

ПОСТРОЕНИЕ СЕРИЙ СЕМЕЙСТВ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ СТЕПЕНИ ШЕСТЬ

Э. А. Монахова^a, О. Г. Монахов^b

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: ^aemilia@rav.sccc.ru, ^bmonakhov@rav.sccc.ru

Аннотация. Рассматривается решение проблемы построения серий семейств циркулянтных сетей степени шесть, задаваемых аналитически с помощью двух параметров, один из которых является диаметром сети. На основе анализа и обобщения свойств нового описания экстремального семейства циркулянтов построена общего вида серия семейств циркулянтных графов степени шесть произвольных диаметров, которая включает экстремальные циркулянтные графы степени шесть и новые бесконечные семейства циркулянтов с чётным числом вершин. В найденной серии семейств аналитически определены описания серии циркулянтных графов любого заданного диаметра. Алгоритмически выделены диапазоны оптимальности графов серии, где под оптимальным понимается циркулянтный граф степени шесть с минимально возможным диаметром для заданного числа вершин. Полученная серия семейств циркулянтных сетей перспективна как масштабируемая модель топологий для сетей на кристалле. Табл. 3, ил. 3, библиогр. 21.

Ключевые слова: семейство циркулянтных сетей степени шесть, диаметр, экстремальный циркулянтный граф степени шесть, сеть на кристалле.

Введение

В настоящей работе рассматривается проблема построения серий семейств циркулянтных сетей степени шесть, определяемых двумя параметрами, один из которых является диаметром сети. Данная проблема исследовалась в работе [1] и, как было показано, графы полученных серий имеют не только общие топологические свойства (общий диаметр),

Исследование выполнено при финансовой поддержке бюджетным проектом ИВМиМГ СО РАН (проект № 0251–2021–0005).

но и общие коммуникативные свойства, что даёт возможность разрабатывать алгоритмы маршрутизации аналитического типа, представляющие интерес для организации подсистем связи в сетях на кристалле (networks on chip, NoCs, СтнК) [2–4] с циркулянтной топологией.

Циркулянтные сети [5–7] как графы Кэли абелевых групп находят широкое применение в качестве сетей связи кластеров вычислительных систем, компьютерных сетей и в ряде других приложений. Актуальным становится их применение в качестве топологии сетей на кристалле [2, 8, 9], что обусловлено их лучшими структурными характеристиками и высокими показателями масштабируемости при большом количестве узлов по сравнению со стандартными топологиями сетей на кристалле — торами, решётками и гиперкубами.

Дадим необходимые определения. Неориентированный *циркулянтный* граф $C(N; s_1, \dots, s_n)$, где $1 \leq s_1 < \dots < s_n \leq \lfloor N/2 \rfloor$, имеет множество вершин $V = \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ и множество рёбер $A = \{(v, (v \pm s_i) \bmod N) \mid v \in V, i = \overline{1, n}\}$. Числа $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ — образующие графа, N — его порядок, степень вершин циркулянта равна $2n$ (или $2n+1$ при чётном N и $s_n = N/2$). Обозначение $l(v)$ будем использовать для длины кратчайшего пути в графе из вершины 0 в вершину v . Диаметр графа $d(N; S)$ равен длине максимального кратчайшего пути между двумя его вершинами. При фиксированном значении n под *оптимальным* понимается циркулянтный граф $C(N; s_1, \dots, s_n)$, который имеет минимально возможный диаметр для данного N .

В настоящей работе рассматривается класс циркулянтных графов степени шесть. В [10] и независимо в [11] (для графов Кэли абелевых групп) найдено описание экстремального семейства циркулянтных сетей степени шесть как графов с максимально возможным числом вершин при заданном диаметре d . Все графы экстремального семейства оптимальны. Недавние исследования [12] производительности сетей для приложений с интенсивными обменами продемонстрировали, что оптимальные циркулянтные топологии разных степеней от 4 до 10 являются «идеальными кандидатами для глобальных соединений в крупномасштабных иерархических сетях».

Льюис в 2021 г. [13] нашёл новое описание образующих экстремального семейства циркулянтов степени шесть для диаметров $d \equiv 0 \pmod{3}$ и $d \equiv 2 \pmod{3}$ и ошибочно определил его как не изоморфное ранее известному описанию этого семейства с единичной образующей $s_1 = 1$. Мы покажем, во-первых, что верно обратное, и найдём требуемый изоморфизм. Во-вторых, для всех диаметров $d \equiv 1 \pmod{3}$ найдём расширение описания образующих экстремального семейства, дополнительное к полученному в [13]. Далее на основе анализа и обобщения свойств расширенного описания семейства экстремальных циркулянтов построим

общего вида серию семейств циркулянтных графов степени шесть произвольных диаметров $d \geq 1$, которая включает известное экстремальное семейство циркулянтных графов, и в отличие от [1] построим серию семейств циркулянтов с чётным числом вершин. Отметим также, что в найденной серии семейств будут определены аналитически описания циркулянтных графов любого заданного диаметра с неединичной образующей и впервые получены диапазоны оптимальности графов серий циркулянтов степени шесть.

1. Получение новых образующих для экстремального семейства графов

В [10] доказана

Теорема 1. Пусть $d \geq 1$ — целое число. Максимальный порядок циркулянтного графа $C(N; 1, s_2, s_3)$ с диаметром d равен

$$N = \begin{cases} 32d^3/27 + 16d^2/9 + 2d + 1 & \text{для } d \equiv 0 \pmod{3}, \\ 32[d/3]^3 + 48[d/3]^2 + 30[d/3] + 7 & \text{для } d \equiv 1 \pmod{3}, \\ 32[d/3]^3 + 80[d/3]^2 + 70[d/3] + 21 & \text{для } d \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \quad (1)$$

и достигается при образующих

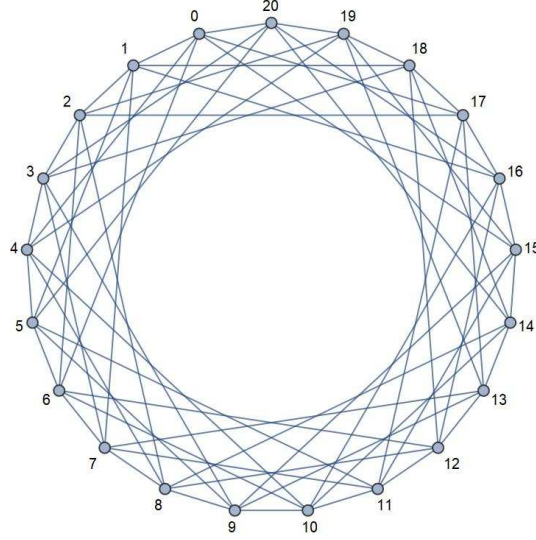
$$\{s_1, s_2, s_3\} = \begin{cases} \{1, 8d^2/9 + 2d/3, 8d^2/9 + 2d + 2\} & \text{для } d \equiv 0 \pmod{3}, \\ \{1, 8[d/3]^2 + 6[d/3] + 2, 8[d/3]^2 + 10[d/3] + 4\} & \text{для } d \equiv 1 \pmod{3}, \\ \{1, 8[d/3]^2 + 10[d/3] + 4, 8[d/3]^2 + 14[d/3] + 6\} & \text{для } d \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \quad (2)$$

Пример графа из определённого в теореме 1 экстремального семейства с описанием $C(21; 1, 4, 6)$ и диаметром $d = 2$ приведён на рис. 1.

Льюис [13] нашёл описание образующих экстремального циркулянта порядка (1) в следующем виде:

$$\{s_1, s_2, s_3\} = \begin{cases} \{4d/3 - 1, 4d/3 + 1, 16d^2/9 + 1\} & \text{для } d \equiv 0 \pmod{3}, \\ \{4(d+1)/3 - 1, 4(d+1)/3 + 1, 16(d+1)^2/9 + 1\} & \text{для } d \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \quad (3)$$

При этом он ошибочно [13, с. 41, 238] определил экстремальные циркулянты с образующими (2) и (3) для соответствующих диаметров как неизоморфные. Покажем, что это неверно, и найдём требуемый изоморфизм, а также для экстремального графа диаметра $d \equiv 1 \pmod{3}$ введём новое описание образующих, которое дополняет (3):

Рис. 1. Циркулянтный граф $C(21; 1, 4, 6)$

$$\{s_1, s_2, s_3\} = \{(4d - 1)/3, (4d + 5)/3, (16d^2 + 16d + 13)/9\}$$

для $d \equiv 1 \pmod{3}$. (4)

Теорема 2. Экстремальный циркулянтный граф, удовлетворяющий условиям (1), (2), изоморфен циркулянтному графу порядка (1) с соответствующим диаметром и образующими (3), (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать изоморфизм данных графов, достаточно найти взаимно простые с N числа для эквивалентного преобразования, указанного в [14, задача 2-10] и переводящего одно представление образующих в другое.

Рассмотрим три случая, соответствующие трём возможным классам диаметров, взятых по модулю 3. Преобразуем образующие (2) в образующие (3) (случай а и с) и (4) (случай b).

(а) При $d \equiv 0 \pmod{3}$ получаем коэффициент преобразования $k_0 = 16d^2/9 + 1$, так что $s_1 \cdot k_0 = s_3$, $s_2 \cdot k_0 = (4d/3 - 1)N + 4d/3 + 1 \equiv s_2 \pmod{N}$, $s_3 \cdot k_0 = (4d/3 + 1)N - (4d/3 - 1) \equiv s_1 \pmod{N}$.

(b) При $d \equiv 1 \pmod{3}$ получаем коэффициент преобразования $k_1 = (4d - 1)/3$, так что $s_1 \cdot k_1 = s_1$, $s_2 \cdot k_1 = N - (16d^2 + 16d + 13)/9 \equiv s_3 \pmod{N}$, $s_3 \cdot k_1 = N - (4d + 5)/3 \equiv s_2 \pmod{N}$.

(с) При $d \equiv 2 \pmod{3}$ получаем коэффициент преобразования $k_2 = 16(d+1)^2/9 + 1$, так что $s_1 \cdot k_2 = s_3$, $s_2 \cdot k_2 = ((4d+1)/3)N + (4d+7)/3 \equiv s_2 \pmod{N}$, $s_3 \cdot k_2 = ((4d+7)/3)N - (4d+1)/3 \equiv s_1 \pmod{N}$.

Теорема 2 доказана.

2. Новая серия семейств общего вида

Положив $s_1 = s$, где $s \geq 1$ — нечётное число, получим в общем виде для всех классов диаметров следующие зависимости между новыми образующими и порядком экстремальных графов: $s_1 = s$, $s_2 = s + 2$, $s_3 = s_1 s_2 + 2 = (s + 1)^2 + 1$, $N = p s_3 + (s_1 + s_2)/2 = p s_3 + s + 1 = p((s + 1)^2 + 1) + s + 1$, где

$$p = \begin{cases} 2d/3 + 1 & \text{для } d \equiv 0 \pmod{3}, \\ (2d + 1)/3 & \text{для } d \equiv 1 \pmod{3}, \\ (2d - 1)/3 & \text{для } d \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Обобщим полученные зависимости, разрешив параметру $p = \lfloor N/s_3 \rfloor$ принимать любые натуральные значения, и на их основе построим бесконечную серию семейств циркулянтных графов степени шесть. Заметим, что в отличие от [1], где графы всех серий имеют единичную образующую $s_1 = 1$, здесь образующая s_1 может принимать любые нечётные значения.

Пусть $p = 1, 2, 3, \dots$ — целые числа и $s = 1, 3, 5, \dots$ — нечётные числа. Тогда имеем бесконечное множество (серию) семейств циркулянтных графов

$$\Omega = \bigcup_{p \geq 1, s \geq 1} C(N; S),$$

где

$$N = N(s, p) = p((s + 1)^2 + 1) + s + 1, \quad (5)$$

$$S = \{s, s + 2, (s + 1)^2 + 1\}. \quad (6)$$

Изучим некоторые свойства новой серии семейств. Покажем, как диаметр любого графа из серии Ω определяется через переменные s и p .

Теорема 3. Диаметр циркулянтного графа $C(N; S)$, удовлетворяющего условиям (5), (6), равен

$$d = \lceil s/2 \rceil + \lfloor p/2 \rfloor. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C(N; S) \in \Omega$, где N и S удовлетворяют условиям (5) и (6), $s \geq 1$ и d — диаметр графа $C(N; S)$. Покажем, что

$$d(N + 2s_3; S) = d(N; S) + 1. \quad (8)$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $p \geq d$. Если удалить в графе $C(N + 2s_3; S)$ образующую s_3 (или $-s_3$) в кратчайшем пути из 0 в вершину $s_3 + i$, $i = \overline{0, N - 1}$, то получится кратчайший путь из 0 в вершину i в графе $C(N; S)$.

И, наоборот, в графе $C(N; S)$ любой кратчайший путь из 0 в вершину $i = \overline{0, N - 1}$ будет кратчайшим путём в графе $C(N + 2s_3; S)$ при

добавлении к нему образующей s_3 (или $-s_3$). Таким образом, в графе $C(N + 2s_3; S)$ выполняется условие $\max_{s_3 \leq v \leq s_3 + N} l(v) = d(N; S) + 1$.

Кроме того, из условия $p \geq d$ следует, что в графе $C(N + 2s_3; S)$ вершины $1, \dots, s_3$ (а также $N - s_3, \dots, N - 1$) можно достичь из 0 самое большее за $d(N; S) + 1$ шагов, так как в этом случае

$$\max_{1 \leq v \leq s_3} l(v) < \max_{s_3 \leq v \leq 2s_3} l(v) \leq d(N; S) + 1$$

или

$$\max_{1 \leq v \leq s_3} l(N - v) < \max_{s_3 \leq v \leq 2s_3} l(N - v) \leq d(N; S) + 1.$$

2. Пусть $p < d$. Положим $p = d - i$, $i \geq 1$. Применим индукцию по i . При $i = 1$ имеем $p = d - 1$. Для графа с числом вершин, равным $N + 2s_3$, имеем $p + 2 = d + 1 > d$, и ситуация сводится к уже доказанному выше случаю с $p = d$ ($i = 0$).

Аналогично при $i = 2$ имеем $p + 2 = d$, и ситуация сводится к уже доказанному случаю с $i = 1$. Продолжая подобные рассуждения, получим выполнение (8) для любого i при $p < d$.

Таким образом, равенство (8) справедливо при любом p , а это может непротиворечиво выполняться только при

$$d(N + 2s_3; S) = d(N; S) + \lfloor p/2 \rfloor. \quad (9)$$

В (5) и (6) математически допускается значение $p = 0$.

При $s \geq 1$ и $p = 0$ имеем $N = s + 1$. Применяя преобразование образующих (6) по модулю N , получим $S = \{s, s + 2, s(s + 2) + 2\} = \{s, 1, 1\}$, и для таких графов $d = (s + 1)/2$.

При $s \geq 1$ и $p = 1$ имеем $N = (s + 1)^2 + s + 2$. Применяя преобразование образующих (6) по модулю N , получим $S = \{s, s + 2, s(s + 2) + 2\} = \{s, s + 1, s + 2\}$, и для таких графов достаточно просто доказывалось, что $d = (s + 1)/2$.

Используя найденные формулы для диаметра при $p = 0, 1$ и применяя (9), получаем (7). Теорема 3 доказана.

3. Диапазоны оптимальности графов серии

Рассмотрим работы, в которых исследовались аналогичные проблемы для циркулянтов степени четыре.

В [15] рассмотрены циркулянтные графы вида $C(N; 1, s)$ с заданной образующей s и доказано, что для любого $M > 0$ существуют такие N и s , что $d(N + 2s; 1, s) > d(N; 1, s) + M$. С другой стороны, найдена следующая зависимость изменения диаметра графов вида $C(N; 1, s)$ с заданной образующей s : если $d(N; 1, s) \leq N/s$, в частности $N \geq s^2$,

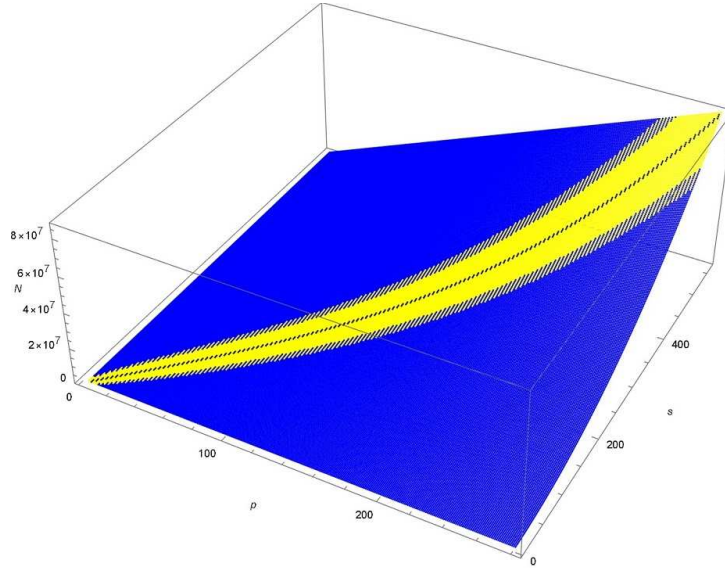


Рис. 2. Изображение серии графов Ω в координатах s, p, N

то $d(N + 2s; 1, s) = d(N; 1, s) + 1$. Из (7) следует выполнение аналогичного свойства для всех циркулянтов серии Ω : если $C(N; s_1, s_2, s_3) \in \Omega$, то $d(N + 2s_3; s_1, s_2, s_3) = d(N; s_1, s_2, s_3) + 1$.

В [16] получена верхняя граница для диаметра циркулянта $C(N; 1, s)$, выраженная через $\lfloor N/s \rfloor$ и остаток от деления N на s , рассмотрена серия графов, заданная двумя параметрами, и на её основе найдено 16 бесконечных семейств оптимальных графов. В [17] продолжен поиск семейств оптимальных циркулянтов вида $C(N; 1, s)$ и получены некоторые условия оптимальности таких графов. В [18] расширены результаты [16] и найдена бесконечная цепь (серия) графов вида $C(N; 1, s)$ с заданной образующей s и функцией $N = N(s, p)$ вместе с формулами для вычисления их диаметров $d = d(s, p)$. Также получены *диапазоны оптимальности* графов в этой цепи, т. е. определено, при каких значениях s и p графы серии остаются оптимальными для N по диаметру (отметим, что здесь мы использовали другие обозначения для параметров по сравнению с оригинальной формулировкой автора в [18]).

Математическая задача получения диапазонов оптимальности графов серий циркулянтов степени шесть ещё не исследовалась. Для таких циркулянтов ответ на этот вопрос на порядок сложнее, чем для циркулянтов степени четыре, так как при этом необходимо найти диапазоны целочисленных решений кубической функции для каждого $p \geq 1$.

Мы исследовали этот вопрос алгоритмически. Построили с помощью системы Wolfram Mathematica 10 таблицу графов из серии Ω с $p \leq 280$, $s \leq 355$ и $N \leq 86 \cdot 10^6$ и нашли в этой области параметров оптимальные графы. На рис. 2 оптимальным графам соответствуют точки жёлтого цвета, точки чёрного цвета — графам, относящимся к экстремальному семейству, точки синего цвета — остальным графам. Существует некоторая закономерность в распределении оптимальных графов для чётных и нечётных p , но получение её аналитического выражения остаётся пока нерешённой задачей.

В табл. 1, 2 приведён фрагмент полученных результатов для $1 \leq p \leq 10$ и $1 \leq s \leq 35$. В соответствующих ячейках даны значения $N = N(s, p)$ и диаметра графа. Оптимальные значения N выделены курсивом, значения N для экстремальных графов — жирным шрифтом.

Таблица 1

Порядки и диаметры графов серии Ω , $1 \leq p \leq 5$

$s \backslash p$	1	2	3	4	5
1	7 , 1	12, 2	17, 2	22, 3	27, 3
3	21 , 2	38, 3	55 , 3	72, 4	89, 4
5	43, 3	80, 4	117 , 4	154, 5	191, 5
7	73, 4	138, 5	203 , 5	268, 6	333 , 6
9	111, 5	212, 6	313, 6	414, 7	515 , 7
11	157, 6	302, 7	447, 7	592, 8	737 , 8
13	211, 7	408, 8	605, 8	802, 9	999, 9
15	273, 8	530, 9	787, 9	1044, 10	1301, 10
17	343, 9	668, 10	993, 10	1318, 11	1643, 11
19	421, 10	822, 11	1223, 11	1624, 12	2025, 12
21	507, 11	992, 12	1477, 12	1962, 13	2447, 13
23	601, 12	1178, 13	1755, 13	2332, 14	2909, 14
25	703, 13	1380, 14	2057, 14	2734, 15	3411, 15
27	813, 14	1598, 15	2383, 15	3168, 16	3953, 16
29	931, 15	1832, 16	2733, 16	3634, 17	4535, 17
31	1057, 16	2082, 17	3107, 17	4132, 18	5157, 18
33	1191, 17	2348, 18	3505, 18	4662, 19	5819, 19
35	1333, 18	2630, 19	3927, 19	5224, 20	6521, 20

4. Другое представление серии семейств

Используя результат теоремы 3, описания графов серии Ω можно представить как функции от диаметра d и параметра $p = \lfloor N/s_3 \rfloor$.

Таблица 2

 Порядки и диаметры графов серии Ω , $6 \leq p \leq 10$

$\begin{smallmatrix} p \\ s \end{smallmatrix}$	6	7	8	9	10
1	32, 4	37, 4	42, 5	47, 5	52, 6
3	106, 5	123, 5	140, 6	157, 6	174, 7
5	228, 6	265, 6	302, 7	339, 7	376, 8
7	398, 7	463, 7	528, 8	593, 8	658, 9
9	616, 8	717, 8	818, 9	919, 9	1020, 10
11	882, 9	1027 , 9	1172, 10	1317, 10	1462, 11
13	1196, 10	1393 , 10	1590, 11	1787, 11	1984, 12
15	1558, 11	1815 , 11	2072, 12	2329 , 12	2586, 13
17	1968, 12	2293, 12	2618, 13	2943 , 13	3268, 14
19	2426, 13	2827, 13	3228, 14	3629 , 14	4030, 15
21	2932, 14	3417, 14	3902, 15	4387, 15	4872, 16
23	3486, 15	4063, 15	4640, 16	5217, 16	5794, 17
25	4088, 16	4765, 16	5442, 17	6119, 17	6796, 18
27	4738, 17	5523, 17	6308, 18	7093, 18	7878, 19
29	5436, 18	6337, 18	7238, 19	8139, 19	9040, 20
31	6182, 19	7207, 19	8232, 20	9257, 20	10282, 21
33	6976, 20	8133, 20	9290, 21	10447, 21	11604, 22
35	7818, 21	9115, 21	10412, 22	11709, 22	13006, 23

Теорема 4. Для любого целого $d > 1$ порядок циркулянтного графа $C(N; S) \in \Omega$ диаметра d равен

$$N = \begin{cases} p^3 - (4d + 2)p^2 + (2d + 1)^2p + 2d + 1 & \text{для нечётного } p \in [1, 2d - 1], \\ p^3 - 4dp^2 + 4d^2p + 2d & \text{для чётного } p \in [2, 2d - 2], \end{cases}$$

а образующие равны

$$S = \begin{cases} \{2d - p, 2d - p + 2, (2d - p + 1)^2 + 1\} & \text{для нечётного } p \in [1, 2d - 1], \\ \{2d - p - 1, 2d - p + 1, (2d - p)^2 + 1\} & \text{для чётного } p \in [2, 2d - 2]. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (7) $s = 2d - p$ при нечётном p и $s = 2d - p - 1$ при чётном p . Возможные значения параметра p следуют из условия: s нечётное и $s \geq 1$. Подставив найденные значения s в (5) и (6), получим искомые формулы. Теорема 4 доказана.

Отметим, что графы полученной серии семейств Ω при нечётном p оказываются изоморфными графам серии Φ из [1] (хотя параметр p там имеет другой смысл), а при чётном p построены новые семейства для всех

диаметров $d > 1$. На рис. 3 представлен график изменения порядка N графов серии Ω в зависимости от значений $1 \leq p \leq 50$ и $1 \leq d \leq 25$. Красным цветом обозначены чётные значения N , чёрным — нечётные.

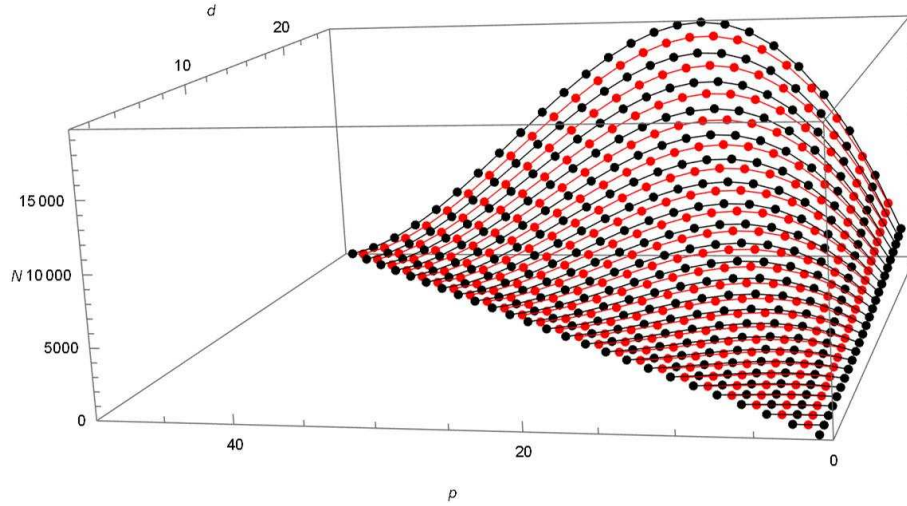


Рис. 3. График изменения числа вершин N графов серии Ω в координатах p и d

5. Новые дополнительные семейства циркулянтов с нечётным числом вершин

Рассмотрим отдельно множество графов из Ω с чётными значениями N . Все они получены при чётных p .

Для каждого чётного $p \geq 2$ и нечётного $s \geq 1$ дополнительно построим новые бесконечные семейства графов с нечётным числом вершин и тем же набором образующих S и диаметром, как у графов из Ω с чётным N .

Теорема 5. Диаметр циркулянтного графа $C(N; S)$, где

$$N = \begin{cases} p((s+1)^2 + 1) + 2s + 1, & (a) \\ p((s+1)^2 + 1) + 1, & (b) \\ p((s+1)^2 + 1) + 2s + 3, & (c) \\ p((s+1)^2 + 1) - 1, & (d) \end{cases} \quad (10)$$

p чётное, s нечётное, а образующие S удовлетворяют условию (6), равен

$$d = \lceil s/2 \rceil + p/2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве исходного графа для доказательства теоремы возьмём любой граф $C(N; S) \in \Omega$ с чётным значением $p \geq 2$. В силу (7) его диаметр равен $d = d(N; S) = (s + 1)/2 + p/2$. Для таких графов вершина с номером $v = N/2$ находится на расстоянии d от 0, что следует из справедливости равенства

$$N/2 = \begin{cases} (p/2)s_3 - ((s + 1)/4)s_1 + ((s + 1)/4)s_2 & \text{для } (s + 1)/2 \equiv 0 \pmod{2}, \\ (p/2)s_3 + ((s + 3)/4)s_1 - ((s - 1)/4)s_2 & \text{для } (s + 1)/2 \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

В дальнейшем этот граф обозначим через $C^{(0)}$. Из равенства (10) порядки рассматриваемых графов выражаются через порядок $C^{(0)}$ следующим образом:

$$\begin{cases} N + s_1, & \text{(a)} \\ N - s_1, & \text{(b)} \\ N + s_2, & \text{(c)} \\ N - s_2. & \text{(d)} \end{cases}$$

Без потери общности для дальнейшего доказательства теоремы можем положить $p = 2$.

Рассмотрим случай (а). Надо доказать, что диаметр графа $C^{(a)} = C(N + s_1; S)$ равен диаметру графа $C^{(0)}$. В силу вершинной транзитивности циркулянтов достаточно сравнить в этих графах максимальные расстояния от 0 до вершин интервала $0 \leq v \leq N - s_3$.

Граф $C^{(a)}$ отличается от графа $C^{(0)}$ тем, что вершины с номерами $v = N - 2s_3$ и $v = N - s_3$ сдвинуты на s_1 по сравнению с графом $C^{(0)}$, и тем самым расстояния от 0 до вершин графа $C^{(a)}$ на интервале $0 \leq v \leq N - s_3$ могут измениться.

Если в графе $C^{(0)}$ кратчайший путь в вершину v длины $1 \leq l(v) \leq d$ не включает вершины $N - s_3$, $N - 2s_3$, то кратчайший путь в $C^{(0)}$ остаётся также кратчайшим путём в v в графе $C^{(a)}$.

Теперь рассмотрим те вершины $v \in C^{(0)}$, кратчайшие пути в которые проходят либо через вершину $N - s_3$, либо через $N - 2s_3$. Здесь возможны три варианта.

1) Если $l(v) \leq d$ и кратчайший путь в v включает хотя бы одну образующую $+s_1$, то в $C^{(a)}$ длина кратчайшего пути в v уменьшается на единицу по сравнению с $C^{(0)}$.

2) Если $l(v) < d$ и кратчайший путь в v не включает образующую $+s_1$, то в $C^{(a)}$ расстояние до v может увеличиться максимум на единицу за счёт прибавления к кратчайшему пути в $C^{(0)}$ образующей $-s_1$.

3) Пусть $l(v) = d$ и кратчайший путь в v не включает ни одной образующей $+s_1$.

Если

$$v = N - s_3 - is_2 - (d - 1 - i)s_1, \quad i = \overline{0, d-1},$$

то, используя справедливое в $C^{(0)}$ равенство $N - s_3 = (d - 1)s_1 + ds_2$, получим в этом случае

$$v = is_1 + (d - i)s_2,$$

и длина кратчайшего пути в v в графе $C^{(a)}$ не увеличивается.

Если

$$v = N - 2s_3 + is_2 - (d - 2 - i)s_1, \quad i = \overline{0, d-2},$$

то из справедливого в $C^{(0)}$ равенства $N - 2s_3 = ds_1 - (d - 2)s_2$ следует, что

$$v = (i + 2)s_1 - (d - 2 - i)s_2,$$

и по крайней мере одна образующая $+s_1$ присутствует в кратчайшем пути в v . Соответственно длина кратчайшего пути в v в графе $C^{(a)}$ не увеличивается.

Таким образом, диаметры графов $C^{(0)}$ и $C^{(a)}$ совпадают.

Случай (с) отличается от случая (а) тем, что образующая s_1 заменяется образующей s_2 .

Случаи (b) и (d) доказываются аналогично с учётом того, что граф $C^{(b)} = C(N - s_1; S)$ отличается от графа $C^{(0)}$ тем, что вершины с номерами $v = N - 2s_3$ и $v = N - s_3$ сдвинуты на $-s_1$ по сравнению с графом $C^{(0)}$. Теорема 5 доказана.

Учитывая результат теоремы 5, дополнительно к графам серии Ω , описанным в теореме 4, введём новые описания бесконечных семейств циркулянтов любого заданного диаметра с нечётным числом вершин.

Следствие 1. Для любых целого $d > 1$ и чётного $p \in [2, 2d - 2]$ порядок циркулянтного графа степени шесть диаметра d , равный

$$N \in \{p^3 - 4dp^2 + (4d^2 - 1)p + 4d - 1, p^3 - 4dp^2 + (4d^2 - 1)p + 4d + 1, \\ p^3 - 4dp^2 + (4d^2 + 1)p + 1, p^3 - 4dp^2 + (4d^2 + 1)p - 1\}, \quad (11)$$

достигается для образующих $S = \{2d - p - 1, 2d - p + 1, (2d - p)^2 + 1\}$.

Общее число идентифицированных в данной работе графов любого заданного диаметра $d > 1$ достигает $6d - 5$, включая графы серии Ω и семейства (11) (назовём его Ω^+).

В качестве примера рассмотрим построение циркулянтных графов степени шесть и диаметра четыре. Серия Ω включает семь графов диаметра четыре. Дополнительные двенадцать графов из Ω^+ диаметра четыре описывает следствие 1. Для сравнения: серия Φ из работы [1] включает четыре таких графа. Описания всех указанных графов представлены в табл. 3.

Таблица 3

Построенные циркулянтные графы диаметра четыре

серия	$C(N; s_1, s_2, s_3)$
Ω	$C(32; 1, 3, 5), C(37; 1, 3, 5), C(72; 3, 5, 17), C(73; 7, 9, 65),$ $C(80; 5, 7, 37), C(89; 3, 5, 17), C(117; 5, 7, 37)$
Ω^+	$C(29; 1, 3, 5), C(31; 1, 3, 5), C(33; 1, 3, 5), C(35; 1, 3, 5),$ $C(67; 3, 5, 17), C(69; 3, 5, 17), C(73; 5, 7, 37), C(75; 3, 5, 17),$ $C(75; 5, 7, 37), C(77; 3, 5, 17), C(85; 5, 7, 37), C(87; 5, 7, 37)$
Φ [1]	$C(37; 1, 8, 22), C(73; 1, 8, 10), C(89; 1, 16, 26), C(117; 1, 16, 22)$

Следует отметить, что идентификация топологических характеристик (диаметра и/или среднего расстояния) графов по аналитическим описаниям семейств циркулянтных графов или их обобщений, особенно при степени графов, большей четырёх, является непростой и актуальной задачей [5, 6, 11, 13, 17, 19–21]. В настоящей работе мы решили задачу идентификации диаметра для серий бесконечных семейств циркулянтов степени шесть, включающих различные описания семейств циркулянтных графов.

Заключение

Рассматривается решение проблемы построения серий семейств циркулянтных сетей степени шесть, задаваемых аналитически с помощью двух параметров, один из которых является диаметром сети. На основе обобщения свойств нового описания экстремального семейства циркулянтов построена новая серия семейств циркулянтов, задаваемых двумя параметрами, в которую входят экстремальные циркулянтные графы степени шесть и новые бесконечные семейства циркулянтов с чётным числом вершин. Получена формула для диаметра любого графа серии. В найденной серии семейств определены аналитически описания серии циркулянтных графов любого заданного диаметра с неединичной образующей. Алгоритмически получены диапазоны оптимальности графов серии. Также на основе графов найденной серии построены новые бесконечные семейства циркулянтов степени шесть с нечётным числом вершин.

Получение серий семейств с общими топологическими и коммуникативными свойствами перспективно в качестве масштабируемых (настраиваемых по двум параметрам) моделей топологий для сетей на кристалле с возможностью в дальнейшем построения унифицированных аналитических алгоритмов маршрутизации, аналогичных алгоритмам из [3, 4], и аналитических моделей для исследования свойств сети, включая пропускную способность и задержки при передаче информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Monakhova E. A.** Series of families of degree six circulant graphs // Прикл. дискрет. математика. 2021. № 54. С. 109–124.
2. **Romanov A. Yu., Amerikanov A. A., Lezhnev E. V.** Analysis of approaches for synthesis of networks-on-chip by using circulant topologies // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 1050, ID 012071. 12 p.
3. **Monakhova E. A., Romanov A. Yu., Lezhnev E. V.** Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 215010–215019.
4. **Monakhova E. A., Monakhov O. G., Romanov A. Yu., Lezhnev E. V.** Analytical routing algorithm for networks-on-chip with the three-dimensional circulant topology // Proc. Moscow Workshop Electron. Netw. Technol. (Moscow, Russia, March 11–13, 2020). Moscow: Higher School of Economics, 2020. 6 p.
5. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // Theor. Comput. Sci. 2003. V. 299. P. 107–121.
6. **Monakhova E. A.** A survey on undirected circulant graphs // Discrete Math. Algorithms Appl. 2012. V. 4, No. 1, ID 1250002. 30 p.
7. **Pérez-Rosés H., Bras-Amorós M., Serradilla-Meriner J. M.** Greedy routing in circulant networks // Graphs Comb. 2022. V. 38, ID 86. 16 p.
8. **Martínez C., Vallejo E., Beivide R., Izu C., Moretó M.** Dense Gaussian networks: Suitable topologies for on-chip multiprocessors // Int. J. Parallel Program. 2006. V. 34. P. 193–211.
9. **Martínez C., Vallejo E., Moretó M., Beivide R., Valero M.** Hierarchical topologies for large-scale two-level networks // Actas XVI Jornadas Paralelismo (Granada, Spain, Sept. 13–16, 2005). Madrid: Paraninfo, 2005. P. 133–140.
10. **Monakhova E.** Optimal triple loop networks with given transmission delay: Topological design and routing // Proc. Int. Network Optimization Conf. (Évry/Paris, France, Oct. 27–29, 2003). Évry: Inst. Natl. Télécommun., 2003. P. 410–415.
11. **Dougherty R., Faber V.** The degree-diameter problem for several varieties of Cayley graphs I: The abelian case // SIAM J. Discrete Math. 2004. V. 17, No. 3. P. 478–519.
12. **Huang X., Ramos A. F., Deng Y.** Optimal circulant graphs as low-latency network topologies // J. Supercomput. 2022. V. 78. P. 13491–13510.

13. **Lewis R. R.** Analysis and construction of extremal circulant and other abelian Cayley graphs: PhD thes. London, 2021. 390 p.
14. Research problems // J. Comb. Theory. 1967. V. 2, No. 3. P. 393.
15. **Göbel F., Neutel E. A.** Cyclic graphs // Discrete Appl. Math. 2000. V. 99. P. 3–12.
16. **Du D.-Z., Hsu D. F., Li Q., Xu J.** A combinatorial problem related to distributed loop networks // Networks. 1990. V. 20, No. 2. P. 173–180.
17. **Chen B.-X., Meng J.-X., Xiao W.-J.** Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks // Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 2006. V. 8. P. 299–312.
18. **Tzvieli D.** Minimal diameter double-loop networks. I. Large infinite optimal families // Networks. 1991. V. 21, No. 4. P. 387–415.
19. **Lewis R. R.** The degree-diameter problem for circulant graphs of degree 8 and 9 // Electron. J. Comb. 2014. V. 21, No. 4, ID P4.50. P. 1–19.
20. **Lewis R. R.** The degree-diameter problem for circulant graphs of degrees 10 and 11 // Discrete Math. 2018. V. 341, No. 9. P. 2553–2566.
21. **Dalfó C., Fiol M. A., López N., Ryan J.** An improved Moore bound and some new optimal families of mixed abelian Cayley graphs // Discrete Math. 2020. V. 343, No. 10, ID 112034. 10 p.

Монахова Эмилия Анатольевна
Монахов Олег Геннадьевич

Статья поступила
1 июня 2022 г.
После доработки —
19 июля 2022 г.
Принята к публикации
26 июля 2022 г.

CONSTRUCTION OF SERIES OF FAMILIES OF DEGREE SIX CIRCULANT NETWORKS

E. A. Monakhova^a and O. G. Monakhov^b

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
6 Acad. Lavrentiev Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: ^aemilia@rav.sbcc.ru, ^bmonakhov@rav.sbcc.ru

Abstract. We consider a solution to the problem of constructing a series of families of circulant networks of degree six, specified analytically with the help of two parameters, one of which is the diameter of the network. Based on the analysis and generalization of the properties of a new description of an extremal family of circulants, a general series of families of circulant graphs of degree six of arbitrary diameters is constructed, which includes extremal circulant graphs of degree six and new infinite families of circulants with an even number of vertices. In the found series of families, descriptions of a series of circulant graphs of any given diameter are analytically defined. Optimality ranges of series graphs are algorithmically identified, where optimal is understood as a circulant graph of degree six with the minimum possible diameter for a given number of vertices. The resulting series of families of circulant networks is promising as a scalable topology model for networks on a chip. Tab. 3, illustr. 3, bibliogr. 21.

Keywords: family of circulant networks of degree six, diameter, extremal circulant graph of degree six, network on a chip.

REFERENCES

1. E. A. Monakhova, Series of families of degree six circulant graphs, *Prikl. Diskretn. Mat.*, No. 54, 109–124 (2021).
2. A. Yu. Romanov, A. A. Amerikanov, and E. V. Lezhnev, Analysis of approaches for synthesis of networks-on-chip by using circulant topologies, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1050**, ID 012071, 12 p. (2018).

This research is supported by the budget project of ICMMG SB RAS (Project 0251–2021–0005).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **16** (4) (2022).

3. **E. A. Monakhova, A. Yu. Romanov, and E. V. Lezhnev**, Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip, *IEEE Access*. **8**, 215010–215019 (2020).
4. **E. A. Monakhova, O. G. Monakhov, A. Yu. Romanov, and E. V. Lezhnev**, Analytical routing algorithm for networks-on-chip with the three-dimensional circulant topology, in *Proc. Moscow Workshop Electron. Netw. Technol., Moscow, Russia, March 11–13, 2020* (Higher School of Economics, Moscow, 2020).
5. **F. K. Hwang**, A survey on multi-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **299**, 107–121 (2003).
6. **E. A. Monakhova**, A survey on undirected circulant graphs, *Discrete Math. Algorithms Appl.* **4** (1), ID 1250002, 30 p. (2012).
7. **H. Pérez-Rosés, M. Bras-Amorós, and J. M. Serradilla-Merintero**, Greedy routing in circulant networks, *Graphs Comb.* **38**, ID 86, 16 p. (2022).
8. **C. Martínez, E. Vallejo, R. Beivide, C. Izu, and M. Moretó**, Dense Gaussian networks: Suitable topologies for on-chip multiprocessors, *Int. J. Parallel Program.* **34**, 193–211 (2006).
9. **C. Martínez, E. Vallejo, M. Moretó, R. Beivide, and M. Valero**, Hierarchical topologies for large-scale two-level networks, in *Actas XVI Jornadas Paralelismo, Granada, Spain, Sept. 13–16, 2005* (Paraninfo, Madrid, 2005), pp. 133–140.
10. **E. Monakhova**, Optimal triple loop networks with given transmission delay: Topological design and routing, in *Proc. Int. Network Optimization Conf., Évry/Paris, France, Oct. 27–29, 2003* (Inst. Natl. Télécommun., Évry, 2003), pp. 410–415.
11. **R. Dougherty and V. Faber**, The degree-diameter problem for several varieties of Cayley graphs I: The abelian case, *SIAM J. Discrete Math.* **17** (3), 478–519 (2004).
12. **X. Huang, A. F. Ramos, and Y. Deng**, Optimal circulant graphs as low-latency network topologies, *J. Supercomput.* **78**, 13491–13510 (2022).
13. **R. R. Lewis**, Analysis and construction of extremal circulant and other abelian Cayley graphs, *PhD thes.* (London, 2021).
14. Research problems, *J. Comb. Theory.* **2** (3), 393 (1967).
15. **F. Göbel and E. A. Neutel**, Cyclic graphs, *Discrete Appl. Math.* **99**, 3–12 (2000).
16. **D.-Z. Du, D. F. Hsu, Q. Li, and J. Xu**, A combinatorial problem related to distributed loop networks, *Networks* **20** (2), 173–180 (1990).
17. **B.-X. Chen, J.-X. Meng, and W.-J. Xiao**, Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **8**, 299–312 (2006).
18. **D. Tzvieli**, Minimal diameter double-loop networks. I. Large infinite optimal families, *Networks* **21** (4), 387–415 (1991).
19. **R. R. Lewis**, The degree-diameter problem for circulant graphs of degree 8 and 9, *Electron. J. Comb.* **21** (4), ID P4.50, 1–19 (2014).

- 20. R. R. Lewis**, The degree-diameter problem for circulant graphs of degrees 10 and 11, *Discrete Math.* **341** (9), 2553–2566 (2018).
- 21. C. Dalfó, M. A. Fiol, N. Lopéz, and J. Ryan**, An improved Moore bound and some new optimal families of mixed abelian Cayley graphs, *Discrete Math.* **343** (10), ID 112034, 10 p. (2020).

Emilia A. Monakhova
Oleg G. Monakhov

Received June 1, 2022
Revised July 19, 2022
Accepted July 26, 2022