ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 85–109

УДК 519.178 DOI 10.33048/daio.2023.30.752

НОВЫЕ СЛУЧАИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ ДЛЯ ГРАФОВ С ЗАПРЕЩЁННЫМИ ТРИОДАМИ

С. В. Сорочан

Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mail: `sergey.sorochan@itmm.unn.ru`

Аннотация. Триод — это дерево с тремя листьями и единственной вершиной степени 3. Задача о независимом множестве разрешима за полиномиальное время для графов, не содержащих в качестве подграфа триод с любым фиксированным числом вершин. Если же запрещается порождённый триод с k вершинами, то при $k > 5$ сложность решения этой задачи неизвестна. В статье рассматриваются промежуточные случаи, когда запрещаются порождённый триод с любым фиксированным числом вершин и некоторые его надграфы. Для произвольного триода с фиксированным числом вершин доказана разрешимость задачи о независимом множестве за полиномиальное время в следующих случаях:

1) запрещаются триод и все его остовные надграфы с ограниченными степенями вершин;

2) запрещаются триод и все его остовные надграфы с большим дефицитом (числом рёбер в дополнительном графе);

3) запрещаются триод и все его надграфы, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить этот триод, а в самом графе есть вершина с ограниченной антистепенью.

Библиогр. 20.

Ключевые слова: независимое множество, НМ-простой класс, НМ-сложный класс, монотонный класс, наследственный класс, запрещённый подграф, триод, надграф, полиномиальный алгоритм.

Введение

Под *классом графов* понимается множество графов, замкнутое относительно переименования вершин. Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин, и *монотонным*, если он замкнут относительно удаления вершин и рёбер. Отметим,

что в работе [1] монотонные классы были названы по-другому, а именно, *сильно наследственными.* Чтобы чётче различать понятия «наследственный класс» и «сильно наследственный класс», в отношении последнего в этой статье всегда будем использовать термин «монотонный класс», так же, как это сделано в работе [2].

Любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством *запрещённых подграфов* $\mathcal{M}$: $\mathcal{X}$ состоит из всех графов, не содержащих порождённых подграфов, изоморфных графам из $\mathcal{M}$. В этом случае пишут $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{M})$, а графы из $\mathcal{X}$ называют $\mathcal{M}$*-свободными.* Если $\mathcal{M}$ конечное, класс $\mathrm{Free}(\mathcal{M})$ называется *конечно определённым.* Всякий монотонный класс наследственный, поэтому может быть задан множеством запрещённых (порождённых) подграфов. При этом множество запрещённых подграфов для монотонного класса имеет очевидную особенность: вместе со всяким содержащимся в нём графом оно содержит также все графы, получающиеся из него добавлением рёбер.

Независимое множество в графе — это множество не смежных между собой вершин. *Задача о независимом множестве* состоит в том, чтобы в заданном графе найти независимое множество наибольшей мощности. Размер *наибольшего независимого множества* (ННМ) графа G называется его *числом независимости* и обозначается через $\alpha(G)$. Задача о независимом множестве NP-трудна в множестве всех графов и остаётся такой для многих классов графов, такие классы называем НМ-*сложными.* Известно также немало классов графов, для которых она может быть решена за полиномиальное время, их называем НМ-*простыми.* Есть результаты и общего характера, относящиеся не к отдельным классам, а к семействам классов. Так, в [1] установлено, что конечно определённый монотонный класс $\mathcal{X}$ будет НМ-сложным, если $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, и НМ-простым в противном случае. Здесь $\mathcal{T}$ — класс всех графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем тремя листьями. Такое дерево называется *триодом.* Обозначенную дихотомию пока не удалось распространить на наследственные классы. В работе [3] доказано, что любой конечно определённый наследственный класс, включающий класс $\mathcal{T}$, НМ-сложный. Движение во встречном направлении связано с разработкой полиномиальных алгоритмов для классов, определяемых запрещёнными подграфами из $\mathcal{T}$. Если говорить о классах, определяемых одним запрещённым подграфом из $\mathcal{T}$, то наибольшие продвижения здесь состоят в установлении НМ-простоты классов

- $\mathrm{Free}(mK_2)$ при любом m [4],
- $\mathrm{Free}(T_{1,1,2})$, где $T_{1,1,2}$ — триод на пяти вершинах, т. е. граф, получаемый из графа $K_{1,3}$ подразбиением одного ребра [5],
- $\mathrm{Free}(K_2 + K_{1,3})$, где $K_2 + K_{1,3}$ — это дизъюнктное объединение графов K_2 и $K_{1,3}$ [6],

- $\mathrm{Free}(P_5)$ [7],
- $\mathrm{Free}(P_6)$ [8].

Кроме того, имеется ряд результатов о НМ-простоте некоторых подклассов классов, определяемых запрещёнными подграфами из $\mathcal{T}$ (см., например, [9–13]). Также можно отметить работы [14, 15], содержащие довольно много идей, которые используются в [10].

Заметим, что в отличие от монотонных классов для конечно определённых наследственных классов графов имеется значительный разрыв в наших знаниях о НМ-простых и НМ-сложных классах. По-видимому, трудно рассчитывать на ликвидацию этого разрыва в близком будущем, и имеет смысл испытать другие подходы к проблеме разделения НМ-простых и НМ-сложных классов. Одним из направлений может быть рассмотрение семейств классов графов, промежуточных между семействами монотонных и наследственных классов. Для этих промежуточных семейств можно надеяться получить результаты дихотомического характера типа упомянутого выше, либо хотя бы приблизиться к этому.

Первая попытка получения новых результатов в данном направлении была предпринята в работе [2]. Если наследственный класс определяется одним запрещённым подграфом G, то множество запрещённых подграфов, состоящее из всех остовных надграфов графа G, определяет монотонный класс. Если ограничить добавление рёбер какими-либо правилами, то получится класс, заключённый между этими двумя. Вводя ограничения на множество добавляемых рёбер, получаем возможность определять семейства классов графов, промежуточные между семействами монотонных и наследственных классов. В [2] было рассмотрено три типа ограничений на добавление рёбер к графу P_k (путь с k вершинами) и доказана НМ-простота следующих наследственных классов:

- множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов пути P_k, у которых минимальная степень вершины меньше $\frac{k}{2}$;
- множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов пути P_k, у которых дополнительный граф имеет меньше $\frac{k}{2}$ рёбер;
- множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов пути P_k, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить P_k.

Эта статья продолжает исследования, начатые в [2]. Так как всякий простой путь содержится в качестве порождённого подграфа в некотором триоде, следующим естественным шагом в заданном направлении является рассмотрение указанных выше типов ограничений по отношению к триодам.

Пусть натуральные числа i, j, k связаны неравенствами $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$. Через $T_{i,j,k}$ обозначим триод, у которого из единственной вершины степени 3 выходят простые цепи длины i, j, k соответственно. Обозначим через

s сумму длин этих трёх цепей: $s = i + j + k$. У триода $T_{i,j,k}$, очевидно, $s + 1$ вершин и s рёбер, где $s \geqslant 4$ при $k \geqslant 2$.

В продолжение результатов работы [2] в этой статье мы рассмотрим три типа ограничений на добавление рёбер к триоду $T_{i,j,k}$. Эти ограничения задают следующие классы, промежуточные между монотонными и наследственными:

- множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых минимальная степень вершины меньше $\frac{s+i+1}{2}$;
- множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых дополнительный граф имеет меньше чем $\frac{s}{2} - 1$ рёбер;
- множество запрещённых подграфов состоит из всех надграфов триода $T_{i,j,k}$, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить $T_{i,j,k}$.

Для первых двух классов и некоторого нетривиального подкласса третьего класса будет доказана их НМ-простота. Мы представим полиномиальные алгоритмы решения задачи о ННМ в этих классах и приведём верхние оценки сложности решающих алгоритмов.

В статье применяются следующие обозначения:

$\langle G \rangle$ — множество всех остовных надграфов графа G, т. е. надграфов, получающихся из G добавлением рёбер;

$N(a)$ — множество вершин рассматриваемого графа, смежных с вершиной a (*окрестность* вершины a);

если X — подмножество множества вершин графа G, то

$G[X]$ — подграф графа G, порождённый множеством X;

$G - X$ — подграф, полученный удалением из графа G всех вершин множества X;

$N(X)$ — множество всех вершин графа, смежных с вершинами из множества X (*окрестность* множества X);

$\deg_X(a)$ — число вершин в X, смежных с a (*степень* вершины a в X).

1. Запрещаются триод $T_{i,j,k}$ и все его остовные надграфы

Этот раздел предварительный. Здесь при любых фиксированных значениях $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ рассмотрим класс $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k} \rangle)$ всех графов, не содержащих триода $T_{i,j,k}$ (и всех его остовных надграфов). Кроме того, при каждом фиксированном $k \geqslant 3$ рассмотрим класс $\mathcal{L}_k = \mathrm{Free}(\langle \{C_q \mid q \geqslant k\} \rangle)$ всех графов, не содержащих циклов длины не меньше k (и всех их остовных надграфов).

НМ-простота классов $\mathcal{L}_k$ и $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k} \rangle)$ при всех $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ (так же, как и некоторых других классов графов) установлена в [1]. Однако полиномиальные алгоритмы для нахождения ННМ в графах из этих классов

в явном виде в [1] представлены не были, как и не были даны в явном виде оценки их трудоёмкости. Здесь мы приведём доказательство НМ-простоты именно для этих классов с установлением полиномиальных оценок трудоёмкости решающих алгоритмов. При выводе оценок используются приводимые ниже три леммы, доказанные в [1], и одно утверждение, доказанное в [2].

Лемма 1 [1, лемма 1]**.** *В каждом двусвязном графе из класса* $\mathcal{L}_{k+1}$ *любые два простых цикла длины* k *имеют общую вершину.*

Лемма 2 [1, лемма 2]**.** *В любом связном графе из класса* $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$ *любой простой цикл длины, не меньшей чем* $2k+1$*, и всякая простая цепь длины* $2k-2$ *имеют общую вершину.*

Лемма 3 [1, лемма 4]**.** *Если* $\mathcal{X}$ — НМ-*простой наследственный класс, то класс всех графов, у каждого из которых каждый блок* (*т. е. компонента двусвязности*) *принадлежит* $\mathcal{X}$*, также является* НМ-*простым наследственным классом.*

Лемма 4 [2, лемма 1]**.** *Задача о независимом множестве для графов с* n *вершинами из класса* $\mathrm{Free}(\langle P_k\rangle)$ *решается за время* $O(n^{k-1})$ *при любом фиксированном* $k \geqslant 2$.

Сначала установим оценку сложности алгоритма для решения задачи о ННМ в графах из класса $\mathcal{L}_k$ при каждом фиксированном $k \geqslant 3$. Хотя $\mathcal{L}_k$ и не является конечно определённым классом, оценка сложности решения задачи о ННМ в этом классе играет важную роль для установления сложности решающего алгоритма в классе $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$.

Теорема 1. *Задача о независимом множестве для графов с* n *вершинами из класса* $\mathcal{L}_k$ *решается за время* $O(n^k)$ *при любом фиксированном* $k \geqslant 3$.

Доказательство. Обозначим через $f_k(n)$ сложность решения задачи о независимом множестве для графов с n вершинами из класса $\mathcal{L}_k$. Для установления верхней оценки величины $f_k(n)$ реализуем идею, предложенную в [1] для доказательства леммы 3.

При $k = 3$ класс $\mathcal{L}_3$ является классом всех лесов (ациклических графов), для этого класса известно, что $f_3(n) = O(n)$. Индукцией по k докажем, что $f_k(n) \leqslant 2^{k^2} n^k$ при любом фиксированном $k \geqslant 3$.

Допустим, что $k \geqslant 3$ и имеется алгоритм $\mathbf{A}_k$, находящий наибольшее независимое множество в графах из класса $\mathcal{L}_k$ за время, не превосходящее $f_k(n)$. Пусть $G = (V, E)$ — граф с n вершинами из класса $\mathcal{L}_{k+1}$.

За время, не превосходящее cn^2 (например, используя поиск в глубину), в графе G можно найти все компоненты связности, все блоки (максимальные по включению двусвязные подграфы) и все точки сочленения

(шарниры). Здесь c — некоторая положительная константа. Наибольшее независимое множество графа есть объединение наибольших независимых множеств его компонент связности. Значит, не ограничивая общности, можно считать, что входной граф G связен. Если G не двусвязный, то пусть B — блок графа G, имеющий единственную точку сочленения a. В противном случае считаем, что B — это сам граф G (в таком случае в нём нет точек сочленения). За время, не превосходящее n^k, в блоке B можно найти простой цикл длины k или убедиться, что такого цикла нет. В последнем случае к блоку B применим алгоритм $\mathbf{A}_k$.

Пусть C — цикл длины k в блоке B, $V(C)$ — множество вершин этого цикла. Из леммы 1 следует, что если из блока B удалить все вершины цикла C, то на оставшемся множестве его вершин, т. е. в подграфе $G[V(B) \setminus V(C)]$, больше не будет других циклов длины k. Это значит, что подграф $G[V(B) \setminus V(C)]$ принадлежит классу $\mathcal{L}_k$. Тем самым ННМ в блоке B можно найти следующим образом: перебираем все независимые множества в графе $G[V(C)]$, для каждого такого множества U с помощью алгоритма $\mathbf{A}_k$ находим ННМ в графе $B - (V(C) \cup N(U))$ и объединяем его с U. Наибольшее из полученных множеств будет ННМ блока B. Точно так же можно найти ННМ в графе $B - a$, поскольку он является подграфом блока B. Всего для нахождения ННМ в каждом из графов B и $B - a$ алгоритм $\mathbf{A}_k$ будет применён не более 2^k раз, поэтому суммарная трудоёмкость нахождения ННМ для обоих графов B и $B - a$ не превосходит $2\max\{f_k(n),\, 2^k f_k(n-k)\} \leqslant 2^{k+1} f_k(n)$.

Далее, положим $H = G - (V(B) \setminus \{a\})$. При доказательстве леммы 3 в [1] установлено, что

$$\alpha(G) = \begin{cases} \alpha(B) + \alpha(H - a), & \text{если } \alpha(B) = \alpha(B - a), \\ \alpha(B - a) + \alpha(H), & \text{если } \alpha(B) = \alpha(B - a) + 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для нахождения ННМ графа G нужно сравнить числа $\alpha(B)$ и $\alpha(B - a)$. Если они равны, то нужно объединить ННМ графов B и $H - a$, в противном случае нужно объединить ННМ графов $B - a$ и H. Заметим, что блок B содержит не менее двух вершин. Значит, число вершин в каждом из графов H и $H - a$ не превосходит $n - 1$. Это даёт возможность после того, как найдены ННМ в графах B и $B - a$, применить рекурсивно алгоритм $\mathbf{A}_{k+1}$ в точности к одному из графов H или $H - a$, у каждого из которых число вершин меньше числа вершин исходного графа G. Отсюда следует рекуррентное соотношение для оценки сложности алгоритма $\mathbf{A}_{k+1}$:

$$\begin{aligned} f_{k+1}(n) &\leqslant cn^2 + n^k + 2^{k+1} f_k(n) + f_{k+1}(n-1) \\ &\leqslant (c+1)n^k + 2^{k+1} f_k(n) + f_{k+1}(n-1). \end{aligned}$$

Решая это соотношение, получаем

$$f_{k+1}(n) \leqslant (c+1)n^{k+1} + 2^{k+1} n f_k(n).$$

В завершение, применив предположение индукции $f_k(n) \leqslant 2^{k^2} n^k$, находим

$$f_{k+1}(n) \leqslant (c+1)n^{k+1} + 2^{k+1} n \cdot 2^{k^2} n^k \\ = (c+1+2^{k^2+k+1})n^{k+1} \leqslant 2^{(k+1)^2} n^{k+1}.$$

Таким образом, $f_k(n) = O(n^k)$ при каждом фиксированном $k \geqslant 3$. Теорема 1 доказана.

Установим оценку сложности алгоритма решения задачи о ННМ для графов из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$ при любых фиксированных $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$.

Теорема 2. *Задача о независимом множестве для графов с n вершинами из класса* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$ *решается за время* $O(n^{2k+1})$ *при любых фиксированных* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$.

Доказательство. Сначала при любом фиксированном $k \geqslant 1$ рассмотрим класс $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$. Обозначим через $t_k(n)$ сложность решения задачи о независимом множестве для графов с n вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$. Для установления верхней оценки величины $t_k(n)$ реализуем идею, предложенную в [1] для доказательства леммы 5.

При $k = 1$ утверждение очевидно, так как

$$\mathrm{Free}(\langle T_{1,1,1}\rangle) = \mathrm{Free}(\langle K_{1,3}\rangle) \subseteq \mathrm{Free}(K_{1,3}),$$

а полиномиальные алгоритмы решения задачи о независимом множестве в графах без звёзд $K_{1,3}$ были предложены, например, в [16–18]. Впрочем, приводимое ниже доказательство справедливо в том числе и для обозначенного частного случая: мы докажем, что $t_k(n) = O(n^{2k+1})$ при любом фиксированном $k \geqslant 1$.

Приводимое ниже доказательство фактически является полиномиальным алгоритмом решения задачи о ННМ для графов из $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$. Обозначим этот алгоритм через $\mathbf{A}'_k$.

Пусть $k \geqslant 1$ и $G = (V, E)$ — n-вершинный граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$. ННМ графа есть объединение наибольших независимых множеств его компонент связности. Компоненты связности могут быть найдены, скажем, с помощью поиска в глубину за время cn^2, где c — положительная константа. Тем самым, не уменьшая общности, можно предполагать, что входной граф G связен.

За время, не превосходящее n^{2k-1}, в графе G можно найти простой путь на $2k-1$ вершинах или убедиться, что такого пути нет. В последнем случае применим к G алгоритм нахождения ННМ для графов из класса

Free($\langle P_{2k-1}\rangle$), описание и доказательство которого приведены в [2, лемма 4]. Верхняя оценка сложности этого алгоритма равна $a_k n^{2k-2}$, где a_k — положительная константа, зависящая, быть может, только от k.

Пусть P — путь на $2k-1$ вершинах в графе G (длины $2k-2$), $V(P)$ — множество вершин этого пути. Из леммы 2 следует, что $G - V(P) \in \mathcal{L}_{2k+1}$, поэтому наибольшее независимое множество в графе G можно найти следующим образом: перебираем все независимые множества в графе $G[V(P)]$, затем для каждого такого множества U находим с помощью алгоритма $\mathbf{A}_{2k+1}$, описанного в доказательстве теоремы 1, ННМ в графе $G - (V(P) \cup N(U)) \in \mathcal{L}_{2k+1}$ и объединяем его с U. Наибольшее из полученных множеств будет наибольшим независимым множеством графа G. Всего алгоритм $\mathbf{A}_{2k+1}$ будет выполнен не более чем 2^{2k-1} раз, а трудоёмкость алгоритма $\mathbf{A}_{2k+1}$, как установлено в теореме 1, не превосходит $f_{2k+1}(n) \leqslant 2^{(2k+1)^2} n^{2k+1}$. Таким образом, общая трудоёмкость алгоритма $\mathbf{A}'_k$ нахождения ННМ в графе G не превосходит величины

$$\begin{aligned} t_k(n) &\leqslant cn^2 + n^{2k-1} + \max\{a_k n^{2k-2},\, 2^{2k-1} f_{2k+1}(n-2k+1)\} \\ &\leqslant (c+1)n^{2k} + (2^{(2k+1)^2+2k-1} + a_k)n^{2k+1} = O(n^{2k+1}). \end{aligned}$$

В завершение остаётся только заметить, что при всех $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ справедливо включение Free($\langle T_{i,j,k}\rangle$) $\subseteq$ Free($\langle T_{k,k,k}\rangle$), поэтому найденная верхняя оценка $t_k(n) = O(n^{2k+1})$ сложности решения задачи о ННМ в классе Free($\langle T_{k,k,k}\rangle$) автоматически справедлива и для любого графа из класса Free($\langle T_{i,j,k}\rangle$). Теорема 2 доказана.

Сумма $G_1 + G_2$ двух графов — это их объединение (в теоретико-множественном смысле) при условии, что $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, а *соединение* $G_1 \circ G_2$ получается из суммы добавлением всех рёбер, соединяющих вершины графа G_1 с вершинами графа G_2. Граф, не являющийся суммой или соединением графов, будем называть *неразложимым*. Это означает, что как сам граф, так и дополнительный к нему связны. Очевидно, что ННМ графа $G_1 + G_2$ есть объединение ННМ графов G_1 и G_2, а ННМ графа $G_1 \circ G_2$ есть большее из этих двух множеств. Тем самым для доказательства НМ-простоты некоторого класса $\mathcal{X}$ достаточно установить, что задача о независимом множестве может быть решена за полиномиальное время для всех неразложимых графов из этого класса.

2. Запрещаются триод $T_{i,j,k}$ и все его остовные надграфы ограниченной степени

Для графа G через $\langle G, \delta < d\rangle$ обозначим множество всех остовных надграфов графа G, у которых минимальная степень вершины меньше d. Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ и $s = i + j + k$. В этом разделе рассмотрим

класс графов $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < d\rangle)$. Данный класс состоит из всех графов, у которых в любом подграфе, имеющем триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа, степень каждой вершины не меньше d. Заметим, что случай $i = j = k = 1$ неинтересен, так как $\mathrm{Free}(\langle T_{1,1,1}, \delta < d\rangle) \subseteq \mathrm{Free}(K_{1,3})$, поэтому далее считаем, что $k \geqslant 2$ и, следовательно, $s \geqslant 4$.

Будет доказано, что класс графов $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < d\rangle)$ НМ-простой при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ и $d = \frac{s+i+1}{2}$.

Приводимая ниже лемма 5 устанавливает тот факт, что из каждого триода $T_{i,j,k}$, содержащегося в графе G из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2}\rangle)$ в качестве остовного подграфа, с помощью замены любой вершины b этого триода вершиной y из $G - V(T_{i,j,k})$, смежной хотя бы с одной вершиной a из $T_{i,j,k} - b$, можно получить новый триод, содержащийся в G и имеющий те же самые длины цепей i, j, k.

Лемма 5 (о замене триода). *Пусть $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2}\rangle)$, а множество $X \subset V(G)$ мощности $|X| = s + 1$ порождает подграф $G[X]$, содержащий триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа. Тогда для любых трёх различных вершин $a, b \in X$ и $y \in V(G) \setminus X$ таких, что y и a смежны, множество $X' = (X \setminus \{b\}) \cup \{y\}$ порождает подграф $G[X']$, содержащий триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа.*

Доказательство. По условию степень каждой вершины в подграфе $G[X]$ не меньше $\frac{s+i+1}{2}$. Значит, степень каждой вершины в подграфе $G[X \setminus \{b\}]$ не меньше $\frac{s+i-1}{2} \geqslant \frac{s}{2}$. Следовательно, по теореме Дирака (см., например, [19]) в подграфе $G[X \setminus \{b\}]$ существует гамильтонов цикл. Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_s$ вершины этого цикла, упорядоченные в соответствии с его прохождением, начиная с вершины $c_1 = a$. Добавляя к этой последовательности вершину y, смежную с a, получаем цепь $(y, c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_s)$. Убедимся в том, что начальный сегмент $(y, c_1, c_2, \ldots, c_i)$ этой цепи является цепью длины i некоторого триода $T_{i,j,k}$ с множеством вершин X'.

Пусть $X_0 = \{c_1 = a, c_2, \ldots, c_{i-1}\}$, $|X_0| = i - 1$ ($X_0 = \varnothing$ при $i = 1$). Обозначим $X_1 = (X \setminus \{b\}) \setminus X_0$ и заметим, что $c_i \in X_1$. В подграфе $G[X_1]$ имеется $|X_1| = j + k + 1 = s - i + 1$ вершин степени не меньше чем $\frac{s+i-1}{2} - (i-1) = \frac{s-i+1}{2}$ каждая. Значит, по теореме Дирака в подграфе $G[X_1]$ есть гамильтонов цикл (на $j+k+1$ вершинах, среди которых есть вершина c_i). Соединяя этот цикл с найденной ранее цепью $(y, c_1 = a, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i)$, обнаруживаем в графе $G[X']$ в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$, в котором c_i является вершиной степени 3. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть G — связный граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2}\rangle)$, а множество $X \subset V(G)$ мощности $|X| = s + 1$ порождает подграф $G[X]$, содержащий триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа. Тогда каждая вершина из множества $V(G) \setminus X$ смежна хотя бы с одной вершиной из X.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 6 неверно. Тогда в силу связности графа G найдутся такие две смежные вершины $y_1, y_2 \in V(G) \setminus X$, что y_1 не смежна ни с одной вершиной из X, а y_2 смежна с некоторой вершиной $a \in X$.

Возьмём произвольную вершину $b_1 \in X \setminus \{a\}$ и рассмотрим подграф $G[X']$, порождённый множеством $X' = (X \setminus \{b_1\}) \cup \{y_2\}$. По лемме 5 в этом подграфе содержится триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа.

Далее возьмём произвольную вершину $b_2 \in X' \setminus \{a, y_2\}$ и рассмотрим подграф $G[X'']$, порождённый множеством вершин

$$X'' = (X' \setminus \{b_2\}) \cup \{y_1\} = (X \setminus \{b_1, b_2\}) \cup \{y_1, y_2\}.$$

Снова из леммы 5 следует, что и в этом подграфе содержится триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа.

Однако в подграфе $G[X'']$ вершина y_1 смежна с единственной вершиной y_2. Это противоречит тому, что $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$. Действительно, так как $s \geqslant 4$, степень каждой вершины любого графа с $s+1$ вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$, содержащего триод $T_{i,j,k}$, должна быть не меньше чем 3. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ и $s = i + j + k$. Тогда каждый неразложимый граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$, в котором более чем $s+1$ вершин, либо принадлежит классу $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k} \rangle)$, либо имеет вершину, не принадлежащую никакому независимому множеству мощности больше $\frac{s-i+1}{2}$.*

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — неразложимый граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$, имеющий более $s+1$ вершин и содержащий в качестве подграфа триод $T_{i,j,k}$. Также пусть каждая вершина из множества $V(G)$ принадлежит какому-нибудь независимому множеству мощности больше $\frac{s-i+1}{2}$. Выберем множество $X \subset V(G)$ мощности $|X| = s+1$, которое порождает подграф, содержащий в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$ и имеющий вершину с наименьшим значением минимальной степени в подграфе $G[X]$ среди всех таких подграфов. Обозначим через d эту минимальную степень, и пусть z — вершина из X, имеющая степень d. По условию леммы $d \geqslant \frac{s+i+1}{2} \geqslant 3$.

Так как вершина z принадлежит независимому множеству мощности больше $\frac{s-i+1}{2}$, а в подграфе $G[X]$ имеется не более чем $s - \frac{s+i+1}{2} = \frac{s-i-1}{2}$ не смежных с ней вершин, найдётся вершина $y \in V(G) \setminus X$, не смежная с z. По лемме 6 вершина y смежна с некоторой вершиной $a \in X \setminus \{z\}$.

Выберем произвольную вершину $b \in X \setminus \{a, z\}$, смежную с z. Такая вершина b существует, поскольку $|X| = s+1 \geqslant 5$ и $\deg_X(z) = d \geqslant 3$. По лемме 5 множество $X' = (X \setminus \{b\}) \cup \{y\}$ порождает подграф $G[X']$, содержащий триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа.

Однако в подграфе $G[X']$ вершина z имеет степень $d-1$. Это противоречит выбору множества X и вершины z. Из полученного противоречия следует, что $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k} \rangle)$. Лемма 7 доказана.

Остаётся только заметить, что вершины, не принадлежащие независимым множествам мощности, большей $\frac{s-i+1}{2}$, можно выявить и удалить из графа с n вершинами за время $O(n^{1+\frac{1}{2}(s-i+1)})$. После этого по лемме 7 получается либо разложимый граф, либо граф, не содержащий триода $T_{i,j,k}$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Класс графов* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$ НМ-*простой при любых* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$. ННМ *для графов с* n *вершинами из класса* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$ *можно найти за время* $O(n^{2k+1})$.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы 3 непосредственно следует из леммы 7 и НМ-простоты класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k} \rangle)$, доказанной в теореме 2. Для доказательства второй части на основании леммы 7 предложим описываемый ниже алгоритм $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$ решения задачи о независимом множестве для графов из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < d \rangle)$, где $s = i+j+k$, $d = \frac{s+i+1}{2}$. На входе этого алгоритма — n-вершинный граф G из указанного класса, $n > s+1$, на выходе — наибольшее независимое множество U графа G.

Алгоритм $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$

1. Проверить, связен ли граф G. Если нет, то найти множество вершин $X \subset V(G)$, порождающее компоненту связности. Применить алгоритм $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$ рекурсивно к $G[X]$ и $G - X$. Положить U равным объединению двух полученных независимых множеств и завершить работу.

2. Проверить, связен ли граф $\overline{G}$, дополнительный к графу G. Если нет, то найти множество вершин $X \subset V(G)$, порождающее компоненту связности дополнительного графа. Применить алгоритм $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$ рекурсивно к графам $G[X]$ и $G - X$. Положить U равным большему из двух полученных независимых множеств и завершить работу.

3. Перебрать все подмножества мощности $\frac{s-i+1}{2}+1$ множества $V(G)$, среди них выявить все независимые множества графа G. Если среди них нет ни одного независимого множества графа G, то перебрать все подмножества мощности не более $\frac{s-i+1}{2}$ множества $V(G)$, среди них выбрать независимое множество U с наибольшей мощностью и завершить работу.

4. Найти множество $M \subset V(G)$ всех таких вершин, каждая из которых не принадлежит никакому независимому множеству мощности $\frac{s-i+1}{2}+1$. Удалить множество вершин M из графа G. Найти множество U в графе $G - M$ с помощью алгоритма $\mathbf{A}'_k$ (см. доказательство теоремы 2) и завершить работу.

Для завершения доказательства теоремы 3 осталось убедиться в том, что время работы алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$ ограничено сверху полиномом от n и найти степень этого полинома. Обозначим через $t_{i,j,k}^{\delta<d}(n)$ время работы алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$ на графах с n вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < d\rangle)$. Так как компоненты связности графа можно найти за время $O(n^2)$, при подходящих положительных константах a, b, c (некоторые из них, возможно, зависят от k) имеем

$$t_{i,j,k}^{\delta<d}(n) \leqslant cn^2 \\ + \max\bigl\{\max_{1\leqslant m\leqslant n-1}\bigl\{t_{i,j,k}^{\delta<d}(m) + t_{i,j,k}^{\delta<d}(n-m)\bigr\}, bn^{1+\frac{1}{2}(s-i+1)} + an^{2k+1}\bigr\}.$$

Отсюда $t_{i,j,k}^{\delta<d}(n) = O(n^{2k+1})$ при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$. Теорема 3 доказана.

3. Запрещаются триод $T_{i,j,k}$ и все его остовные надграфы с большим дефицитом

Антистепенью вершины графа будем называть её степень в дополнительном графе. Очевидно, что сумма степени и антистепени любой вершины в любом графе с n вершинами равна $n-1$.

Дефицитом графа будем называть число рёбер в дополнительном графе. Из теоремы о рукопожатиях следует, что дефицит графа равен полусумме антистепеней всех его вершин.

Для графа G через $\langle G, \mathrm{def} > d\rangle$ обозначим множество всех остовных надграфов графа G, имеющих дефицит больше d. Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ и $s = i + j + k$. В этом разделе предметом рассмотрения будет класс графов $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > d\rangle)$. Данный класс состоит из всех графов, у которых дефицит каждого подграфа, имеющего триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа, не превосходит d. Так же, как и в разд. 2, случай $i = j = k = 1$ неинтересен, поскольку $\mathrm{Free}(\langle T_{1,1,1}, \mathrm{def} > d\rangle) \subseteq \mathrm{Free}(K_{1,3})$, поэтому далее считаем, что $k \geqslant 2$, откуда следует, что $s \geqslant 4$.

Будет доказано, что класс графов $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > d\rangle)$ HM-простой при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ и $d = \frac{s}{2} - 1$.

Лемма 8. *Если дефицит графа с n вершинами не превосходит $n-3$, то в этом графе имеется гамильтонов цикл.*

Доказательство. В графе G с n вершинами и дефицитом не более $n-3$ сумма антистепеней любых двух вершин, не смежных в G, не может превосходить $n-2$, поэтому сумма их степеней не меньше n. Существование гамильтонова цикла следует из теоремы Оре (см., например, [19]). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ и $s = i + j + k$. Если в неразложимом графе $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > s - 2\rangle)$ множество вершин $X \subset V(G)$ мощности $|X| = s + 1$ порождает подграф, содержащий в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$, то найдутся три различные вершины $a, b \in X$ и $y \in V(G) \setminus X$ такие, что вершина y смежна с a, но не смежна с b.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 9 неверно. Это означает, что любая вершина $y \in V(G) \setminus X$ либо смежна одновременно со всеми вершинами из X, либо одновременно с ними не смежна. Так как граф G неразложим, найдутся такие смежные вершины $y_1, y_2 \in V(G) \setminus X$, что y_1 не смежна ни с одной вершиной из X, а y_2 смежна со всеми вершинами из X.

В триоде $T_{i,j,k}$, $V(T_{i,j,k}) = X$, рассмотрим наибольшую из трёх цепей, выходящих из вершины степени 3. Эта цепь имеет длину $k \geqslant 2$. Пусть a — концевая вершина цепи длины k (лист триода), а b — вершина из этой же цепи, смежная (в триоде) с a.

Рассмотрим множество вершин $X' = (X \setminus \{a, b\}) \cup \{y_1, y_2\}$. Согласно выбору вершин y_1 и y_2 граф $G[X']$ содержит триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа. Однако, так как вершина y_1 не смежна с каждой вершиной из множества $X \setminus \{a, b\}$, дефицит графа $G[X']$ не меньше чем $s - 1$; противоречие. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ и $s = i + j + k$. Каждый неразложимый граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$ либо принадлежит классу $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$, либо имеет не более чем $s + 1$ вершин.*

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — неразложимый граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$, имеющий более $s + 1$ вершин и содержащий в качестве подграфа триод $T_{i,j,k}$. Выберем множество $X \subset V(G)$ мощности $|X| = s + 1$, которое порождает подграф, содержащий в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$ и имеющий наибольший дефицит среди всех таких подграфов. Обозначим через m этот максимальный дефицит. По условию леммы $m \leqslant \frac{s}{2} - 1$.

Так как при любом $s \geqslant 2$ выполняется неравенство $\frac{s}{2} - 1 \leqslant s - 2$, по лемме 9 в графе G найдутся такие три вершины $a, b \in X$ и $y \in V(G) \setminus X$, что вершина y смежна с a, но не смежна с b.

Поскольку $m \leqslant \frac{s}{2} - 1$ и $|X| = s + 1$, в графе $G[X]$ найдутся по крайней мере три различные доминирующие вершины. Выберем из этих вершин какую-нибудь одну, отличную от a и b. Обозначим через z выбранную доминирующую вершину, $z \neq a$, $z \neq b$. Положим $X' = X \setminus \{z\}$. Граф $G[X']$ имеет s вершин, а его дефицит равен $m \leqslant \frac{s}{2} - 1$.

При любом $s \geqslant 4$ выполняется неравенство $\frac{s}{2} - 1 \leqslant s - 3$. Значит, по лемме 8 в графе $G[X']$ существует гамильтонов цикл. Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_s$ вершины этого цикла, упорядоченные

в соответствии с его прохождением, начиная с вершины $c_1 = a$. Добавляя к этой последовательности вершину y, смежную с a, получаем цепь $(y, c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_s)$. Убедимся в том, что начальный сегмент $(y, c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i)$ этой цепи является цепью длины i некоторого триода $T_{i,j,k}$, содержащегося в G в качестве подграфа.

Пусть $X_0 = \{c_1 = a, c_2, \ldots, c_{i-1}\}$, $|X_0| = i - 1$ ($X_0 = \varnothing$ при $i = 1$) и $X_1 = X' \setminus X_0$. Рассмотрим граф $G[X_1]$ и заметим, что $c_i \in X_1$. В этом графе $|X_1| = j + k + 1 = s - i + 1$ вершин, а дефицит не больше m. При любых натуральных $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ выполняется неравенство $i + 2 \leqslant j + k = s - i$, а это значит, что $i \leqslant \frac{s}{2} - 1$. Тогда из неравенств $m \leqslant \frac{s}{2} - 1 \leqslant s - i - 2 = |X_1| - 3$ и леммы 8 следует, что в графе $G[X_1]$ есть гамильтонов цикл (на $j+k+1$ вершинах, среди которых есть вершина c_i). Соединяя этот цикл с найденной ранее цепью $(y, c_1 = a, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i)$, обнаруживаем в графе $G[X' \cup \{y\}]$ в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$, в котором c_i является вершиной степени 3. Однако дефицит графа $G[X']$ равен m, а среди его вершин есть вершина b, не смежная с вершиной y. Следовательно, дефицит графа $G[X' \cup \{y\}]$ не меньше чем $m + 1$. Это противоречит максимальности дефицита подграфа $G[X]$ среди дефицитов всех $(s+1)$-вершинных подграфов графа G, содержащих в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$.

Из полученного противоречия следует, что неразложимый граф G из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$, имеющий более $s+1$ вершин, не содержит в качестве подграфа триод $T_{i,j,k}$. Это означает, что $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$. Лемма 10 доказана.

Теорема 4. *Класс графов* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$ НМ-*простой при любых* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$, $s = i+j+k$. ННМ *для графов с* n *вершинами из класса* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$ *можно найти за время* $O(n^{2k+1})$.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы 4 непосредственно следует из леммы 10 и НМ-простоты класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$, доказанной в теореме 2. Докажем вторую часть. Для этого построим полиномиальный алгоритм $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$ решения задачи о независимом множестве для графов из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > d\rangle)$, где $d = \frac{s}{2} - 1$. На входе этого алгоритма — n-вершинный граф G из указанного класса, $n > s+1$, на выходе — наибольшее независимое множество U графа G.

Сопоставив утверждения лемм 7 и 10, легко заметить, что алгоритм $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$ можно получить с помощью очевидной модификации алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$, построенного в доказательстве теоремы 3.

В самом деле, чтобы получить описание алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$, достаточно исключить из описания алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$ пункт 3, а пункт 4 применить не к графу $G - M$, а к самому графу G. В силу очевидности указанной

модификации алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$ пошаговое описание алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$ опустим. Заметим лишь, что числа d в обозначениях этих двух алгоритмов имеют разные смыслы и разные значения, однако эти различия никак не влияют на их описание.

Из проведённых рассуждений также следует, что верхняя оценка трудоёмкости алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$, найденная при доказательстве теоремы 3, остаётся справедливой и для алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$. Таким образом, время работы каждого из двух алгоритмов оценивается как $O(n^{2k+1})$. Теорема 4 доказана.

4. Классы, замкнутые относительно самопересечений

Пересечением графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. Для графа $G = (V, E)$ и инъективного отображения $\varphi\colon V \to \varphi(V)$ через $\varphi(G)$ обозначаем граф $(\varphi(V), \varphi(E))$, где $\varphi(V) = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$, $\varphi(E) = \{(\varphi(x), \varphi(y)) \mid (x, y) \in E\}$. Граф вида $\varphi_1(G) \cap \varphi_2(G) \cap \dots \cap \varphi_k(G)$, где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ — инъективные отображения множества V в произвольное множество, будем называть *самопересечением* графа G. В частности, граф вида $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_k$, где $G_1, G_2, \dots G_k$ — графы, изоморфные G и имеющие множество вершин V, есть самопересечение графа G. Если граф H является самопересечением графа G, то пишем $G \overset{\cap}{\to} H$. Заметим, что отношение $\overset{\cap}{\to}$ транзитивно.

В [2] доказаны следующие утверждения.

Лемма 11 [2, лемма 4]**.** *Если H — порождённый подграф графа G, то $G \overset{\cap}{\to} H$.*

Лемма 12 [2, теорема 3]**.** *Каждый монотонный класс замкнут относительно самопересечений. Каждый класс, замкнутый относительно самопересечений, наследственный.*

Обозначим через $\langle \overset{\cap}{\to} H \rangle$ (см. [2]) множество всех графов G таких, что $G \overset{\cap}{\to} H$. Это множество состоит из тех и только тех графов, среди самопересечений каждого из которых есть граф, изоморфный H. Одним из основных результатов работы [2] было доказательство НМ-простоты класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} P_k \rangle)$ при любом k [2, теорема 4]. Этот класс состоит из всех графов, у каждого из которых самопересечение любого его подграфа не изоморфно пути на k вершинах.

Оставшаяся часть настоящего раздела посвящена исследованию класса графов $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k} \rangle)$. Он состоит из всех графов, у каждого из которых самопересечение любого его подграфа не изоморфно триоду $T_{i,j,k}$. Из леммы 12 очевидно, что так же, как и класс $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} P_k \rangle)$, класс

$\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k}\rangle)$ принадлежит семейству классов, являющемуся промежуточным между семействами монотонных и наследственных классов, и что $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} P_k\rangle) \subset \mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k}\rangle)$.

При любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$, рассмотрим некоторый нетривиальный подкласс класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k}\rangle)$, не содержащийся целиком в классе $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} P_k\rangle)$, и докажем его НМ-простоту. Далее используем введённую в [2] терминологию и некоторые доказанные там результаты.

Пусть в графе с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$ есть гамильтонов цикл. Такой цикл назовём *стандартным* [2], если его рёбрами являются пары $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)$. Цикловым расстоянием между вершинами i и j назовём расстояние между ними на гамильтоновом цикле, т. е. величину $\min\{|i-j|, n-|i-j|\}$. *Хорда* цикла — это ребро графа, соединяющее две вершины цикла и само этому циклу не принадлежащее. Длиной хорды называется цикловое расстояние между её вершинами.

В [2] были введены следующие операции над графами.

1) *Циклический сдвиг.* Пусть G — граф с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$, а m — любое натуральное число такое, что $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Преобразование

$$\mathrm{shift}_n^m(x) = \begin{cases} x+m & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant n-m, \\ x+m-n & \text{при } n-m+1 \leqslant x \leqslant n \end{cases}$$

называется *циклическим сдвигом порядка* m на множестве V. Циклический сдвиг порядка m преобразует граф G в граф $\mathrm{shift}_n^m(G)$. Очевидно, что $G \overset{\cap}{\to} \mathrm{shift}_n^m(G)$.

2) *Вращение.* Пусть G — граф с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Операция *вращения* rot_n преобразует граф G в граф

$$\mathrm{rot}_n(G) = G \cap \mathrm{shift}_n^1(G) \cap \mathrm{shift}_n^2(G) \cap \dots \cap \mathrm{shift}_n^{n-1}(G).$$

Очевидно, что $G \overset{\cap}{\to} \mathrm{rot}_n(G)$.

Легко заметить, что если в графе G имеется стандартный гамильтонов цикл, то такой же будет в каждом из графов $\mathrm{shift}_n^m(G)$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, а значит, и в графе $\mathrm{rot}_n(G)$. Кроме того, относительно этого цикла при любом $l = 2, 3, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ в графе $\mathrm{rot}_n(G)$ имеются либо все возможные хорды длины l, либо ни одной такой хорды. Такие графы называют *циркулянтными.*

3) *Кручение.* Пусть G — граф с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$, а m — любое натуральное число такое, что $1 \leqslant m \leqslant n-2$. Преобразование

$$\mathrm{tors}_n^m(x) = \begin{cases} x & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant m, \\ n+m+1-x & \text{при } m+1 \leqslant x \leqslant n \end{cases}$$

называется *кручением порядка* m на множестве V. Кручение порядка m преобразует граф G в граф $\mathrm{tors}_n^m(G)$. Очевидно, что $G \overset{\cap}{\to} \mathrm{tors}_n^m(G)$.

Также ясно, что если в графе G имеется стандартный гамильтонов цикл с хордами $(1, m+1)$ и (m, n), то в графе $\mathrm{tors}_n^m(G)$ тоже будет стандартный гамильтонов цикл.

При использовании определённых выше операций в [2] доказана

Лемма 13 [2, лемма 5]**.** *Если G — граф с нечётным числом вершин n, имеющий гамильтонов цикл и не являющийся полным, то $G \overset{\cap}{\to} C_n$.*

Здесь докажем похожее утверждение относительно триодов.

Лемма 14. *Пусть $G = O_1 \circ G'$, где G' — граф с нечётным числом вершин $n \geqslant 3k+2$, имеющий гамильтонов цикл и не являющийся полным. Тогда $G \overset{\cap}{\to} T_{k,k,k}$.*

Доказательство. Предполагаем, что граф G' имеет множество вершин $V' = \{1, 2, \ldots, n\}$, n нечётное, $n \geqslant 3k+2$, а доминирующая вершина графа G, не принадлежащая G', имеет номер $n+1$. По условию в графе G' имеется стандартный гамильтонов цикл. Следовательно, $G' \overset{\cap}{\to} C_n$ по лемме 13.

Более точно, в лемме 13 доказано, что некоторой последовательностью вращений, кручений и пересечений граф G' можно преобразовать в граф C_n (порождённый цикл без хорд). При этом каждый граф H, образующийся на каждом этапе этих преобразований, сохраняет следующие два свойства:

- $G' \overset{\cap}{\to} H$;
- в H есть стандартный гамильтонов цикл на множестве вершин V'.

Выполним следующее преобразование φ графа G. Определим вершину $n+1$ неподвижной точкой φ, а на всех остальных вершинах применим ту же самую последовательность преобразований, как в доказательстве леммы 13. Поскольку $G' \overset{\cap}{\to} C_n$, а вершина $n+1$ смежна с каждой вершиной из V', получаем, что $G \overset{\cap}{\to} \varphi(G) \cong W_n = O_1 \circ C_n$. Здесь граф W_n — это *колесо* с центром в вершине $n+1$, рёбра $(n+1, 1), (n+1, 2), \ldots, (n+1, n)$ — *спицы* этого колеса, а у цикла на множестве вершин V' нет ни одной хорды. Остаётся доказать, что существует самопересечение колеса W_n, изоморфное триоду $T_{k,k,k}$.

На множестве $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ вершин колеса W_n ($n \geqslant 3k+2$ нечётное) выполним циклический сдвиг порядка $k+2$:

$$\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(x) = \begin{cases} x+k+2 & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant n-k-1, \\ x+k-n+1 & \text{при } n-k \leqslant x \leqslant n+1. \end{cases}$$

Рассмотрим граф $G^\circ = W_n \cap \mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(W_n)$. В графах W_n и $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(W_n)$ есть стандартный гамильтонов цикл (на $n+1$ вершинах), значит, такой же имеется и в графе G°. Хорда $(1, n)$ этого цикла есть в колесе W_n, но её нет в графе $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(W_n)$, поскольку при отображении $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}$ в пару вершин $(1, n)$ переходит пара $(n-k, n-k-2)$, не являющаяся ребром колеса W_n. Следовательно, пара $(1, n)$ не является ребром графа G°. Кроме того, при отображении $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}$ в вершину $n+1$, имеющую в колесе W_n степень n, переходит вершина $n-k-1$ со степенью 3. Значит, степень вершины $n+1$ в графе G° тоже равна 3. Нетрудно видеть, что вершинами, смежными в графе G° с вершиной $n+1$, являются вершины с номерами 1, n, $k+2$ и только они (вершина $k+2$ смежна в G° с $n+1$, поскольку $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(n-k-1) = n+1$, а $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(n+1) = k+2$).

Осталось лишь заметить, что граф G° содержит триод $T_{k,k,k}$ в качестве порождённого подграфа. Действительно, выберем $n+1$ за вершину степени 3 в триоде и обнаружим в графе G° три порождённые цепи длины k каждая, выходящие из вершины $n+1$, а именно, $(n+1, 1, 2, \ldots, k)$, $(n+1, k+2, k+3, \ldots, 2k+1)$ и $(n+1, n, n-1, \ldots, n-k+1)$. Так как $n \geqslant 3k+2$, у любых двух из этих трёх цепей в графе G° имеется только одна общая вершина $n+1$, и никакая другая вершина из одной цепи не смежна в G° ни с одной отличной от $n+1$ вершиной любой другой цепи. Значит, триод $T_{k,k,k}$ является порождённым подграфом графа G°. Его можно получить, удаляя из G° вершины с номерами $k+1$ и $2k+2, \ldots, n-k$.

Таким образом, используя леммы 11, 13 и транзитивность отношения $\overset{\cap}{\rightarrow}$, получили

$$G \overset{\cap}{\rightarrow} W_n = O_1 \circ C_n \overset{\cap}{\rightarrow} G^\circ \overset{\cap}{\rightarrow} T_{k,k,k}.$$

Лемма 14 доказана.

На основе леммы 13 в [2] доказано, что при любом $k \geqslant 3$ любой двусвязный граф из класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\rightarrow} P_k \rangle)$ либо является полным графом, либо не содержит нечётных циклов длины больше k [2, лемма 6]. Здесь докажем справедливость похожего утверждения для двусвязного графа, принадлежащего классу $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\rightarrow} T_{k,k,k} \rangle)$ и имеющего доминирующую вершину.

Лемма 15. *Пусть $k \geqslant 2$ и в графе $G \in \mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\rightarrow} T_{k,k,k} \rangle)$ есть доминирующая вершина v. Тогда каждый блок графа $G - v$ либо является полным графом, либо не содержит нечётных циклов длины больше $3k+1$.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что $G = O_1 \circ (G - v)$. Пусть G' — компонента двусвязности графа $G - v$, содержащая нечётный цикл длины $n \geqslant 3k+2$, H — подграф, порождённый множеством вершин такого цикла. Рассмотрим подграф $G[v \cup V(H)] = O_1 \circ H$. Этот подграф

полный, поскольку иначе, используя леммы 11 и 14, получаем цепочку соотношений $G = O_1 \circ (G - v) \overset{\sqcap}{\to} O_1 \circ H \overset{\sqcap}{\to} T_{k,k,k}$; противоречие.

Значит, мощность наибольшей клики в G' не меньше n. Допустим, что граф G' не полный, а X — наибольшая клика в G', $|X| \geqslant n \geqslant 3k+2$. Тогда найдутся такие три различные вершины $x_1, x_2 \in X$ и $y \notin X$, что y смежна с x_1, но не смежна с x_2. Так как граф G' двусвязный, существует путь из вершины y в множество X, не содержащий x_1. Пусть P — кратчайший из таких путей, $y \in P$. Добавив к $V(P)$ вершины x_1, x_2 и необходимое число других вершин из множества X, можно получить множество Y нечётной мощности не меньше n (среди вершин этого множества обязательно есть x_1, x_2 и y). Множество Y порождает подграф, содержащий нечётный цикл длины не меньше n, но не являющийся полным подграфом. Однако выше было доказано, что таких подграфов в графе G' не существует. Следовательно, граф G' полный. Лемма 15 доказана.

Для доказательства основного результата этого раздела используем утверждения леммы 15, леммы 3 и теоремы 1 из разд. 1, а также некоторые утверждения, доказанные в [20].

Теорема 5. *Если в графе с n вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\sqcap}{\to} T_{i,j,k} \rangle)$ имеется вершина с антистепенью, ограниченной сверху величиной $d \log_2 n$ (здесь d — любая положительная константа), то задача о независимом множестве для этого графа решается за время $O(n^{d+3k+2})$ при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Free}(\langle \overset{\sqcap}{\to} T_{i,j,k} \rangle) \subseteq \mathrm{Free}(\langle \overset{\sqcap}{\to} T_{k,k,k} \rangle)$, теорему достаточно доказать для каждого графа из $\mathrm{Free}(\langle \overset{\sqcap}{\to} T_{k,k,k} \rangle)$, в котором есть вершина с антистепенью, ограниченной сверху величиной $d \log_2 n$, где d — положительная константа.

Пусть G — граф с n вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\sqcap}{\to} T_{k,k,k} \rangle)$, а v — вершина из G, антистепень которой не превосходит $d \log_2 n$. Очевидно, что $\alpha(G) = \max\{\alpha(G - v), \alpha(G - N(v))\}$.

Число вершин в графе $G - N(v)$ не превосходит $1 + d \log_2 n$, причём одна из них изолированная (это вершина v). Значит, ННМ в этом графе можно найти, перебрав все подмножества множества мощности не более $d \log_2 n$, а затем выбрав среди них независимое множество с наибольшей мощностью и добавив к нему вершину v. Таким образом, $\alpha(G - N(v))$ находится за время, не превосходящее $2^{d \log_2 n} = n^d$.

Осталось найти ННМ в графе $G - v$. Это можно сделать следующим образом: переберём все независимые множества графа $G - (\{v\} \cup N(v))$ (как уже отмечено выше, их число не превосходит n^d), для каждого такого множества U найдём ННМ в графе $G[N(v) \setminus N(U)]$ и объединим его с U. Наибольшее из полученных множеств будет ННМ графа $G - v$.

Каждая вершина графа $G[N(v)]$ смежна с v, значит, v — доминирующая вершина в графе $G[\{v\} \cup N(v)]$, но $G[\{v\} \cup N(v)] \in \mathrm{Free}(\langle \overset{\sqcap}{\to} T_{k,k,k}\rangle)$, поэтому по лемме 15 каждый блок графа $G[N(v)]$ либо является полным графом, либо не содержит нечётных циклов длины больше $3k+1$.

В [20] (немного в иной терминологии) доказаны следующие утверждения.

- Класс всех графов, не содержащих нечётных циклов длины, большей K, НМ-простой при любом натуральном K.
- ННМ в каждом n-вершинном графе, не содержащем нечётных циклов длины, большей K, может быть найдено за время $O(n^K)$.

Отсюда при $K = 3k+1$ получаем, что ННМ в каждом блоке графа $G[N(v)]$, не являющемся полным графом, можно найти за время $O(n^{3k+1})$. Теперь, применяя утверждение леммы 3 и ту же самую идею, что описана в доказательстве теоремы 1, заключаем, что ННМ в графе $G[N(v)]$ можно найти за время $O(n^{3k+2})$. Такая же оценка справедлива и для любого порождённого подграфа графа $G[N(v)]$. Следовательно, ННМ в графе $G - v$ можно найти за время $n^d \cdot cn^{3k+2}$, где c — положительная константа, не зависящая от n (возможно, c зависит от k). Эта величина есть $O(n^{d+3k+2})$. Очевидно, что такая же оценка сложности нахождения ННМ справедлива и для графа G. Теорема 5 доказана.

Утверждение теоремы 5 пока не удалось распространить на те графы из класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\sqcap}{\to} T_{i,j,k}\rangle)$, у которых нет вершин с антистепенями, ограниченными сверху логарифмом от числа вершин, поэтому в целом вопрос о сложности решения задачи о независимом множестве в этом классе остаётся открытым. Здесь нам удалось лишь установить НМ-простоту одного его нетривиального подкласса, не совпадающего с классом $\mathrm{Free}(\langle \overset{\sqcap}{\to} P_k\rangle)$ и не являющегося его собственным подклассом.

Заключение

В этой статье при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$, и $s = i+j+k$ установлена НМ-простота

- класса графов, не содержащих остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых минимальная степень вершины меньше $\frac{1}{2}(s+i+1)$;
- класса графов, не содержащих остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых дополнительный граф имеет меньше чем $\frac{s}{2} - 1$ рёбер;
- класса графов, имеющих вершину с антистепенью, ограниченной сверху логарифмом от числа вершин, и не содержащих надграфов триода $T_{i,j,k}$, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить $T_{i,j,k}$.

Эти результаты являются промежуточным итогом исследований, выполненных в продолжение совместной с В. Е. Алексеевым работы [2].

Изначально данная статья задумывалась после публикации [2], состоявшейся в 2018 г., как совместная работа, однако, к большому сожалению, в 2020 г. после тяжёлой болезни В. Е. Алексеев ушёл из жизни. Это событие стало невосполнимой утратой для теории графов во всём мире: Владимир Евгеньевич по праву считался учёным с мировым именем, получившим ряд фундаментальных результатов в области теории графов (один из них — это упомянутый во введении результат из [1] о полной классификации НМ-простых и НМ-сложных монотонных классов графов).

В процессе работы при обосновании основных результатов этой статьи автору удалось применить идеи, предложенные В. Е. Алексеевым, которые он не успел воплотить лично. Автор посвящает эту статью его памяти.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания, касающиеся обзора источников, которые относятся к теме исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Коробицын Д. В.** О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 34–40.
2. **Алексеев В. Е., Сорочан С. В.** Новые случаи полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве для графов с запрещёнными путями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 25, № 2. С. 5–18.
3. **Алексеев В. Е.** О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во Горьков. ун-та, 1982. С. 3–13.
4. **Алексеев В. Е.** О числе тупиковых независимых множеств в графах из наследственных классов // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1991. С. 5–8.
5. **Алексеев В. Е.** Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 3–19.
6. **Lozin V. V., Mosca R.** Independent sets in extension of $2K_2$-free graphs // Discrete Appl. Math. 2005. V. 146. P. 74–80.
7. **Lokshantov D., Vatshelle M., Villanger Y.** Independent set in P_5-free graphs in polynomial time // Proc. 25th Annual ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (Portland, OR, USA, Jan. 5–7, 2014). Philadelphia, PA: SIAM, 2014. P. 570–581.
8. **Grzesik A., Klimošová T., Pilipczuk Mar., Pilipczuk Mic.** Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on P_6-free graphs. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2017. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1707.05491).

9. **Karthick T., Maffray F.** Weighted independent sets in classes of P_6-free graphs // Discrete Appl. Math. 2016. V. 209. P. 217–226.
10. **Lozin V. V., Monnot J., Ries B.** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // J. Discrete Algorithms. 2015. V. 31. P. 104–112.
11. **Lozin V. V., Rautenbach D.** Some results on graphs without long induced paths // Inform. Process. Lett. 2003. V. 88. P. 167–171.
12. **Малышев Д. С., Сироткин Д. В.** Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. V. 24, No. 3. P. 35–60.
13. **Abrishami T., Chudnovsky M., Dibek C., Rzążewski P.** Polynomial-time algorithm for maximum independent set in bounded-degree graphs with no long induced claws // Proc. 33rd Annual ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (Alexandria, VA, USA, Jan. 9–12, 2022). Philadelphia, PA: SIAM, 2022. P. 1448–1470.
14. **Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Milanič M.** The maximum independent set problem in planar graphs // Mathematical foundations of computer science 2008. Proc. 33rd Int. Symp. (Toruń, Poland, Aug. 25–29, 2008). Heidelberg: Springer, 2008. P. 96–107. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 5162).
15. **Малышев Д. С.** Классы субкубических планарных графов, для которых задача о независимом множестве полиномиально разрешима // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. V. 20, No. 3. P. 26–44.
16. **Lovász L., Plummer M. D.** Matching theory. Amsterdam: Norh-Holland, 1986. 544 p. (Ann. Discrete Math.; V. 29).
17. **Minty G.** On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. 1980. V. 28, No. 3. P. 284–304.
18. **Sbihi N.** Algorithme de recherche d'un stable de cardinalite maximum dans un graphe sans etoile // Discrete Math. 1980. V. 29, No. 1. P. 53–76. [French].
19. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
20. **Hsu W., Ikura Y., Nemhauser G. L.** A polynomial algorithm for maximum weighted vertex packing in graphs without long odd cycles // Math. Program. 1981. V. 20. P. 225–232.

Сорочан Сергей Владимирович

Статья поступила
31 августа 2022 г.
После доработки —
3 ноября 2022 г.
Принята к публикации
3 ноября 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 85–109

UDC 519.178 DOI 10.33048/daio.2023.30.752

NEW CASES OF POLYNOMIAL SOLVABILITY OF THE INDEPENDENT SET PROBLEM FOR GRAPHS WITH FORBIDDEN TRIODS

S. V. Sorochan

Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Avenue, 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: `sergey.sorochan@itmm.unn.ru`

Abstract. A triode is a tree with three leaves and a single vertex of degree 3. The independent set problem is solvable in polynomial time for graphs that do not contain a triode as a subgraph with any fixed number of vertices. If the induced triode having k vertices is forbidden, then for $k > 5$ the complexity of this problem is unknown. We consider intermediate cases when an induced triode with any fixed number of vertices and some of its spanning supergraphs are forbidden. For an arbitrary triode with a fixed vertex number, we prove the solvability of the independent set problem in polynomial time in the following cases:

1) a triode and all its spanning supergraphs having bounded vertex degrees are forbidden;

2) a triode and all its spanning supergraphs having large deficit (the number of edges in the complementary graph) are forbidden;

3) a triode and all its supergraphs from which this triode can be obtained using the graph intersection operation are forbidden, provided the fraph has a vertex with bounded anti-degree.

Bibliogr. 20.

Keywords: independent set, IS-easy class, IS-hard class, monotonic class, hereditary class, forbidden subgraph, triode, supergraph, polynomial algorithm.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev** and **D. V. Korobitsyn,** Complexity of some problems on hereditary classes of graphs, *Diskretn. Mat.* **4** (4), 34–40 (1992) [Russian].

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

2. **V. E. Alekseev** and **S. V. Sorochan,** New cases of the polynomial solvability of the independent set problem for graphs with forbidden paths, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **25** (2), 5–18 (2018) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **12** (2), 213–219 (2018)].
3. **V. E. Alekseev,** The local restriction effect on the complexity of finding the graph independence number, in *Combinatorial and Algebraic Methods in Applied Mathematics* (Izd-vo Gorkov. Univ., Gorkiy, 1982), pp. 3–13.
4. **V. E. Alekseev,** The number of maximal independent sets in graphs from hereditary classes, in *Combinatorial and Algebraic Methods in Discrete Optimization* (Izd-vo NNGU, Nizhny Novgorod, 1991), pp. 5–8.
5. **V. E. Alekseev,** A polynomial algorithm for finding the largest independent sets in claw-free graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **6** (4), 3–19 (1999) [Russian].
6. **V. V. Lozin** and **R. Mosca,** Independent sets in extension of $2K_2$-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **146**, 74–80 (2005).
7. **D. Lokshantov, M. Vatshelle,** and **Y. Villanger,** Independent set in P_5-free graphs in polynomial time, in *Proc. 25th Annual ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, Portland, OR, USA, Jan. 5–7, 2014* (SIAM, Philadelphia, PA, 2014), pp. 570–581.
8. **A. Grzesik, T. Klimošová, Mar. Pilipczuk,** and **Mic. Pilipczuk,** Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on P_6-free graphs (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2017) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1707.05491).
9. **T. Karthick** and **F. Maffray,** Weighted independent sets in classes of P_6-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **209**, 217–226 (2016).
10. **V. V. Lozin, J. Monnot,** and **B. Ries,** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs, *J. Discrete Algorithms* **31**, 104–112 (2015).
11. **V. V. Lozin** and **D. Rautenbach,** Some results on graphs without long induced paths, *Inform. Process. Lett.* **88**, 167–171 (2003).
12. **D. S. Malyshev** and **D. V. Sirotkin,** Polynomial-time solvability of the independent set problem in a certain class of subcubic planar graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **24** (3), 35–60 (2017) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **11** (3), 400–414 (2017)].
13. **T. Abrishami, M. Chudnovsky, C. Dibek,** and **P. Rzążewski,** Polynomial-time algorithm for maximum independent set in bounded-degree graphs with no long induced claws, in *Proc. 33rd Annual ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, Alexandria, VA, USA, Jan. 9–12, 2022* (SIAM, Philadelphia, PA, 2022), pp. 1448–1470.
14. **V. E. Alekseev, V. V. Lozin, D. S. Malyshev,** and **M. Milanič,** The maximum independent set problem in planar graphs, in *Mathematical Foundations of Computer Science 2008* (Proc. 33rd Int. Symp., Toruń, Poland, Aug. 25–29, 2008) (Springer, Heidelberg, 2008), pp. 96–107. (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 5162).

15. D. S. Malyshev, Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **20** (3), 26–44 (2013) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **7** (4), 537–548 (2013)].

16. L. Lovász and **M. D. Plummer,** *Matching Theory* (Norh-Holland, Amsterdam, 1986) (Ann. Discrete Math., Vol. 29).

17. G. Minty, On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **28** (3), 284–304 (1980).

18. N. Sbihi, Algorithme de recherche d'un stable de cardinalite maximum dans un graphe sans etoile, *Discrete Math.* **29** (1), 53–76 (1980). [French].

19. V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov, and **R. I. Tyshkevich,** *Lectures on Graph Theory* (Nauka, Moscow, 1990 [Russian]; B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994).

20. W. Hsu, Y. Ikura, and **G. L. Nemhauser,** A polynomial algorithm for maximum weighted vertex packing in graphs without long odd cycles, *Math. Program.* **20**, 225–232 (1981).

Sergey V. Sorochan

Received August 31, 2022
Revised November 3, 2022
Accepted November 3, 2022