка метода ветвей, границ и отсечений, включающего предложенную процедуру вычисления верхней границы, для отыскания оптимального решения Лидера в рамках предложенной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В. Л. О задаче конкурентного размещения предприятий со свободным выбором поставщиков // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 93–106.

2. **Ashtiani M. G., Makui A., Ramezani R.** A robust model for a leader-follower competitive facility location problem in a discrete space // *Appl. Math. Model.* 2013. V. 37, No. 1–2. P. 62–71.
3. **Yu W.** A leader-follower model for discrete competitive facility location problem under the partially proportional rule with a threshold // *PLOS ONE*. 2019. V. 14, No. 12, ID e0225693. 16 p.
4. **Иванов С. В., Морозова М. В.** Стохастическая задача конкурентного размещения предприятий с квантильным критерием // *Автоматика и телемеханика*. 2016. № 3. С. 109–122.
5. **Beresnev V. L., Melnikov A. A.** ε -Constraint method for bi-objective competitive facility location problem with uncertain demand scenario // *EURO J. Comput. Optim.* 2020. V. 8, No. 1. P. 33–59.
6. **Ivanov S. V., Akmaeva V. N.** Two-stage stochastic facility location model with quantile criterion and choosing reliability level // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование*. 2021. Т. 14, № 3. С. 5–17.
7. **Beresnev V. L., Melnikov A. A.** Approximation of the competitive facility location problem with MIPs // *Comput. Oper. Res.* 2019. V. 104. P. 139–148.
8. **Moore J. T., Bard J. F.** The mixed integer linear bilevel programming problem // *Oper. Res.* 1990. V. 38, No. 5. P. 911–921.
9. **Beresnev V. L.** Branch-and-bound algorithm for a competitive facility location problem // *Comput. Oper. Res.* 2013. V. 40, No. 8. P. 2062–2070.
10. Gurobi optimizer reference manual. Beaverton: Gurobi Optimization, 2021. Available at www.gurobi.com/documentation/9.5/refman/index.html (accessed May 16, 2022).

Береснев Владимир Леонидович
Мельников Андрей Андреевич

Статья поступила
16 мая 2022 г.
После доработки —
18 мая 2022 г.
Принята к публикации
19 мая 2022 г.

COMPUTING AN UPPER BOUND IN THE TWO-STAGE
BI-LEVEL COMPETITIVE LOCATION MODELV. L. Beresnev^a and A. A. Melnikov^bSobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: ^aberesnev@math.nsc.ru, ^bmelnikov@math.nsc.ru

Abstract. We consider a competitive facility location problem with uncertainty represented by a finite number of possible demand scenarios. The problem is formulated as a bi-level model built on the base of a Stackelberg game and classic facility location model formalizing the players' decision process. In the bi-level model, the first player (Leader) has two options to open a facility. We assume that a Leader's facility could be opened either before the actual demand scenario is revealed or after the revelation. The fixed costs associated with the facility opening are lower in the first case. Thus the fixed costs could be reduced by making a preliminary location decision on the first stage and adjusting it on the second.

We suggest a procedure to compute an upper bound for the Leader's profit value. The approach is based on using a family of auxiliary bi-level subproblems. Optimal solutions of the subproblems form a feasible solution of the initial problem. The upper bound is computed by applying a cut generation procedure to strengthen high-point relaxations of the subproblems. Tab. 1, illustr. 1, bibliogr. 10.

Keywords: Stackelberg game, binary customer's behavior rule, bi-level location model, pessimistic optimal solution.

REFERENCES

1. V. L. Beresnev, On the competitive facility location problem with a free choice of suppliers, *Autom. Telemekh.*, No. 4, 93–106 (2014) [Russian] [*Autom. Remote Control* **75** (4), 668–676 (2014)].

The research is supported by the Russian Science Foundation (Project 21–41–09017).

English version: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **16** (3) (2022).

2. **M. G. Ashtiani, A. Makui, and R. Ramezani**, A robust model for a leader-follower competitive facility location problem in a discrete space, *Appl. Math. Model.* **37** (1–2), 62–71 (2013).
3. **W. Yu**, A leader-follower model for discrete competitive facility location problem under the partially proportional rule with a threshold, *PLOS ONE* **14** (12), ID e0225693, 16 p. (2019).
4. **S. V. Ivanov and M. V. Morozova**, Stochastic problem of competitive location of facilities with quantile criterion, *Avtom. Telemekh.*, No. 3, 109–122 (2016) [Russian] [*Autom. Remote Control* **77** (3), 451–461 (2016)].
5. **V. L. Beresnev and A. A. Melnikov**, ε -Constraint method for bi-objective competitive facility location problem with uncertain demand scenario, *EURO J. Comput. Optim.* **8** (1), 33–59 (2020).
6. **S. V. Ivanov and V. N. Akmaeva**, Two-stage stochastic facility location model with quantile criterion and choosing reliability level, *Vestn. YuUrGU, Ser. Mat. Model. Program.* **14** (3), 5–17 (2021).
7. **V. L. Beresnev and A. A. Melnikov**, Approximation of the competitive facility location problem with MIPs, *Comput. Oper. Res.* **104**, 139–148 (2019).
8. **J. T. Moore and J. F. Bard**, The mixed integer linear bilevel programming problem, *Oper. Res.* **38** (5), 911–921 (1990).
9. **V. L. Beresnev**, Branch-and-bound algorithm for a competitive facility location problem, *Comput. Oper. Res.* **40** (8), 2062–2070 (2013).
10. Gurobi optimizer reference manual (Gurobi Optimization, Beaverton, 2021). Available at www.gurobi.com/documentation/9.5/refman/index.html (accessed May 16, 2022).

Vladimir L. Beresnev
Andrey A. Melnikov

Received May 16, 2022
Revised May 18, 2022
Accepted May 19, 2022