ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2022. Т. 29, № 4. С. 77–103

УДК 519.714 DOI 10.33048/daio.2022.29.751

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НОРМАЛИЗОВАННЫХ ФОРМУЛ

К. Л. Рычков

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: `rychkov@math.nsc.ru`

Аннотация. Определён класс названных П-разбиениями объектов, которые в некотором вполне определённом смысле являются эквивалентами формул в базисе, состоящем из дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, в которых отрицания возможны только над переменными (нормализованные формулы). П-разбиения рассматриваются в качестве представлений этих формул подобно тому, как эквивалентами и графическими изображениями тех же самых формул можно считать П-схемы. Разработана некоторая теория таких представлений, которая по сути является математическим аппаратом, ориентированным на описание класса реализующих линейные булевы функции минимальных нормализованных формул. Библиогр. 18.

Ключевые слова: булева функция, нормализованная формула, минимальная формула, представление формулы, П-схема, П-разбиение, нижняя оценка сложности.

Введение

Проблема нижних оценок сложности реализации конкретных булевых функций схемами различных видов является известной и одной из труднейших проблем современной дискретной математики. В тех случаях, когда удаётся получить окончательный результат, т. е. точную (совпадающую с верхней) нижнюю оценку сложности, идеальным завершением решения этой проблемы представляется описание класса всех минимальных схем, реализующих данную функцию. В настоящей статье разрабатывается математический аппарат, необходимый для описания класса всех минимальных схем в одном из таких случаев. А именно, речь идёт о линейных булевых функциях и реализующих их формулах в базисе,

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0017).

© К. Л. Рычков, 2022

состоящем из дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, в которых отрицания могут встречаться только над переменными, т. е. о так называемых нормализованных формулах.

В 1971 г. В. М. Храпченко для минимальной сложности λ_n П-схемы, реализующей линейную булеву функцию от n переменных, получил оценку $\lambda_n \geqslant n^2$ [1]. При $n = 2^k$, где k — целое, эта нижняя оценка совпала с ранее полученной верхней оценкой С. В. Яблонского [2] и тем самым был достигнут окончательный результат. Позже нижняя оценка Храпченко была несколько усилена для остальных значений n [3–6], это позволило установить совпадение λ_n с верхней оценкой Яблонского при всех $1 \leqslant n \leqslant 8$. Отметим, что для линейных булевых функций до сих пор не удавалось найти таких П-схем, которые были бы не сложнее и существенно отличались от тех П-схем, которые построил Яблонский для получения своей верхней оценки. Естественным образом возникла гипотеза о совпадении класса минимальных П-схем, реализующих линейные булевы функции от n переменных, с классом П-схем, построенных для этих функций по (несколько дополненному) принципу Яблонского. В [7–9] эта гипотеза была доказана при $1 \leqslant n \leqslant 5$ и при n, равном целой степени двойки. В двух остальных случаях, при которых была достигнута точная нижняя оценка величины λ_n, т. е. при $n = 6, 7$, справедливость гипотезы также установлена, но доказательство до сих пор не опубликовано. Настоящая статья является первым шагом этого доказательства.

Заметим, что понятие П-схемы в определённом смысле является эквивалентом понятия нормализованной формулы. Тем самым нет особой разницы между описанием класса минимальных П-схем, реализующих линейные булевы функции, и описанием класса минимальных нормализованных формул, реализующих те же функции. Однако в рамках нашего доказательства язык нормализованных формул представляется менее громоздким и поэтому более удобным. На этот язык мы далее и переходим. Поскольку рассматриваются только нормализованные формулы, будем называть их просто формулами.

В статье вводится ещё один эквивалент понятия формулы (и понятия П-схемы) — так называемое П-разбиение. В качестве представлений формул будем рассматривать соответствующие П-разбиения. Разрабатываемая ниже теория представлений формул по сути является развитием и доведением до логической точки идеи В. М. Храпченко, заложенной в его методе получения нижних оценок сложности П-схем [1, 10]. Одна из целей, которую мы преследуем при разработке этой теории, заключается в создании возможности при доказательстве вышеуказанной гипотезы соединять идеи метода Храпченко с идеями другого известного метода получения нижних оценок сложности П-схем — метода Субботовской [11].

Следует отметить, что существует целый ряд работ, связанных с различными вариантами применения и разного рода модификациями метода Храпченко [12–17], в том числе и с модификациями, в которых методы Храпченко и Субботовской соединяются [18].

1. П-разбиения

Через B^n обозначим множество всех двоичных наборов

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \{0,1\},\ 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Непустое подмножество $P \subseteq \mathrm{B}^n \times \mathrm{B}^n$ назовём *прямоугольным* или *прямоугольником*, если $P = A \times B$ для некоторых $A, B \subseteq \mathrm{B}^n$. При этом число n будем называть *размерностью* этого прямоугольника, множества A и B — его *вертикальной* и *горизонтальной* сторонами соответственно.

Через REC^n обозначим множество всех прямоугольных подмножеств множества $\mathrm{B}^n \times \mathrm{B}^n$. Для произвольного прямоугольника $P \in \mathrm{REC}^n$ через $\mathrm{REC}(P)$ обозначим множество всех таких $K \in \mathrm{REC}^n$, что $K \subseteq P$.

Прямоугольник $\mathrm{X} = \mathrm{B}^n \times \mathrm{B}^n$ назовём *главным прямоугольником размерности* n. Прямоугольники

$$\mathrm{X}_i^0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathrm{X} \mid \alpha_i = 1,\ \beta_i = 0\},$$
$$\mathrm{X}_i^1 = \{(\alpha, \beta) \in \mathrm{X} \mid \alpha_i = 0,\ \beta_i = 1\}$$

будем называть *отрицательной* и *положительной компонентами с номером* i главного прямоугольника X, $i = 1, \ldots, n$.

Множество $M \subseteq \mathrm{X}$ назовём (i, δ)-*однородным*, если выполнено включение $M \subseteq \mathrm{X}_i^\delta$. Множество $M \subseteq \mathrm{X}$ назовём *однородным*, если существуют $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $\delta \in \{0,1\}$ такие, что оно (i, δ)-однородно.

Разбиением (конечным) множества P называется такое семейство $U = \{Q_1, \ldots Q_k\}$ непустых попарно не пересекающихся его подмножеств, что справедливо равенство $Q_1 \cup \cdots \cup Q_k = P$. Подмножества $Q_1, \ldots Q_k$ называются *блоками* этого разбиения.

Разбиение U прямоугольника $P \subseteq \mathrm{X}$ назовём *прямоугольным*, если все его блоки являются прямоугольниками. *Прямоугольным фрагментом* (или просто *фрагментом*) этого разбиения назовём такое подсемейство $S \subseteq U$, что множество $\bigcup\limits_{C \in S} C$ является прямоугольником. Сам этот прямоугольник назовём *гиперблоком* (*соответствующим прямоугольному фрагменту* S) разбиения U.

Через $\mathcal{F}(U)$ и $\mathcal{H}(U)$ обозначим множество всех прямоугольных фрагментов и всех гиперблоков прямоугольного разбиения U соответственно.

Заметим, что блоки прямоугольного разбиения U являются гиперблоками этого разбиения. Эти гиперблоки назовём *элементарными.* Гиперблоки из множества $\mathcal{H}(U)\setminus U$ назовём *составными.* Кроме того, сам прямоугольник P является гиперблоком. Этот гиперблок назовём *главным* и обозначим $\widehat{U}$. В дальнейшем прямоугольное разбиение U прямоугольника P для краткости будем называть просто прямоугольным разбиением U, имея в виду, что U является разбиением прямоугольника $\widehat{U}$.

Прямоугольники $P_1, P_2 \in \mathrm{REC}^n$ назовём *горизонтально* (*вертикально*) *соседними*, если $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ и вертикальная (горизонтальная) сторона P_1 равна вертикальной (горизонтальной) стороне P_2, и просто *соседними*, если они горизонтально либо вертикально соседние.

Прямоугольник $P \in \mathrm{REC}^n$ назовём *горизонтальным* (*вертикальным*) *соединением* прямоугольников $P_1, P_2 \in \mathrm{REC}^n$, если $P = P_1 \cup P_2$ и P_1, P_2 — горизонтально (вертикально) соседние. При этом пару $\{P_1, P_2\}$ будем называть *горизонтальным* (*вертикальным*) *разрезом прямоугольника* P, а прямоугольники P_1, P_2 — компонентами этого разреза. Прямоугольник $P \in \mathrm{REC}^n$ назовём просто *соединением* прямоугольников P_1, P_2, а пару $\{P_1, P_2\}$ — просто *разрезом прямоугольника* P, если он является горизонтальным либо вертикальным соединением этих прямоугольников.

Будем говорить, что *разрез* $\{P_1, P_2\}$ *прямоугольника* $P \in \mathrm{REC}^n$ *индуцирован прямоугольным разбиением* U, если справедливо включение $P_1, P_2 \in \mathcal{H}(U)$.

Через $\mathrm{C_h}(P, U)$ и $\mathrm{C_v}(P, U)$ обозначим соответственно множество всех горизонтальных и вертикальных разрезов прямоугольника P, индуцированных прямоугольным разбиением U.

Прямоугольник P назовём *горизонтально* (*вертикально*) *разделимым относительно прямоугольного разбиения* U, если выполнено неравенство $\mathrm{C_h}(P, U) \neq \varnothing$ (неравенство $\mathrm{C_v}(P, U) \neq \varnothing$), и просто *разделимым относительно прямоугольного разбиения* U, если он горизонтально либо вертикально разделим относительно этого разбиения.

Прямоугольное разбиение назовём *однородным*, если каждый его блок является однородным множеством. Прямоугольное разбиение назовём *разделимым*, если каждый его составной гиперблок разделим относительно этого разбиения.

П-*разбиением* назовём такое прямоугольное разбиение, которое одновременно однородно и разделимо.

Размерностью П-разбиения U назовём размерность его главного гиперблока $\widehat{U}$. Множества всех (i, δ)-однородных блоков этого разбиения

$$U_i^\delta = \{Q \in U \mid Q \subseteq \mathrm{X}_i^\delta\}, \quad i = 1, \ldots, n,\ \delta = 0, 1,$$

будем называть *компонентами* П-разбиения U. Через Π^n обозначим множество всех П-разбиений размерности n, через Π — множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Pi^n$ всех П-разбиений.

Два П-разбиения $U, V \in \Pi^n$ назовём *горизонтально* (*вертикально*) *соседними*, если горизонтально (вертикально) соседними являются их главные гиперблоки $\widehat{U}, \widehat{V}$, и просто *соседними*, если они горизонтально либо вертикально соседние.

Для произвольных разбиения U множества P и подмножества $M \subseteq P$ семейство множеств $U|M = \{M \cap Q \mid Q \in U, M \cap Q \neq \varnothing\}$ назовём *сужением разбиения U на множество M*.

Следующие утверждения вытекают непосредственно из определений. В дальнейшем в силу их очевидности они, как правило, будут использоваться без ссылки на номер соответствующей леммы.

Лемма 1. *Для любого П-разбиения $U \in \Pi$ и любого его гиперблока $C \in \mathcal{H}(U)$ сужение $U|C$ является соответствующим C прямоугольным фрагментом U.*

Лемма 2. *Любой прямоугольный фрагмент $F \in \mathcal{F}(U)$ любого П-разбиения $U \in \Pi$ является П-разбиением соответствующего ему гиперблока $C \in \mathcal{H}(U)$.*

Лемма 3. *При любом целом $n \geqslant 1$ для любого $U \in \Pi^n$ справедливо включение $\mathcal{F}(U) \subseteq \Pi^n$.*

Лемма 4. *Для любого прямоугольного фрагмента $F \in \mathcal{F}(U)$ любого П-разбиения $U \in \Pi$ справедливы включения*

$$\mathcal{F}(F) \subseteq \mathcal{F}(U), \quad \mathcal{H}(F) \subseteq \mathcal{H}(U).$$

Лемма 5. *Для любых двух соседних П-разбиений $U, V \in \Pi^n$ справедливо включение $U \cup V \in \Pi^n$ и равенство $\widehat{U \cup V} = \widehat{U} \cup \widehat{V}$.*

Теорема 1. *Для любого П-разбиения $U \in \Pi^n$ и любого прямоугольника $P \subseteq \widehat{U}$ справедливо включение $U|P \in \Pi^n$ и равенство $\widehat{U|P} = P$.*

Доказательство проведём индукцией по мощности П-разбиения U. При $|U| = 1$ справедливость теоремы очевидна.

Пусть $m \geqslant 1$ и теорема доказана для всех П-разбиений $U \in \Pi^n$ мощности $|U| \leqslant m$. Докажем её для произвольного П-разбиения $U \in \Pi^n$ мощности $|U| = m + 1$.

Из неравенства $|U| \geqslant 2$ вытекает, что $\widehat{U} \in \mathcal{H}(U) \setminus U$. Следовательно, по определению П-разбиения существует индуцированный U разрез $\{C_1, C_2\}$ главного гиперблока $\widehat{U}$ разбиения U. Через U_1 и U_2 обозначим сужения $U|C_1$ и $U|C_2$. Ввиду того, что $C_1, C_2 \in \mathcal{H}(U)$ и $C_1, C_2 \neq \widehat{U}$, имеем $U_1, U_2 \in \Pi^n$ и $|U_1|, |U_2| < |U|$. Кроме того, очевидно, что $C_1 = \widehat{U_1}$

и $C_2 = \widehat{U_2}$, поэтому в случае $P \subseteq C_1$ по предположению индукции справедливы включение $U_1|P \in \Pi^n$ и равенство $\widehat{U_1|P} = P$, а в случае $P \subseteq C_2$ — включение $U_2|P \in \Pi^n$ и равенство $\widehat{U_2|P} = P$. В первом случае утверждение теоремы следует из очевидного равенства $U|P = U_1|P$, во втором — из очевидного равенства $U|P = U_2|P$.

В случае $P_1 = P \cap C_1 \neq \varnothing$ и $P_2 = P \cap C_2 \neq \varnothing$ по предположению индукции справедливы включение $U_1|P_1, U_2|P_2 \in \Pi^n$ и равенства $\widehat{U_1|P_1} = P_1$, $\widehat{U_2|P_2} = P_2$. П-разбиения $U_1|P_1$ и $U_2|P_2$ соседние, поскольку соседними являются их главные гиперблоки P_1 и P_2, поэтому справедливость теоремы следует из очевидных равенств $U|P = U_1|P_1 \cup U_2|P_2$, $P = \widehat{U_1|P_1} \cup \widehat{U_2|P_2}$ и леммы 5. Теорема 1 доказана.

2. Порождаемые П-разбиениями классы формул

Нормализованной формулой называют формулу в базисе $\{\wedge, \vee, ^{-}\}$, в которой отрицания встречаются только над переменными. Для целей настоящей статьи удобно несколько изменить это определение.

Для произвольных целого $i \geqslant 1$ и $\delta \in \{0,1\}$ символ x_i^δ будем называть *литералом.* Пусть

$$\mathfrak{X} = \{x_i^\delta \mid i \in \{1,2,\dots\},\, \delta \in \{0,1\}\},$$
$$\mathfrak{X}_n = \{x_i^\delta \mid i \in \{1,2,\dots n\},\, \delta \in \{0,1\}\}, \quad n = 1,2,\dots.$$

Словом в алфавите $\mathcal{A}$ будем называть конечную последовательность элементов множества $\mathcal{A} = \{\vee, \wedge, (,)\} \cup \mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{A}$ обозначим множество всех слов в алфавите $\mathcal{A}$.

Нормализованной формулой (далее просто *формулой*) назовём любое слово, принадлежащее определяемому индуктивно языку (подмножеству) $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}$:

а) для любых $i \in \{1,2,3,\dots\}$, $\delta \in \{0,1\}$ литерал x_i^δ принадлежит $\mathfrak{N}$;

б) если слова H и T принадлежат $\mathfrak{N}$, то слова $(H \vee T)$ и $(H \wedge T)$ принадлежат $\mathfrak{N}$;

в) других слов в $\mathfrak{N}$ нет.

Через $\mathfrak{N}_n$ обозначим множество всех таких формул $F \in \mathfrak{N}$, что все входящие в них литералы принадлежат множеству $\mathfrak{X}_n$.

В рамках настоящей статьи равенство $F_1 = F_2$ для формул $F_1, F_2 \in \mathfrak{N}$ по определению означает, что эти формулы представляют собой одно и то же слово.

По определению *переменная x_i входит* в формулу $F \in \mathfrak{N}$, если в эту формулу входит литерал x_i^0 или x_i^1; *число вхождений переменной x_i*

в формулу F — число вхождений литералов x_i^0 и x_i^1 в эту формулу. *Сложностью* $\mathrm{L}(F)$ *формулы* $F \in \mathfrak{N}$, как обычно, называется число вхождений переменных в эту формулу.

Префиксом и *суффиксом* формулы $F = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m \in \mathfrak{N}$ называются соответственно любое начало $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и любой конец $\alpha_p\alpha_{p+1}\ldots\alpha_m$, $1 \leqslant p \leqslant m$, слова $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$. При этом префикс называется *несобственным*, если $k < m$; суффикс называется *несобственным*, если $1 < p$. Символы (и) алфавита $\mathcal{A}$, как обычно, называются соответственно *левой* и *правой* скобками.

Индукцией по сложности $\mathrm{L}(F)$ формулы $F \in \mathfrak{N}$ нетрудно доказать известное

Утверждение 1. *Для любой формулы $F \in \mathfrak{N}$ число входящих в неё левых скобок равно числу входящих в неё правых скобок. Для любого несобственного префикса этой формулы число входящих в него левых скобок больше числа входящих в него правых скобок. Для любого несобственного суффикса этой формулы число входящих в него левых скобок меньше числа входящих в него правых скобок.*

Следующее (также известное) утверждение является простым следствием утверждения 1.

Утверждение 2. *Любая формула $F \in \mathfrak{N}$ сложности $\mathrm{L}(F) \geqslant 2$ имеет единственное представление в виде $F = (H \bigcirc T)$; $H, T \in \mathfrak{N}$; $\bigcirc \in \{\vee, \wedge\}$.*

Будем говорить, что формула $F \in \mathfrak{N}$ *является дизъюнкцией* (*конъюнкцией*), если для некоторых $H, T \in \mathfrak{N}$ справедливо равенство $F = (H \vee T)$ (равенство $F = (H \wedge T)$).

Реализуемая формулой булева функция определяется, как обычно, с учётом того, что значение литерала x_i^δ является функцией переменной x_i, заданной равенством $x_i^\delta = x_i \oplus \delta \oplus 1$.

На множестве формул $\mathfrak{N}$ определим бинарное отношение, которое назовём П-*эквивалентностью* формул. С неформальной точки зрения две формулы П-эквивалентны, если и только если их можно преобразовать друг в друга посредством законов коммутативности и ассоциативности. Сформулируем точное определение этого отношения.

Сначала для произвольной формулы $F \in \mathfrak{N}$ сложности $\mathrm{L}(F) \geqslant 2$ определим понятия её элементарного коммутативного преобразования и её элементарных левого и правого ассоциативных преобразований.

В силу утверждения 2 существуют единственные такие $H, T \in \mathfrak{N}$ и $\bigcirc \in \{\vee, \wedge\}$, что $F = (H \bigcirc T)$. *Элементарным коммутативным преобразованием* формулы $F = (H \vee T)$ (формулы $F = (H \wedge T)$) будем называть формулу $(T \vee H)$ (формулу $(H \wedge T)$).

Если при этом $\mathrm{L}(H) \geqslant 2$ и для некоторых $H_1, H_2 \in \mathfrak{N}$ имеет место представление $H = (H_1 \vee H_2)$ (представление $H = (H_1 \wedge H_2)$), то *элементарным правым ассоциативным преобразованием* формулы $F = (H \vee T)$ (формулы $F = (H \wedge T)$) будем называть формулу $(H_1 \vee (H_2 \vee T))$ (формулу $(H_1 \wedge (H_2 \wedge T)))$, а формула $F = (H \wedge T)$ (формула $F = (H \vee T)$) по определению не имеет элементарного правого ассоциативного преобразования. Если $\mathrm{L}(H) = 1$, то по определению F не имеет элементарного правого ассоциативного преобразования.

Точно так же если $\mathrm{L}(T) \geqslant 2$ и для некоторых $T_1, T_2 \in \mathfrak{N}$ имеет место представление $T = (T_1 \vee T_2)$ (представление $T = (T_1 \wedge T_2)$), то *элементарным левым ассоциативным преобразованием* формулы $F = (H \vee T)$ (формулы $F = (H \wedge T)$) будем называть формулу $((H \vee T_1) \vee T_2)$ (формулу $((H \wedge T_1) \wedge T_2))$, а формула $F = (H \wedge T)$ (формула $F = (H \vee T)$) по определению не имеет элементарного правого ассоциативного преобразования. Если $\mathrm{L}(T) = 1$, то по определению F не имеет элементарного левого ассоциативного преобразования.

Формулу $G \in \mathfrak{N}$ назовём *элементарным преобразованием формулы* $F \in \mathfrak{N}$, если G является элементарным коммутативным или элементарным ассоциативным (левым или правым) преобразованием F.

Отношение П-эквивалентности на множестве формул $\mathfrak{N}$ определим индуктивно:

а) для любого литерала x_i^δ единственной П-эквивалентной ему формулой является он сам;

б) если формула H_1 П-эквивалентна формуле F_1 и формула H_2 П-эквивалентна формуле F_2, то, во-первых, для любого $\bigcirc \in \{\vee, \wedge\}$ формула $H = (H_1 \bigcirc H_2)$ П-эквивалентна формуле $F = (F_1 \bigcirc F_2)$, во-вторых, любая являющаяся элементарным преобразованием H формула G также П-эквивалентна F;

в) других пар П-эквивалентных формул нет.

Нетрудно понять, что П-эквивалентность действительно является отношением эквивалентности, а связанные отношением П-эквивалентности формулы имеют одинаковую сложность и реализуют равные функции.

Будем говорить, что класс формул $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{N}$ *замкнут относительно отношения* П-*эквивалентности*, если вместе с каждой формулой $F \in \mathfrak{K}$ классу $\mathfrak{K}$ принадлежат все П-эквивалентные F формулы.

Для произвольных $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \subseteq \mathfrak{N}$ классы формул $\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2$ и $\mathfrak{K}_1 \vee \mathfrak{K}_2$ определим следующими равенствами:

$$\mathfrak{K}_1 \wedge \mathfrak{K}_2 = \{(F_1 \wedge F_2) \mid F_1 \in \mathfrak{K}_1,\ F_2 \in \mathfrak{K}_2\},$$
$$\mathfrak{K}_1 \vee \mathfrak{K}_2 = \{(F_1 \vee F_2) \mid F_1 \in \mathfrak{K}_1,\ F_2 \in \mathfrak{K}_2\}.$$

Порождаемый П-разбиением $U \in \Pi^n$ класс формул $\mathfrak{N}(U)$ определим индуктивно.

а) При $|U| = 1$ класс формул $\mathfrak{N}(U)$ состоит из всех таких литералов x_i^δ, что единственный блок Q этого разбиения является (i, δ)-однородным множеством. Другими словами, для П-разбиения вида $U = \{Q\}$ по определению справедливо равенство

$$\mathfrak{N}(U) = \bigl\{x_i^\delta \mid Q \subseteq U_i^\delta,\ i \in \{1, \ldots, n\},\ \delta \in \{0, 1\}\bigr\}.$$

б) Пусть $m \geqslant 1$ и класс формул $\mathfrak{N}(U)$ определён для всех $U \in \Pi^n$ мощности $|U| \leqslant m$. Определим его для произвольного $U \in \Pi^n$ мощности $|U| = m + 1$.

Для любого гиперблока $C \in \mathcal{H}(U) \setminus \{\widehat{U}\}$ справедливы включение $U|C \in \Pi^n$ и неравенство $|U|C| < |U|$. Значит, для такого гиперблока класс $\mathfrak{N}(U|C)$ уже определён, поэтому для каждого горизонтального разреза $\{C_1, C_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$ главного гиперблока $\widehat{U}$ определён класс

$$\mathfrak{M}_\vee(U, \{C_1, C_2\}) = (\mathfrak{N}(U|C_1) \vee \mathfrak{N}(U|C_2)) \cup (\mathfrak{N}(U|C_2) \vee \mathfrak{N}(U|C_1)),$$

который назовём *классом формул, порождённым этим горизонтальным разрезом.* Точно так же для каждого вертикального разреза $\{C_1, C_2\} \in \mathrm{C_v}(\widehat{U}, U)$ главного гиперблока $\widehat{U}$ определён класс

$$\mathfrak{M}_\wedge(U, \{C_1, C_2\}) = (\mathfrak{N}(U|C_1) \wedge \mathfrak{N}(U|C_2)) \cup (\mathfrak{N}(U|C_2) \wedge \mathfrak{N}(U|C_1)),$$

который назовём *классом формул, порождённым этим вертикальным разрезом.*

Классы формул $\mathfrak{N}_\vee(U)$ и $\mathfrak{N}_\wedge(U)$ определим равенствами

$$\mathfrak{N}_\vee(U) = \bigcup_{\{C_1, C_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)} \mathfrak{M}_\vee(U, \{C_1, C_2\}),$$

$$\mathfrak{N}_\wedge(U) = \bigcup_{\{C_1, C_2\} \in \mathrm{C_v}(\widehat{U}, U)} \mathfrak{M}_\wedge(U, \{C_1, C_2\}).$$

Класс формул $\mathfrak{N}(U)$ определим равенством $\mathfrak{N}(U) = \mathfrak{N}_\vee(U) \cup \mathfrak{N}_\wedge(U)$.

Теорема 2. *Для любых двух горизонтально соседних* П*-разбиений* U *и* V *справедливо включение* $\mathfrak{N}(U) \vee \mathfrak{N}(V) \subseteq \mathfrak{N}(U \cup V)$.

Доказательство. Очевидно, что пара $\{\widehat{U}, \widehat{V}\}$ главных гиперблоков П-разбиений U и V является горизонтальным разрезом главного гиперблока $\widehat{U \cup V}$ П-разбиения $U \cup V$, индуцированным этим последним разбиением, т. е. $\{\widehat{U}, \widehat{V}\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U \cup V}, U \cup V)$. Кроме того, очевидно, что выполнены равенства $U = (U \cup V)|\widehat{U}$ и $V = (U \cup V)|\widehat{V}$. Значит, по определению класса формул $\mathfrak{N}(U \cup V)$ справедливо включение

$$\mathfrak{N}(U) \vee \mathfrak{N}(V) \subseteq \mathfrak{M}_\vee(U \cup V, \{\widehat{U}, \widehat{V}\}) \subseteq \mathfrak{N}(U \cup V).$$

Теорема 2 доказана.

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема 3. *Для любых двух вертикально соседних* П*-разбиений* U *и* V *справедливо включение* $\mathfrak{N}(U) \wedge \mathfrak{N}(V) \subseteq \mathfrak{N}(U \cup V)$.

Теорема 4. *Если для формулы* $F \in \mathfrak{N}_n$ *и* П*-разбиения* $U \in \Pi^n$ *выполнено* $F \in \mathfrak{N}(U)$, *то для главного гиперблока* $\widehat{U}$ *этого разбиения и реализуемой формулой* F *булевой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *справедливо включение* $\widehat{U} \subseteq f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$.

Доказательство проведём индукцией по мощности П-разбиения U. При $|U| = 1$ по определению класса $\mathfrak{N}(U)$ для некоторых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$ выполнены равенство $F = x_i^\delta$ и включение $\widehat{U} \subseteq \mathrm{X}_i^\delta$. В этом случае справедливость теоремы следует из очевидного равенства $\mathrm{X}_i^\delta = f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$.

Пусть $m \geqslant 1$ и теорема доказана для всех $U \in \Pi^n$ мощности $|U| \leqslant m$. Докажем её для произвольного $U \in \Pi^n$ мощности $|U| = m + 1$. По определению класса $\mathfrak{N}(U)$ возможны два случая: $F \in \mathfrak{N}_\vee(U)$ и $F \in \mathfrak{N}_\wedge(U)$.

Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично). По определению класса формул $\mathfrak{N}_\vee(U)$ существуют такой горизонтальный разрез $\{C_1, C_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$ гиперблока $\widehat{U}$ и такие две формулы $H \in \mathfrak{N}(U|C_1)$ и $T \in \mathfrak{N}(U|C_2)$, что $F = H \vee T$. Через U_1 и U_2 обозначим сужения $U|C_1$ и $U|C_2$. Из включения $F \in \mathfrak{N}_n$ следует, что $H, T \in \mathfrak{N}_n$. Так как $C_1, C_2 \in \mathcal{H}(U)$ и $C_1, C_2 \neq \widehat{U}$, имеем $U_1, U_2 \in \Pi^n$ и $|U_1|, |U_2| < |U|$. Значит, по предположению индукции для главных гиперблоков C_1 и C_2 П-разбиений U_1 и U_2 и реализуемых формулами H и T булевых функций $h(x_1, \ldots, x_n)$ и $t(x_1, \ldots, x_n)$ справедливы включения $C_1 \subseteq h^{-1}(0) \times h^{-1}(1)$ и $C_2 \subseteq t^{-1}(0) \times t^{-1}(1)$. Поскольку вертикальные стороны прямоугольников $\widehat{U}, C_1, C_2$ совпадают, а горизонтальная сторона $\widehat{U}$ равна объединению горизонтальных сторон C_1 и C_2, следствием этих включений является включение $\widehat{U} \subseteq (h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0)) \times (h^{-1}(1) \cup t^{-1}(1))$. Отсюда и из очевидных равенств $f = h \vee t$, $f^{-1}(0) = h^{-1}(0) \cap t^{-1}(0)$, $f^{-1}(1) = h^{-1}(1) \cup t^{-1}(1)$ следует включение $\widehat{U} \subseteq f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$, которое и требовалось доказать. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Для любого* П*-разбиения* $U \in \Pi$ *класс формул* $\mathfrak{N}(U)$ *замкнут относительно* П*-эквивалентности.*

Доказательство проведём индукцией по мощности П-разбиения U. При $|U| = 1$ класс $\mathfrak{N}(U)$ по определению состоит из однобуквенных формул. Он замкнут относительно П-эквивалентности, поскольку по определению для любой такой формулы единственной ей П-эквивалентной является она сама.

Пусть $m \geqslant 1$ и теорема доказана для всех $U \in \Pi$ мощности $|U| \leqslant m$. Докажем её для произвольного $U \in \Pi$ мощности $m+1$. Рассмотрим произвольную формулу $F \in \mathfrak{N}(U)$ и покажем, что для любой П-эквивалентной ей формулы G справедливо включение $G \in \mathfrak{N}(U)$. По определению класса формул $\mathfrak{N}(U)$ возможны два случая: $F \in \mathfrak{N}_\vee(U)$ и $F \in \mathfrak{N}_\wedge(U)$.

Рассмотрим первый случай (второй рассматривается аналогично). По определению класса формул $\mathfrak{N}_\vee(U)$ существуют такой горизонтальный разрез $\{C_1, C_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$ гиперблока $\widehat{U}$ и такие две формулы $F_1 \in \mathfrak{N}(U|C_1)$ и $F_2 \in \mathfrak{N}(U|C_2)$, что $F = F_1 \vee F_2$. По определению отношения П-эквивалентности и в силу утверждения 2 существуют такая П-эквивалентная F_1 формула P_1 и такая П-эквивалентная F_2 формула P_2, что формула G либо равна формуле $P = (P_1 \vee P_2)$, либо является её элементарным преобразованием. По предположению индукции классы формул $\mathfrak{N}(U|C_1)$ и $\mathfrak{N}(U|C_2)$ замкнуты относительно П-эквивалентности, поэтому $P_1 \in \mathfrak{N}(U|C_1)$ и $P_2 \in \mathfrak{N}(U|C_2)$. Значит, в случае $G = P$ и в случае, когда G является элементарным коммутативным преобразованием P, включение $G \in \mathfrak{N}(U)$ следует непосредственно из определения класса формул $\mathfrak{N}(U)$.

Рассмотрим случай, когда G является элементарным правым ассоциативным преобразованием формулы $P = (P_1 \vee P_2)$ (случай элементарного левого ассоциативного преобразования рассматривается аналогично). В этом случае по определению для некоторых $H_1, H_2 \in \mathfrak{N}$ выполнены равенства $P_1 = (H_1 \vee H_2)$ и $G = (H_1 \vee (H_2 \vee P_2))$. Чтобы доказать включение $G \in \mathfrak{N}(U)$, достаточно (по определению класса $\mathfrak{N}(U)$) указать такой горизонтальный разрез $\{A_1, A_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$ главного гиперблока $\widehat{U}$, что $H_1 \in \mathfrak{N}(U|A_1)$ и $(H_2 \vee P_2) \in \mathfrak{N}(U|A_2)$. Укажем его.

Положим $U_1 = U|C_1$. Из соотношений $P_1 \in \mathfrak{N}(U_1)$ и $P_1 = (H_1 \vee H_2)$ следует, что $P_1 \in \mathfrak{N}_\vee(U_1)$. Значит, существует такой горизонтальный разрез $\{D_1, D_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U_1}, U_1)$ главного гиперблока $\widehat{U_1} = C_1$ разбиения U_1, что $H_1 \in \mathfrak{N}(U_1|D_1)$ и $H_2 \in \mathfrak{N}(U_1|D_2)$. Очевидно, что прямоугольники D_1 и $D_2 \cup C_2$ являются горизонтально соседними гиперблоками П-разбиения U и $D_1 \cup (D_2 \cup C_2) = \widehat{U}$. Тем самым пара $\{D_1, D_2 \cup C_2\}$ является горизонтальным разрезом главного гиперблока $\widehat{U}$ и $\{D_1, D_2 \cup C_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$. Этот разрез и есть искомый разрез $\{A_1, A_2\}$. Действительно, включение $H_1 \in \mathfrak{N}(U|D_1)$ следует из того, что $H_1 \in \mathfrak{N}(U_1|D_1)$, и очевидного равенства $U|D_1 = U_1|D_1$. Для доказательства включения $(H_2 \vee P_2) \in \mathfrak{N}(U|(D_2 \cup C_2))$ достаточно заметить, что для П-разбиения $W = U|(D_2 \cup C_2)$ справедливы включения $\{D_2, C_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{W}, W)$, $H_2 \in \mathfrak{N}(W|D_2)$ и $P_2 \in \mathfrak{N}(W|C_2)$. Первое очевидно, а последние два являются следствием включений $H_2 \in \mathfrak{N}(U_1|D_2)$, $P_2 \in \mathfrak{N}(U|C_2)$ и очевидных равенств $W|D_2 = U_1|D_2$, $W|C_2 = U|C_2$. Теорема 5 доказана.

3. Изоморфизм П-разбиений

Два прямоугольных фрагмента П-разбиения U назовём *горизонтально* (*вертикально*) *соседними*, если соответствующие этим фрагментам гиперблоки горизонтально (вертикально) соседние. Прямоугольный фрагмент $S \in \mathcal{F}(U)$ назовём *горизонтальным* (*вертикальным*) *соединением прямоугольных фрагментов* $S_1, S_2 \in \mathcal{F}(U)$, если соответствующий фрагменту S гиперблок П-разбиения U является горизонтальным (вертикальным) соединением гиперблоков этого разбиения, соответствующих фрагментам S_1, S_2.

Пусть $U, T \in \Pi^n$, $|U| = |T|$ и μ — взаимно однозначное отображение П-разбиения U на П-разбиение T.

Будем говорить, что отображение μ *сохраняет однородность блоков*, если для любых $Q \in U$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$ из включения $Q \in U_i^\delta$ следует $\mu(Q) \in T_i^\delta$. Будем говорить, что отображение μ *сохраняет свойство подсемейств быть прямоугольными фрагментами*, если для любого $S \subseteq U$ и его образа $\mu(S)$ из включения $S \in \mathcal{F}(U)$ следует $\mu(S) \in \mathcal{F}(T)$. Будем говорить, что отображение μ *сохраняет соединяемость прямоугольных фрагментов*, если оно, во-первых, сохраняет свойство подсемейств быть прямоугольными фрагментами; во-вторых, для любых $S, S_1, S_2 \in \mathcal{F}(U)$ справедливо утверждение: если фрагмент S является горизонтальным (вертикальным) соединением фрагментов S_1 и S_2, то фрагмент $\mu(S)$ является горизонтальным (вертикальным) соединением фрагментов $\mu(S_1)$ и $\mu(S_2)$.

Полуизоморфизмом П-разбиения $U \in \Pi^n$ на П-разбиение $T \in \Pi^n$ назовём такое взаимно однозначное отображение $\mu\colon U \to T$, что μ сохраняет однородность блоков и соединяемость прямоугольных фрагментов. П-разбиение T назовём *полуизоморфным образом* П-разбиения $U \in \Pi^n$, если существует полуизоморфизм $\mu\colon U \to T$.

Изоморфизмом П-разбиения $U \in \Pi^n$ на П-разбиение $T \in \Pi^n$ назовём такой полуизоморфизм $\mu\colon U \to T$, что обратное отображение μ^{-1} является полуизоморфизмом T на U. Будем говорить, что П-разбиения $U, T \in \Pi^n$ *изоморфны*, если существует изоморфизм $\mu\colon U \to T$.

Сужение $U|P$ П-разбиения $U \in \Pi$ на прямоугольник $P \subseteq \widehat{U}$ назовём *строгим*, если для любого блока $Q \in U$ справедливо $Q \cap P \neq \varnothing$.

Пример полуизоморфизма даёт следующая лемма. Она очевидным образом следует непосредственно из определений.

Лемма 6. *Если сужение* $U|P$ П-*разбиения* $U \in \Pi$ *на прямоугольник* $P \subseteq \widehat{U}$ *строгое, то заданное равенством* $\mu(Q) = Q \cap P$ *отображение* $\mu\colon U \to U|P$ *является полуизоморфизмом.*

Теорема 6. *Для любого* П-*разбиения* $U \in \Pi$ *и любого его полуизоморфного образа* $T \in \Pi$ *справедливо включение* $\mathfrak{N}(U) \subseteq \mathfrak{N}(T)$.

Доказательство. Через $\mu\colon U \to T$ обозначим полуизоморфизм П-разбиения U на П-разбиение T. Доказательство проведём индукцией по мощности П-разбиения U.

При $|U| = 1$ класс $\mathfrak{N}(U)$ по определению состоит из всех таких однобуквенных формул x_i^δ, что единственный блок П-разбиения U является (i, δ)-однородным множеством. В силу равенства $|T| = |U|$ то же самое справедливо и для класса $\mathfrak{N}(T)$, поэтому включение $\mathfrak{N}(U) \subseteq \mathfrak{N}(T)$ следует из сохранения полуизоморфизмом μ однородности блоков.

Пусть $m \geqslant 1$ и теорема доказана для всех $U \in \Pi$ мощности $|U| \leqslant m$. Докажем её для произвольного $U \in \Pi$ мощности $|U| = m + 1$. Чтобы доказать включение $\mathfrak{N}(U) \subseteq \mathfrak{N}(T)$, достаточно доказать два включения: $\mathfrak{N}_\vee(U) \subseteq \mathfrak{N}_\vee(T)$ и $\mathfrak{N}_\wedge(U) \subseteq \mathfrak{N}_\wedge(T)$.

Докажем первое включение (второе доказывается аналогично). В силу определения классов формул $\mathfrak{N}_\vee(U)$ и $\mathfrak{N}_\vee(T)$ для этого достаточно установить такое инъективное отображение h множества $\mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$ в множество $\mathrm{C_h}(\widehat{T}, T)$, что для любого разреза $\{C_1, C_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$ и соответствующего ему разреза $\{D_1, D_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{T}, T)$ справедливо включение $\mathfrak{M}_\vee(U, \{C_1, C_2\}) \subseteq \mathfrak{M}_\vee(T, \{D_1, D_2\})$. Установим такое отображение.

Сначала, учитывая, что полуизоморфизм сохраняет свойство подсемейств быть прямоугольными фрагментами, расширим отображение $\mu\colon U \to T$ до отображения $\overline{\mu}\colon \mathcal{H}(U) \to \mathcal{H}(T)$ по следующему правилу: для любого гиперблока $C \in \mathcal{H}(U)$ его образ $\overline{\mu}(C)$ по определению есть гиперблок, соответствующий прямоугольному фрагменту разбиения T, являющемуся образом $\mu(H|C)$ прямоугольного фрагмента $H|C$ разбиения U.

Заметим, что, во-первых, отображение $\overline{\mu}$ инъективно. Это следует из инъективности μ. Во-вторых, $\overline{\mu}$ сохраняет горизонтальную соединяемость гиперблоков в том смысле, что для любых $C, C_1, C_2 \in \mathcal{H}(T)$ справедливо утверждение: если гиперблок C является горизонтальным соединением гиперблоков C_1 и C_2, то гиперблок $\overline{\mu}(C)$ разбиения T является горизонтальным соединением гиперблоков $\overline{\mu}(C_1)$ и $\overline{\mu}(C_2)$ этого разбиения. Это следует из сохранения полуизоморфизмом μ соединяемости прямоугольных фрагментов. В-третьих, очевидно справедливо равенство $\overline{\mu}(\widehat{U}) = \widehat{T}$. Из этих свойств $\overline{\mu}$ следует, что для любого разреза $\{C_1, C_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$ справедливо включение $\{\overline{\mu}(C_1), \overline{\mu}(C_2)\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{T}, T)$ и заданное равенством $\mu^{(h)}(\{C_1, C_2\}) = \{\overline{\mu}(C_1), \overline{\mu}(C_2)\}$ отображение $\mu^{(h)}$: $\mathrm{C_h}(\widehat{U}, U) \to \mathrm{C_h}(\widehat{T}, T)$ инъективно. Покажем, что $\mu^{(h)}$ и есть искомое отображение h.

Из определения отображения $\overline{\mu}(C)$ следует, что для любого гиперблока $C \in \mathcal{H}(U)$ сужение полуизоморфизма μ на прямоугольный фрагмент $U|C$ разбиения U является биекцией этого фрагмента на прямоугольный фрагмент $T|\overline{\mu}(C)$ разбиения T. Это сужение сохраняет однородность блоков, поскольку его сохраняет μ. Также оно сохраняет соединяемость прямоугольных фрагментов, поскольку его сохраняет μ, и по лемме 4 справедливо включение $\mathcal{F}(U|C) \subseteq \mathcal{F}(U)$. Таким образом, это сужение является полуизоморфизмом П-разбиения $U|C$ на П-разбиение $T|\overline{\mu}(C)$. Отсюда следует, что для любого разреза $\{C_1, C_2\} \in \mathrm{C_h}(\widehat{U}, U)$ в силу неравенств $|U|C_1| < |U|$ и $|U|C_2| < |U|$ по предположению индукции справедливы включения $\mathfrak{N}(U|C_1) \subseteq \mathfrak{N}(T|\overline{\mu}(C_1))$ и $\mathfrak{N}(U|C_2) \subseteq \mathfrak{N}(T|\overline{\mu}(C_2))$, а значит, и включение $\mathfrak{M}_\vee(U, \{C_1, C_2\}) \subseteq \mathfrak{M}_\vee(T, \{\overline{\mu}(C_1), \overline{\mu}(C_2)\})$. Последнее означает, что $\mu^{(h)}$ является искомым отображением h. Теорема 6 доказана.

Теорема 7 является очевидным следствием теоремы 6.

Теорема 7. *Для любых двух изоморфных* П-*разбиений* $U, T \in \Pi$ *справедливо равенство* $\mathfrak{N}(U) = \mathfrak{N}(T)$.

Теорема 8 является очевидным следствием теоремы 6 и леммы 6.

Теорема 8. *Если сужение* $U|P$ П-*разбиения* $U \in \Pi$ *на прямоугольник* $P \subseteq \widehat{U}$ *строгое, то справедливо включение* $\mathfrak{N}(U) \subseteq \mathfrak{N}(T)$.

4. Представления формул

Конечное множество, состоящее из подряд идущих целых положительных чисел, будем называть *интервалом.* Для произвольных целых $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$ и интервала $J = \{j, j+1, \ldots, j+m\}$ интервал $\langle i, J\rangle = \{(j-i), (j-i)+1, \ldots, (j-i)+m\}$ назовём *сдвигом интервала* J *на* i *позиций влево.* Длиной $|F|$ слова $F \in \mathfrak{A}$ (т. е. слова в алфавите $\mathcal{A} = \{\vee, \wedge, (,)\} \cup \mathfrak{X}$) назовём число букв в этом слове.

Для произвольного слова $F \in \mathfrak{A}$ и интервала I, $|I| = |F|$, пару (F, I) будем называть *репродуцированным словом.* Слово F при этом назовём *прототипом*, интервал I — *носителем*, наименьшее число из интервала I — *левым индексом*, наибольшее — *правым индексом* этого репродуцированного слова. Репродуцированное слово (F, I) с левым индексом i будем обозначать $F^{(i)}$.

Через $\mathfrak{A}^\infty$ обозначим множество всех репродуцированных слов. Если это не вызывает недоразумений, то репродуцированные слова будем называть просто *словами.*

Через $\widetilde{F}$ обозначим прототип, через $\underline{F}$ — носитель слова $F \in \mathfrak{A}^\infty$. Будем говорить, что слово $F \in \mathfrak{A}^\infty$ *является экземпляром слова* $A \in \mathfrak{A}$, если $\widetilde{F} = A$. По определению равенство $F = H$ для слов $F, H \in \mathfrak{A}^\infty$ означает, что $\widetilde{F} = \widetilde{H}$ и $\underline{F} = \underline{H}$. Заметим, что равенство $F = \widetilde{F}^{(i)}$ для слова $F \in \mathfrak{A}^\infty$ справедливо тогда и только тогда, когда число i равно левому индексу F.

Для произвольного слова $A = a_1a_2\dots a_k \in \mathfrak{A}$ и любого интервала $J = \{j, j{+}1, \dots, j{+}m\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ слово $A|J = a_j a_{j+1}\dots a_{j+m}$ назовём *сужением слова* A *на интервал* J.

Будем говорить, что слово $H \in \mathfrak{A}^\infty$ является *подсловом слова* $F = \widetilde{F}^{(i)} \in \mathfrak{A}^\infty$, если $\underline{H} \subseteq \underline{F}$ и $\widetilde{H} = \widetilde{F}|\langle i-1, \underline{H}\rangle$. Будем говорить, что слово $H \in \mathfrak{A}^\infty$ является *подсловом слова* $F \in \mathfrak{A}$, если H является подсловом слова $F^{(1)}$.

Слово $F \in \mathfrak{A}^\infty$ назовём *репродуцированной формулой*, если $\widetilde{F} \in \mathfrak{N}$. Через $\mathfrak{N}^\infty$ обозначим множество всех репродуцированных формул. Если это не вызывает недоразумений, то репродуцированные формулы будем называть просто *формулами.*

Будем говорить, что формула $F \in \mathfrak{N}^\infty$ *является дизъюнкцией* (*конъюнкцией*), если дизъюнкцией (конъюнкцией) является прототип $\widetilde{F}$ этой формулы.

Формулу $H \in \mathfrak{N}^\infty$ назовём *подформулой* формулы $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$, если H является подсловом F. Через $\mathrm{P}(F)$ обозначим множество всех подформул формулы $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$. Через $\mathfrak{N}^\infty_n$ обозначим множество формул

$$\mathfrak{N}^\infty_n = \{F \in \mathfrak{N}^\infty \mid \widetilde{F} \in \mathfrak{N}_n\}, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Сложность $\mathrm{L}(F)$ *формулы* $F \in \mathfrak{N}^\infty$ по определению равна сложности $\mathrm{L}(\widetilde{F})$ прототипа $\widetilde{F}$ этой формулы. Точно так же *реализуемая формулой* $F \in \mathfrak{N}^\infty$ *булева функция* по определению равна булевой функции, реализуемой прототипом $\widetilde{F}$ этой формулы.

Следующие три утверждение вытекают непосредственно из определений и из утверждений 1 и 2.

Утверждение 3. *Для любой подформулы* $K \in \mathrm{P}(F)$ *формулы* $F \in \mathfrak{N}^\infty$ *справедливо включение* $\mathrm{P}(K) \subseteq \mathrm{P}(F)$.

Утверждение 4. *Для любой формулы* $F \in \mathfrak{N}^\infty$ *справедливо включение* $F \in \mathrm{P}(F)$.

Утверждение 5. *Для любой формулы* $F \in \mathfrak{N}^\infty$ *сложности* $L(F) \geqslant 2$ *существует единственная её подформула* $L \in \mathrm{P}(F)$, *левый индекс которой на единицу превосходит левый индекс самой* F, *и существует единственная её подформула* $R \in \mathrm{P}(F)$, *правый индекс которой на единицу меньше правого индекса самой* F. *Для прототипов* $\widetilde{F}, \widetilde{L}, \widetilde{R}$ *этих формул справедливо равенство* $\widetilde{F} = (\widetilde{L} \vee \widetilde{R})$, *если* F *является дизъюнкцией, и равенство* $\widetilde{F} = (\widetilde{L} \wedge \widetilde{R})$, *если* F *является конъюнкцией.*

Главной подформулой формулы $F \in \mathfrak{N}^\infty$ будем называть саму формулу F. *Главной подформулой* формулы $F \in \mathfrak{N}$ назовём формулу $F^{(1)}$. *Левой подформулой* формулы $F \in \mathfrak{N}^\infty$ назовём её подформулу, левый индекс которой на единицу превосходит левый индекс F. *Правой подформулой* формулы $F \in \mathfrak{N}^\infty$ назовём её подформулу, правый индекс которой на единицу меньше правого индекса F. Формулу $F \in \mathfrak{N}^\infty$ назовём *соединением формул* $H, T \in \mathfrak{N}^\infty$, если одна из двух последних является левой, а другая — правой подформулой F. Если при этом F является дизъюнкцией (конъюнкцией), то будем называть её *дизъюнктивным* (*конъюнктивным*) *соединением формул* H и T. Формулы $H, T \in \mathfrak{N}^\infty$ назовём *соседними*, если существует соединяющая их формула $F \in \mathfrak{N}^\infty$.

Следующие утверждения являются простыми следствиями утверждений 1, 2 и 5.

Утверждение 6. *Для любой формулы $K \in \mathfrak{N}^\infty$ сложности $L(K) \geqslant 2$ множества подформул $\mathrm{P}(L)$ и $\mathrm{P}(R)$ её левой и правой подформул L и R и множество $\{K\}$ попарно не пересекаются и справедливо равенство $\mathrm{P}(K) = \mathrm{P}(L) \cup \mathrm{P}(R) \cup \{K\}$.*

Утверждение 7. *Для любой подформулы $H \in \mathrm{P}(F)$, $H \neq F$, формулы $F \in \mathfrak{N}^\infty$ существует единственная соседняя с ней подформула $T \in \mathrm{P}(F)$ и единственная соединяющая H и T подформула $K \in \mathrm{P}(F)$.*

Формулы $H, T \in \mathfrak{N}^\infty$ будем называть *дизъюнктивно* (*конъюнктивно*) *соседними подформулами формулы* $F \in \mathfrak{N}^\infty$, если H, T являются соседними подформулами этой формулы и единственная соединяющая их подформула $K \in \mathrm{P}(F)$ является дизъюнкцией (конъюнкцией).

Подформулу $H \in \mathrm{P}(F)$ формулы $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$ назовём *элементарной*, если прототип $\widetilde{H}$ этой подформулы является некоторой однобуквенной формулой. Через $\mathrm{p}(F)$ обозначим множество всех элементарных подформул формулы $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$, через $\mathrm{p}_i^\delta(F)$ — множество всех элементарных подформул этой формулы, являющихся экземплярами формулы x_i^δ.

Интерпретацией формулы $F \in \mathfrak{N}_n^\infty$ в виде Π*-разбиения* $U \in \Pi^n$ (или просто *интерпретацией формулы* F) будем называть такое отображение $A\colon \mathrm{P}(F) \to \mathcal{H}(U)$ множества подформул $\mathrm{P}(F)$ формулы F в множество гиперблоков $\mathcal{H}(U)$ разбиения U, которое удовлетворяет следующим трём *условиям интерпретации.*

1. Справедливо равенство $A(F) = \widehat{U}$.

2. При любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$ для любой элементарной подформулы $H \in \mathrm{p}_i^\delta(F)$ справедливо включение $A(H) \in U_i^\delta$.

3. Для любых трёх подформул $G, H, T \in \mathrm{P}(F)$ справедливо утверждение: если формула G является дизъюнктивным соединением формул H и T, то гиперблок $A(G)$ разбиения U является горизонтальным соединением гиперблоков $A(H)$ и $A(T)$ этого разбиения, а если формула G является конъюнктивным соединением формул H и T, то гиперблок $A(G)$ является вертикальным соединением гиперблоков $A(H)$ и $A(T)$.

Интерпретацией формулы $F \in \mathfrak{N}_n$ *в виде* П-*разбиения* $U \in \Pi^n$ будем называть интерпретацию её главной подформулы в виде U.

Будем говорить, что *формула* $F \in \mathfrak{N}_n \cup \mathfrak{N}_n^\infty$ *представима в виде* П-*разбиения* $U \in \Pi^n$, если существует интерпретация F в виде U. Само П-разбиение U будем называть при этом *представлением формулы* F. Будем говорить, что *формула* $F \in \mathfrak{N}_n \cup \mathfrak{N}_n^\infty$ *представима на прямоугольнике* $C \in \mathrm{REC}^n$, если существует такое П-разбиение U этого прямоугольника, что U является представлением F.

Следующая теорема вытекает непосредственно из определений.

Теорема 9. *При любой интерпретации формулы* $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$ *в виде* П-*разбиения* $U \in \Pi$ *любым двум дизъюнктивно соседним подформулам* F *соответствуют горизонтально соседние гиперблоки* U, *любым двум конъюнктивно соседним подформулам* F *соответствуют вертикально соседние гиперблоки* U.

Теорема 10. *Если отображение* $A\colon \mathrm{P}(F) \to \mathcal{H}(U)$ *является интерпретацией формулы* $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$ *в виде* П-*разбиения* $U \in \Pi$, *то сужение отображения* A *на множество подформул* $\mathrm{P}(K)$ *любой подформулы* $K \in \mathrm{P}(F)$ *является интерпретацией этой подформулы в виде* П-*разбиения* $U|A(K)$.

Доказательство проведём индукцией по сложности подформулы $K \in \mathrm{P}(F)$. Через A_K обозначим сужение отображения A на множество подформул $\mathrm{P}(K)$, через U_K — сужение П-разбиения U на гиперблоки $A(K)$ этого разбиения.

При $\mathrm{L}(K) = 1$ формула K является единственной своей подформулой и при этом элементарной. Последнее по второму условию интерпретации означает, что $A(K) \in U$. Следовательно, $A(K)$ является единственным блоком и единственным гиперблоком П-разбиения U_K, поэтому A_K является отображением множества $\mathrm{P}(K)$ в множество гиперблоков $\mathcal{H}(U_K)$ и очевидным образом удовлетворяет всем условиям интерпретации.

Пусть $m \geqslant 1$ и для любой подформулы $K \in \mathrm{P}(F)$ сложности $\mathrm{L}(K) \leqslant m$ теорема доказана. Докажем её для произвольной подформулы $K \in \mathrm{P}(F)$ сложности $\mathrm{L}(K) = m + 1$.

Рассмотрим случай, когда K является дизъюнкцией (случай конъюнкции рассматривается аналогично). Через L и R обозначим левую и правую подформулы K, через A_L и A_R — сужения отображения A на множества подформул $\mathrm{P}(L)$ и $\mathrm{P}(R)$, через U_L и U_R — сужения П-разбиения U на гиперблоки $A(L)$ и $A(R)$ этого разбиения. Из неравенств $\mathrm{L}(L) < \mathrm{L}(K)$ и $\mathrm{L}(R) < \mathrm{L}(K)$ следует, что по предположению индукции отображения A_L и A_R являются интерпретациями подформул L и R в виде П-разбиений U_L и U_R. Это, в частности, означает, что для любого $G \in \mathrm{P}(L)$ справедливо включение $A_L(G) \in \mathcal{H}(U_L)$ и для любого $G \in \mathrm{P}(R)$

справедливо включение $A_R(G) \in \mathcal{H}(U_R)$. По третьему условию интерпретации гиперблок $A(K)$ П-разбиения U является горизонтальным соединением гиперблоков $A(L)$ и $A(R)$ этого разбиения, поэтому U_L и U_R являются горизонтально соседними фрагментами П-разбиения U_K и, значит, справедливы включения $U_L, U_R \subseteq U_K$ и $\mathcal{H}(U_L), \mathcal{H}(U_R) \subseteq \mathcal{H}(U_K)$.

Из определения отображений A_K, A_L, A_R и утверждения 6 следует, что для любой подформулы $G \in \mathrm{P}(K)$ значение $A_K(G)$ удовлетворяет равенству

$$A_K(G) = \begin{cases} A(K) & \text{при } G = K, \\ A_L(G) & \text{при } G \in \mathrm{P}(L), \\ A_R(G) & \text{при } G \in \mathrm{P}(R). \end{cases}$$

Тем самым из равенства $A(K) = \widehat{U_K}$ и включения $\mathcal{H}(U_L), \mathcal{H}(U_R) \subseteq \mathcal{H}(U_K)$ следует, что сужение A_K является отображением множества $\mathrm{P}(K)$ в множество $\mathcal{H}(U_K)$.

Отображение A_K удовлетворяет первому условию интерпретации, поскольку справедливо равенство $A_K(K) = A(K) = \widehat{U_K}$.

Отображение A_K удовлетворяет второму условию интерпретации, так как в силу утверждения 6 для любой элементарной подформулы $H \in \mathrm{p}_i^\delta(K)$ выполнено одно из двух включений: $H \in \mathrm{p}_i^\delta(L)$ или $H \in \mathrm{p}_i^\delta(R)$. По второму условию интерпретации (которому удовлетворяют A_L и A_R) в первом случае прямоугольник $A_K(H) = A_L(H)$ является (i, δ)-однородным блоком П-разбиения U_L, во втором случае прямоугольник $A_K(H) = A_R(H)$ является (i, δ)-однородным блоком П-разбиения U_R. В силу включения $U_L, U_R \subseteq U_K$ в обоих случаях прямоугольник $A_K(H)$ является (i, δ)-однородным блоком П-разбиения U_K.

Покажем, что A_K удовлетворяет третьему условию интерпретации. Пусть для некоторых $G, H, T \in \mathrm{P}(K)$ формула G является дизъюнктивным соединением формул H и T. В силу утверждения 6 для G выполнено одно из трёх включений $G \in \mathrm{P}(L)$, $G \in \mathrm{P}(R)$ или $G \in \{K\}$.

В первом случае из утверждения 3 вытекает включение $H, T \in \mathrm{P}(L)$. Следовательно, гиперблок $A_K(G) = A_L(G)$ П-разбиения U_K является горизонтальным соединением гиперблоков $A_K(H) = A_L(H)$ и $A_K(T) = A_L(T)$ этого разбиения, поскольку третьему условию интерпретации удовлетворяет A_L.

Во втором случае из утверждения 3 вытекает включение $H, T \in \mathrm{P}(R)$. Следовательно, гиперблок $A_K(G) = A_R(G)$ П-разбиения U_K является горизонтальным соединением гиперблоков $A_K(H) = A_R(H)$ и $A_K(T) = A_R(T)$ этого разбиения, поскольку третьему условию интерпретации удовлетворяет A_R.

В третьем случае справедливо равенство $G = K$ и одна из формул H, T является формулой L, а другая — формулой R. Без ограничения общности считаем, что $H = L$, $T = R$. В этом случае гиперблок $A_K(G) = A(K)$ П-разбиения U_K является горизонтальным соединением гиперблоков $A_K(H) = A(L)$ и $A_K(T) = A(R)$ этого разбиения, поскольку третьему условию интерпретации удовлетворяет A.

Случай, когда G является конъюнктивным соединением формул H и T, рассматривается аналогично. Теорема 10 доказана.

Теоремы 11–13 являются простыми следствиями теоремы 10. Их доказательства однотипны и проводятся очевидной индукцией по сложности формулы $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$.

Теорема 11. *Любая интерпретация $A\colon \mathrm{P}(F) \to \mathcal{H}(U)$ формулы $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$ в виде* П*-разбиения $U \in \Pi$ является инъективным отображением $\mathrm{P}(F)$ в $\mathcal{H}(U)$.*

Теорема 12. *При любой интерпретации $A\colon \mathrm{P}(F) \to \mathcal{H}(U)$ формулы $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$ в виде* П*-разбиения $U \in \Pi$ для любых подформул $K \in \mathrm{P}(F)$ и $H \in \mathrm{P}(K)$ справедливо включение $A(H) \subseteq A(K)$.*

Теорема 13. *Сужение любой интерпретации $A\colon \mathrm{P}(F) \to \mathcal{H}(U)$ формулы $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$ в виде* П*-разбиения $U \in \Pi$ на множество элементарных подформул $\mathrm{p}(F)$ является взаимно однозначным отображением этого множества на U.*

Следующая теорема является очевидным следствием теоремы 13.

Теорема 14. *Если формула $F \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^\infty$ представима в виде* П*-разбиения $U \in \Pi$, то $\mathrm{L}(F) = |U|$.*

Теорема 15. *Если* П*-разбиение $U \in \Pi$ является представлением хотя бы одного экземпляра $F^{(l)} \in \mathfrak{N}^\infty$ формулы $F \in \mathfrak{N}$, то оно является представлением любого другого экземпляра $F^{(p)} \in \mathfrak{N}^\infty$ этой формулы.*

Доказательство. Через $A^l\colon \mathrm{P}(F^{(l)}) \to \mathcal{H}(U)$ обозначим какую-нибудь интерпретацию формулы $F^{(l)}$ в виде U. Используя A^l, построим интерпретацию A^p формулы $F^{(p)}$ в виде U.

Очевидно, что любая подформула формулы $F^{(p)}$ является некоторым экземпляром $K^{(j)}$ некоторой формулы $K \in \mathfrak{N}$, и при этом экземпляр $K^{(j+l-p)}$ той же формулы является подформулой формулы $F^{(l)}$. Очевидно также, что заданное правилом $\varphi_F^{p,l}(K^{(j)}) = K^{(j+l-p)}$ отображение $\varphi_F^{p,l}\colon \mathrm{P}(F^{(p)}) \to \mathrm{P}(F^{(l)})$ обладает следующими свойствами:

1) справедливо равенство $\varphi_F^{p,l}(F^{(p)}) = F^{(l)}$;

2) для любых i, δ и любой элементарной подформулы $H \in \mathrm{p}_i^\delta(F^{(p)})$ справедливо включение $\varphi_F^{p,l}(H) \in \mathrm{p}_i^\delta(F^{(l)})$;

3) для любых трёх подформул $G, H, T \in \mathrm{P}(F^{(p)})$ справедливо утверждение: если формула G является дизъюнктивным соединением формул H и T, то формула $\varphi_F^{p,l}(G)$ является дизъюнктивным соединением $\varphi_F^{p,l}(H)$ и $\varphi_F^{p,l}(T)$, а если G является конъюнктивным соединением формул H и T, то $\varphi_F^{p,l}(G)$ является конъюнктивным соединением $\varphi_F^{p,l}(H)$ и $\varphi_F^{p,l}(T)$.

Из этих свойств отображения $\varphi_F^{p,l}$ следует, что заданное равенством $A^p = \varphi_F^{p,l} \circ A^l$ отображение $A^p \colon \mathrm{P}(F^{(p)}) \to \mathcal{H}(U)$ удовлетворяет всем условиям интерпретации. Теорема 15 доказана.

Теорема 16. *Для того чтобы формула $F \in \mathfrak{N}^\infty$ была представима в виде* П*-разбиения $U \in \Pi$, необходимо и достаточно, чтобы для её прототипа $\widetilde{F}$ было выполнено включение $\widetilde{F} \in \mathfrak{N}(U)$.*

Доказательство. Необходимость докажем индукцией по сложности формулы F. Через $A \colon \mathrm{P}(F) \to \mathcal{H}(U)$ обозначим какую-нибудь интерпретацию F в виде U.

При $\mathrm{L}(F) = 1$ прототипом $\widetilde{F}$ формулы F является некоторая однобуквенная формула x_i^δ. Следовательно, по условию интерпретации 2 прямоугольник $A(F)$ является (i, δ)-однородным блоком U. Кроме того, в силу теоремы 14 он является единственным блоком U. Значит, по определению класса формул $\mathfrak{N}(U)$ справедливо включение $\widetilde{F} = x_i^\delta \in \mathfrak{N}(U)$.

Пусть $m \geqslant 1$ и необходимость доказана для любой формулы $F \in \mathfrak{N}^\infty$ сложности $\mathrm{L}(F) \leqslant m$. Докажем её для произвольной формулы $F \in \mathfrak{N}^\infty$ сложности $\mathrm{L}(F) = m + 1$.

Рассмотрим случай, когда F является дизъюнкцией (случай конъюнкции рассматривается аналогично). Через L и R обозначим левую и правую подформулы F, через A_L и A_R — сужения отображения A на множества подформул $\mathrm{P}(L)$ и $\mathrm{P}(R)$, через U_L и U_R — сужения П-разбиения U на гиперблоки $A(L)$ и $A(R)$ этого разбиения. По теореме 10 сужения A_L и A_R являются интерпретациями формул L и R в виде П-разбиений U_L и U_R. Следовательно, по предположению индукции $\widetilde{L} \in \mathfrak{N}(U_L)$ и $\widetilde{R} \in \mathfrak{N}(U_R)$. Кроме того, по условиям интерпретации 1 и 3 (которым удовлетворяет A) пара $\{A(L), A(R)\}$ гиперблоков П-разбиения U представляет собой индуцированный U горизонтальный разрез главного гиперблока $\widehat{U} = A(F)$ этого разбиения, т. е. $\{A(L), A(R)\} \in \mathrm{C}_h(\widehat{U}, U)$. Значит, по определению класса формул $\mathfrak{N}(U)$ справедливо включение $\mathfrak{N}(U_L) \vee \mathfrak{N}(U_R) \subseteq \mathfrak{N}(U)$, поэтому и в силу утверждения 5 справедливо включение $\widetilde{F} = (\widetilde{L} \vee \widetilde{R}) \in \mathfrak{N}(U)$. Необходимость доказана.

Достаточность докажем индукцией по мощности П-разбиения U. При $|U| = 1$ главный гиперблок $\widehat{U}$ разбиения U является единственным блоком и единственным гиперблоком этого разбиения. Значит, по определению класса формул $\mathfrak{N}(U)$ из включения $\widetilde{F} \in \mathfrak{N}(U)$ следует, что для некоторых i, δ справедливы равенство $\widetilde{F} = x_i^\delta$ и включение $\widehat{U} \in U_i^\delta$. Тем самым $|\mathrm{P}(F)| = 1$ и отображение $A\colon \mathrm{P}(F) \to \mathcal{H}(U)$, которое единственной подформуле $F \in \mathrm{P}(F)$ ставит в соответствие единственный гиперблок $\widehat{U} \in \mathcal{H}(U)$, удовлетворяет всем условиям интерпретации. Следовательно, формула F представима в виде П-разбиения U.

Пусть $m \geqslant 1$ и достаточность доказана для любого П-разбиения $U \in \Pi$ мощности $|U| \leqslant m$. Докажем её для произвольного П-разбиения $U \in \Pi$ мощности $|U| = m + 1$.

Рассмотрим случай, когда F является дизъюнкцией (случай конъюнкции рассматривается аналогично). Пусть L и R — левая и правая подформулы F. По утверждению 5 справедливо равенство $\widetilde{F} = (\widetilde{L} \vee \widetilde{R})$, поэтому по определению класса формул $\mathfrak{N}(U)$ из включения $\widetilde{F} \in \mathfrak{N}(U)$ следует, что существует горизонтальный разрез $\{C_{\widetilde{L}}, C_{\widetilde{R}}\} \in \mathrm{C}_h(\widehat{U}, U)$ главного гиперблока $\widehat{U}$, для которого справедливы включения $\widetilde{L} \in \mathfrak{N}(U|C_{\widetilde{L}})$ и $\widetilde{R} \in \mathfrak{N}(U|C_{\widetilde{R}})$. По предположению индукции формула L представима в виде П-разбиения $U_L = U|C_{\widetilde{L}}$ и формула R — в виде П-разбиения $U_R = U|C_{\widetilde{R}}$. Через $A_L\colon \mathrm{P}(L) \to \mathcal{H}(U_L)$ обозначим интерпретацию L в виде U_L, через $A_R\colon \mathrm{P}(R) \to \mathcal{H}(U_R)$ — интерпретацию R в виде U_R. Учитывая утверждение 6 и очевидное включение $\mathcal{H}(U_L), \mathcal{H}(U_R) \subseteq \mathcal{H}(U)$, определим отображение $A\colon \mathrm{P}(F) \to \mathcal{H}(U)$ по следующей формуле:

$$A(K) = \begin{cases} \widehat{U} & \text{при } K = F, \\ A_L(K) & \text{при } K \in \mathrm{P}(L), \\ A_R(K) & \text{при } K \in \mathrm{P}(R). \end{cases}$$

Отображение A удовлетворяет трём условиям интерпретации, поскольку этим условиям удовлетворяют A_L и A_R и главный гиперблок $A(F) = \widehat{U}$ П-разбиения U является горизонтальным соединением гиперблоков $A(L) = C_{\widetilde{L}}$ и $A(R) = C_{\widetilde{R}}$ этого разбиения. Следовательно, A является интерпретацией формулы F в виде П-разбиения U и, значит, F представима в виде U. Достаточность доказана. Теорема 16 доказана.

Следующая теорема является очевидным следствием теоремы 16.

Теорема 17. *Для того чтобы формула $F \in \mathfrak{N}$ была представима в виде* П*-разбиения $U \in \Pi$, необходимо и достаточно, чтобы $F \in \mathfrak{N}(U)$.*

Теоремы 18 и 19 являются следствиями теоремы 17 и теорем 2, 3.

Теорема 18. *Если* П*-разбиения $U, V \in \Pi$ горизонтально соседние и формула $F \in \mathfrak{N}$ представима в виде U, а формула $G \in \mathfrak{N}$ представима в виде V, то формула $(G \vee V)$ представима в виде $U \cup V$.*

Теорема 19. *Если* П*-разбиения* $U, V \in \Pi$ *вертикально соседние и формула* $F \in \mathfrak{N}$ *представима в виде* U, *а формула* $G \in \mathfrak{N}$ *представима в виде* V, *то формула* $(G \wedge V)$ *представима в виде* $U \cup V$.

Теорема 20. *Если формула* $F \in \mathfrak{N}_n \cup \mathfrak{N}_n^\infty$ *представима на прямоугольнике* $P \in \mathrm{REC}^n$, *то для реализуемой этой формулой булевой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *справедливо включение* $P \subseteq f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное П-разбиение U прямоугольника P, являющееся представлением формулы F. Из включения $P \in \mathrm{REC}^n$ следует $U \in \Pi^n$. В случае $F \in \mathfrak{N}_n$ по теореме 17 справедливо включение $F \in \mathfrak{N}(U)$, в случае $F \in \mathfrak{N}_n^\infty$ по теореме 16 справедливо включение $\widetilde{F} \in \mathfrak{N}(U)$. В обоих случаях по теореме 4 для главного гиперблока $\widehat{U} = P$ разбиения U и реализуемой формулой F булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо включение $P \subseteq f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$. Теорема 20 доказана.

Булеву функцию будем называть *тривиальной*, если она тождественно равна константе, и *нетривиальной* в противном случае. Для нетривиальной булевой функции f прямоугольник $f^{-1}(0) \times f^{-1}(1)$ будем называть *собственным прямоугольником* этой функции.

Теорема 21 является очевидным следствием теоремы 20.

Теорема 21. *Если формула* $F \in \mathfrak{N}_n$ *представима на собственном прямоугольнике нетривиальной булевой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *то она реализует эту функцию.*

Заметим, что не всякая реализующая нетривиальную булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ формула $F \in \mathfrak{N}_n$ представима на собственном прямоугольнике этой функции. Например, реализующая булеву функцию $f(x_1) = x_1$ формула $F = \left(x_1^1 \vee x_1^1\right)$ не имеет такого представления. Это следует из того, что в данном случае мощность собственного прямоугольника f равна 1, а представление F должно иметь 2 блока.

Формула $F \in \mathfrak{N}$ называется *минимальной*, если она имеет наименьшую сложность среди всех формул из $\mathfrak{N}$, реализующих ту же булеву функцию, что и F. *Сложностью* $\mathrm{L}(f)$ *булевой функции* f называется сложность реализующей её минимальной формулы $F \in \mathfrak{N}$.

Теорема 22. *Любая реализующая нетривиальную булеву функцию* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *минимальная формула* $F \in \mathfrak{N}$ *представима на собственном прямоугольнике этой функции.*

Доказательство. Заметим, что из минимальности F следует включение $F \in \mathfrak{N}_n$. Через P_f обозначим собственный прямоугольник функции f. Доказательство проведём индукцией по сложности этой функции.

При $\mathrm{L}(f) = 1$ минимальная формула F по определению однобуквенная, поэтому из включения $F \in \mathfrak{N}_n$ следует, что для некоторых $i \in \{1, \dots, n\}$, $\delta \in \{0, 1\}$ справедливо равенство $F = x_i^\delta$, а значит, и равенство $f^{-1}(0) \times f^{-1}(1) = \mathrm{X}_i^\delta$. Очевидно, что П-разбиение $U = \{\mathrm{X}_i^\delta\}$ прямоугольника P_f является представлением F.

Пусть $m \geqslant 1$ и теорема доказана для любой нетривиальной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ сложности $\mathrm{L}(f) \leqslant m$. Докажем её для произвольной функции $f(x_1, \dots, x_n) \neq \mathrm{const}$ сложности $\mathrm{L}(f) = m + 1$.

Рассмотрим случай $F = (H \vee T)$ (случай $F = (H \wedge T)$ рассматривается аналогично). Из того, что $F \in \mathfrak{N}_n$, следует, что $H, T \in \mathfrak{N}_n$. Через $h(x_1, \dots, x_n)$ и $t(x_1, \dots, x_n)$ обозначим реализуемые формулами H и T функции. Из минимальности F следует, что формулы H, T минимальные, $h \neq t$ и $h, t \neq \mathrm{const}$. Через P_h и P_t обозначим собственные прямоугольники функций h и t. По предположению индукции формулы H и T представимы на прямоугольниках P_h и P_t. Через U_h и U_t обозначим соответствующие представления.

Из равенства $f = h \vee t$ и неравенств $h \neq t$, $f, h, t \neq \mathrm{const}$ следует, что, во-первых, множества $P_1 = P_f \cap P_h$ и $P_2 = P_f \cap P_t$ непустые, т. е. являются прямоугольниками; во-вторых, вертикальные стороны $f^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$ и $f^{-1}(0) \cap t^{-1}(0)$ этих прямоугольников равны вертикальной стороне $f^{-1}(0)$ прямоугольника P_f; в-третьих, справедливы соотношения $P_f = P_1 \cup P_2$ и $P_f \neq P_1$, $P_f \neq P_2$. Отсюда следует, что множество $P_2' = P_f \backslash P_1$ непустое, т. е. также является прямоугольником; прямоугольники P_1 и P_2' горизонтально соседние, прямоугольник P_f является их горизонтальным соединением; и справедливы включения $P_1 \subseteq P_h$, $P_2' \subseteq P_t$. Тем самым сужения $U_1 = U_h | P_1$ и $U_2' = U_t | P_2'$ являются горизонтально соседними П-разбиениями, а их объединение $U_f = U_1 \cup U_2'$ является П-разбиением прямоугольника P_f.

Заметим, что сужения $U_1 = U_h | P_1$ и $U_2' = U_t | P_2'$ строгие. Действительно, в противном случае справедливо хотя бы одно из строгих неравенств $|U_1| < |U_h|$ или $|U_2'| < |U_t|$. Значит, в силу теоремы 14 справедливо и строгое неравенство

$$|U_f| = |U_1| + |U_2'| < |U_h| + |U_t| = \mathrm{L}(H) + \mathrm{L}(T) = \mathrm{L}(F),$$

откуда по теоремам 14 и 17 следует, что для любой формулы $G \in \mathfrak{N}(U_f)$ справедливо неравенство $\mathrm{L}(G) < \mathrm{L}(F)$, но поскольку по теореме 21 формула G реализует функцию f, это противоречит минимальности F.

По теореме 8 из строгости сужений $U_1 = U_h | P_1$ и $U_2' = U_t | P_2'$ вытекают включения $\mathfrak{N}(U_h) \subseteq \mathfrak{N}(U_1)$ и $\mathfrak{N}(U_t) \subseteq \mathfrak{N}(U_2')$, из которых по теореме 17 следуют включения $H \in \mathfrak{N}(U_1)$ и $T \in \mathfrak{N}(U_2')$. Значит, по теореме 17 формулы H и T представимы в виде П-разбиений U_1 и U_2' соответственно, поэтому в силу теоремы 18 формула $F = (H \vee T)$ представима в виде

П-разбиения $U_f = U_1 \cup U_2'$. Следовательно, она представима на прямоугольнике P_f. Теорема 22 доказана.

Минимальным П-*разбиением прямоугольника* $P \in \mathrm{REC}^n$ назовём любое П-разбиение этого прямоугольника, которое имеет наименьшую мощность среди всех П-разбиений P.

Теорема 23. *Сложность нетривиальной булевой функции равняется мощности минимального* П-*разбиения её собственного прямоугольника.*

Доказательство. Поскольку сложность (формульная) булевой функции не меняется при переименовании (без отождествления) переменных, достаточно доказать теорему для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Рассмотрим произвольное П-разбиение U собственного прямоугольника P_f этой функции и произвольную формулу $F \in \mathfrak{N}(U)$. Из включения $U \in \Pi^n$ и определения класса $\mathfrak{N}(U)$ следует включение $F \in \mathfrak{N}_n$. По теореме 17 формула F представима в виде U и, значит, представима на прямоугольнике P_f. По теореме 21 она реализует функцию f. Следовательно, по теореме 14 и определению $\mathrm{L}(f)$ имеем $|U| = \mathrm{L}(F) \geqslant \mathrm{L}(f)$. Поскольку U выбрано произвольно, неравенство $|U| \geqslant \mathrm{L}(f)$ справедливо для любого П-разбиения U собственного прямоугольника функции f.

Если в качестве U выбрано представление какой-нибудь реализующей f минимальной формулы F (по теореме 22 среди П-разбиений P_f такие представления существуют), то по теореме 14 и определению $\mathrm{L}(f)$ имеем $|U| = \mathrm{L}(F) = \mathrm{L}(f)$. Значит, U является минимальным П-разбиением собственного прямоугольника булевой функции f и справедливо равенство $|U| = \mathrm{L}(f)$. Теорема 23 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Храпченко В. М.** О сложности реализации линейной функции в классе П-схем // Мат. заметки. 1971. Т. 9, № 1. С. 35–40.
2. **Яблонский С. В.** Реализация линейной функции в классе П-схем // Докл. АН СССР. 1954. Т. 94, № 5. С. 805–806.
3. **Рычков К. Л.** О нижних оценках сложности параллельно-последовательных контактных схем, реализующих линейные булевы функции // Сиб. журн. исслед. операций. 1994. Т. 1, № 4. С. 33–52.
4. **Черухин Д. Ю.** К вопросу о логическом представлении счётчика чётности // Неформальная наука. 2009. № 2. С. 14–23.
5. **Рычков К. Л.** О нижних оценках формульной сложности линейной булевой функции // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 165–184.
6. **Рычков К. Л.** О сложности реализации линейной булевой функции в классе π-схем // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 25, № 3. С. 36–94.

7. **Рычков К. Л.** О минимальных π-схемах для линейных булевых функций // Методы дискретного анализа в синтезе схем булевых функций. Вып. 51. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1991. С. 84–104.
8. **Рычков К. Л.** Достаточные условия локальной бесповторности минимальных π-схем, реализующих линейные булевы функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 5. С. 71–85.
9. **Рычков К. Л.** О совершенности минимальных правильных разбиений множества рёбер n-мерного куба // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26, № 4. С. 74–107.
10. **Храпченко В. М.** Об одном методе получения нижних оценок сложности П-схем // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 1. С. 83–92.
11. **Субботовская Б. А.** О реализации линейных функций формулами в базисе $\vee$, $\wedge$, $^-$ // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136, № 3. С. 553–555.
12. **Храпченко В. М.** Упрощённое доказательство одной нижней оценки сложности // Дискрет. математика. 2013. Т. 25, № 2. С. 82–84.
13. **Августинович С. В., Васильев Ю. Л., Рычков К. Л.** Формульная сложность тернарной линейной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 3. С. 3–12.
14. **Васильев Ю. Л., Рычков К. Л.** Нижняя оценка формульной сложности тернарной линейной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 4. С. 15–26.
15. **Сергеев И. С.** Формульная сложность линейной функции в k-арном базисе // Мат. заметки. 2021. Т. 109, № 3. С. 419–435.
16. **Razborov A.** Applications of matrix methods to the theory of lower bounds in computational complexity // Combinatorica. 1990. V. 10, No. 1. P. 81–93.
17. **Karchmer M., Wigderson A.** Monotone circuits for connectivity require super-logarithmics depth // SIAM J. Discrete Math. 1990. V. 3, No. 2. P. 255–265.
18. **Håstad J.** The shrinkage exponent is 2 // SIAM J. Comput. 1998. V. 27. P. 48–64.

Рычков Константин Леонидович

Статья поступила
26 августа 2022 г.
После доработки —
26 августа 2022 г.
Принята к публикации
31 августа 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2022. Vol. 29, No. 4. P. 77–103

UDC 519.714 DOI 10.33048/daio.2022.29.751

REPRESENTATIONS OF NORMALIZED FORMULAS

K. L. Rychkov

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: rychkov@math.nsc.ru

Abstract. A class of objects called Π-partitions is defined. These objects, in a certain well-defined sense, are the equivalents of formulas in a basis consisting of disjunction, conjunction and negation, in which negations are possible only over variables (normalized formulas). Π-partitions are seen as representations of formulas, just as equivalents and graphical representations of the same formulas can be considered Π-schemes. Some theory of such representations has been developed which is essentially a mathematical apparatus focused on describing a class of minimal normalized formulas implementing linear Boolean functions. Bibliogr. 18.

Keywords: Boolean function, normalized formula, minimal formula, representation of a formula, Π-scheme, Π-partition, lower bound for the complexity.

REFERENCES

1. **V. M. Khrapchenko,** Complexity of the realization of a linear function in the class of Π-circuits, *Mat. Zametki* **9** (1), 35–40 (1971) [Russian] [*Math. Notes Acad. Sci. USSR* **9** (1), 21–23 (1971)].
2. **S. V. Yablonskii,** Realization of a linear function in the class of π-circuits, *Dokl. Akad. Nauk SSSR, Nov. Ser.* **94** (5), 805–806 (1954).
3. **K. L. Rychkov,** Lower bounds on the complexity of parallel-sequential switching circuits that realize linear Boolean functions, *Sib. Zh. Issled. Oper.* **1** (4), 33–52 (1994) [Russian] [*Discrete Analysis and Operation Research* (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996), pp. 217–234 (Math. Its Appl., Vol. 355)].
4. **D. Yu. Cherukhin,** To the question of a logical representation for the parity counter, *Neform. Nauka,* No. 2, 14–23 (2009).

This research is carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF–2022–0017).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **16** (4) (2022).

5. **K. L. Rychkov,** Lower bounds on the formula complexity of a linear Boolean function, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **11**, 165–184 (2014).
6. **K. L. Rychkov,** Complexity of the realization of a linear boolean function in the class of π-schemes, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **25** (3), 36–94 (2018) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **12** (3), 540–576 (2018)].
7. **K. L. Rychkov,** On minimal π-schemes for linear Boolean functions, *Methods of Discrete Analysis in Synthesis of Schemes for Boolean Functions,* Vol. 51 (Izd. Inst. Mat., Novosibirsk, 1991), pp. 84–104 [Russian] [*Sib. Adv. Math.* **3** (3), 172–185 (1993)].
8. **K. L. Rychkov,** Sufficient conditions for the minimal π-schemes for linear Boolean functions to be locally non-repeating, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (5), 71–85 (2015) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **9** (4), 580–587 (2015)].
9. **K. L. Rychkov,** On the perfectness of minimal regular partitions of the edge set of the n-dimensional cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **26** (4), 74–107 (2019) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **13** (4), 717–739 (2019)].
10. **V. M. Khrapchenko,** A method of determining lower bounds for the complexity of Π-schemes, *Mat. Zametki* **10** (1), 83–92 (1971) [Russian] [*Math. Notes Acad. Sci. USSR* **10** (1), 474–479 (1971)].
11. **B. A. Subbotovskaya,** Realization of linear functions by formulas using $\vee$, $\wedge$, $^-$, *Dokl. Akad. Nauk* **136** (3), 553–555 (1961).
12. **V. M. Khrapchenko,** A simplified proof of a lower complexity estimate, *Discrete Math.* **25** (2), 82–84 (2013) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **23** (2), 171–174 (2013)].
13. **S. V. Avgustinovich, Yu. L. Vasil'ev,** and **K. L. Rychkov,** The computation complexity in the class of formulas, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **19** (3), 3–12 (2012) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (4), 403–409 (2012)].
14. **Yu. L. Vasil'ev** and **K. L. Rychkov,** A lower bound on formula size of a ternary linear function, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **20** (4), 15–26 (2013) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **7** (4), 490–499 (2013)].
15. **I. S. Sergeev,** Formula complexity of a linear function in a k-ary basis, *Mat. Zametki* **109** (3), 419–435 (2021) [Russian] [*Math. Notes* **109** (3), 445–458 (2021)].
16. **A. Razborov,** Applications of matrix methods to the theory of lower bounds in computational complexity, *Combinatorica* **10** (1), 81–93 (1990).
17. **M. Karchmer** and **A. Wigderson,** Monotone circuits for connectivity require super-logarithmic depth, *SIAM J. Discrete Math.* **3** (2), 255–265 (1990).
18. **J. Håstad,** The shrinkage exponent is 2, *SIAM J. Comput.* **27** (1), 48–64 (1998).

Konstantin L. Rychkov

Received August 26, 2022
Revised August 26, 2022
Accepted August 31, 2022