УДК 517.958

Дата поступления
5 августа 1998 г.

Дементьева Н. В.
Локальная разрешимость и регуляризация многомерной обратной задачи для некоторого класса нелинейных гиперболических уравнений. — Новосибирск, 1998. — 36 с. — (Препринт/ РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 53).

Рассматривается многомерная обратная задача для нелинейного гиперболического уравнения. Доказаны локальная разрешимость и устойчивость решения в классе функций, аналитических по части переменных. Построен регуляризирующий алгоритм решения этой задачи с приближёнными данными из пространства непрерывных функций.

Адрес автора: 630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4. Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН.

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н.В. Дементьева

В работах [1], [2], [5], [6] изучались вопросы разрешимости многомерных обратных задач для линейных гиперболических уравнений. Определяемые в этих задачах коэффициенты обладают конечной гладкостью по одной пространственной переменной и являются аналитическими функциями по остальным переменным. При исследовании использовалась техника шкал банаховых пространств аналитических функций.

В настоящей работе исследуется вопрос разрешимости многомерной обратной задачи для некоторого класса нелинейных гиперболических уравнений (задача 2). Вначале аналогичный вопрос изучается для частного случая (задача 1). При доказательстве теорем существования используется модифицированный В.Г.Романовым (см.[1], [2]) метод Ниренберга. Для решения задачи 2 выписывается оценка устойчивости (теорема 3). Построен регуляризирующий алгоритм решения этой задачи с приближёнными данными из пространства непрерывных функций (теорема 4). Отметим, что регуляризация существенным образом зависит от вида аналитической шкалы, рассматриваемой в работе.

Задача 1

Постановка. *Пусть* $x \in R^1$, $z \in R_+ = \{z \in R^1 \Big| z > 0\}$, $t \in R^1$. *Рассмотрим задачу об определении пары функций* $u(x,z,t)$, $q(x,z)$, *удовлетворяющих равенствам*

$$u_{tt} - u_{zz} = u_{xx} + q(x,z)u^m(x,z,t)\,,\ x \in R^1,\ z \in R_+, \qquad (1)$$

$$t \in R^1,$$

$$u\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad u_z\Big|_{z=0} = g(x)\delta(t) + h(x,t)\theta(t) \qquad (2)$$

$$u\Big|_{z=0} = f(x,t)\theta(t) \qquad (3)$$

Здесь $m \geq 2$ — целое число, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $\theta(t)$ — функция Хевисайда, g, h, f — заданные гладкие функции, $g(x) \neq 0$ для $a - S_0 \leq x \leq b + S_0$, $S_0 > 0$, $a, b \in (-\infty, \infty)$.

Определение. *Пусть каждому вещественному числу $S>0$ поставлено в соответствие банахово пространство A_S (норма в котором обозначается символом $\|\cdot\|_S$), причём выполнено условие*

$$\varphi\in A_S,\ S'<S\Rightarrow\varphi\in A_{S'},\ \|\varphi\|_{S'}\le\|\varphi\|_S.$$

Тогда объединение этих пространств $\bigcup\limits_{0<S}A_S$ называется шкалой банаховых простаранств, а число S — параметром шкалы.

Введём в рассмотрение шкалу банаховых пространств $\bigcup\limits_{0<S}A_S(a,b)$ аналитических функций $\varphi(x)$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_S=\sup_{x\in[a,b]}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}|\varphi^{(k)}(x)|S^k.$$

Легко устанавливаются следующие свойства операций умножения и дифференцирования:

1. Если $\varphi_1\in A_S(a,b)$, $\varphi_2\in A_S(a,b)$, то $\|\varphi_1\,\varphi_2\|_S\le\|\varphi_1\|_S\,\|\varphi_2\|_S$.

2. Если $\varphi\in A_S(a,b)$, то $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi\in A_{S'}(a,b)$ при любых $k=1,2,\dots$ и $S'\in(0,S)$, причём $\|\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi\|_{S'}\le k^k\dfrac{\|\varphi\|_S}{(S-S')^k}$.

Замечание. *Задача (1)–(3) допускает обобщение на случай $x\in R^n$.*

Справедлива следующая локальная теорема существования и единственности решения.

Теорема 1. *Пусть $1/g^m(x)$, $g''(x)$ принадлежат $A_{S_0}(a,b)$, $S_0>0$, функции $f(x,t)$, $f_t(x,t)$, $f_{tt}(x,t)$, $h(x,t)$, $h_t(x,t)$ для каждого фиксированного $t\in[0,T]$, $T>0$, принадлежат $A_{S_0}(a,b)$ и как элементы $A_{S_0}(a,b)$ непрерывны по t на $[0,T]$, причём*

$$\max\Big[2\max_{0\le t\le T}\|f\|_{S_0}(t),\ 2\max_{0\le t\le T}\|f_t\|_{S_0}(t),\ \max_{0\le t\le T}\|h\|_{S_0}(t)\max(2,T),$$
$$\max\Big(\max_{0\le t\le T}\|f_{tt}\|_{S_0}(t),\max_{0\le t\le T}\|h_t\|_{S_0}(t)\Big)\,\max\Big(2,6\|g^{-m}(x)\|_{S_0}\Big),$$
$$\|g^{-m}(x)\|_{S_0}\Big)\max(2,3\|g''(x)\|_{S_0})\Big]=R_0,\tag{4}$$

$$f(x,0)=-g(x).\tag{5}$$

Тогда для любого $R>R_0$ найдётся такое $\widehat{a}$, $\widehat{a}S_0<T/2$, $\widehat{a}=\widehat{a}(S_0,R_0,\ T,\ R)$, что для каждого $S\in(0,S_0)$ в области $a-S\le x\le b+S$, $t\le T-z$, $0\le z\le\widehat{a}(S_0-S)$существует единственное обобщённое решение задачи (1)–(3), такое, что $u\Big|_{t<z}\equiv0$, а при $t\ge z$ функции $u(x,z,t)$, $q(x,z)$ вместе с производными $\frac{\partial}{\partial t}u$, $\frac{\partial}{\partial z}u$, $\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}u$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u$ являются при фиксированных z,t элементами из $A_S(a,b)$, непрерывными по переменным z,t в области

$$F(S)=\{(z,t)\Big|0\le z\le\widehat{a}(S_0-S),\ z\le t\le T-z\},$$

причём в этой области

$$\begin{gathered}\|u\|_S(z,t)\le R,\ \|u_t\|_S(z,t)\le R,\ \|u_{tt}\|_S(z,t)\le R,\\ \|q\|_S(z)\le \frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S},\ \|u_z\|_S(z,t)\le \frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S},\\ \|u_{tz}\|_S(z,t)\le \frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}.\end{gathered}\tag{6}$$

Доказательство. Очевидно, что решение задачи (1), (2) обладает свойством $u\Big|_{t<z}\equiv 0$. Поэтому достаточно его построить при $t\ge z$. Используя метод выделения особенностей [3], перейдём от обратной задачи (1)–(3) с разрывными краевыми условиями к задаче с гладкими краевыми условиями в соответствующей области. При этом мы получим важную формулу, связывающую искомый коэффициент $q(x,z)$ с величиной скачка производной $\partial u/\partial t$ на характеристической поверхности $t=z$, откуда возникает в дальнейшем интегродифференциальное уравнение для q.

Функцию $u(x,z,t)$ как решение задачи (1), (2) представим в окрестности характеристической поверхности $t=z$ в следующем виде

$$\begin{gathered}u(x,z,t)=\alpha(x,z)\theta(t-z)+\beta(x,z)(t-z)\theta(t-z)+\\ +\tilde u(x,z,t)(t-z)^2\theta(t-z),\end{gathered}\tag{7}$$

где $\alpha(x,z)$, $\beta(x,z)$, $\tilde u(x,z,t)$ — гладкие функции.

Значит, в той же окрестности для $u^m(x,z,t)$ справедливо представление

$$u^m(x,z,t)=\theta(t-z)\,[\alpha^m(x,z)+(t-z)\,\mu(\alpha,\beta,\tilde u,t-z)],$$

где $\mu(\alpha,\beta,\tilde u,t-z)$ — непрерывная функция своих аргументов. Выражение для $\mu(\alpha,\beta,\tilde u,t-z)$ легко получить с помощью формулы бинома Ньютона.

Подставляя разложение (7) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при особенностях, получаем дифференциальные уравнения для функций $\alpha(x,z)$, $\beta(x,z)$:

$$\alpha_z=0,\ -\alpha_{zz}+2\beta_z=\alpha_{xx}+q\alpha^m.\tag{8}$$

С другой стороны, подставляя (7) в краевые условия (2), (3) и приравнивая коэффициенты при δ,θ имеем

$$\alpha(x,0)=-g(x),\quad \alpha(x,0)=f(x,0).\tag{9}$$

Отсюда получаем необходимое условие разрешимости задачи

$$f(x,0)=-g(x).$$

Сопоставляя (8) и (9), находим функцию $\alpha(x,z)$:

$$\alpha=-g(x)\tag{10}$$

и выражение искомого коэффициента $q(x,z)$ через функцию $\beta(x,z)$:

$$q(x,z)=\frac{1}{(-1)^m g^m(x)}[2\beta_z(x,z)+g''(x)].\tag{11}$$

Отметим, что из представления (7) вытекает

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=z+0} = \beta(x,z). \tag{12}$$

В области $t \geq z \geq 0$, $a - S_0 \leq x \leq b + S_0$ задачу (1)–(3) заменим на эквивалентную

$$u_{tt} - u_{zz} = u_{xx} + q(x,z)u^m(x,z,t),\ a - S_0 \leq x \leq b + S_0,\ t > z > 0, \tag{13}$$

$$u_z\bigg|_{z=0} = h(x,t), \quad u\bigg|_{z=0} = f(x,t), \quad t \geq 0, \tag{14}$$

$$u\bigg|_{t=z+0} = \alpha(x,z), \quad t \geq 0. \tag{15}$$

Построим, исходя из выписанных выше соотношений, замкнутую систему интегродифференциальных уравнений обратной задачи в области $\mathcal{D} = \{(x,z,t)\Big|\, a - S_0 \leq x \leq b + S_0,\ 0 \leq z \leq t \leq T - z\}$. Кроме того, дополним эту систему уравнениями для производных u_z, u_{tz}, u_{tt}, указанных в формулировке теоремы. Обозначим

$$\varphi_1 = u,\ \varphi_2 = u_t,\ \varphi_3 = q,\ \varphi_4 = u_z,\ \varphi_5 = u_{tz},\ \varphi_6 = u_{tt}.$$

Уравнение для $\varphi_1 = u$ получается из равенств (13), (14) обращением оператора $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ с данными Коши при $z = 0$ (формула Даламбера):

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x,z,t) = \varphi_1^0(x,z,t) - \tfrac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} (\varphi_{1xx} + \varphi_3\,\varphi_1^m)(x,\xi,\tau)\,d\tau d\xi, \\ &\text{где} \\ &\varphi_1^0(x,z,t) = \frac{1}{2}[f(x,t+z) + f(x,t-z)] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-z}^{t+z} h(x,\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Для получения второго из уравнений продифференцируем по t задачу (13), (14) и вновь воспользуемся формулой Даламбера. Имеем

$$\varphi_2(x,z,t) = \varphi_2^0(x,z,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} (\varphi_{2xx} + m\,\varphi_3\,\varphi_1^{m-1}\varphi_2)(x,\xi,\tau)\,d\tau d\xi,$$

где (17)

$$\varphi_2^0(x,z,t) = \frac{1}{2}[f_t(x,t+z) + f_t(x,t-z)] + \frac{1}{2}[h(x,t+z) - h(x,t-z)].$$

Выведем уравнение для $\varphi_3 = q$. Положим в равенстве (17) $t = z + 0$:

$$\beta(x,z) = \varphi_2^0(x,z,z) - \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{\xi}^{2z-\xi} (\varphi_{2xx} + m\,\varphi_3\,\varphi_1^{m-1}\varphi_2)(x,\xi,\tau)\,d\tau d\xi$$

А теперь вычислим $\beta_z(x,z)$:

$$\beta_z(x,z) = [\varphi_{2z}^0(x,z,z) + \varphi_{2t}^0(x,z,z)] - \int\limits_0^z (\varphi_{2xx} + m\,\varphi_3\,\varphi_1^{m-1}\varphi_2)(x,\xi,2z-\xi)\,d\xi.$$

Подставляя это выражение в равенство (11), получаем искомое уравнение

$$\begin{aligned}\varphi_3(x,z) &= \varphi_3^0(x,z) - \frac{2}{(-1)^m g^m(x)} \int\limits_0^z (\varphi_{2xx} + m\,\varphi_3 \times \\ &\quad \times \varphi_1^{m-1}\varphi_2)(x,\xi,2z-\xi)\,d\xi, \\ \varphi_3^0(x,z) &= \frac{2}{(-1)^m g^m(x)}\Big[f_{tt}(x,2z) + h_t(x,2z)\Big] + \frac{g''(x)}{(-1)^m g^m(x)}.\end{aligned} \tag{18}$$

Уравнения для функций φ_4, φ_5 возникают при дифференцировании по z равенств (16) и (17):

$$\begin{aligned}\varphi_4(x,z,t) &= \varphi_4^0(x,z,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^z [(\varphi_{1xx} + \varphi_3\,\varphi_1^m)(x,\xi,t+z-\xi) + \\ &\quad + (\varphi_{1xx} + \varphi_3\,\varphi_1^m)(x,\xi,t-z+\xi)]\,d\xi, \\ \varphi_4^0(x,z,t) &= \varphi_{1z}^0 = \frac{1}{2}\Big[f_t(x,t+z) - f_t(x,t-z) + \\ &\quad + h(x,t+z) + h(x,t-z)\Big],\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\varphi_5(x,z,t) &= \varphi_5^0(x,z,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^z \Big[(\varphi_{2xx} + m\,\varphi_3 \times \\ &\quad \times \varphi_1^{m-1}\varphi_2)(x,\xi,t+z-\xi) + (\varphi_{2xx} + m\,\varphi_3\,\varphi_1^{m-1}\varphi_2)(x,\xi,t-z+\xi)\Big]\,d\xi, \\ \varphi_5^0(x,z,t) &= \varphi_{2z}^0 = \frac{1}{2}\Big[f_{tt}(x,t+z) - f_{tt}(x,t-z) + \\ &\quad + h_t(x,t+z) + h_t(x,t-z)\Big].\end{aligned} \tag{20}$$

Последнее уравнение для $\varphi_6 = u_{tt}$ аналогично первым двум. Задачу (13),(14) продифференцируем дважды по t, а искомое представление выпишем по формуле Даламбера:

$$\begin{aligned}\varphi_6(x,z,t) &= \varphi_6^0(x,z,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} (\varphi_{6xx} + m(m-1)\varphi_3 \times \\ &\quad \times \varphi_1^{m-2}\varphi_2^2 + m\varphi_3\,\varphi_1^{m-1}\varphi_6)(x,\xi,\tau)\,d\tau d\xi, \\ \varphi_6^0(x,z,t) &= \frac{1}{2}[f_{tt}(x,t+z) + f_{tt}(x,t-z)] + \frac{1}{2}[h_t(x,t+z) - \\ &\quad - h_t(x,t-z)].\end{aligned} \tag{21}$$

Итак, мы имеем систему (16)–(21) из шести интегродифференциальных уравнений, в которую входят производные только по переменной x и только под знаком интеграла. Запишем эту систему в операторном виде

$$\varphi = T(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_6) \tag{22}$$

и обозначим

$$\varphi^0 = T(0), \quad \varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_6^0).$$

По отношению к уравнению (22) справедлива следующая

Лемма 1. *В предположениях теоремы 1 для любого $R > R_0$ найдётся такое $\widehat{a}$, $\widehat{a}S_0 < T/2$, $\widehat{a} = \widehat{a}(S_0, R_0, T, R)$, что для каждого $S \in (0, S_0)$ существует единственное решение уравнения (22) такое, что компоненты вектор-функции φ при фиксированных $(z,t) \in F(S)$ являются элементами из $A_S(a,b)$ непрерывными по переменным z,t и для них справедливы неравенства*

$$\left.\begin{aligned} &\|\varphi_i - \varphi_i^0\|_S(z,t) \le R - R_0,\ i = 1,2,6,\\ &\|\varphi_i - \varphi_i^0\|_S(z,t) \le \frac{R - R_0}{S_0 - S},\ i = 3,4,5. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Доказательство. Используем модифицированный В.Г. Романовым (см., например, [2]) метод Л. Ниренберга [4].

Пусть $a_0 > 0$ и $a_0 \le T/2S_0$. Рассмотрим сходящуюся монотонно убывающую числовую последовательность

$$a_n = a_{n-1}/(1 + \frac{1}{n^2}),\ n = 1,2,\dots,$$

индуцированную последовательность вложенных областей

$$F_n = \{(z,t,S) \Big|\, 0 < S < S_0,\ 0 < z < a_n(S_0 - S),\ z \le t \le T - z\}$$

и их сечений $F_n(S)$ плоскостями $S = \mathrm{const}$. Обозначим $\widehat{a} = \lim a_n$.

Для уравнения (22) построим процесс последовательных приближений

$$\varphi^{n+1} = T(\varphi^n),\ n = 0,1,2,\dots,\ \varphi^n = (\varphi_1^n, \dots, \varphi_6^n)$$

и обозначим

$$\psi^n = \varphi^{n+1} - \varphi^n,\ n = 0,1,2,\dots,\ \psi^n = (\psi_1^n, \dots, \psi_6^n).$$

Утверждается, что можно выбрать $a_0 > 0$ так, что для каждого $n = 0,1,2,\dots$ выполнены неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\|\varphi_i^n - \varphi_i^0\|_S(z,t) \le R - R_0,\ i = 1,2,6,\\ &\|\varphi_i^n - \varphi_i^0\|_S(z,t) \le \frac{R - R_0}{S_0 - S},\ i = 3,4,5,\\ &(z,t) \in F_n(S), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \lambda_n = \max\Big\{ &\max_{i=1,2,6} \sup_{(z,t,S)\in F_n} \Big[\|\psi_i^n\|_S(z,t)\frac{a_n(S_0 - S) - z}{z}\Big],\\ &\max_{i=3,4,5} \sup_{(z,t,S)\in F_n} \Big[\|\psi_i^n\|_S(z,t)\frac{(a_n(S_0 - S) - z)^2}{a_n z}\Big]\Big\} < \infty, \end{aligned} \tag{25}$$

причём $\varphi_i^n \in A_S(a,b)$ непрерывны по z,t в замыкании $\overline{F_n(S)}$ и функциональная последовательность φ^n сходится равномерно в норме $A_S(a,b)$ по переменной x и норме пространства $C(F(S))$, $F(S) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \overline{F_n(S)}$ по переменным z,t.

Остановимся на отдельных моментах получения оценок (24), (25). Прежде всего, из условий теоремы 1 следует, что $\|\varphi_i^0\|_{S_0}(z,t) \le R_0$, $i = 1,\dots,6$. При этом $\varphi_i^1 \in A_S(a,b)$ и непрерывны для $(z,t) \in \overline{F_0(S)}$, $0 < S < S_0$. Тогда компоненты $\psi^0 = \varphi^1 - \varphi^0$, очевидно, обладают аналогичным свойством гладкости. Убедимся, что при $n = 0$ неравенство (25) имеет место.

Пусть $(z,t,S) \in F_0$. Выберем для иллюстрации первое и третье уравнения и получим для $\|\psi_i^0\|_S(z,t)$ оценки с весовыми множителями $\dfrac{z}{a_0(S_0-S)-z}$, $\dfrac{a_0 z}{(a_0(S_0-S)-z)^2}$.

При $i=1$ имеем

$$\|\psi_1^0\|_S(z,t) \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} \Big[\|\varphi_{1xx}^0\|_S(\xi,\tau) + \|\varphi_3^0\|_S(\xi)\times$$

$$\times (\|\varphi_1^0\|_S(\xi,\tau))^m\Big] d\tau d\xi \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} \Big[\frac{4R_0}{(S(\xi)-S)^2} + R_0^{m+1}\Big] d\tau d\xi \leq$$

$$\leq \int\limits_0^z (z-\xi)\Big[\frac{16R_0a_0^2}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2} + R_0^{m+1}\Big]d\xi \leq$$

$$\leq a_0^2 R_0(16 + R_0^m S_0^2)\int\limits_0^z \frac{z-\xi}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2}d\xi \leq$$

$$\leq a_0^2 R_0(16 + R_0^m S_0^2)\,\frac{z}{a_0(S_0-S)-z}.$$

Здесь $S(\xi)$ взято в виде

$$S(\xi) = \frac{1}{2a_0}(a_0(S_0+S)-\xi).$$

При таком выборе $S(\xi) > S$ и $(\xi,\tau,S(\xi)) \in F_0$. Для $\|\psi_2^0\|_S(z,t)$, $\|\psi_6^0\|_S(z,t)$ оценки аналогичны.

Пусть теперь $i=3$:

$$\|\psi_3^0\|_S(z) \leq R_0\int\limits_0^z \|\varphi_{2xx}^0 + m\varphi_3^0(\varphi_1^0)^{m-1}\varphi_2^0\|_S(\xi, 2z-\xi)d\xi \leq$$

$$\leq R_0\int\limits_0^z \Big[\frac{4R_0}{(S(\xi)-S)^2} + mR_0^{m+1}\Big]d\xi \leq R_0^2 a_0(16 + mR_0^m S_0^2)\times$$

$$\times\int\limits_0^z \frac{a_0}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2}d\xi \leq R_0^2 a_0(16+mR_0^m S_0^2)\,\frac{a_0 z}{(a_0(S_0-S)-z)^2}.$$

Оценки для компонент ψ_4^0, ψ_5^0 содержат такой же весовой множитель.

Проделав выкладки для всех $i = 1,\ldots,6$, получим

$$\lambda_0 \leq a_0\mu_0(a_0,R_0,S_0),$$

где $\mu_0(a_0,R_0,S_0)$ — непрерывная функция переменных a_0,R_0,S_0 и, следовательно, ограничена в любой ограниченной области. Поэтому λ_0 конечно.

Для $(z,t,S) \in F_1$ имеем:

$$\|\varphi_i^1 - \varphi_i^0\|_S(z,t) = \|\psi_i^0\|_S(z,t) \leq \frac{\lambda_0 z}{a_0(S_0-S)-z} \leq \frac{\lambda_0 a_1}{a_0-a_1} = \lambda_0,$$
$$i = 1,2,6,$$

$$\|\varphi_i^1-\varphi_i^0\|_S(z,t)=\|\psi_i^0\|_S(z,t)\le \frac{\lambda_0 a_0 z}{(a_0(S_0-S)-z)^2}\le$$
$$\le\frac{\lambda_0 a_0 a_1}{(a_0-a_1)^2(S_0-S)}=\frac{2\lambda_0}{(S_0-S)},\ i=3,4,5.$$

Если выбрать a_0 так, чтобы $2\lambda_0\le R-R_0$, то при $n=1$ будут выполнены неравенства (24).

Дальнейшее доказательство проводится методом индукции. Предположим, что φ^{n+1}, ψ^n для $n=0,1,2\dots,k$ удовлетворяют неравенствам (24), (25) и обладают нужными свойствами гладкости. Покажем, что подобные неравенства и свойства выполнены при увеличении k на единицу. В частности, устанавливается,что

$$\lambda_{k+1}\le\lambda_k\rho,\quad \rho=a_0\rho_0(a_0,R_0,S_0,R), \tag{26}$$

где ρ_0 — непрерывная функция своих аргументов.

Пусть $(z,t,S)\in F_{k+1}$. Используя предположения метода индукции, получим соответствующую оценку для $\|\psi_1^{k+1}\|_S(z,t)$:

$$\|\psi_1^{k+1}\|_S(z,t)\le\ \frac{1}{2}\int\limits_0^z\int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)}\|\psi_{1xx}^k+\varphi_3^{k+1}(\varphi_1^{k+1})^m-\varphi_3^k(\varphi_1^k)^m\|_S(\xi,\tau)\,d\tau d\xi.$$

Заметим, что

$$\varphi_3^{k+1}(\varphi_1^{k+1})^m-\varphi_3^k(\varphi_1^k)^m=\psi_3^k(\varphi_1^{k+1})^m+\varphi_3^k\psi_1^k\Big[(\varphi_1^{k+1})^{m-1}+\varphi_1^k(\varphi_1^{k+1})^{m-2}+$$
$$+\ldots+(\varphi_1^k)^{m-1}\Big].$$

Значит,

$$\|\psi_1^{k+1}\|_S(z,t)\le\ \int\limits_0^z(z-\xi)\Big[\ \frac{4\lambda_k\xi}{(S(\xi)-S)^2(a_{k+1}(S_0-S(\xi))-\xi)}+$$
$$+\ \frac{\lambda_k a_k\xi R^m}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)^2}+\frac{m\lambda_k\xi R^{m-1}(R-R_0+R_0S_0)}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)(S_0-S)}\Big]d\xi\le\ \lambda_k\int\limits_0^z(z-\xi)\times$$
$$\times\ \xi\frac{32a_{k+1}^2+a_ka_{k+1}S_0R^m+mR^{m-1}a_{k+1}^2S_0(R-R_0+R_0S_0)}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)^3}d\xi\le$$
$$\le\ \lambda_k a_0^2[32+S_0R^m+mS_0R^{m-1}(R-R_0+R_0S_0)]\frac{z}{a_{k+1}(S_0-S)-z},$$
$$(z,t,S)\in F_{k+1}.$$

Здесь $S(\xi)$ выбрано в виде

$$S(\xi)=\ \frac{1}{2a_{k+1}}(a_{k+1}(S_0+S)-\xi).$$

Оценим теперь $\|\psi_3^{k+1}\|_S(z)$:

$$\|\psi_3^{k+1}\|_S(z)\le\ R_0\int\limits_0^z\|\psi_{2xx}^k+m\varphi_3^{k+1}(\varphi_1^{k+1})^{m-1}\varphi_2^{k+1}-m\varphi_3^k\times$$
$$\times(\varphi_1^k)^{m-1}\varphi_2^k\|_S(\xi,2z-\xi)d\xi.$$

Аналогично предыдущим вычислениям имеем:

$$\|\psi_3^{k+1}\|_S(z) \le R_0\lambda_k a_0[32 + mS_0R^m + m^2S_0R^{m-1}(R - R_0 + R_0S_0)]\times$$
$$\times \int\limits_0^z \frac{a_{k+1}\xi}{(a_{k+1}(S_0 - S) - \xi)^3}d\xi \le R_0\lambda_k a_0[32 + mS_0R^m + m^2S_0R^{m-1}\times$$
$$\times (R - R_0 + R_0S_0)]\ \frac{a_{k+1}z}{(a_{k+1}(S_0 - S) - z)^2},\ (z,t,S) \in F_{k+1}.$$

Проделав выкладки для оставшихся компонент $\|\psi_i^{k+1}\|_S(z)$, получим в соответствии с нашим индукционным предположением оценки двух типов с весовыми множителями $\dfrac{z}{(a_{k+1}(S_0 - S) - z)}$ и $\dfrac{a_{k+1}z}{(a_{k+1}(S_0 - S) - z)^2}$. При $i = 1, 2, 6$ имеют место оценки первого типа, а при $i = 3, 4, 5$ — оценки второго типа. Кроме того, легко видеть, что выполнено неравенство (26).

Для $(z,t,S) \in F_{k+2}$ имеем

$$\|\varphi_i^{k+2} - \varphi_i^0\|_S(z,t) \le \sum_{n=0}^{k+1}\|\psi_i^n\|_S(z,t) \le \sum_{n=0}^{k+1}\frac{\lambda_n z}{a_n(S_0 - S) - z} \le$$
$$\le \lambda_0\sum_{n=0}^{k+1}\frac{\rho^n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} \le a_0\mu_0\sum_{n=0}^{k+1}\rho^n(n+1)^2,\ i = 1, 2, 6,$$

$$\|\varphi_i^{k+2} - \varphi_i^0\|_S(z,t) \le \sum_{n=0}^{k+1}\frac{\lambda_n a_n z}{(a_n(S_0 - S) - z)^2} \le \frac{\lambda_0}{S_0 - S}\sum_{n=0}^{k+1}\frac{\rho^n a_n a_{n+1}}{(a_n - a_{n+1})^2} \le$$
$$\le \frac{2a_0\mu_0}{S_0 - S}\sum_{n=0}^{k+1}\rho^n(n+1)^4,\ i = 3, 4, 5.$$

Выберем теперь $a_0 > 0$ таким, что

$$\rho < 1, \quad 2a_0\mu_0\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(n+1)^4 \le R - R_0.$$

Тогда при $n = k + 2$ будут выполнены неравенства (24). Тем самым завершено доказательство индукционного предположения.

Все построенные последовательные приближения φ^n как функции x принадлежат $A_S(a,b)$ для $(z,t,S) \in F = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} F_n$, непрерывны по z,t в области $F(S) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\overline{F_n(S)}$ и для них справедливы неравенства (24). При $S \in (0, S_0)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\psi^n(x,z,t)$ сходится равномерно в норме $A_S(a,b)$ по переменной x и норме $C(\overline{F(S)})$ по переменным z,t. Поэтому компоненты предельной функции $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\psi^n + \psi^0$ являются элементами $A_S(a,b)$, непрерывными по $(z,t) \in F(S)$, удовлетворяют интегральным уравнениям (16)–(21) и для них справедливы неравенства (23). Единственность построенного решения устанавливается стандартным приёмом [4]. Лемма 1 доказана, тем самым завершено доказательство теоремы 1.

Задача 2

Постановка. *Рассмотрим теперь обратную задачу для уравнения*

$$u_{tt} - u_{zz} = u_{xx} + q(x,z)F(u(x,z,t),x,z,t),\ x \in R^1,\ z \in R_+,\ t \in R^1 \tag{27}$$

с начальными и краевыми условиями

$$u\Big|_{t<0} \equiv 0, \quad u_z\Big|_{z=0} = g(x)\delta(t) + h(x,t)\theta(t), \tag{28}$$

$$u\Big|_{z=0} = f(x,t)\theta(t). \tag{29}$$

$$(g(x) \neq 0,\ a - S_0 \leq x \leq b + S_0,\ F(0,x,z,t) = 0).$$

Мы оставляем здесь прежние буквенные обозначения. Зададимся вопросом: при каких условиях на функции $F(u,x,z,t)$, $g(x), h(x,t)$, $f(x,t)$ для этой задачи справедлива аналогичная теореме 1 локальная теорема существования и единственности решения в том же классе гладкости?

Введём параметры $T > 0, S_0 > 0, \gamma_1, \gamma_2 \in (-\infty, \infty), R_{00} > 0$.

Пусть для каждой фиксированной точки (z,t) из области $\Delta = \{0 \leq z,\ z \leq t \leq T - z,\ T > 0\}$ функции $F(u,x,z,t)$, $\dfrac{\partial F}{\partial t}(u,x,z,t)$ принадлежат пространству B. Пространство B составляют аналитические функции $\psi(u,x)$ двух аргументов: для любого $x \in \Big[a - S_0, b + S_0\Big]$ функция $\psi(u,x)$ допускает по u аналитическое продолжение в область Ω комплексного переменного $w = u + iv$, содержащую в себе замкнутую область $\bar\Omega(\gamma_1,\gamma_2,R_{00}) = \{w \in C \Big| |w - \gamma| \leq R_{00},\ \gamma \in \Big[\gamma_1, \gamma_2\Big]\}$ (см. рис. 1).

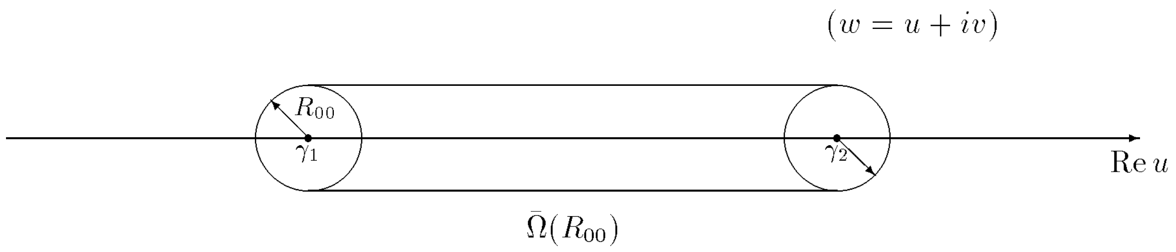

Рис. 1

С другой стороны, для любого $u \in \Omega$ функция $\psi(u,x)$ принадлежит $A_{S_0}(a,b)$.

Вычислим

$$M = \max_{(z,t)\in\Delta}\ \max_{\xi\in\Gamma(\bar\Omega(\gamma_1,\gamma_2,R_{00}))} \Big\| F(\xi,x,z,t) \Big\|_{S_0}, \tag{30}$$

$$\tilde M = \max_{(z,t)\in\Delta}\ \max_{\xi\in\Gamma(\bar\Omega(\gamma_1,\gamma_2,R_{00}))} \Big\| \frac{\partial F}{\partial t}(\xi,x,z,t) \Big\|_{S_0}, \tag{31}$$

где $\Gamma(\bar\Omega(\gamma_1,\gamma_2,R_{00}))$ — граница области $\overline\Omega(\gamma_1,\gamma_2,R_{00})$.

Рассмотрим область $\mathcal{D} = \{(x,z,t)\Big| a - S_0 \le x \le b + S_0, S_0 > 0; (z,t) \in \Delta\}$ и функцию $u_0(x,z,t)$ в $\mathcal{D}$:

$$u_0(x,z,t) = \frac{1}{2}[f(x,t+z) + f(x,t-z)] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-z}^{t+z} h(x,\tau)d\tau.$$

Считаем, что $f(x,t)$, $h(x,t)$ из граничных условий (28), (29) таковы, что

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \min_{(x,z,t)\in\mathcal{D}} u_0(x,z,t), \\ \gamma_2 &= \max_{(x,z,t)\in\mathcal{D}} u_0(x,z,t). \end{aligned} \tag{32}$$

Теорема 2. *Пусть $g''(x)$ принадлежит $A_{S_0}(a,b)$, $S_0 > 0$, функции $f(x,t)$, $f_t(x,t)$, $f_{tt}(x,t)$, $h(x,t)$, $h_t(x,t)$ непрерывны по $t \in \Big[0,T\Big]$, $T > 0$ со значениями в банаховом пространстве $A_{S_0}(a,b)$, функция $1/F(-g(x),x,t,t)$ непрерывна по $t \in \Big[0,T/2\Big]$ со значениями в $A_{S_0}(a,b)$, причём выполнены условия (32) и*

$$\begin{aligned} &\max\Big[2\max_{0\le t\le T}\|f\|_{S_0}(t), 2\max_{0\le t\le T}\|f_t\|_{S_0}(t), \max_{0\le t\le T}\|h\|_{S_0}(t)\max(2,T), \\ &\max_{0\le t\le T/2}\left\|\frac{1}{F(-g(x),x,t,t)}\right\|_{S_0}(t)\max\Big(6\max_{0\le t\le T}\|f_{tt}\|_{S_0}(t), \\ &6\max_{0\le t\le T}\|h_t\|_{S_0}(t), 3\|g''(x)\|_{S_0}, 2)\Big] = R_0, \end{aligned} \tag{33}$$

$$f(x,0) = -g(x). \tag{34}$$

Пусть далее функции $F(u,x,z,t)$, $\frac{\partial F}{\partial t}(u,x,z,t)$ непрерывны по (z,t) в Δ со значениями в пространсве B, описанном выше.

Тогда для любого R из интервала $(R_0, R_0 + R_{00})$найдётся такое $\widehat{a}$, $\widehat{a}S_0 < T/2$, $\widehat{a} = \widehat{a}(S_0, R_0, R_{00}, T, R, M, \tilde{M})$, что для каждого $S \in (0, S_0)$ в области $a - S \le x \le b + S, t \le T - z$, $0 \le z \le \widehat{a}(S_0 - S)$ существует единственное обобщённое решение задачи (27)–(29) такое, что $u\Big|_{t<z} \equiv 0$, а при $t \ge z$ функции $u(x,z,t), u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x,z,t)$, $q(x,z)$ являются при фиксированных z,t элементами из $A_S(a,b)$непрерывными по переменным z,t в области $F(S) = \{(z,t)\Big| 0 \le z \le \widehat{a}(S_0 - S),\ z \le t \le T - z\}$, причём в этой области справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\|u - u_0\|_S(z,t) \le R - R_0,\ \|u_t - u_{0t}\|_S(z,t) \le R - R_0, \\ &\|q - q_0\|_S(z) \le \frac{R - R_0}{S_0 - S}, \end{aligned} \tag{35}$$

где $q_0(x,z) = \dfrac{2}{F(-g(x),x,z,z)}\Big[f_{tt}(x,2z) + h_t(x,2z)\Big] + \dfrac{g''(x)}{F(-g(x),x,z,z)}$.

Доказательство. По аналогии с задачей 1, используя стандартный метод выделения особенностей [3], перейдём от обратной задачи (27)–(29) с разрывными граничными данными к эквивалентной задаче с гладкими граничными данными в области $t \ge z \ge 0$, $a - S \le x \le b + S$, $S < S_0$.

Следствием условия $F(0,x,z,t) = 0$ является равенство $u \equiv 0$ для $z < t$. Поэтому $F(u(x,z,t),x,z,t) = 0$ для $z < t$.

Функцию $u(x,z,t)$ как решение задачи (27), (28) представим в окрестности характеристической поверхности $t = z$ в виде

$$u(x,z,t) = \alpha(x,z)\theta(t-z) + \beta(x,z)(t-z)\theta(t-z) + \tilde{u}(x,z,t)(t-z)^2\theta(t-z), \qquad (36)$$

где $\alpha(x,z), \beta(x,z), \tilde{u}(x,z,t)$ — гладкие функции.

Воспользовавшись выражением (36), выпишем представление в той же окрестности для функции $F(u(x,z,t),x,z,t)$.

Используя формулу Лагранжа, находим

$$\begin{aligned} F(u(x,z,t),x,z,t) &= F(u(x,z,z),x,z,z)+ \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}F(u(x,z,t),x,z,t)\Big|_{t=t^*}(t-z), \end{aligned} \qquad (37)$$

где $t^* \in [z,t]$.

Следовательно, в окрестности характеристики $t = z$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} F(u(x,z,t),x,z,t) &= F(\alpha(x,z),x,z,z)\theta(t-z)+ \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}F(u(x,z,t),x,z,t)\Big|_{t=t^*}(t-z)\theta(t-z) \end{aligned} \qquad (38)$$

Подставляя (36) и (38) в уравнение (27) и приравнивая коэффициенты при особенностях, получаем дифференциальные уравнения для функций $\alpha(x,z)$, $\beta(x,z)$:

$$\alpha_z = 0,\ -\alpha_{zz} + 2\beta_z = \alpha_{xx} + q\,F(\alpha(x,z),x,z,z). \qquad (39)$$

С другой стороны, из (28), (29) следует, что

$$\alpha(x,0) = -g(x),\ \alpha(x,0) = f(x,0), \qquad (40)$$

откуда возникает необходимое условие разрешимости задачи $f(x,0) = = -g(x)$. Сопоставляя (39) и (40), находим функцию $\alpha(x,z)$:

$$\alpha(x,z) = -g(x). \qquad (41)$$

Из представления (36) ясно, что $\beta(x,z)$ — скачок производной по t от решения на характеристике $t = z$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=z+0} = \beta(x,z).$$

Искомый коэффициент $q(x,z)$ легко выражается в силу (39) через функцию $\beta(x,z)$:

$$q(x,z) = \frac{1}{F(-g(x),x,z,z)}\Big[2\beta_z + g''(x)\Big]. \qquad (42)$$

В области $t \ge z \ge 0$, $a - S \le x \le b + S$, $S < S_0$ задачу (27)–(29) заменим на эквивалентную

$$\begin{gathered} u_{tt} - u_{zz} = u_{xx} + q(x,z)F(u(x,z,t),x,z,t), \\ a - S \le x \le b + S,\ t > z > 0, \end{gathered} \qquad (43)$$

$$u_z\Big|_{z=0} = h(x,t), \quad u\Big|_{z=0} = f(x,t),\ t \ge 0, \qquad (44)$$

$$u|_{t=z+0} = \alpha(x,z), \quad t \ge 0. \qquad (45)$$

Построим, исходя из выписанных соотношений, замкнутую систему интегродифференциальных уравнений обратной задачи в области $a - S \le x \le b + S, S < S_0$, $0 \le z \le t \le T - z$. Обозначим

$$\varphi_1 = u,\ \varphi_2 = u_t,\ \varphi_3 = q.$$

Действуя аналогично тому, как мы поступали в задаче 1, выведем уравнения для $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Они имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,z,t) = &\ \varphi_1^0(x,z,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} \Big[\varphi_{1xx} + \\ + &\ \varphi_3 F(\varphi_1, x, \xi, \tau)\Big](x,\xi,\tau)d\tau d\xi, \\ \varphi_1^0(x,z,t) = &\ \frac{1}{2}\Big[f(x,t+z) + f(x,t-z)\Big] + \ \frac{1}{2}\int\limits_{t-z}^{t+z} h(x,\tau)d\tau,\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x,z,t) = &\ \varphi_2^0(x,z,t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} \Big[\varphi_{2xx} + \\ + &\ \varphi_3 \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1, x, \xi, \tau)\varphi_2 + \varphi_3 \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi_1, x, \xi, \tau)\Big](x,\xi,\tau)d\tau d\xi, \\ \varphi_2^0(x,z,t) = &\ \frac{1}{2}\Big[f_t(x,t+z) + f_t(x,t-z)\Big] + \\ + &\ \frac{1}{2}\Big[h(x,t+z) - h(x,t-z)\Big],\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(x,z) = &\ \varphi_3^0(x,z) - \frac{2}{F(-g(x),x,z,z)}\int\limits_0^z \Big[\varphi_{2xx} + \\ &+ \varphi_3 \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1, x, \xi, 2z-\xi)\varphi_2 + \\ &+ \ \varphi_3 \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi_1, x, \xi, 2z-\xi)\Big](x,\xi,2z-\xi)d\xi, \\ \varphi_3^0(x,z) = &\ \frac{2}{F(-g(x),x,z,z)}\Big[f_{tt}(x,2z) + h_t(x,2z)\Big] + \\ &+ \ \frac{g''(x)}{F(-g(x),x,z,z)}.\end{aligned} \tag{48}$$

Систему (46)–(48) запишем в операторном виде

$$\varphi = T(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \tag{49}$$

и обозначим $\varphi^0 = T(0), \quad \varphi^0 = (\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0)$.

По отношению к уравнению (49) справедлива следующая

Лемма 2. *В предположениях теоремы 2, для любого R из интервала $(R_0, R_0 + R_{00})$ найдется такое $\widehat{a}$, $\widehat{a}S_0 < T/2$, $\widehat{a} = \widehat{a}(S_0, R_0, R_{00}, T,\ R, M, \widetilde{M})$, что для каждого*

$S \in (0, S_0)$ существует единственное решение уравнения (49) такое, что компоненты вектор-функции φ при фиксированных $(z,t) \in F(S)$ являются элементами из $A_S(a,b)$ непрерывными по переменным z,t и для них справедливы неравенства

$$\left.\begin{aligned} \|\varphi_i - \varphi_i^0\|_S(z,t) \le R - R_0,\ i = 1,2 \\ \|\varphi_3 - \varphi_3^0\|_S(z) \le \frac{R - R_0}{S_0 - S}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Доказательство леммы 2 в основном аналогично доказательству леммы 1.

Пусть по-прежнему

$$a_n = a_{n-1}/(1 + \tfrac{1}{n^2}),\ n = 1, 2, \ldots,\ (a_0 > 0,\ a_0 \le \tfrac{T}{2S_0}),$$

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = a_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}},$$

$$F_n = \{(z,t,S)\Big| 0 < S < S_0, 0 < z < a_n(S_0 - S),\ z \le t \le T - z\},$$

$F_n(S)$ — сечения F_n плоскостями $S = const$.

Для уравнения (49) построим процесс последовательных приближений

$$\varphi^{n+1} = T(\varphi^n),\ n = 0, 1, \ldots,\ \varphi^n = (\varphi_1^n, \varphi_2^n, \varphi_3^n).$$

Обозначим

$$\psi^n = \varphi^{n+1} - \varphi^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,\ \psi^n = (\psi_1^n, \psi_2^n, \psi_3^n).$$

Утверждается, что при подходящем выборе $a_0 \in (0, T/2S_0)$ для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\|\varphi_i^n - \varphi_i^0\|_S(z,t) \le R - R_0,\ i = 1,2, \\ &\|\varphi_3^n - \varphi_3^0\|_S(z) \le \frac{R - R_0}{S_0 - S}, \\ &(z,t) \in F_n(S), \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

$$\lambda_n = \max\left\{\max_{i=1,2} \sup_{(z,t,S)\in F_n} \left[\|\psi_i^n\|_S(z,t)\ \frac{a_n(S_0 - S) - z}{z}\right],\right. \tag{52}$$

$$\left.\sup_{(z,t,S)\in F_n} \left[\|\psi_3^n\|_S(z)\ \frac{(a_n(S_0 - S) - z)^2}{a_n z}\right]\right\} < \infty,$$

причём $\varphi_i^n \in A_S(a,b)$ непрерывны по z,t в замыкании $\overline{F_n(S)}$ и функциональная последовательность $\varphi^n(x,z,t)$ равномерно сходится по переменной x в норме пространства $A_S(a,b)$ и по переменным z,t в норме пространства $C(F(S))$, $F(S) = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \overline{F_n(S)}$.

Утверждение доказывается методом математической индукции.

База индукции. Из условий теоремы 2 следует, что $\varphi_i^0(x,z,t), i = 1,2,3$ непрерывны по z,t в Δ со значениями в банаховом пространстве $A_{S_0}(a,b)$, при этом $\|\varphi_i^0\|_{S_0}(z,t) \le R_0$, $i = 1,2,3$. Переходим к следующему приближению. Ясно, что $\varphi_i^1 \in A_S(a,b)$ и непрерывны для $(z,t) \in \overline{F_0(S)}$, $0 < S < S_0$. Компоненты $\psi_i^0 = \varphi_i^1 - \varphi_i^0$ обладают аналогичным свойством гладкости. Убедимся, что при $n = 0$ имеет место неравенство (52). Пусть $(z,t,S) \in F_0$. Проведём подробные вычисления для первой и третьей компонент ψ^0.

При $i = 1$ имеем

$$\|\psi_1^0\|_S(z,t) \le \frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} \Big\|\varphi_{1xx}^0 + \varphi_3^0\, F(\varphi_1^0, x, \xi, \tau)\Big\|_S(\xi,\tau)d\tau d\xi \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} \Big[\frac{4R_0}{(S(\xi)-S)^2} + R_0\, M\Big] d\tau d\xi \le a_0\mu_{01}\ \frac{z}{a_0(S_0-S)-z},$$

где $\mu_{01} = a_0 R_0(16 + MS_0^2)$. Здесь, как и в задаче 1, $S(\xi)$ выбрано в виде

$$S(\xi) = \frac{1}{2a_0}\Big(a_0(S_0+S) - \xi\Big).$$

Константа M определяется по формуле (30).

Пусть теперь $i = 3$:

$$\|\psi_3^0\|_S(z) \le R_0 \int_0^z \|\varphi_{2xx}^0 + \varphi_3^0 \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1^0, x, \xi, 2z-\xi)\varphi_2^0 +$$

$$+\ \varphi_3^0 \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi_1^0, x, \xi, 2z-\xi)\|_S(\xi, 2z-\xi)d\xi.$$

Оценим $\Big\| \dfrac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}\Big\|_S(z,t)$, $S \in (0, S_0)$. Множество значений $\dfrac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}$ совпадает с множеством значений $\dfrac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=\tilde u_0}$, где $\tilde u_0$ — произвольная точка из отрезка $[\gamma_1,\gamma_2]$, а тройка переменных $(x,z,t) \in \mathcal{D}$. Воспользуемся тем фактом, что F допускает по первому аргументу аналитическое продолжение в область Ω. В круге радиуса R_{00} с центром в точке $\tilde u_0$ выпишем интегральную формулу Коши:

$$F(u,x,z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-\tilde u_0|=R_{00}} \frac{F(\xi,x,z,t)}{\xi-u} d\xi.$$

Откуда

$$\frac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=\tilde u_0} = \frac{k!}{2\pi R_{00}^k}\int_0^{2\pi} \frac{F(\tilde u_0 + R_{00}e^{i\varphi}, x, z, t)}{e^{ik\varphi}} d\varphi.$$

Значит, справедлива следующая оценка:

$$\Big\| \frac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}\Big\|_S(z,t) \le \frac{k!}{R_{00}^k} M. \qquad (53)$$

Используя неравенства (53), получим:

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1^0, x, \xi, 2z-\xi)\right\|_S \leq \frac{M}{R_{00}}.$$

По условию теоремы 2 функция $\frac{\partial F}{\partial t}$ допускает по первому аргументу аналитическое продолжение в область Ω. Следовательно, справедлива оценка, аналогичная (53):

$$\left\|\frac{\partial^{k+1}F}{\partial t \partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}\right\|_S(z,t) \leq \frac{k!}{R_{00}^k}\widetilde{M}. \tag{54}$$

Значит,

$$\left\|\frac{\partial F}{\partial t}(\varphi_1^0, x, \xi, 2z-\xi)\right\|_S \leq \widetilde{M}.$$

Учитывая вышеизложенное, имеем

$$\|\psi_3^0\|_S(z) \leq \; R_0\int_0^z \left[\frac{4R_0}{(S(\xi)-S)^2} + R_0^2\frac{M}{R_{00}} + R_0\widetilde{M}\right]d\xi \leq$$

$$\leq \; R_0^2 a_0(16 + R_0\frac{M}{R_{00}}\,S_0^2 + \widetilde{M}S_0^2)\int_0^z \frac{a_0}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2}d\xi \leq$$

$$\leq a_0\mu_{03}\,\frac{a_0 z}{(a_0(S_0-S)-z)^2},$$

где $\mu_{03} = R_0^2\left(16 + S_0^2\left(\,\dfrac{R_0 M}{R_{00}} + \widetilde{M}\right)\right)$.

Для $\|\psi_2^0\|_S(z,t)$ (как и для $\|\psi_1^0\|_S(z,t)$) справедлива оценка с весовым множителем $\dfrac{z}{a_0(S_0-S)-z}$:

$$\|\psi_2^0\|_S(z,t) \leq a_0\mu_{02}\frac{z}{a_0(S_0-S)-z},$$

где $\mu_{02} = \mu_{03}\,\dfrac{a_0}{R_0}$.

Итак, из полученных оценок имеем:

$$\lambda_0 \leq a_0\mu_0,\; \mu_0 = \max_{1\leq i\leq 3}\mu_{0i}(a_0, R_0, R_{00}, S_0, M, \widetilde{M}).$$

Поскольку $a_0, R_0, S_0, M, \widetilde{M}$ конечны, а $R_{00} \neq 0$, то λ_0 конечно.

Для $(z,t,S) \in F_1$ стандартным прёмом получим (см. задачу 1):

$$\|\varphi_i^1 - \varphi_i^0\|_S(z,t) \leq \lambda_0,\; i = 1, 2,$$

$$\|\varphi_3^1 - \varphi_3^0\|_S(z) \leq \; \frac{2\lambda_0}{S_0 - S}$$

Если выбрать a_0 так, чтобы $2\lambda_0 \leq R - R_0$, то при $n = 1$ будут выполнены неравенства (51).

Индукционный шаг. Пусть φ^{n+1}, ψ^n для $n = 0, 1, \ldots, k$ удовлетворяют неравенствам (51), (52) и обладают нужными свойствами гладкости. Покажем, что подобные неравенства и свойства выполнены при увеличении k на единицу.

Из вида интегродифференциальных уравнений (46)–(48) ясно, что нам понадобятся оценки нормы в $A_S(a,b)$ сложных функций $F(u(x,z,t),x,z,t)$, $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u(x,z,t),x,z,t)$, $\dfrac{\partial F}{\partial t}(u(x,z,t),x,z,t)$. Заметим, что при $u = u_0$ (база индукции) соответствующие оценки получались из соотношений (53), (54).

Рассмотрим в $\mathcal{D}$ формально составленный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}(x,z,t)\,(u(x,z,t)-u_0(x,z,t))^k \tag{55}$$

и исследуем вопрос о его сходимости.

Мы ищем решение $u(x,z,t)$ нашей задачи в классе функций, для которых

$$\|u-u_0\|_S \le R - R_0 < R_{00}, \quad S \in (0, S_0). \tag{56}$$

В силу (56) и (53) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left\|\frac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}\right\|_S(z,t)(\|u-u_0\|_S(z,t))^k$$

сходится, а, значит, сходится и ряд (55). Кроме того, F допускает аналитическое продолжение по первому аргументу. Значит, функция $F(u(x,z,t),x,z,t)$ является суммой своего ряда Тейлора (55):

$$F(u(x,z,t),x,z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}(x,z,t)\,(u(x,z,t)-u_0(x,z,t))^k.$$

На индукционном шаге мы воспользуемся неравенствами:

$$\begin{aligned}\|F(u_1(x,z,t),x,z,t)\|_S \le &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R-R_0)^k}{k!}\left\|\frac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}\right\|_S(z,t) \le \\ \le M\frac{R_{00}}{R_{00}-R+R_0},&\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}&\|F(u_1(x,z,t),x,z,t) - F(u_2(x,z,t),x,z,t)\|_S \le \\ &\quad\le \|u_1-u_2\|_S(z,t)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(R-R_0)^{k-1}}{(k-1)!}\left\|\frac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}\right\|_S(z,t) \le \\ &\quad\le \|u_1-u_2\|_S(z,t)\frac{M}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00}),\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{\partial F}{\partial u}(u_1(x,z,t),x,z,t)\right\|_S \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(R-R_0)^{k-1}}{(k-1)!}\times \\ &\times \left\|\frac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)}\right\|_S(z,t) \le \frac{M}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00}),\end{aligned} \tag{59}$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial u}(u_1(x,z,t),x,z,t) - \frac{\partial F}{\partial u}(u_2(x,z,t),x,z,t) \right\|_S \le$$

$$\le \ \|u_1 - u_2\|_S(z,t) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(R-R_0)^{k-2}}{(k-2)!} \ \left\| \frac{\partial^k F}{\partial u^k}\Big|_{u=u_0(x,z,t)} \right\|_S (z,t) \le \tag{60}$$

$$\le \|u_1 - u_2\|_S(z,t) \frac{M}{R_{00}^2} P(R,R_0,R_{00}),$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial t}(u_1(x,z,t),x,z,t) \right\|_S \le \widetilde{M} \frac{R_{00}}{R_{00} - R + R_0}, \tag{61}$$

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial t}(u_1(x,z,t),x,z,t) - \frac{\partial F}{\partial t}(u_2(x,z,t),x,z,t) \right\|_S \le$$

$$\le \ \|u_1 - u_2\|_S(z,t) \frac{\widetilde{M}}{R_{00}} L(R,R_0,R_{00}), \tag{62}$$

где

$$L(R,R_0,R_{00}) = \ \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{R-R_0}{R_{00}}\right)^k = \frac{R_{00}^2}{(R_{00}-R+R_0)^2},$$

$$P(R,R_0,R_{00}) = \ \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\left(\frac{R-R_0}{R_{00}}\right)^k = \frac{2R_{00}^3}{(R_{00}-R+R_0)^3}.$$

Эти оценки справедливы для функции $F(u(x,z,t),x,z,t)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2 (F допускает по u аналитическое продолжение в область Ω) и функций $u_1(x,z,t)$, $u_2(x,z,t)$ из $A_S(a,b)$ по первому аргументу таких, что $\|u_i - u_0\|_S(z,t) \le R - R_0 < R_{00}$, $i = 1,2$.

Пусть $(z,t,S) \in F_{k+1}$. Оценим $\|\psi_1^{k+1}\|_S(z,t)$:

$$\|\psi_1^{k+1}\|_S(z,t) \le \ \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} \|\psi_{1xx}^k + \varphi_3^{k+1}F(\varphi_1^{k+1},x,\xi,\tau) -$$

$$- \varphi_3^k F(\varphi_1^k,x,\xi,\tau)\|_S(\xi,\tau)d\tau d\xi = \ \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)} \|\psi_{1xx}^k + \psi_3^k F(\varphi_1^{k+1},x,\xi,\tau) +$$

$$+ \varphi_3^k[F(\varphi_1^{k+1},x,\xi,\tau) - F(\varphi_1^k,x,\xi,\tau)]\|_S(\xi,\tau)d\tau d\xi.$$

Используя предположения метода индукции, неравенства (57), (58) и выбирая $S(\xi) = \dfrac{1}{2a_{k+1}}(a_{k+1}(S_0+S) - \xi)$, имеем

$$\|\psi_1^{k+1}\|_S(z,t) \le \ \int\limits_0^z (z-\xi)\Big[\frac{4\lambda_k \xi}{(S(\xi)-S)^2(a_{k+1}(S_0 - S(\xi)) - \xi)} +$$

$$+ \ \frac{\lambda_k a_k \xi}{(a_{k+1}(S_0 - S) - \xi)^2} M \frac{R_{00}}{R_{00} - R + R_0} + \frac{R - R_0 + R_0 S_0}{S_0 - S} \times$$

$$\times \ \frac{\lambda_k \xi}{a_{k+1}(S_0-S)-\xi}\,\frac{M}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})\Big]d\xi \le$$

$$\le \ \lambda_k a_0 \rho_{01}\int\limits_0^z \frac{(z-\xi)\xi}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)^3}d\xi \le \lambda_k a_0 \rho_{01}\frac{z}{a_{k+1}(S_0-S)-z},$$

где

$$\rho_{01} = a_0\left[32 + S_0 M\left(\frac{R_{00}}{R_{00}-R+R_0} + \frac{R-R_0+R_0S_0}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})\right)\right].$$

Получим теперь оценку для $\|\psi_3^{k+1}\|_S(z)$:

$$\|\psi_3^{k+1}\|_S(z) \le \ R_0\int\limits_0^z \Big\|\psi_{2xx}^k + \psi_3^k\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1^{k+1},x,\xi,2z-\xi)\varphi_2^{k+1} + \varphi_3^k\times$$

$$\times \ \Big[\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1^{k+1},x,\xi,2z-\xi) - \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1^{k},x,\xi,2z-\xi)\Big]\varphi_2^{k+1}+$$

$$+ \ \varphi_3^k\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}(\varphi_1^{k},x,\xi,2z-\xi)\psi_2^k + \psi_3^k\frac{\partial F}{\partial t}(\varphi_1^{k+1},x,\xi,2z-\xi) + \varphi_3^k\times$$

$$\times \ \Big[\frac{\partial F}{\partial t}(\varphi_1^{k+1},x,\xi,2z-\xi) - \frac{\partial F}{\partial t}(\varphi_1^{k},x,\xi,2z-\xi)\Big]\Big\|_S(\xi,2z-\xi)d\xi \le$$

$$\le \ R_0\int\limits_0^z \Big[\frac{4\lambda_k\xi}{(S(\xi)-S)^2(a_{k+1}(S_0-S(\xi))-\xi)} + \frac{\lambda_k a_k \xi}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)^2}\times$$

$$\times \ ML(R,R_0,R_{00})R + \frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}\frac{\lambda_k\xi}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)}\,\frac{M}{R_{00}^2}\times$$

$$\times \ P(R,R_0,R_{00})R + \frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}\frac{\lambda_k\xi}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)}\,\frac{M}{R_{00}}\times$$

$$\times L(R,R_0,R_{00}) + \ \frac{\lambda_k a_k\xi}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)^2}\widetilde{M}\frac{R_{00}}{R_{00}-R+R_0}+$$

$$+ \ \frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}\frac{\lambda_k\xi}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)}\,\frac{\widetilde{M}}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})\Big]d\xi \le$$

$$\le \ \lambda_k a_0\rho_{03}\int\limits_0^z \frac{a_{k+1}\xi}{(a_{k+1}(S_0-S)-\xi)^3}d\xi \le \lambda_k a_0\rho_{03}\frac{a_{k+1}z}{(a_{k+1}(S_0-S)-z)^2},$$

$$(z,t,S)\in F_{k+1},$$

где

$$\rho_{03} = R_0\ \Big[32 + \frac{S_0M}{R_{00}}\Big(L(R,R_0,R_{00})(2R-R_0+R_0S_0) + \frac{R}{R_{00}}P(R,R_0,$$

$$R_{00})\Big) + \ S_0\widetilde{M}\Big(\frac{R_{00}}{R_{00}-R+R_0} + \frac{R-R_0+R_0S_0}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})\Big)\Big].$$

Легко видеть, что $\|\psi_2^{k+1}\|_S(z,t)$ оценивается следующим образом:

$$\|\psi_2^{k+1}\|_S(z,t) \le \lambda_k a_0 \rho_{02} \frac{z}{a_{k+1}(S_0 - S) - z},\ (z,t,S) \in F_{k+1},$$

где

$$\rho_{02} = \rho_{03}\ \frac{a_0}{R_0}.$$

Полученные оценки позволяют заключить, что

$$\lambda_{k+1} \le \lambda_k \rho,\ \rho = a_0\rho_0, \rho_0 = \max_{1\le i\le 3} \rho_{0i}(a_0, R_0, R_{00}, R, S_0, M, \widetilde{M}).$$

Из вида функций ρ_{0i} и условий $R_{00} \ne 0$, $R_{00} > R - R_0$ следует, что $\lambda_{k+1} < \infty$.

Для $(z,t,S) \in F_{k+2}$ стандартным образом имеем:

$$\|\varphi_i^{k+2} - \varphi_i^0\|_S(z,t) \le a_0\mu_0 \sum_{n=0}^{k+1} \rho^n (n+1)^2,\ i = 1,2,$$
$$\|\varphi_3^{k+2} - \varphi_3^0\|_S(z) \le \ \frac{2a_0\mu_0}{S_0 - S} \sum_{n=0}^{k+1} \rho^n (n+1)^4.$$

Выберем теперь $a_0 > 0$ таким, что

$$\rho < 1,\ 2a_0\mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (n+1)^4 \le R - R_0.$$

Тогда при $n = k+2$ будут выполнены неравенства (51). Тем самым завершено доказательство индукционного предположения.

Далее дословно воспроизводится окончание доказательства леммы 1.

Устойчивость

Так же как и в теореме существования введём параметры $T > 0$, $S_0 > 0$ $\gamma_1, \gamma_2 \in (-\infty, \infty)$, $R_{00} > 0$, $R_0 > 0$. Обозначим через $Q(S_0, T, \gamma_1, \gamma_2, R_0)$ множество троек функций $(g(x), h(x,t), f(x,t))$, для которых выполнены условия теоремы 2, в том числе имеют место соотношения (32), (33), (34). При фиксированном R_{00} по формулам (30), (31) вычислим $M, \tilde{M}$. Теперь для любых $(g,h,f) \in Q(S_0, T, \gamma_1, \gamma_2,\ R_0)$ и фиксированного R из интервала $(R_0,\ R_0 + R_{00})$ решение задачи (27)–(29) существует и определено в одной и той же области. Поэтому решения, отвечающие разным данным, можно сравнивать между собой.

Справедлива следующая теорема устойчивости.

Теорема 3. *Пусть* $(g,h,f) \in Q(S_0, T, \gamma_1, \gamma_2, R_0)$, $(\bar{g}, \bar{h}, \bar{f}) \in Q(S_0, T,\ \gamma_1, \gamma_2, R_0)$, R *— фиксированное число из интервала* $(R_0,\ R_0 + R_{00})$. *Обозначим*

$$\max_{0\le\theta\le 1} \max_{0\le z\le T/2} \left\| \frac{\partial F}{\partial u}(-\bar{g}(x) + \theta(\bar{g}(x) - g(x)), x, z, z) \right\|_{S_0} = K. \tag{63}$$

Тогда существует такое $\widehat{a}$, $\widehat{a}S_0 < T/2$, $\widehat{a} = \widehat{a}(S_0, R_0, R_{00}, T, R, M,\ \widetilde{M})$, *что для решений задачи (27)–(29)* (u,q) *и* $(\bar{u}, \bar{q})$, *отвечающих соответственно данным*

(g,h,f) *и* $(\bar g,\bar h,\bar f)$ *справедливы неравенства*

$$\|u-\bar u\|_S(z,t)\le C\varepsilon,\ \|u_t-\bar u_t\|_S(z,t)\le C\varepsilon,$$
$$\|q-\bar q\|_S(z)\le \frac{C\varepsilon}{S_0-S},\ (z,t)\in F(S),\ 0<S<S_0, \tag{64}$$

где

$$\varepsilon=\max[\|g-\bar g\|_{S_0}, 2\max_{0\le t\le T}\|f-\bar f\|_{S_0}(t), 2\max_{0\le t\le T}\|f_t-\bar f_t\|_{S_0}(t),$$
$$\max_{0\le t\le T}\|h-\bar h\|_{S_0}(t)\max(2,T),\ 8\max_{0\le t\le T}\|f_{tt}-\bar f_{tt}\|_{S_0}(t), \tag{65}$$
$$8\max_{0\le t\le T}\|h_t-\bar h_t\|_{S_0}(t), 2\|g''-\bar g''\|_{S_0}],$$

а постоянная C *зависит от* $S_0,R_0,R_{00},T,R,M,\widetilde M,K$.

Доказательство. Для разностей $u-\bar u=\widetilde u$, $u_t-\bar u_t=\widetilde u_t$, $q-\bar q=\widetilde q$ выпишем линейную систему интегродифференциальных уравнений

$$\widetilde u=\widetilde u_0-\frac12\int\limits_0^z\int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)}\Big[\widetilde u_{xx}+\widetilde qF(u,x,\xi,\tau)+$$
$$+\bar q\widetilde u\int\limits_0^1\frac{\partial F}{\partial u}(\bar u+\theta\widetilde u,x,\xi,\tau)d\,\theta\Big](x,\xi,\tau)d\tau d\xi, \tag{66}$$
$$\widetilde u_0=\frac12\Big[\widetilde f(x,t+z)+\widetilde f(x,t-z)\Big]+\frac12\int\limits_{t-z}^{t+z}\widetilde h(x,\tau)d\tau,$$

$$\widetilde u_t=\widetilde u_{t0}-\frac12\int\limits_0^z\int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)}\Big\{\widetilde u_{txx}+\widetilde q\frac{\partial F}{\partial u}(u,x,\xi,\tau)\,u_t+$$
$$+\ \bar q\widetilde u\int\limits_0^1\frac{\partial^2F}{\partial u^2}(\bar u+\theta\widetilde u,x,\xi,\tau)\,d\theta\,u_t+\bar q\frac{\partial F}{\partial u}(\bar u,x,\xi,\tau)\widetilde u_t+$$
$$+\ \widetilde q\frac{\partial F}{\partial t}(u,x,\xi,\tau)+\bar q\widetilde u\int\limits_0^1\frac{\partial^2F}{\partial t\partial u}(\bar u+\theta\widetilde u,x,\xi,\tau)d\theta\Big\}(x,\xi,\tau)d\tau d\xi, \tag{67}$$
$$\widetilde u_{t0}=\frac12\Big[\widetilde f_t(x,t+z)+\widetilde f_t(x,t-z)\Big]+\frac12\Big[\widetilde h(x,t+z)-\widetilde h(x,t-z)\Big],$$

$$\widetilde q=\widetilde q_0-\frac{2}{F(-g(x),x,z,z)}\int\limits_0^z\Big\{\widetilde u_{txx}+\widetilde q\frac{\partial F}{\partial u}(u,x,\xi,2z-\xi)\,u_t+$$
$$+\ \bar q\widetilde u\int\limits_0^1\frac{\partial^2F}{\partial u^2}(\bar u+\theta\widetilde u,x,\xi,2z-\xi)\,d\theta\,u_t+$$

$$+\ \bar{q}\frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u},x,\xi,2z-\xi)\widetilde{u}_t+\ \widetilde{q}\frac{\partial F}{\partial t}(u,x,\xi,2z-\xi)+$$

$$+\ \bar{q}\widetilde{u}\int\limits_0^1\frac{\partial^2 F}{\partial t\partial u}(\bar{u}+\theta\widetilde{u},x,\xi,2z-\xi)\,d\theta\Big\}(x,\xi,2z-\xi)d\xi,$$

$$\widetilde{q}_0=\ -\frac{\bar{q}\Big[F(-g(x),x,z,z)-F(-\bar{g}(x),x,z,z)\Big]}{F(-g(x),x,z,z)}+ \tag{68}$$

$$+\ \frac{2}{F(-g(x),x,z,z)}\Big[\widetilde{f}_{tt}(x,2z)+\widetilde{h}_t(x,2z\Big]+\frac{\widetilde{g}''(x)}{F(-g(x),x,z,z)}.$$

При этом мы воспользовались леммой Адамара:

$$F(u,x,z,t)-F(\bar{u},x,z,t)=\ \int\limits_0^1\frac{dF}{d\theta}(\bar{u}+\theta(u-\bar{u}),x,z,t)d\theta=$$

$$=\ \widetilde{u}\int\limits_0^1\frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}+\theta\widetilde{u},x,z,t)\,d\theta.$$

Очевидно, что из условий теоремы 3 следует, что

$$\|\widetilde{u}_0\|_{S_0}\le\varepsilon,\quad \|\widetilde{u}_{t0}\|_{S_0}\le\varepsilon. \tag{69}$$

Оценим сверху $\|\widetilde{q}_0\|_S$, где $S\in(0,S_0)$ выбрано в теореме существования:

$$\|\widetilde{q}_0\|_S\le R_0\frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}\varepsilon K+R_0\varepsilon\le\varepsilon R_0\frac{K(R-R_0+R_0S_0)+S_0}{S_0-S}. \tag{70}$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (63), (65) и оценкой из теоремы 2:

$$\|\bar{q}\|_S\le\frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}.$$

Применяя к линейной относительно $\widetilde{u}$, $\widetilde{u}_t$, $\widetilde{q}$ системе уравнений (66)–(68) метод последовательных приближений, использованный при доказательстве теоремы существования, найдём, что при том же самом выборе a_0 для решения нашей системы справедливы неравенства

$$\|\widetilde{u}-\widetilde{u}_0\|_S(z,t)\le C_1\varepsilon,\ \|\widetilde{u}_t-\widetilde{u}_{t0}\|_S(z,t)\le C_1\varepsilon,\|\widetilde{q}-\widetilde{q}_0\|_S(z)\le\frac{C_1\varepsilon}{S_0-S},$$

$$(z,t)\in F(S),\ 0<S<S_0.$$

Ясно, что для определения константы C_1 достаточно оценить сверху $\|\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_0\|_S(z,t)$, $\|\widetilde{u}_{t1}-\widetilde{u}_{t0}\|_S(z,t)$, $\|\widetilde{q}_1-\widetilde{q}_0\|_S(z)$ (индукционная база).

Для первой компоненты имеем:

$$\|\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_0\|_S(z,t)\le\ \frac{1}{2}\int\limits_0^z\int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)}\Big[\|\widetilde{u}_{0xx}\|_S+\|\widetilde{q}_0\|_S\,\|F(u,x,\xi,\tau)\|_S+$$

$$+ \ \|\bar q\|_S\,\|\widetilde u_0\|_S\,\Big\|\int\limits_0^1 \frac{\partial F}{\partial u}(\bar u+\theta\widetilde u,x,\xi,\tau)\,d\theta\Big\|_S\Big](\xi,\tau)d\tau d\xi \le$$

$$\le \ \frac{1}{2}\int\limits_0^z\int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)}\Big[\frac{4\varepsilon}{(S(\xi)-S)^2}+R_0\varepsilon\frac{K(R-R_0+R_0S_0)+S_0}{S_0-S}M\times$$

$$\times\frac{R_{00}}{R_{00}-R+R_0}+\ \frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}\varepsilon\,\frac{M}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})\Big]d\tau d\xi \le$$

$$\le a_0\varepsilon\widetilde\mu_{01}\frac{z}{a_0(S_0-S)-z},$$

где

$$\widetilde\mu_{01} = \ a_0\Big\{16+S_0R_0[(R-R_0+R_0S_0)K+S_0]\,M\,\frac{R_{00}}{R_{00}-R+R_0}+$$

$$+ \ S_0(R-R_0+R_0S_0)\frac{M}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})\Big\}.$$

Здесь мы воспользовались уже известными формулами для суперпозиции аналитических функций (57), (59). Поясним правомерность такого применения на примере формулы (59). Если $u,\bar u$ — решения, удовлетворяющие неравенствам

$$\|u-u_0\|_S\le R-R_0,$$

$$\|\bar u-u_0\|_S\le R-R_0,$$

то $\hat u=\bar u+\theta(u-\bar u)$, $0\le\theta\le 1$, удовлетворяет неравенству

$$\|\hat u-\hat u_0\|_S\le R-R_0,$$

где функция $\hat u_0=\bar u_0+\theta(u_0-\bar u_0)$, $0\le\theta\le1$, пробегает множество значений $[\gamma_1,\gamma_2]$. Поэтому справедлива оценка, идентичная с (59):

$$\Big\|\int\limits_0^1\frac{\partial F}{\partial u}(\bar u+\theta\widetilde u,x,z,t)\,d\theta\Big\|_S\le\int\limits_0^1\frac{M}{R_{00}}\,L(R,R_0,R_{00})\,d\theta=\frac{M}{R_{00}}\,L(R,R_0,R_{00}).$$

Для второй компоненты имеем

$$\|\widetilde u_{t1}-\widetilde u_{t0}\|_S(z,t)\le\ \frac{1}{2}\int\limits_0^z\int\limits_{t-(z-\xi)}^{t+(z-\xi)}\Big[\|\widetilde u_{0txx}\|_S+\|\widetilde q_0\|_S\,\frac{M}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})R+$$

$$+\ \frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}\|\widetilde u_0\|_S\frac{M}{R_{00}^2}P(R,R_0,R_{00})R+\frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}\frac{M}{R_{00}}\times$$

$$\times\, L(R,R_0,R_{00})\|\widetilde u_{t0}\|_S+\|\widetilde q_0\|_S\widetilde M\frac{R_{00}}{R_{00}-R+R_0}+\frac{R-R_0+R_0S_0}{S_0-S}\times$$

$$\times \ \|\widetilde{u}_0\|_S \frac{\widetilde{M}}{R_{00}} L(R,R_0,R_{00})\Big] d\tau d\xi \le \int\limits_0^z (z-\xi)\Big[\frac{16a_0^2\varepsilon}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2}+$$

$$+ \ \frac{a_0^2 S_0 \varepsilon R_0((R-R_0+R_0S_0)K+S_0)L(R,R_0,R_{00})R}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2}\frac{M}{R_{00}}$$

$$+ \ \frac{a_0^2 S_0(R-R_0+R_0S_0)\varepsilon P(R,R_0,R_{00})R}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2}\frac{M}{R_{00}^2}+$$

$$+ \ \frac{a_0^2 S_0(R-R_0+R_0S_0)L(R,R_0,R_{00})\varepsilon}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2}\frac{M}{R_{00}}+$$

$$+ \ \frac{a_0^2 S_0 \varepsilon R_0((R-R_0+R_0S_0)K+S_0)\widetilde{M}}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2}\frac{R_{00}}{R_{00}-R+R_0}+$$

$$+ \ \frac{a_0^2 S_0(R-R_0+R_0S_0)\varepsilon L(R,R_0,R_{00})}{(a_0(S_0-S)-\xi)^2}\frac{\widetilde{M}}{R_{00}}\Big] d\xi \le$$

$$\le \ a_0\varepsilon\widetilde{\mu}_{02}\frac{z}{a_0(S_0-S)-z},$$

где

$$\widetilde{\mu}_{02} = a_0\Big\{16 + S_0(R-R_0+R_0S_0)\Big[\frac{M}{R_{00}^2}P(R,R_0,R_{00})R + \frac{M}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})+$$

$$+ \ \frac{\widetilde{M}}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})\Big] + S_0R_0((R-R_0+R_0S_0)K+S_0)\Big[\frac{M}{R_{00}}L(R,R_0,R_{00})R+$$

$$+ \ \widetilde{M}\frac{R_{00}}{R_{00}-R+R_0}\Big]\Big\}.$$

Ясно, что для третьей компоненты справедлива оценка

$$\|\widetilde{q}_1-\widetilde{q}_0\|_S(z) \le \ a_0\varepsilon\widetilde{\mu}_{03}\frac{a_0 z}{(a_0(S_0-S)-z)^2},$$

где $\widetilde{\mu}_{03} = \widetilde{\mu}_{02}\,\dfrac{R_0}{a_0}$.

Очевидно, что

$$C_1 = \ \frac{(R-R_0)\max\limits_{i=1,2,3}\widetilde{\mu}_{0i}}{\max\limits_{i=1,2,3}\mu_{0i}},$$

где μ_{0i} вычислялись в теореме существования (база индукции).

Учитывая неравенства (69), (70) имеем

$$\|\widetilde{u}\|_S(z,t) \le (C_1+1)\varepsilon, \quad \|\widetilde{u}_t\|_S(z,t) \le (C_1+1)\varepsilon,$$

$$\|\widetilde{q}\|_S(z) \le \ \frac{C_1\varepsilon}{S_0-S} + \varepsilon R_0\frac{(R-R_0+R_0S_0)K+S_0}{S_0-S} =$$

$$= \ \frac{\varepsilon}{S_0-S}\Big[C_1 + R_0(R-R_0+R_0S_0)K + R_0S_0\Big].$$

В качестве C выберем

$$C = \max\{C_1 + 1, C_1 + R_0(R - R_0 + R_0 S_0)K + R_0 S_0\}.$$

Теорема 3 доказана.

Регуляризация

В теоремах 2, 3 граничные данные являются аналитическими функциями переменной x и непрерывны по t, т.е. задаются в том же классе гладкости, где ищется решение. В реальных ситуациях граничные данные измеряются с некоторой ошибкой. Возникает задача о построении устойчивого метода решения исходной обратной задачи с приближёнными данными из другого функционального пространства.

Обозначим точные граничные данные задачи 2 $(g^T(x),\ f^T(x,t),\ h^T(x,\ t))$, им соответствует точное решение $(u^T(x,z,t), q^T(x,z))$. Пусть $(g^\delta(x),\ f^\delta(x,t), h^\delta(x,t))$ — данные, измеренные с ошибкой. Будем измерять её при каждом фиксированном t в норме пространства $C[a-S_0, b+S_0]$. Пусть

$$\begin{gathered}
\|g^T - g^\delta\|_{C[a-S_0,b+S_0]} \le \delta,\ \|f^T - f^\delta\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t) \le \delta,\\
\|f_t^T - f_t^\delta\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t) \le \delta,\ \|h^T - h^\delta\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t) \le \delta,\\
\|f_{tt}^T - f_{tt}^\delta\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t) \le \delta,\ \|h_t^T - h_t^\delta\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t) \le \delta,\\
\|(g^T)'' - (g^\delta)''\|_{C[a-S_0,b+S_0]} \le \delta,\ 0 \le t \le T.
\end{gathered} \tag{71}$$

По зашумлённым граничным данным построим регуляризованные данные, принадлежащие $A_{S_0}(a,b)$ по переменной x. Проделаем это на примере функции $g^\delta(x) \in C[a-S_0, b+S_0]$.

Пусть $S < S_0$. По заданной функции $g^\delta(x)$ построим финитную функцию $\widetilde{g}^\delta(x)$: $\widetilde{g}^\delta(x) = g^\delta(x)\,\eta(x)$, где $\eta(x) \in C^\infty(R)$, $0 \le \eta(x) \le 1$, $\eta(x) \equiv 1$ по крайней мере на интервале $(a-(S_0-S)/3, b+(S_0-S)/3)$, $\eta(x) \equiv 0$ по крайней мере вне интервала $(a-S_0, b-S_0)$. Способ построения таких функций $\eta(x)$ см., например, в [7]. Функцию $\widetilde{g}^T(x)$ построим аналогично. Очевидно, $\widetilde{g}^T(x) \in C^\infty[a-S_0, b+S_0]$. Заметим, что $|\widetilde{g}^T(x) - \widetilde{g}^\delta(x)| \le \delta$, $x \in [a-S_0, b+S_0]$.

Введём в рассмотрение функцию

$$g^{\delta,\alpha}(x) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a-S_0}^{b+S_0} \widetilde{g}^\delta(\xi) e^{-\alpha(x-\xi)^2} d\xi \tag{72}$$

и докажем, что $g^{\delta,\alpha}(x) \in A_{S_0}(a,b)$ при любом конечном α. Действительно, формально продифференцируем $g^{\delta,\alpha}(z)$ по $z = x+iy$:

$$(g^{\delta,\alpha}(z))' = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a-S_0}^{b+S_0} \widetilde{g}^\delta(\xi) \frac{d}{dz} e^{-\alpha(z-\xi)^2} d\xi.$$

Заметим, что
$$\left|\frac{d}{dz}e^{-\alpha(z-\xi)^2}\right| = 2\alpha\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}e^{-\alpha(x-\xi)^2+\alpha y^2}.$$
Отсюда видно, что при любом конечном α функция $g^{\delta,\alpha}(z)$ является целой . Следовательно, $g^{\delta,\alpha}(x) \in A_{S_0}(a,b)$ для любого $S_0 > 0$.

Функции $f^{\delta,\alpha}(x,t)$, $f_t^{\delta,\alpha}(x,t)$, $h^{\delta,\alpha}(x,t)$, $f_{tt}^{\delta,\alpha}(x,t)$, $h_t^{\delta,\alpha}(x,t)$, $(g^{\delta,\alpha}(x))''$ строятся аналогично.

Регуляризованным данным $(g^{\delta,\alpha}, f^{\delta,\alpha}, h^{\delta,\alpha})$ из пространства $A_{S_0}(a,b)$ по x соответствует решение $(u^{\delta,\alpha}, q^{\delta,\alpha})$. Покажем, что это решение сходится при $\delta \to 0$ к точному (u^T, q^T) в норме $A_S(a,b)$, $S < S_0$ по переменной x и в норме $C(F(S))$ по переменным z, t, если α подходящим образом связано с δ.

Положим $S^* = (S_0 + 2S)/3$. Воспользуемся неравенствами (64) из теоремы 3 с заменой (u, u_t, q) на (u^T, u_t^T, q^T); $(\bar{u}, \bar{u}_t, \bar{q})$ на $(u^{\delta,\alpha}, u_t^{\delta,\alpha}, q^{\delta,\alpha})$. Будем иметь
$$\|u^T - u^{\delta,\alpha}\|_S(z,t) \le C_2 \max\Big[\|g^T - g^{\delta,\alpha}\|_{S^*}, \max_{0\le t\le T}\|f^T - f^{\delta,\alpha}\|_{S^*}(t),$$
$$\max_{0\le t\le T}\|f_t^T - f_t^{\delta,\alpha}\|_{S^*}(t), \max_{0\le t\le T}\|h^T - h^{\delta,\alpha}\|_{S^*}(t), \max_{0\le t\le T}\|f_{tt}^T - f_{tt}^{\delta,\alpha}\|_{S^*}(t),$$
$$\max_{0\le t\le T}\|h_t^T - h_t^{\delta,\alpha}\|_{S^*}(t), \|(g^T)'' - (g^{\delta,\alpha})''\|_{S^*}\Big] \equiv C_2\, G,$$
$$\|u_t^T - u_t^{\delta,\alpha}\|_S(z,t) \le C_2\, G,$$
$$\|q^T - q^{\delta,\alpha}\|_S(z) \le \frac{3C_2}{S_0 - S}\, G,$$
где $C_2 = \max\{8, T\}\, C$. (Константа C была вычислена в теореме устойчивости.)

Оценим величину G. Рассмотрим $\|g^T - g^{\delta,\alpha}\|_{S^*}$. Оценим вначале $\left|\dfrac{d^k}{dx^k}g^T - \dfrac{d^k}{dx^k}g^{\delta,\alpha}\right|$, $x \in [a,b]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть $k = 0$. При $x \in [a,b]$ имеем:
$$\left|g^T(x) - g^{\delta,\alpha}(x)\right| \le \left|g^T(x) - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}\tilde{g}^T(\xi)e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\xi\right| + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}(\tilde{g}^T(\xi) -\right.$$
$$\left. - \tilde{g}^\delta(\xi))e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\xi\right| \le \left|\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}g^T(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\xi - \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}\tilde{g}^T(\xi)\times\right.$$
$$\left.\times e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\xi\right| + \delta\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\xi\right| = \mathcal{I}_0 + \delta\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\xi\right|.$$
Введём вспомогательный малый параметр $l = l(\alpha)$. Потребуем
$$l < \frac{1}{3}(S_0 - S). \tag{73}$$

Зависимость l от параметра регуляризации α будет установлена в дальнейшем. Для $\mathcal{I}_0$ справедлива следующая оценка

$$\mathcal{I}_0 \le \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x-l}^{x+l} |g^T(x) - \widetilde{g}^T(\xi)| e^{-\alpha(x-\xi)^2} d\xi + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x-l} |g^T(x)| e^{-\alpha(x-\xi)^2} d\xi +$$
$$+ \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x+l}^{\infty} |g^T(x)| e^{-\alpha(x-\xi)^2} d\xi + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a-S_0}^{x-l} |\widetilde{g}^T(\xi)| e^{-\alpha(x-\xi)^2} d\xi + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \times$$
$$\times \int\limits_{x+l}^{b+S_0} |\widetilde{g}^T(\xi)| e^{-\alpha(x-\xi)^2} d\xi \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sqrt{\alpha}l}^{\sqrt{\alpha}l} \Big| g^T(x) - \widetilde{g}^T(x - \frac{\eta}{\sqrt{\alpha}}) \Big| e^{-\eta^2} d\eta +$$
$$\frac{2M^T_{(a,b)}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{\alpha}l}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{2\widetilde{M}^T_{(a-S_0,b+S_0)}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\sqrt{\alpha}l}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta,$$

где $\sqrt{\alpha}(x-\xi) = \eta$, $-\sqrt{\alpha} d\xi = d\eta$,

$$M^T_{(a,b)} = \max\{\|g^T\|_{C[a,b]}, \max_{0\le t\le T} \|f^T\|_{C[a,b]}(t), \max_{0\le t\le T} \|f^T_t\|_{C[a,b]}(t),$$

$\max\limits_{0\le t\le T} \|h^T\|_{C[a,b]}(t)$, $\max\limits_{0\le t\le T} \|f^T_{tt}\|_{C[a,b]}(t)$, $\max\limits_{0\le t\le T} \|h^T_t\|_{C[a,b]}(t)$, $\|(g^T)''\|_{C[a,b]}\}$,

$$\widetilde{M}^T_{(a-S_0,b+S_0)} = \max\{\|\widetilde{g}^T\|_{C[a-S_0,b+S_0]}, \max_{0\le t\le T} \|\widetilde{f}^T\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t),$$

$\max\limits_{0\le t\le T} \|\widetilde{f}^T_t\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t)$, $\max\limits_{0\le t\le T} \|\widetilde{h}^T\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t)$, $\max\limits_{0\le t\le T} \|\widetilde{f}^T_{tt}\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t)$, $\max\limits_{0\le t\le T} \|\widetilde{h}^T_t\|_{C[a-S_0,b+S_0]}(t)$, $\|(\widetilde{g}^T)''\|_{C[a-S_0,b+S_0]}\}$. Ясно, что $\widetilde{M}^T_{(a-S_0,b+S_0)} \le$ $\le M^T_{(a-S_0,b+S_0)}$.

Учитывая очевидное неравенство

$$\int\limits_{\sqrt{\alpha}l}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \le \int\limits_{\sqrt{\alpha}l}^{\infty} e^{-2\eta l\sqrt{\alpha}}\, e^{l^2\alpha} d\eta = \frac{e^{-l^2\alpha}}{2l\sqrt{\alpha}},$$

определение функции $\widetilde{g}^T(x)$ и условие (73), получаем окончательно при $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |g^T(x) - g^{\delta,\alpha}(x)| \le M^T_{1(a-l,b+l)}\, l + \frac{M^T_{(a,b)} e^{-l^2\alpha}}{\sqrt{\pi} l \sqrt{\alpha}} + \\ + \frac{M^T_{(a-S_0,b+S_0)} e^{-l^2\alpha}}{\sqrt{\pi} l\sqrt{\alpha}} + \delta \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \Big| \int\limits_{a-S_0}^{b+S_0} e^{-\alpha(x-\xi)^2} d\xi \Big| \end{aligned}, \tag{74}$$

где $M^T_{1(a-l,b+l)} = \max\{\|\dfrac{d}{dx} g^T\|_{C[a-l,b+l]}, \max\limits_{0\le t\le T} \|\dfrac{d}{dx} f^T\|_{C[a-l,b+l]}(t),$

$\max\limits_{0\le t\le T} \|\dfrac{d}{dx} f^T_t\|_{C[a-l,b+l]}(t)$, $\max\limits_{0\le t\le T} \|\dfrac{d}{dx} h^T\|_{C[a-l,b+l]}(t)$, $\max\limits_{0\le t\le T} \|\dfrac{d}{dx} f^T_{tt}\|_{C[a-l,b+l]}(t)$,

$\max\limits_{0\le t\le T} \|\dfrac{d}{dx} h^T_t\|_{C[a-l,b+l]}(t)$, $\|(g^T)'''\|_{C[a-l,b+l]}\}$.

Пусть теперь $k=1,2,\ldots$ Получим оценку для $\left|\dfrac{d^k}{d\,x^k}g^T-\dfrac{d^k}{d\,x^k}g^{\delta,\alpha}\right|$, $x\in[a,b]$:

$$\left|\frac{d^k}{d\,x^k}g^T-\frac{d^k}{d\,x^k}g^{\delta,\alpha}\right|\le\left|\frac{d^k}{d\,x^k}g^T-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}\widetilde{g}^T(\xi)\frac{d^k}{dx^k}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi\right|+$$
$$+\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}(\widetilde{g}^T(\xi)-\widetilde{g}^\delta(\xi))\frac{d^k}{d\,x^k}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi\right|.$$

Обозначим первое слагаемое, стоящее справа, через $\mathcal{I}_1$. Легко видеть, что

$$\mathcal{I}_1=\left|\frac{d^k}{d\,x^k}g^T(x)-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}\widetilde{g}^T(\xi)\,(-1)^k\frac{d^k}{d\,\xi^k}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi\right|=$$
$$=\left|\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\frac{d^k}{d\,x^k}g^T(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi-\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}\frac{d^k}{d\,\xi^k}\widetilde{g}^T(\xi)e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi\right|.$$

По аналогии с $\mathcal{I}_0$ получим для $\mathcal{I}_1$:

$$\begin{gathered}\mathcal{I}_1\le M^T_{k+1(a-l,b+l)}\,l+\frac{M^T_{k(a,b)}e^{-l^2\alpha}}{\sqrt{\pi}l\sqrt{\alpha}}+\\+\left|\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x+l}^{b+S_0}\frac{d^k\widetilde{g}^T}{d\,\xi^k}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi\right|+\left|\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{a-S_0}^{x-l}\frac{d^k\widetilde{g}^T}{d\,\xi^k}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi\right|.\end{gathered}\tag{75}$$

Оценим интегралы в правой части неравенства (75). Поскольку $|x-\xi|\ge l$, имеем $e^{-\alpha(x-\xi)^2}\le e^{-\alpha l^2}$. Следовательно,

$$\left|\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x+l}^{b+S_0}\frac{d^k\widetilde{g}^T}{d\,\xi^k}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi\right|\le\left|\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{x+l}^{b+S_0}\frac{d^k\widetilde{g}^T}{d\,\xi^k}e^{-\alpha l^2}d\,\xi\right|=$$
$$=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha l^2}\left|\left.\frac{d^{k-1}\widetilde{g}^T}{d\,\xi^{k-1}}\right|_{\xi=x+l}\right|\le\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha l^2}M^T_{k-1(a-l,b+l)}.$$

Оценка последнего интеграла в правой части неравенства (75) идентична. Окончательно получим:

$$\begin{gathered}\left|\frac{d^k}{d\,x^k}g^T-\frac{d^k}{d\,x^k}g^{\delta,\alpha}\right|\le M^T_{k+1(a-l,b+l)}\,l+\frac{M^T_{k(a,b)}e^{-l^2\alpha}}{\sqrt{\pi}l\sqrt{\alpha}}+\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\times\\ \times e^{-\alpha l^2}M^T_{k-1(a-l,b+l)}+\,\delta\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}\frac{d^k}{d\,x^k}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi\right|,\\ x\in[a,b],\ k=1,2,\ldots\end{gathered}\tag{76}$$

Учитывая определение нашей S-нормы

$$\|g\|_S=\sup_{x\in[a,b]}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}|g^{(k)}(x)|S^k$$

и оценки (74), (76), будем иметь

$$\|g^T - g^{\delta,\alpha}\|_{S^*} \le \sum_{k=0}^{\infty} M^T_{k+1(a-l,b+l)} l\, \frac{{S^*}^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^T_{k(a,b)} e^{-\alpha l^2}}{\sqrt{\pi} l \sqrt{\alpha}}\, \frac{{S^*}^k}{k!} +$$

$$+ \;\frac{M^T_{(a-S_0,b+S_0)} e^{-\alpha l^2}}{\sqrt{\pi} l\sqrt{\alpha}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\alpha l^2} M^T_{k-1(a-l,b+l)}\, \frac{{S^*}^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \delta\, \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} \times$$

$$\times \left| \int\limits_{a-S_0}^{b+S_0} \frac{d^k}{d\,x^k} e^{-\alpha(x-\xi)^2} d\,\xi \right| \frac{{S^*}^k}{k!} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \frac{M^T_{(a-S_0,b+S_0)} e^{-\alpha l^2}}{\sqrt{\pi} l \sqrt{\alpha}} + \Sigma_3 + \Sigma_4.$$

Рассмотрим Σ_1. Положим $\bar{S} = (2S_0 + S)/3$. Поскольку выполнено условие (73), всегда имеет место включение для областей

$$\overline{\Omega}(a-l, b+l, \bar{S}) \subset \overline{\Omega}(a, b, S_0), \tag{77}$$

где $\overline{\Omega}(a-l, b+l, \bar{S}) = \{z \in C \,\big|\, |z-\xi| \le \bar{S},\ \xi \in [a-l, b+l]\}$,

$\overline{\Omega}(a, b, S_0) = \{z \in C \,\big|\, |z-\xi| \le S_0,\ \xi \in [a, b]\}$.

Функция $g^T(x)$ принадлежит пространству $A_{S_0}(a,b)$. Это означает, что она допускает аналитическое продолжение в замкнутую область $\overline{\Omega}(a,b,S_0)$. Учитывая (77), имеем, что $g^T(z)$ аналитична всюду в $\overline{\Omega}(a-l, b+l, \bar{S})$. Справедливы неравенства Коши:

$$M^T_{k+1(a-l,b+l)} \le \frac{M^T_{\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S})}\,(k+1)!}{\bar{S}^{k+1}},$$

где $M^T_{\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S})} = \max\Big\{ \max\limits_{z\in\Gamma(\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S}))} |g^T(z)|, \max\limits_{0\le t\le T} \max\limits_{z\in\Gamma(\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S}))}$
$|f^T(z,t)|, \max\limits_{0\le t\le T} \max\limits_{z\in\Gamma(\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S}))} |f^T_t(z,t)|, \max\limits_{0\le t\le T} \max\limits_{z\in\Gamma(\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S}))} |h^T(z,t)|,$
$\max\limits_{0\le t\le T} \max\limits_{z\in\Gamma(\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S}))} |f^T_{tt}(z,t)|, \max\limits_{0\le t\le T} \max\limits_{z\in\Gamma(\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S}))} |h^T_t(z,t)|,$
$\max\limits_{z\in\Gamma(\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S}))} |(g^T(z))''| \Big\}$, $\Gamma(\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S}))$ — граница области $\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S})$.
Следовательно, для Σ_1 имеет место оценка:

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{\infty} M^T_{k+1(a-l,b+l)}\, l\, \frac{{S^*}^k}{k!} \le M^T_{\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S})}\, \frac{l}{\bar{S}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{S^*}{\bar{S}}\right)^k.$$

Легко видеть, что

$$\frac{1}{\bar{S}} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{S^*}{\bar{S}}\right)^k = \frac{1}{\bar{S}} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{S^*}{\bar{S}}\right)^2} = \frac{3(2S_0 + S)}{(S_0 - S)^2}.$$

Тогда

$$\Sigma_1 \le M^T_{\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S})}\, l\, \frac{3(2S_0+S)}{(S_0-S)^2}. \tag{78}$$

Рассмотрим Σ_2:

$$\Sigma_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^T_{k(a,b)} e^{-l^2\alpha}}{\sqrt{\pi}\, l \sqrt{\alpha}} \frac{{S^*}^k}{k!}.$$

Используя неравенства Коши

$$M^T_{k(a,b)} \leq \frac{M_{\overline{\Omega}(a,b,S_0)}k!}{S_0^k},$$

получим

$$\begin{aligned}\Sigma_2 \leq\ & \frac{e^{-l^2\alpha}}{l\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}M_{\overline{\Omega}(a,b,S_0)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{S^*}{\bar{S}}\right)^k = \\ =\ & \frac{e^{-l^2\alpha}}{l\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}M_{\overline{\Omega}(a,b,S_0)}\,\frac{3S_0}{2(S_0-S)}.\end{aligned} \tag{79}$$

Рассмотрим Σ_3. Оценим $M^T_{k-1(a-l,b+l)}$ из неравенств Коши. Тогда для Σ_3 имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\Sigma_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} 2\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}e^{-l^2\alpha}M^T_{k-1(a-l,b+l)}\,\frac{{S^*}^k}{k!} \leq \\ &\leq 2\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}e^{-l^2\alpha}M^T_{\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S})}\,S^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{S^*}{\bar{S}}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

Вычислим

$$S^*\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{S^*}{\bar{S}}\right)^{k-1} = \bar{S}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{S^*}{\bar{S}}\right)^{k} = \bar{S}\ln\frac{1}{1-\dfrac{S^*}{\bar{S}}} = \frac{2S_0+S}{3}\ln\frac{3(2S_0+S)}{S_0-S}.$$

Значит

$$\Sigma_3 \leq 2\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}e^{-l^2\alpha}M^T_{\overline{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S})}\frac{2S_0+S}{3}\ln\frac{3(2S_0+S)}{S_0-S}. \tag{80}$$

Оценим Σ_4. Введём в рассмотрение аналитическую функцию $\psi(x) = \int\limits_{a-S_0}^{b+S_0} e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi$.

Тогда по определению S-нормы будем иметь:

$$x \in [a,b],$$

$$\begin{aligned}\Sigma_4 &= \sum_{k=0}^{\infty}\delta\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}\frac{d^k}{d\,x^k}e^{-\alpha(x-\xi)^2}d\,\xi\right|\frac{{S^*}^k}{k!} \leq \delta\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\|\psi(x)\|_{A_{S^*(a,b)}} \leq \\ &\leq\ \delta\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\|\psi(x)\|_{A_{S^*(-\infty,\infty)}}.\end{aligned}$$

Стандартным приёмом получим:

$$\|\psi(x)\|_{A_{S^*(-\infty,\infty)}} \leq M^{\psi}_{\overline{\Omega}(-\infty,\infty,S_0)}\frac{1}{1-\dfrac{S^*}{S_0}},$$

где $M^{\psi}_{\overline{\Omega}(-\infty,\infty,S_0)} = \max\limits_{|Im\,z|=S_0}|\psi(z)|$.

Оценим сверху $M^{\psi}_{\overline{\Omega}(-\infty,\infty,S_0)}$. Легко видеть, что

$$\left|\int\limits_{a-S_0}^{b+S_0}e^{-\alpha(z-\xi)^2}d\,\xi\right| \leq e^{\alpha S_0^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}, \quad z = x+iy, \quad |y| = S_0.$$

Следовательно, для Σ_4 справедливо неравенство:

$$\Sigma_4 \ \leq \delta e^{\alpha S_0^2}\, \frac{S_0}{S_0 - S^*}. \tag{81}$$

Учитывая полученные оценки (78)–(81) и очевидные неравенства

$$M^T_{\bar{\Omega}(a-l,b+l,\bar{S})} \leq M^T_{\bar{\Omega}(a,b,S_0)} \equiv M_0,$$

$$M^T_{(a-S_0,b-S_0)} \leq M^T_{\bar{\Omega}(a,b,S_0)} \equiv M_0,$$

окончательно будем иметь $\|g^T - g^{\delta,\alpha}\|_{S^*} \leq \sigma(\delta,\alpha,l,S_0,S,M_0)$, где

$$\begin{aligned}\sigma(\delta,\alpha,l,S_0,S,M_0) &= l\ \frac{3(2S_0+S)}{(S_0-S)^2}M_0 + \\ &+\ \frac{e^{-l^2\alpha}}{l\sqrt{\alpha}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}M_0\frac{5S_0-2S}{2(S_0-S)} + \\ &+\ \sqrt{\alpha}e^{-l^2\alpha}\frac{2}{\sqrt{\pi}}M_0\frac{2S_0+S}{3}\ln\frac{3(2S_0+S)}{S_0-S} + \\ &+\ \delta e^{\alpha S_0^2}\frac{3S_0}{2(S_0-S)} \equiv \\ &\equiv Q_1\, l + Q_2\,\frac{e^{-l^2\alpha}}{l\sqrt{\alpha}} + Q_3\,\sqrt{\alpha}e^{-l^2\alpha} + Q_4\,\delta e^{\alpha S_0^2}.\end{aligned} \tag{82}$$

Оценки для $\max\limits_{0\leq t\leq T}\|f^T - f^{\delta,\alpha}\|_{S^*}(t)$, $\max\limits_{0\leq t\leq T}\|f^T_t - f^{\delta,\alpha}_t\|_{S^*}(t)$, $\max\limits_{0\leq t\leq T}\|h^T - h^{\delta,\alpha}\|_{S^*}(t)$, $\max\limits_{0\leq t\leq T}\|f^T_{tt} - f^{\delta,\alpha}_{tt}\|_{S^*}(t)$, $\max\limits_{0\leq t\leq T}\|h^T_t - h^{\delta,\alpha}_t\|_{S^*}(t)$, $\|(g^T)'' - (g^{\delta,\alpha})''\|_{S^*}$ идентичны. Значит, $G \leq \sigma(\delta,\alpha,l,S_0,S,M_0)$.

Выберем вспомогательный параметр $l(\alpha)$ так, чтобы $l(\alpha)\to 0$ и $l^2(\alpha)\alpha\to\infty$ при $\alpha\to\infty$. Например, в качестве $l(\alpha)$ можно взять

$$l = \sqrt{\frac{\ln\alpha}{\alpha}}. \tag{83}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma(\delta,\alpha,l(\alpha),S_0,S,M_0) &= \sigma(\delta,\alpha,S_0,S,M_0) = \\ &= Q_1\sqrt{\frac{\ln\alpha}{\alpha}} + Q_2\frac{1}{\alpha\sqrt{\ln\alpha}} + Q_3\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + Q_4\delta e^{\alpha S_0^2}.\end{aligned} \tag{84}$$

Ясно, что второе и третье слагаемые стремятся к нулю быстрее при $\alpha\to\infty$, чем первое.

Выберем $\alpha(\delta)$ равным

$$\alpha(\delta) = \ \frac{1}{S_0^2}\left\{\ln\frac{P}{\delta} + \ln\sqrt{\frac{\ln\dfrac{1}{S_0^2}\ln\dfrac{P}{\delta}}{\dfrac{1}{S_0^2}\ln\dfrac{P}{\delta}}}\right\}, \tag{85}$$

где $P = \dfrac{Q_1}{Q_4} = \dfrac{2M_0(2S_0+S)}{(S_0-S)S_0}$.
Такой выбор α следует из условия приближённого (при $\delta \to 0$, $\alpha \to +\infty$) равенства первого и четвёртого слагаемых формулы (84), т.е.

$$Q_1\sqrt{\frac{\ln\alpha}{\alpha}} \approx Q_4 \delta e^{S_0^2\alpha}.$$

Покажем, что при таком выборе α функция $\sigma(\delta,\alpha,S_0,S,M_0)$ стремится к нулю, если $\delta \to 0$ и найдём эквивалентную ей бесконечно малую. Учитывая (85), имеем

$$\begin{gathered}\sigma(\delta,\alpha(\delta),S_0,S,M_0) \equiv \tilde{\sigma}(\delta,S_0,S,M_0) \sim \\ \sim 2Q_1\sqrt{\frac{\ln\dfrac{1}{S_0^2}\ln\dfrac{P}{\delta}}{\dfrac{1}{S_0^2}\ln\dfrac{P}{\delta}}} = \frac{6M_0(2S_0+S)}{(S_0-S)^2}\sqrt{\frac{\ln\dfrac{1}{S_0^2}\ln\dfrac{P}{\delta}}{\dfrac{1}{S_0^2}\ln\dfrac{P}{\delta}}},\ \delta \to 0.\end{gathered} \tag{86}$$

Формулой (86) при конечном δ и заданной величине $S_0 - S$ можно пользоваться, если выполнено условие (73) (при этом $\alpha(\delta)$, $l(\alpha)$ вычисляются по формулам (85), (83)).

Справедлива следующая теорема регуляризации по α.

Теорема 4. *Пусть граничные данные (g^T, f^T, h^T) и $(g^\delta, f^\delta, h^\delta)$ удовлетворяют условиям (71). Решение (u^T, q^T) соответствует точным граничным данным (g^T, f^T, h^T), а $(u^{\delta,\alpha}, q^{\delta,\alpha})$ соответствует регуляризованным данным $(g^{\delta,\alpha}, f^{\delta,\alpha}, h^{\delta,\alpha})$, где $g^{\delta,\alpha}(x)$ задаётся формулой (72), а $f^{\delta,\alpha}(x,t), h^{\delta,\alpha}(x,t)$ строятся аналогично. Тогда при $0 < S < S_0$ и α, определяемом формулой (85), справедливы следующие оценки*

$$\begin{aligned}&\|u^T - u^{\delta,\alpha}\|_S(z,t) \le C_2\,\tilde{\sigma}(\delta,S_0,S,M_0),\\ &\|u_t^T - u_t^{\delta,\alpha}\|_S(z,t) \le C_2\,\tilde{\sigma}(\delta,S_0,S,M_0),\\ &\|q^T - q^{\delta,\alpha}\|_S(z) \le \frac{3C_2}{S_0-S}\,\tilde{\sigma}(\delta,S_0,S,M_0),\\ &(z,t) \in F(S),\end{aligned}$$

в которых $\tilde{\sigma}(\delta,S_0,S,M_0)$ задаётся равенством (86).

Литература.

1. **Романов В.Г.** *О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа.*// Дифференциальные уравнения. 1989. т.25, № 2. С. 275–282.

2. **Романов В.Г.** *Вопросы корректности задачи определения скорости звука.*// Сиб. мат. журн. 1989. т.30, № 4. С.125–134.

3. **Курант Р.** *Уравнения с частными производными.* М: Мир, 1964. 830 с.

4. **Ниренберг Л.** *Лекции по нелинейному функциональному анализу.* М: Мир, 1977. 232 с.

5. **Романов В.Г., Дементьева Н.В.** *Локальная разрешимость и регуляризация обратной задачи для телеграфного уравнения в цилиндрической области.*// Мат. анализ и дискр. мат-ка. Межвуз. сб. начн. тр. Новосибирск: Новосиб. ун-т. 1988. С. 72–89.

6. **Дементьева Н.В.** *Локальная разрешимость обратной задачи для уравнения гиперболического типа в дивергентном виде.*// Деп. в ВИНИТИ № 2808-В 93. Ред. "Сиб. мат. журн.".

7. **Владимиров В.С.** *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1981. 512 с.

Дементьева Наталья Владимировна

Локальная разрешимость и регуляризация многомерной обратной задачи для некоторого класса нелинейных гиперболических уравнений.

Препринт № 53

Подписано в печать Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 4,6. Уч.-изд. 1,6. Тираж 115 экз. Заказ № .

Лицензия ЛР № 065614 от 8 января 1998 г.
Издательство ИМ СО РАН.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

Лицензия ПЛД № 57–43 от 22 апреля 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке ИМ СО РАН.
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.