Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН Препринт N 58, июнь 1999

Проблема автоморфной сопряженности подгрупп фундаментальных групп компактных поверхностей

О.В. Богопольский

В 1936 году Уайтхед [12] нашел алгоритм, решающий следующую проблему в случае, когда G – свободная группа конечного ранга:

Пусть $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *и* $\{b_1, \ldots, b_n\}$ *– конечные наборы элементов группы* G. *Существует ли автоморфизм группы* G, *переводящий* a_i *в* b_i *для каждого* i? *Если существует, то найти хотя бы один такой автоморфизм.*

Герстен решил аналогичную проблему для конечных наборов конечно порожденных подгрупп свободных групп [4]. Коллинз и Цишанг распространили метод Уайтхеда на свободные произведения конечного числа неразложимых групп при условии, что данная проблема разрешима для каждой из них [2,3].

Заметим, что любая свободная группа конечного ранга изоморфна фундаментальной группе подходящей компактной связной поверхности с границей и наоборот. Левитт и Фогтманн решили данную проблему для фундаментальных групп компактных поверхностей без границы [6].

В данной работе мы получаем аналог результата Герстена.

Теорема 3.2. *Пусть* Σ *– компактная связная поверхность с базисной точкой* x. *Пусть* H_1 *и* H_2 *– две конечно порожденные подгруппы группы* $\pi_1(\Sigma, x)$, *заданные конечными множествами порождающих. Существует эффективный алгоритм, позволяющий выяснить, есть ли автоморфизм* $\alpha \in Aut(\pi_1(\Sigma, x))$ *такой, что* $\alpha(H_1) = H_2$. *Алгоритм позволяет найти хотя бы один такой автоморфизм* α, *если он существует.*

1. Предварительные сведения

Далее мы предполагаем, что все поверхности связные. Пусть Σ – поверхность. Её компактная подповерхность S называется *несжимаемой*, если ни одна компонента замыкания $\Sigma - S$ не гомеоморфна 2-диску с границей, содержащейся в ∂S. Если S несжимаема, то естественный гомоморфизм $\pi_1(S) \to \pi_1(\Sigma)$ инъективен. Поверхность Σ называется *замкнутой*, если она компактна и не имеет границы.

Теорема 1.1[9]. *Для каждой конечно порожденной подгруппы H группы $\pi_1(\Sigma, x)$ существует конечнолистное накрытие $p : (\Sigma_1, x_1) \to (\Sigma, x)$ и несжимаемая подповерхность $S \subseteq \Sigma_1$ такая, что $x_1 \in int(S)$ и $p_*(\pi_1(S, x_1)) = H$.*

Мы будем говорить, что H *реализуется несжимаемой подповерхностью* S *в* Σ_1.

Пусть Σ – компактная поверхность рода g с m граничными компонентами. Тогда $\pi_1(\Sigma, x)$ имеет представление

$$\langle s_1, \ldots, s_m, t_1, u_1, \ldots, t_g, u_g |\ s_1 \cdots s_m \prod_{i=1}^{g} [t_i, u_i] \rangle, \tag{1.1}$$

если Σ ориентируема, и представление

$$\langle s_1, \ldots, s_m, v_1, \ldots, v_g |\ s_1 \cdots s_m v_1^2 \cdots v_g^2 \rangle, \tag{1.2}$$

если Σ не ориентируема. Для единообразного рассмотрения этих случаев мы записываем эти представления в виде

$$\langle g_1, \ldots, g_n |\ \prod\nolimits_* \rangle. \tag{1.3}$$

Пусть H – подгруппа группы $\pi_1(\Sigma, x)$. Будем говорить, что H *задана конечным множеством порождающих*, если задано конечное множество слов в алфавите $\{g_1, g_1^{-1}, \cdots g_n, g_n^{-1}\}$, образы которых в группе $\pi_1(\Sigma, x)$ порождают H.

Всюду ниже, когда идет речь об эффективном построении накрытий, подповерхностей и кривых, мы подразумеваем построения в симплициальной категории. Будем говорить, что две замкнутые кривые (подповерхности) в Σ *изотопны*, если существует изотопия поверхности Σ, переводящая одну кривую (подповерхность) в другую.

Замечание 1.2. Пусть Σ – замкнутая поверхность. Используя теорему 2.3 и доказательство теоремы 1.1 (см. [9]), можно доказать, что, если H задано конечным множеством порождающих, то накрытие в теореме 1.1, подповерхность S и конечное множество порождающих подгруппы $p_*(\pi_1(\Sigma_1, x_1))$ могут быть найдены эффективно. Любые две подповерхности, реализующие H в Σ_1, изотопны (см. лемму 2.4).

Для замкнутых кривых γ и γ' в Σ будем писать $\gamma \sim \gamma'$, если γ изотопна γ', и $\gamma \simeq \gamma'$, если γ свободно гомотопна γ'. Замкнутую кривую γ в Σ назовем *примитивной*, если не существует замкнутой кривой γ_1 такой, что $\gamma \simeq \gamma_1^n$ для некоторого $n > 1$.

Пусть γ – замкнутая кривая в Σ. Говорят, что γ находится в *общем положении*, если γ локально вложена в Σ и пересекает себя трансверсально без точек кратности три. Хасс и Скотт [5] ввели следующие комбинаторные движения, не изменяющие гомотопического класса γ:

1. Элиминация моногона, ограничивающего диск в $\Sigma - \gamma$.

2. Элиминация бигона, ограничивающего диск в $\Sigma - \gamma$.

3. Гомотопия ребра треугольника в $\Sigma - \gamma$ через противоположную вершину (см. рис. 1).

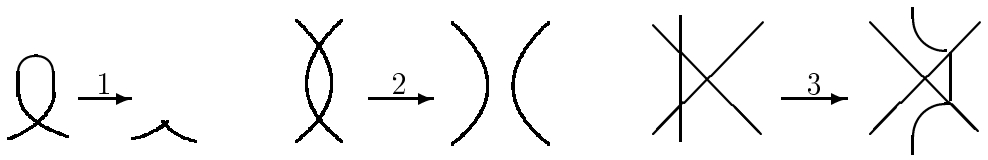

Рис. 1

Первые два движения уменьшают число точек самопересечения кривой. Третье движение называется *треугольным* и не изменяет число точек самопересечения.

Замкнутая кривая γ, находящаяся в общем положении в Σ, называется *минимальным представителем*, если она имеет минимально возможное число точек самопересечения среди всех кривых, находящихся в общем положении и свободно гомотопных γ. Эти определения и движения можно распространить на конечные n-ки замкнутых кривых.

Теорема 1.3 [5]. *Пусть Σ – компактная поверхность.*

(1) *Замкнутая кривая γ, находящаяся в общем положении в Σ, может быть переведена в минимальный представитель конечным числом движений вида* 1, 2 *и* 3.

(2) *Пусть γ и β – два гомотопных минимальных представителя. Тогда существует кривая γ', полученная из γ конечным числом треугольных движений, и изотопия поверхности Σ, переводящая γ' в β.*

(3) *Утверждения* (1) *и* (2) *выполняются для n-ок замкнутых кривых при условии, что кривые в каждой n-ке примитивны и попарно не свободно гомотопны.*

Так как, с точностью до гомеоморфизма, в Σ имеется только конечное число замкнутых кривых, находящихся в общем положении и с данным числом точек самопересечения, то в симплициальной категории существует эффективный алгоритм для нахождения минимального представителя.

Пусть Σ – компактная поверхность, x – базисная точка в Σ. Обозначим через $Homeo(\Sigma)$ группу всех гомеоморфизмов поверхности Σ на себя, через $Isot(\Sigma)$ – группу всех гомеоморфизмов поверхности Σ, изотопных тождественному. Пусть N – произвольное подмножество Σ. Обозначим через $Homeo(\Sigma, N)$ и $Isot(\Sigma, N)$ подгруппы групп $Homeo(\Sigma)$ и $Isot(\Sigma)$, состоящие из всех гомеоморфизмов, фиксирующих N поточечно. Пусть $Isot_x(\Sigma)$ обозначает подгруппу группы $Isot(\Sigma, x)$, состоящую из тех гомеоморфизмов, которые изотопны относительно x тождественному гомеоморфизму. По теореме Бэра, гомеоморфизм поверхности Σ изотопен (относительно x) тождественному тогда и только тогда, когда он гомотопен (относительно x) тождественному (см. 5.14.1 и 5.16.7 в [13]). Группа $Homeo(\Sigma)/Isot(\Sigma)$ называется *группой классов отображений* поверхности Σ и обозначается $Homeot(\Sigma)$.

Рассмотрим представление $\langle g_1, \ldots, g_n | \prod_* \rangle$ группы $\pi_1(\Sigma, x)$, введенное выше. Пусть F – свободная группа со свободными порождающими $G_1, \ldots, G_n$, и пусть

$\rho : F \to \pi_1(\Sigma, x)$ – стандартный гомоморфизм, такой, что каждая большая буква отображается в соответствующую малую. Для $L \in F$ пусть $w(L)$ равно $+1$ или -1 в зависимости от того, четно или нечетно число вхождений букв V_i в L. Для $l \in \pi_1(\Sigma, x)$ положим $w(l) = w(L)$, где $l = \rho(L)$. Это определение корректно.

Каждый гомеоморфизм из $Homeo(\Sigma, x)$ индуцирует некоторый автоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma, x)$. Каждый гомеоморфизм из $Isot(\Sigma, x)$ индуцирует некоторый внутренний автоморфизм группы $\pi_1(\Sigma, x)$. Обозначим группу всех внутренних автоморфизмов группы $\pi_1(\Sigma, x)$ через $Inn(\pi_1(\Sigma, x))$. Тогда имеется естественный изоморфизм $Isot(\Sigma, x)/Isot_x(\Sigma) \cong Inn(\pi_1(\Sigma, x))$ (см. 5.13.2 в [13]).

Через $Aut_*(\pi_1(\Sigma, x))$ обозначим группу всех тех автоморфизмов группы $\pi_1(\Sigma, x)$, которые индуцируются гомеоморфизмами Σ, фиксирующими x. Следующая теорема является следствием теорем Эпстейна и Дэна – Нильсена (см. теоремы 5.15.3, 5.7.1 и 5.7.2 в [13]).

Теорема 1.4. *Пусть Σ – компактная поверхность отличная от диска и сферы и $\pi_1(\Sigma, x)$ имеет представление* (1.1) *или* (1.2). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Естественный гомоморфизм*

$$\varphi : Homeot(\Sigma) \to Aut_*(\pi_1(\Sigma, x))/Inn(\pi_1(\Sigma, x))$$

является изоморфизмом.

(2) *$Aut_*(\pi_1(\Sigma, x))$ состоит из тех автоморфизмов α группы $\pi_1(\Sigma, x)$, для которых $\alpha(s_i) = l_i^{-1} s_{\sigma(i)}^{\varepsilon_i} l_i$, $i = 1, \ldots, m$, где $l_i \in \pi_1(\Sigma, x), \varepsilon_i = \pm 1, \sigma$ – перестановка символов $1, \ldots, m$ и $w(l_i)\varepsilon_i$ – постоянная, не зависящая от i.*

3) *Существует эпиморфизм $Aut_*(F) \to Aut_*(\pi_1(\Sigma, x))$, где $Aut_*(F)$ состоит из тех автоморфизмов $\boldsymbol{\alpha}$ группы F, для которых $\boldsymbol{\alpha}(S_i) = L_i^{-1} S_{\sigma(i)}^{\varepsilon_i} L_i$, $i = 1, \ldots, m$, $\boldsymbol{\alpha}(\prod_*(G_1, \ldots, G_n)) = L^{-1}(\prod_*(G_1, \ldots, G_n))^{\varepsilon} L$, где $L_i, L \in F$, $\varepsilon, \varepsilon_i = \pm 1, \sigma$ – перестановка символов $1, \ldots, m$ и $w(L_i)\varepsilon_i = w(L)\varepsilon$.*

По теореме Маккула [7] группа $Aut_*(F)$, и, следовательно, группа $Homeot(\Sigma)$ конечно порождена. См. также [1].

Предложение 1.5. *Пусть Σ – замкнутая поверхность с базисной точкой x.*

(1) *Каждый автоморфизм $\alpha \in \pi_1(\Sigma, x)$ индуцируется некоторым гомеоморфизмом $\overline{\alpha} \in Homeo(\Sigma, x)$.*

(2) *Если G_1 и G_2 – подгруппы $\pi_1(\Sigma, x)$ такие, что $\alpha(G_1) = G_2$, то $\overline{\alpha}$ поднимается до гомеоморфизма $\widetilde{\alpha}$ между накрывающими пространствами (Σ_1, x_1) и (Σ_2, x_2), соответствующими G_1 и G_2. Таким образом, диаграмма на рис.* 2 *коммутативна.*

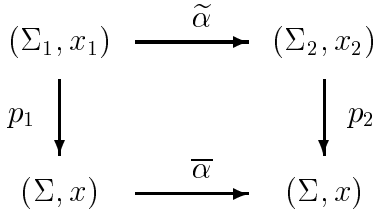

Рис. 2

Доказательство. Первое утверждение является теоремой Нильсена [8]. Второе можно вывести из теоремы о поднятии для накрывающих отображений (см. теорему 2.4.5 в [11]). Мы дадим здесь набросок доказательства.

Пусть y – точка в Σ_1 и пусть $f : [0,1] \to \Sigma_1$ – путь, такой, что $f(0) = x_1$ и $f(1) = y$. Пусть $\widetilde{f}$ – единственное поднятие пути $\overline{\alpha} \circ p_1 \circ f$ в Σ_2, такое, что $\tilde{f}(0) = x_2$. Положим $\widetilde{\alpha}(y) = \widetilde{f}(1)$. Из условия $\alpha(G_1) = G_2$ следует, что это определение не зависит от выбора f. Легко доказать, что $\widetilde{\alpha} : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ является гомеоморфизмом. □

Предложение 1.6 [6]. *Пусть Σ – компактная поверхность с базисной точкой x. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ – наборы элементов из $\pi_1(\Sigma, x)$. Существует эффективный алгоритм, позволяющий выяснять, существует ли автоморфизм φ группы $\pi_1(\Sigma, x)$, переводящий a_i в сопряженный к b_i для всех $i = 1, \ldots, n$, и находить хотя бы один такой φ, если он существует.*

Для произвольной группы G и ее элемента g обозначим через $\widehat{g}$ сопряжение элементом g: $\widehat{g}(h) = g^{-1}hg = h^g$, где $h \in G$.

Соглашение 1.7. Иногда, когда мы рассматриваем накрытие $p : (\Sigma_1, x_1) \to (\Sigma, x)$, мы отождествляем группу $\pi_1(\Sigma_1, x_1)$ с подгруппой $p_*(\pi_1(\Sigma_1, x_1))$ группы $\pi_1(\Sigma, x)$.

2. Реализация подгрупп несжимаемыми подповерхностями

Определение 2.1. *Пусть Σ_1 – поверхность с базисной точкой x_1. Компактная подповерхность C в Σ_1 называется* **ядром** *Σ_1, если $x_1 \in C$ и включение $C \subseteq \Sigma_1$ индуцирует изоморфизм $\pi_1(C, x_1) \to \pi_1(\Sigma_1, x_1)$.*

Замечание 2.2. Пусть Σ – замкнутая поверхность, H – неединичная конечно порожденная подгруппа группы $\pi_1(\Sigma, x)$, Σ_H – накрывающее пространство, соответствующее H, и C – ядро Σ_H. Тогда выполняются следующие утверждения.

(1) $C = \Sigma_H$ тогда и только тогда, когда H является подгруппой конечного индекса в $\pi_1(\Sigma, x)$.

(2) Если H – подгруппа бесконечного индекса в $\pi_1(\Sigma, x)$, то $\Sigma_H - int(C)$ состоит из конечного числа не компактных цилиндров.

Сейчас мы определим стандартную симплициальную поверхность. Пусть G – группа с одним из следующих представлений:

$$\langle a_1, b_1, \ldots, a_l, b_l | \prod_{i=1}^{l} [a_i, b_i] \rangle, \tag{2.1}$$

$$\langle v_1, \ldots, v_l | \, v_1^2 \cdots v_l^2 \rangle. \tag{2.2}$$

Как и выше, мы пишем $G = \langle g_1, \ldots, g_n | \prod_* \rangle$, чтобы рассматривать эти случаи единообразно. Пусть K' – n-угольник с ориентированными ребрами, помеченными буквами $g_1, \ldots, g_n$ так, что вдоль его границы читается слово $\prod_*$. Пусть Σ' – поверхность, полученная из K', отождествлением ребер с одинаковыми метками, и x – ее единственная вершина. Пусть K – барицентрическое подразбиение K'. При этом каждое ориентированное ребро e комплекса K' разбивается на два ребра e^-

и e^+ так, что начало e совпадает с началом e^-, а конец e совпадает с концом e^+. Если e имеет метку g_i, то мы пометим ребро e^- буквой g_i^-, а ребро e^+ буквой g_i^+. Пометим остальные $2n$ ориентированных ребер в K с началом в вершине, соответствующей грани K', буквами $f_1, \ldots, f_{2n}$. Это индуцирует подразбиение Σ комплекса Σ' и разметку его ребер. Назовем это подразбиение *стандартной симплициальной поверхностью, ассоциированной с* G.

Следующая теорема позволит нам эффективно строить ядра накрытий.

Теорема 2.3. (1) *Пусть G – группа с представлением* (2.1) *или* (2.2). *Пусть $h_1, \ldots, h_k$ и g – элементы группы G, заданные словами в порождающих $a_1, b_1, \ldots, a_l, b_l$ (в порождающих $v_1, \ldots, v_l$, соответственно). Существует эффективный алгоритм, позволяющий выяснять, принадлежит ли g подгруппе H, порожденной элементами $h_1, \ldots, h_k$.*

(2) *Пусть Σ – стандартная симплициальная поверхность, ассоциированная с G, и пусть $p : (\Sigma_H, x_1) \to (\Sigma, x)$ – симплициальное накрытие, соответствующее H. Существует алгоритм, позволяющий эффективно строить ядро Σ_H.*

Доказательство. Теорема очевидна в случае, когда Σ является сферой, тором, бутылкой Клейна или проективной плоскостью. Поэтому рассмотрим другие случаи.

Накрытие p индуцирует разметку ребер Σ_H буквами из множества $X \cup X^{-1}$, где $X = \{g_1^-, g_1^+, \ldots, g_n^-, g_n^+, f_1, \ldots, f_{2n}\}$. Любой путь в 1-скелете комплекса Σ_H пометим произведением меток ребер, из которых он состоит. Мы будем отождествлять слово $g_i^- g_i^+$ с g_i, $i = 1, \ldots, n$. Для произвольных вершин x и y в Σ_H определим расстояние $d(x, y)$ между ними, как минимальное число ребер, необходимых для образования пути, связывающего x и y.

Гиперболическая плоскость $\mathbb{H}^2$, рассмотренная, как универсальная накрывающая поверхность для Σ, может быть замощена копиями K. Поэтому существует константа δ со следующим свойством. Пусть D – некоторая часть плоскости $\mathbb{H}^2$, гомеоморфная диску с границей, содержащейся в 1-скелете этого замощения. Пусть e – число граничных ребер D, S – число 2-симплексов, содержащихся в D. Тогда $S \leq \delta e$.

Ядро поверхности Σ_H может быть сконструировано, начиная с K, при помощи следующих двух операций, определенных для произвольного симплициального комплекса N, ребра которого помечены буквами из $X \cup X^{-1}$.

1. Пусть e – ребро в N, инцидентное только одному 2-симплексу, и пусть e' – ребро некоторого 2-симплекса s из K с той же меткой, что и у e. Тогда приклеим s к N, отождествляя e с e'.

2. Пусть e и e' – два ребра в N с одинаковыми метками, каждое из которых инцидентно только одному 2-симплексу. Тогда отождествим e с e' в N.

Мы будем применять эти операции только в том случае, когда звезда (см. [13]) любой вершины полученного комплекса может быть взаимно однозначно отображена на подзвезду некоторой звезды в K с сохранением меток ребер. Это условие необходимо для того, чтобы исключить кратные накрытия звезд.

Проведем некоторый анализ. Через $|f|$ обозначим длину слова f в алфавите

$\{g_1, g_1^{-1} \ldots, g_n, g_n^{-1}\}$. Пусть $C \subseteq \Sigma_H$ – такое ядро, соответствующее H, у которого граничные компоненты (если они существуют) находятся на расстоянии не менее d от базисной точки x_1, где $d = 2\,max\{|g|, |h_1|, \ldots, |h_k|\}$.

Тогда C содержит петли $l_1, \ldots, l_k$ с началами в x_1 и метками $h_1, \ldots, h_k$, а также путь с началом в x_1 и меткой g. Этот путь является петлей тогда и только тогда, когда $g \in H$.

Без ограничения общности можно считать, что каждая вершина на границе C находится на расстоянии в точности d от x_1, так как в противном случае мы можем убрать некоторый 2-симплекс, примыкающий к границе. В самом деле, пусть v – вершина в компоненте B границы C, такая, что $d(x_1, v) \geq d + 1$. Пусть Δ – 2-симплекс с вершинами v, u, w, где $u \in B$. Тогда вместо C мы можем взять замыкание компоненты $C - \overline{\Delta}$, содержащей x_1.

Так как число вершин, находящихся на расстоянии 1 от любой данной вершины C, не превосходит $2n$, то число вершин на границе C не превосходит L, где $L = (2n)^d$. В частности, C имеет не более L граничных компонент.

Разрежем C вдоль $l_1, \ldots, l_k$. По теореме Ван Кампена компоненты связности дополнения $C - \{l_1, \ldots, l_k\}$ гомеоморфны дискам и кольцам; замыкание каждого кольца содержит некоторую граничную компоненту C. Сумма периметров дисковых компонент не превосходит $4(|h_1| + \cdots + |h_k|)$. Следовательно, они содержат не более $4\delta(|h_1| + \cdots + |h_k|)$ 2-симплексов.

Пусть A – замыкание одного из этих колец. Одна из граничных компонент A совпадает с некоторой граничной компонентой C, другая лежит в объединении путей l_i. Так как x_1 лежит также в объединении путей l_i, то существует простой путь α длины не более d, связывающий граничные компоненты A. Тогда $A - \alpha$ гомеоморфно диску периметра не более $2(|h_1| + \cdots + |h_k|) + L + 2d$. Следовательно он состоит из не более $\delta(2(|h_1| + \cdots + |h_k|) + L + 2d)$ 2-симплексов. Так как число колец не превосходит числа граничных компонент C, то C содержит не более $m = \delta(L(2(|h_1| + \cdots + |h_k|) + L + 2d) + 4(|h_1| + \cdots + |h_k|))$ 2-симплексов.

Сейчас мы покажем, как сконструировать C. Обозначим через x_1 вершину комплекса K, происходящую из вершины x_1 комплекса K'. Начиная с K и используя операции 1 и 2, сконструируем все 2-комплексы $C_1, \ldots, C_t$, такие, что каждый C_i имеет следующие свойства.

(1) C_i состоит из не более чем m 2-симплексов.
(2) C_i содержит петли с началами в x_1 и метками $h_1, \ldots, h_k$.
(3) Каждая вершина на границе C_i находится на расстоянии d от x_1.

Каждый комплекс C_i является частью некоторого накрытия, соответствующего подгруппе, содержащей H. Среди этих C_i имеются ядра накрытий, соответствующих подгруппам H и $\langle H, g\rangle$. Поэтому, если $g \in H$, то в каждом C_i существует петля с началом в x_1 и меткой g. Если $g \notin H$, то найдется по крайней мере один C_i такой, что путь с началом x_1 и меткой g не замкнут. Таким образом, мы можем определить, принадлежит ли g подгруппе H.

Теперь мы покажем, как выбрать ядро поверхности Σ_H среди этих C_i. Для каждого C_i рассмотрим конечное множество петель с началами в x_1, чьи гомотопические классы порождают $\pi_1(C_i, x_1)$. Комплекс C_i является ядром поверхности

Σ_H тогда и только тогда, когда метки этих петель принадлежат H и метки граничных компонент C_i – нетривиальные элементы из G. Это завершает доказательство данной теоремы. □

Лемма 2.4. *Пусть Σ – замкнутая поверхность, H – конечно порожденная подгруппа в $\pi_1(\Sigma, x)$, и пусть S_1, S_2 – две несжимаемые подповерхности в Σ, реализующие H. Тогда существует изотопия поверхности Σ, переводящая S_1 в S_2.*

Доказательство. Лемма очевидна в случае, когда Σ – сфера, тор, бутылка Клейна или проективная плоскость. Поэтому предположим, что Σ является поверхностью, отличной от этих четырех. Мы можем предположить также, что $H \neq \pi_1(\Sigma, x)$. Так как H реализуется несжимаемой подповерхностью в Σ, то H является подгруппой бесконечного индекса в $\pi_1(\Sigma, x)$.

Пусть Γ_i обозначает множество граничных компонент поверхности S_i, $i = 1, 2$.

Утверждение 1. *При подходящем выборе ориентации компонент в Γ_1 и Γ_2 существует биекция $j : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ такая, что γ изотопно $j(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_1$.*

Доказательство. По теореме 1.3 достаточно доказать это утверждение в варианте, где слово "изотопно" заменено на выражение "свободно гомотопно". Пусть $p : (\Sigma_1, x_1) \to (\Sigma, x)$ – накрытие, соответствующее H, и пусть $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}_2$ – компоненты связности $p^{-1}(S_1)$ и $p^{-1}(S_2)$, содержащие x_1. Обозначим через $\widetilde{\Gamma}_i$ множество граничных компонент подповерхностей $\widetilde{S}_i$, $i = 1, 2$. Тогда $p|\widetilde{S}_i$ является гомеоморфизмом и каждая компонента дополнения $\Sigma_1 - int(\widetilde{S}_i)$ есть некомпактный цилиндр. Существует взаимно однозначное соответствие между множествами этих компонент и множествами концов поверхности Σ_1.

Поэтому каждая ориентируемая компонента из $\partial\widetilde{S}_1$ может быть сгомотопирована на "бесконечность" и затем на некоторую ориентируемую компоненту из $\partial\widetilde{S}_2$. Это задает согласованную ориентацию кривых из $\widetilde{\Gamma_1}$ and $\widetilde{\Gamma_2}$ и биекцию $\widetilde{j} : \widetilde{\Gamma_1} \to \widetilde{\Gamma_2}$ такую, что $\widetilde{\gamma}$ свободно гомотопно $\widetilde{j}(\widetilde{\gamma})$ для $\widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Gamma_1}$. Так как p отображает свободно гомотопные кривые в свободно гомотопные, то $\widetilde{j}$ индуцирует желаемую биекцию j. □

Утверждение 2. *Пусть $\Gamma_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_s, \beta_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ – множество попарно непересекающихся простых, замкнутых и не стягиваемых в точку кривых в Σ, таких, что $\alpha_k \sim \beta_k$, $k = 1, \ldots, s$, и множество $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \gamma_1, \ldots, \gamma_t\}$ состоит из попарно не изотопных кривых.*

Пусть $\Gamma_2 = \{\alpha'_1, \beta'_1, \ldots, \alpha'_s, \beta'_s, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_t\}$ – множество попарно непересекающихся простых, замкнутых кривых в Σ, таких, что $\alpha_k \sim \alpha'_k$, $\beta_k \sim \beta'_k$, и $\gamma_l \sim \gamma'_l$ для всех k и l.

Тогда существует изотопия i поверхности Σ, такая, что $i(\gamma_l) = \gamma'_l$, $l = 1, \ldots, t$, и для каждого k выполняется $i(\alpha_k) = \alpha'_k, i(\beta_k) = \beta'_k$ или $i(\alpha_k) = \beta'_k, i(\beta_k) = \alpha'_k$.

Доказательство. Для каждого k обозначим через $T_{\alpha_k\beta_k}$ замыкание компоненты дополнения $\Sigma - (\alpha_k \cup \beta_k)$, являющейся цилиндром с границей $\alpha_k \cup \beta_k$. Выберем простую замкнутую кривую δ_k в $int(T_{\alpha_k\beta_k})$, изотопную α_k. Аналогично определим $T_{\alpha'_k\beta'_k}$ и δ'_k. По теореме 1.3 существует изотопия i поверхности Σ, переводящая δ_k в δ'_k и γ_l в γ'_l для всех k и l. Мы можем считать, что $i(T_{\alpha_k\beta_k}) = (T_{\alpha'_k\beta'_k})$. Это завершает доказательство данного утверждения. □

Из этих утверждений следует, что существует изотопия i поверхности Σ такая, что $i(\partial S_1) = \partial S_2$. Таким образом, $i(S_1) = S_2$ или $i(S_1) = \overline{\Sigma - S_2}$, если $\overline{\Sigma - S_2}$ связно.

Предположим, что $\overline{\Sigma - S_2}$ связно и $i(S_1) = \overline{\Sigma - S_2}$. Пусть D – диск в S_2, содержащий x во внутренности, и такой, что $D \cap \partial S_2$ – дуга в ∂D. Пусть $S_2' = (\overline{\Sigma - S_2}) \cup D$. Тогда существует изотопия i' такая, что $i'(S_1) = S_2'$ и $i'(x) = x$. Отсюда следует, что подгруппа $\pi_1(S_2', x)$ сопряжена с подгруппой $\pi_1(S_1, x) = \pi_1(S_2, x)$. Анализируя разложение группы $\pi_1(\Sigma, x)$ в фундаментальную группу графа групп, индуцированное парой (S_2, Σ), можно заключить, что этот случай невозможен. Лемма доказана. □

Следующие две леммы позволяют алгоритмически проверять, изотопны ли две несжимаемые подповерхности в Σ, используя только разрешимость проблемы сопряженности элементов в группе $\pi_1(\Sigma, x)$ и проблемы равенства двух конечно порожденных подгрупп в этой группе по теореме 2.3.

Лемма 2.5. *Пусть Σ – замкнутая поверхность с базисной точкой x. Пусть X и Y – две несжимаемые подповерхности в Σ такие, что $x \in int(X)$ и $x \in int(Y)$. Тогда подгруппы $\pi_1(X, x)$ и $\pi_1(Y, x)$ сопряжены в $\pi_1(\Sigma, x)$ в том и только том случае, когда существует изотопия i поверхности Σ, такая, что $i(Y) = X$.*

Доказательство. Предположим, что $\pi_1(X, x) = (\pi_1(Y, x))^g$ для некоторого элемента $g \in \pi_1(\Sigma, x)$. Существует изотопия j поверхности Σ такая, что $j(x) = x$ и $j_* = \hat{g}$. Тогда $\pi_1(X, x) = \pi_1(j(Y), x)$. По лемме 2.4 подповерхности X и $j(Y)$ изотопны. Следовательно, желаемая изотопия i существует. Обратное утверждение очевидно. □

Замечание. Пусть Σ – замкнутая поверхность, отличная от тора и бутылки Клейна. Пусть b – элемент группы $\pi_1(\Sigma, x)$ такой, что его класс сопряженности определяется простой замкнутой кривой в Σ. Если эта кривая является границей листа Мебиуса, вложенного в Σ, то существует элемент b_1 такой, что $b_1^2 = b$. Обозначим b_1 через $\sqrt{b}$. В этом случае централизатор элемента b в группе $\pi_1(\Sigma, x)$ равен $\langle \sqrt{b} \rangle$. В противном случае этот централизатор равен $\langle b \rangle$.

Лемма 2.6. *Пусть Σ – замкнутая поверхность с базисной точкой x, отличная от бутылки Клейна. Пусть X и Y – две несжимаемые подповерхности в Σ такие, что $x \in int(X)$, $x \in int(Y)$ и $i(X) = Y$ для некоторой изотопии i поверхности Σ. Пусть C – произвольная ориентированная граничная компонента X, l – путь в X с началом в x и концом в C, a – гомотопический класс пути α, проходящего последовательно l, C и l^{-1}. Пусть s – путь в Y с началом в x и концом в $i(C)$, b – гомотопический класс пути β, проходящего последовательно $s, i(C)$ и s^{-1}. Тогда a и b сопряжены в $\pi_1(\Sigma, x)$ и из $a^g = b$ следует, что $(\pi_1(X, x))^g = \pi_1(Y, x)$ или $(\pi_1(X, x))^{g\sqrt{b}} = \pi_1(Y, x)$.*

Доказательство. Если Σ – сфера, тор или проективная плоскость, то лемма тривиальна. Поэтому предположим, что Σ – поверхность, отличная от этих трех и от бутылки Клейна. Мы можем считать, что $i(x) = x$. Обозначим через f элемент из $\pi_1(\Sigma, x)$ такой, что $\hat{f} = i_*$. Так как $i(\alpha)$ и β свободно гомотопны в Y, то $a^f = b^h$ для некоторого $h \in \pi_1(Y, x)$. Пусть g – произвольный элемент из $\pi_1(\Sigma, x)$ такой, что $a^g = b$. Из замечания перед леммой следует, что $g = fh^{-1}b^t$ или $g = fh^{-1}b^t\sqrt{b}$ для

некоторого $t \in \mathbb{Z}$. Теперь лемма вытекает из равенств $(\pi_1(X,x))^f = i_*(\pi_1(X,x)) = \pi_1(Y,x)$. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть Σ – замкнутая поверхность с базисной точкой x. Пусть G_1 – подгруппа конечного индекса в $\pi_1(\Sigma,x)$ и $p_1 : (\Sigma_1,x_1) \to (\Sigma,x)$ – накрывающее отображение, соответствующее G_1. Пусть H – конечно порожденная подгруппа в G_1. Предположим, что H и G_1 заданы конечными множествами порождающих. Существует эффективный алгоритм, позволяющий выяснять, реализуется ли H несжимаемой подповерхностью в Σ_1. Если эта подповерхность существует, то мы можем её эффективно построить в Σ_1, перейдя в симплициальную категорию.*

Доказательство. Случаи, когда Σ – сфера, тор или бутылка Клейна тривиальны. Поэтому предположим, что Σ – поверхность, отличная от этих трех. По теореме 1.1 существует конечнолистное накрытие $p_2 : (\Sigma_2,x_2) \to (\Sigma,x)$ такое, что H реализуется несжимаемой подповерхностью S_2 в Σ_2. Обозначим через G_2 подгруппу $(p_2)_*(\pi_1(\Sigma_2,x_2))$.

Пусть $(\Sigma_3,x_3) \to (\Sigma,x)$ – накрытие, соответствующее подгруппе $G_3 = G_1 \cap G_2$. Пусть $p_{3i} : (\Sigma_3,x_3) \to (\Sigma_i,x_i)$, $i = 1,2$ – накрытия такие, что диаграмма на рис. 3 коммутативна.

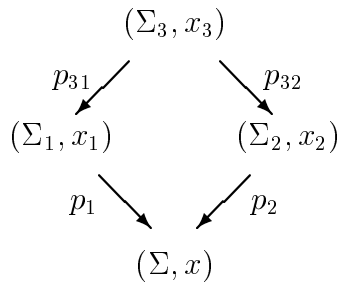

Рис. 3

Так как $H \le G_3$, H реализуется несжимаемой подповерхностью $\widetilde{S}_2$ в Σ_3, которая является компонентой связности прообраза $p_{32}^{-1}(S_2)$, содержащей x_3. Пусть $\widetilde{\Gamma_2}$ обозначает множество всех компонент границы подповерхности $\widetilde{S}_2$. Положим $p_{31}(\widetilde{\Gamma_2}) = \{p_{31}(a) |\, a \in \widetilde{\Gamma_2}\}$.

Соглашение. Пусть Ω – произвольная компактная поверхность и Δ – несжимаемая подповерхность в ней. Имеет смысл говорить о свободной гомотопии (изотопии) компонент границы Δ, если зафиксировать их ориентацию. Мы всегда выбираем эту ориентацию так, что если какие-то две компоненты границы подповерхности Δ изотопны, то они изотопны и как кривые с данными ориентациями.

Утверждение 1. *Предположим H реализуется несжимаемой подповерхностью S_1 в Σ_1. Пусть $\Gamma_1 = \{\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_s,\beta_s,\gamma_1,\dots,\gamma_t\}$ – множество ориентированных компонент границы S_1, $\alpha_k \sim \beta_k$, $k = 1,\dots,s$, и множество $\{\alpha_1,\dots,\alpha_s,\gamma_1,\dots,\gamma_t\}$ состоит из попарно не изотопных кривых. Тогда существует ориентация компонент в $\widetilde{\Gamma_2}$, такая, что $p_{31}(\widetilde{\Gamma_2}) = \{\alpha_1'',\beta_1'',\dots,\alpha_s'',\beta_s'',\gamma_1'',\dots,\gamma_t''\}$,*

где $\alpha''_k \simeq \beta''_k \simeq \alpha_k$, $k = 1, \ldots, s$, *и* $\gamma''_l \simeq \gamma_l$, $l = 1, \ldots, t$. *В частности,* $\{\alpha''_1, \ldots, \alpha''_s, \gamma''_1, \ldots, \gamma''_t\}$ *– множество примитивных и попарно не свободно гомотопных кривых. Это множество имеет минимальный представитель, состоящий из простых непересекающихся кривых.*

Доказательство. Так как $H \leq G_3$, то подгруппа H реализуется несжимаемой подповерхностью $\widetilde{S}_1$ в Σ_3, которая является компонентой связности прообраза $p_{31}^{-1}(S_1)$, содержащей x_3. По лемме 2.4 существует изотопия поверхности Σ_3, переводящая $\widetilde{S}_2$ в $\widetilde{S}_1$. Мы не можем утверждать, что $p_{31}(\widetilde{S}_2)$ изотопно S_1, так как проекция p_{31} может переводить изотопные подповерхности в не изотопные. Тем не менее, p_{31} переводит свободно гомотопные кривые в свободно гомотопные. Утверждение доказано. □

Замечание. 1) Если условие утверждения 1 выполнено, то элементы Γ_1 можно ориентировать так, чтобы соответствующая ориентация компонент $\widetilde{\Gamma_2}$ была наперед заданной.

2) Следующие шаги можно сделать эффективными, если мы рассмотрим (Σ, x), как стандартную симплициальную поверхность (Σ', x'). Тогда, по теореме 2.3 мы можем построить соответствующие симплициальные накрывающие пространства (Σ'_i, x'_i), $i = 1, 2, 3$, симплициальные накрывающие отображения $p'_1, p'_2, p'_{31}, p'_{32}$ и подповерхности S'_2 и $\widetilde{S}'_2$, реализующие H в (Σ'_2, x'_2) и в (Σ'_3, x'_3), соответственно. Также, для любой кривой γ в 1-скелете (Σ'_1, x'_1) мы можем найти её минимальный представитель с помощью конечного числа подразбиений (Σ'_1, x'_1) и движений 1, 2, 3 из теоремы 1.3.

Итак, выберем некоторую ориентацию компонент из Γ_2. Сначала проверим, что в множестве $p_{31}(\widetilde{\Gamma_2})$ нет трех попарно свободно гомотопных кривых. Предположим, что это выполнено. Пусть $p_{31}(\widetilde{\Gamma_2}) = \{\alpha''_1, \beta''_1, \ldots, \alpha''_s, \beta''_s, \gamma''_1, \ldots, \gamma''_t\}$, где $\alpha''_k \simeq \beta''_k$, $k = 1, \ldots, s$, и любые две кривые в множестве $\{\alpha''_1, \ldots, \alpha''_s, \gamma''_1, \ldots, \gamma''_t\}$ не свободно гомотопны. Предположим также, что все эти кривые примитивны. Найдем минимальный представитель $\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_s, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_t\}$ последнего множества и проверим последнее заключение утверждения 1. Предположим оно выполнено. Для каждого α'_j выберем замкнутую кривую β'_j изотопную α'_j, и такую, что кривые из множества $\Gamma'_2 = \{\alpha'_1, \beta'_1, \ldots, \alpha'_s, \beta'_s, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_t\}$ попарно не пересекаются. Пусть $X'_1, \ldots, X'_n$ – замыкания всех компонент связности дополнения $\Sigma_1 - \cup\Gamma'_2$, у которых граница совпадает с $\cup\Gamma'_2$. Тогда $n \leq 2$. Если условия утверждения 1 выполняются, то $\alpha'_k \sim \alpha_k, \beta'_k \sim \beta_k$ и $\gamma'_l \sim \gamma_l$ для всех k и l и подходящего выбора ориентации компонент в Γ_1. В этом случае по утверждению 2 леммы 2.4 существует изотопия i поверхности Σ_1 такая, что $i(\partial S_1) = \cup\Gamma'_2$. Тогда $i(S_1) = X'_j$ для некоторого j. Для каждого $j = 1, \ldots, n$ выберем подповерхность X_j, изотопную X'_j и содержащую x_1 во внутренности. Тогда подповерхность S_1 изотопна подповерхности X_j для некоторого j. Поэтому, если $n = 0$, то H не может быть реализована несжимаемой подповерхностью в Σ_1. Итак, пусть $n = 1$ или 2.

Утверждение 2. *Группа* H *реализуется несжимаемой подповерхностью в* Σ_1 *тогда и только тогда, когда существует* $g \in \pi_1(\Sigma_1, x_1)$ *такое, что* $\pi_1(X_j, x_1) = H^g$ *для некоторого* j.

Доказательство. Если $\pi_1(X_j, x_1) = H^g$ для некоторых j и $g \in \pi_1(\Sigma_1, x_1)$, то H реализуется несжимаемой подповерхностью $i^{-1}(X_j)$, где i – изотопия такая, что $i_* = \hat{g}$. Обратное утверждение следует из леммы 2.5 и из того, что несжимаемая подповерхность S_1, реализующая H в Σ_1, изотопна некоторой подповерхности X_j. □

Пусть $\{g_1, \ldots, g_l\}$ – множество представителей правых смежных классов G_1 по G_3, и пусть $i_1, \ldots, i_l$ – изотопии поверхности Σ_1 такие, что $(i_s)_* = \hat{g}_s$ для $s = 1, \ldots, l$. Положим

$$\mathcal{A} = \{i_s^{-1}(X_j) |\, s = 1, \ldots, l;\, j = 1, \ldots, n\}.$$

Тогда, по утверждению 2 необходимо ответить на следующий вопрос.

Существует ли $g \in G_3$ такое, что $\pi_1(X, x_1) = H^g$ для некоторого $X \in \mathcal{A}$?

Так как $H \leq G_3$, то такое X должно лежать в множестве

$$\mathcal{B} = \{X \in \mathcal{A} |\, \pi_1(X, x_1) \leq G_3\}.$$

Мы можем найти это множество эффективно по теореме 2.3.

Каждую подповерхность $X \in \mathcal{B}$ можно поднять до гомеоморфной несжимаемой подповерхности $\widetilde{X}$ в Σ_3, содержащей x_3. Учитывая соглашение 1.7, мы можем отождествить $\pi_1(\widetilde{X}, x_3)$ с $\pi_1(X, x_1)$ и $\pi_1(\widetilde{S}_2, x_3)$ с H. Тогда вопрос сводится к следующему:

Существует ли $g \in G_3$ такое, что $\pi_1(\widetilde{X}, x_3) = (\pi_1(\widetilde{S}_2, x_3))^g$ для некоторого $X \in \mathcal{B}$?

Мы можем ответить на этот вопрос с помощью лемм 2.5 и 2.6, используя эффективную разрешимость проблемы сопряженности двух элементов в группе $\pi_1(\Sigma_3, x_3)$ и проблемы равенства двух конечно порожденных подгрупп в этой группе по теореме 2.3. Предположим, что $\pi_1(\widetilde{X}, x_3) = (\pi_1(\widetilde{S}_2, x_3))^g$ для некоторых $g \in G_3$ и $X \in \mathcal{B}$. Тогда $\pi_1(X, x_1) = H^g$ и H реализуется несжимаемой подповерхностью $i^{-1}(X)$ в Σ_1, где i – изотопия поверхности Σ_1 такая, что $i_* = \hat{g}$. □

3. Доказательство основной теоремы

Лемма 3.1. *Пусть G – m-порожденная группа, H – подгруппа индекса k в G. Пусть M – конечно порожденная подгруппа группы $Aut(G)$. Если M задана конечным множеством порождающих, то можно найти конечное множество $A \subseteq M$ такое, что $\{\alpha(H) |\, \alpha \in M\} = \{\alpha(H) |\, \alpha \in A\}$.*

Если, кроме того, вычислим образ H под действием любого автоморфизма из M и разрешима проблема равенства подгрупп индекса k в G, то можно найти множество представителей правых (левых) смежных классов группы M по подгруппе $St_M(H)$.

Доказательство. Пусть B – конечное множество порождающих группы M. По методу Райдемайстера – Шрайера существует вычислимая функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что, если G – m-порожденная группа, то число её подгрупп индекса k не превосходит $f(k, m)$. Определим граф Γ. Его вершинами являются все подгруппы

индекса k в G. Две вершины H_i и H_j связаны ориентированным ребром, помеченным буквой b, если $b(H_i) = H_j$ и $b \in B$. Если K – подгруппа группы G, то $K = \alpha(H)$ для некоторого $\alpha \in M$ тогда и только тогда, когда K и H лежат в одной и той же компоненте связности Γ и α является меткой пути из H в K. Так как диаметр каждой компоненты Γ не превосходит $f(k,m)$, то можно положить $A = \{b_1 \cdots b_s |\, b_i \in B \cup B^{-1}, i = 1, \ldots, s,\ s \le f(k,m)\}$.

Если выполнено последнее условие леммы 3.1, то граф Γ можно построить эффективно и последнее утверждение этой леммы легко доказывается. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть Σ – компактная связная поверхность с базисной точкой x. Пусть H_1 и H_2 – две конечно порожденные подгруппы группы $\pi_1(\Sigma, x)$, заданные конечными множествами порождающих. Существует эффективный алгоритм, позволяющий выяснить, есть ли автоморфизм $\alpha \in Aut(\pi_1(\Sigma, x))$ такой, что $\alpha(H_1) = H_2$. Алгоритм позволяет найти хотя бы один такой автоморфизм α, если он существует.*

Доказательство. Если Σ поверхность с границей, то $\pi_1(\Sigma, x)$ свободная группа и теорема следует из [4]. Поэтому предположим, что Σ – замкнутая поверхность, отличная от сферы, тора, бутылки Клейна и проективеой плоскости (для них теорема очевидна). Если H_1 и H_2 – циклические группы, то проблема может быть сведена к их порождающим и, значит, разрешима по [6]. Поэтому предположим, что H_1 и H_2 – не циклические группы.

Пусть $p_1 : (\Sigma_1, x_1) \to (\Sigma, x)$ – конечнолистное накрытие такое, что группа H_1 реализуется несжимаемой подповерхностью S_1 в (Σ_1, x_1). Обозначим через H_1^* подгруппу конечного индекса в $\pi_1(\Sigma, x)$, соответствующую этому накрытию (см. замечание 1.2). Обозначим $St(H_1^*) = \{\alpha \in Aut(\pi_1(\Sigma, x)) |\, \alpha(H_1^*) = H_1^*\}$. По лемме 3.1 и теореме 2.3 мы можем найти конечное множество A представителей правых смежных классов группы $Aut(\pi_1(\Sigma, x))$ по подгруппе $St(H_1^*)$. Мы можем сопрягать H_2 элементами из A^{-1} и, тем самым, свести проблему к следующей (для измененной H_2).

(A) *Существует ли $\alpha \in St(H_1^*)$ такой, что $H_2 = \alpha(H_1)$?*

Если такой α существует, то H_2 реализуется несжимаемой подповерхностью $\widetilde{\alpha}(S_1)$ в (Σ_2, x_2), где $p_2 : (\Sigma_2, x_2) \to (\Sigma, x)$ – накрытие, соответствующее подгруппе $\alpha(H_1^*)$ (см. предложение 1.5). Так как $\alpha(H_1^*) = H_1^*$, то $(\Sigma_2, x_2) = (\Sigma_1, x_1)$ и $p_2 = p_1$.

По лемме 2.7 мы можем определить, реализуется ли H_2 несжимаемой подповерхностью в (Σ_1, x_1), и, если это так, то мы можем её построить. Если H_2 не реализуется, то ответ на вопрос (A) отрицателен. Итак, предположим, что мы нашли несжимаемую подповерхность в (Σ_1, x_1), реализующую H_2. Обозначим её через S_2. Тогда по лемме 2.4 и предложению 1.5 имеем эквивалентную геометрическую формулировку данной проблемы:

(G) *Существует ли гомеоморфизм $\overline{\alpha} \in Homeo(\Sigma, x)$, который поднимается до гомеоморфизма $\widetilde{\alpha} \in Homeo(\Sigma_1, x_1)$, переводящего подповерхность S_1 в подповерхность, изотопную S_2?*

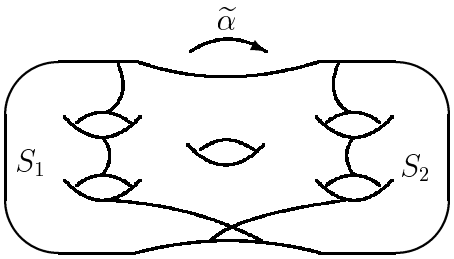

Рис. 4

Подповерхность S_2 "почти" определяется своей границей в том смысле, что максимум одна компонента замыкания $\overline{\Sigma_1 - S_2}$ может иметь границу ∂S_2. Имеется трудный случай, когда $\overline{\Sigma_1 - S_2}$ гомеоморфно S_2. В этом случае мы не можем утверждать, что из $\widetilde{\alpha}(\partial S_1) = \partial S_2$ следует $\widetilde{\alpha}(S_1) = S_2$.

Прежде, чем ответить на вопрос (G), ответим на немного более легкий вопрос.

($\mathbf{G_1}$) *Существует ли гомеоморфизм* $\overline{\alpha} \in Homeo(\Sigma, x)$, *который поднимается до гомеоморфизма* $\widetilde{\alpha} \in Homeo(\Sigma_1, x_1)$, *переводящего* ∂S_1 *в* $i(\partial S_2)$ *для некоторой изотопии* i *поверхности* Σ_1?

Пусть $C_1, \ldots, C_s, C'_1, \ldots, C'_s, C_{s+1}, \ldots, C_k$ – все компоненты связности границы S_1, причем C_l изотопна C'_l при $l = 1, \ldots, s$ и C_l не изотопна C_j при $l \neq j$. Для каждого $j = 1, \ldots, k$ выберем ориентацию C_j и точку $u_j \in C_j$. Пусть G_j обозначает соответствующую граничную петлю. Выберем путь q_j в S_1, ведущий из x_1 в u_j, и пусть $\overline{G_j}$ – путь, проходящий последовательно q_j, G_j и q_j^{-1}. Обозначим через g_j элемент H_1^* равный гомотопическому классу кривой $p_1(\overline{G_j})$.

Пусть $D_1, \ldots, D_s, D'_1, \ldots, D'_s, D_{s+1}, \ldots, D_k$ – все компоненты связности границы S_2, причем D_l изотопна D'_l при $l = 1, \ldots, s$ и D_l не изотопна D_j при $l \neq j$ (можно считать, что параметры s и k для подповерхностей S_1 и S_2 совпадают, иначе ответ на вопрос (G_1) отрицателен). Ориентировав компоненты $D_1, \ldots, D_k$, можно аналогично определить граничные петли $F_1, \ldots, F_k$ и элементы $f_1, \ldots, f_k$ группы H_1^*.

Для каждого $l = 1, \ldots, s$ можно выбрать изотопию, переводящую C_l в C'_l, с помощью нее ориентировать C'_l и определить граничную петлю G'_l. Аналогично можно ориентировать D'_l и определить граничную петлю F'_l.

Сейчас мы можем свести вопрос (G_1) к следующему.

($\mathbf{A_1}$) *Непусто ли множество*

$$\mathcal{O} = \{\gamma \in St(H_1^*) |\ \gamma(g_j) \ \text{ сопряжено с } \ f_j \ \text{ в } \ H_1^*, j = 1, \ldots, k\} \ ?$$

Более точно, мы можем ответить на вопрос (G_1), если мы ответим на вопрос (A_1) для всех выборов ориентации компонент $D_1, \ldots, D_k$ границы S_2 и для всех нумераций этих компонент символами $1, \ldots, k$. Это сведение следует из предложения 1.5 и следующих двух замечаний.

(1) Две замкнутые кривые в Σ_1 свободно гомотопны, если и только если они определяют один и тот же класс сопряженности в $\pi_1(\Sigma_1, x_1)$. Из этого и из теоремы 1.3 следует, что любые две простые замкнутые кривые в Σ_1 изотопны, если и только если они определяют один и тот же класс сопряженности в $\pi_1(\Sigma_1, x_1)$.

(2) По утверждению 2 из доказательства леммы 2.4 кривые $\widetilde{\alpha}(G_j)$ и F_j изотопны для $j = 1, \ldots, k$ тогда и только тогда, когда существует общая изотопия i поверхности Σ_1 такая, что $\{\widetilde{\alpha}(G_j), \widetilde{\alpha}(G'_j)\} = \{i(F_j), i(F'_j)\}$ для $j = 1, \ldots, s$ и $\widetilde{\alpha}(G_j) = i(F_j)$ для $j = s+1, \ldots, k$.

Пусть

$$K = \{\gamma \in Aut(\pi_1(\Sigma, x))|\ \gamma(g_j) \ \text{ сопряжено с } \ f_j \ \text{ в } \ \pi_1(\Sigma, x), j = 1, \ldots, k\},$$

$$M = \{\gamma \in Aut(\pi_1(\Sigma, x))|\ \gamma(f_j) \ \text{ сопряжено с } \ f_j \ \text{ в } \ \pi_1(\Sigma, x), j = 1, \ldots, k\}.$$

По предложению 1.6 можно понять, непусто ли множество K и найти хотя бы один элемент из K, если $K \neq \emptyset$. Если $K = \emptyset$, то ответ на вопрос (A_1) отрицателен. Предположим, что мы нашли некоторый элемент $\gamma_1 \in K$. Тогда $K = \gamma_1 M$.

Опишем множество $\gamma_1 M \cap St(H_1^*)$. С помощью лемм 3.1 и 3.3 (см. далее) можно найти конечное множество V порождающих группы $M \cap St(H_1^*)$ и конечное множество U представителей левых смежных классов группы M по подгруппе $M \cap St(H_1^*)$.

Множество $\gamma_1 M \cap St(H_1^*)$ непусто тогда и только тогда, когда $\gamma_1 u \in St(H_1^*)$ для некоторого $u \in U$. Предположим, что такое u существует. Тогда $\gamma_1 M \cap St(H_1^*) = \gamma_1 u(M \cap St(H_1^*))$. Итак, мы описали множество

$$\{\gamma \in St(H_1^*)|\ \gamma(g_j) \ \text{ сопряжено с } \ f_j \ \text{ в } \ \pi_1(\Sigma, x), j = 1, \ldots, k\}.$$

Сейчас мы опишем множество $\mathcal{O}$ с помощью следующего графа Γ. Пусть $\{h_1, \ldots, h_m\}$ – множество представителей левых смежных классов группы $\pi_1(\Sigma, x)$ по подгруппе H_1^*. Положим

$$\Gamma^0 = \{(c_1^{-1} f_1 c_1, \ldots, c_k^{-1} f_k c_k)|\, c_1, \ldots, c_k \in \{h_1, \ldots, h_m\}\}/\ \approx\ ,$$

где $\approx$ – отношение эквивалентности, заданное следующим образом: $(y_1, \ldots, y_k) \approx (z_1, \ldots, z_k)$, если и только если $y_j = b_j^{-1} z_j b_j$ для некоторого $b_j \in H_1^*$, $j = 1, \ldots, k$. Соединим вершины, представленные наборами из k элементов $(y_1, \ldots, y_k)$ и $(z_1, \ldots, z_k)$, ориентированным ребром с меткой $v \in V$, если $(v(y_1), \ldots, v(y_k)) \approx (z_1, \ldots, z_k)$.

Граф Γ можно построить эффективно с помощью следующих свойств группы $\pi_1(\Sigma, x)$, которая является гиперболической группой без кручения.

(1) Проблема сопряженности в этой группе разрешима.

(2) Централизатор нетривиального элемента в этой группе изоморфен бесконечной циклической группе и его порождающий может быть найден эффективно.

(3) Если дан смежный класс группы $\pi_1(\Sigma, x)$ по некоторой циклической подгруппе, то можно определить, содержит ли он элемент из H_1^*.

Мы можем найти элементы $c_1, \ldots, c_k \in \{h_1, \ldots, h_m\}$ такие, что

$$(u(\gamma_1(g_1)), \ldots, u(\gamma_1(g_k))) \approx (c_1^{-1} f_1 c_1, \ldots, c_k^{-1} f_k c_k).$$

Пусть σ и τ – две вершины в Γ с представителями $(c_1^{-1}f_1c_1, \ldots, c_k^{-1}f_kc_k)$ и $(f_1, \ldots, f_k)$. Множество $\mathcal{O}$ непусто тогда и только тогда, когда вершины σ и τ лежат в одной и той же компоненте связности графа Γ. Предположим, что это так и пусть ω – метка некоторого пути из σ в τ. Тогда $\mathcal{O} = \beta\mathcal{O}_1$, где $\beta = \gamma_1 uw$ и $\mathcal{O}_1$ – группа, состоящая из меток петель в Γ с начальной точкой τ. Ясно, что группа $\mathcal{O}_1$ конечно порождена.

Действуя аналогично, мы можем описать множество

$$\mathcal{O}^* = \bigcup_{\varepsilon,\,\pi} \{\gamma \in St(H_1^*) |\ \gamma(g_j) \ \text{ сопряжено с } \ f_{\pi(j)}^{\varepsilon(j)} \ \text{ в } \ H_1^*, j = 1, \ldots, k\},$$

где ε пробегает все функции из $\{1, \ldots, k\}$ в $\{-1, 1\}$, π пробегает все подстановки на множестве $\{1, \ldots, k\}$.

Ответ на вопрос (G_1) положителен тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{O}^*$ непусто. Отрицательный ответ на этот вопрос влечет отрицательный ответ на вопрос (G). Поэтому, предположим, что $\mathcal{O}^*$ непусто. Пусть $\mathcal{O}_1^* = \beta\langle\beta_1, \ldots, \beta_m\rangle$. Если поверхности $S_2' = \overline{\Sigma_1 - S_2}$ и S_2 не гомеоморфны, то вопросы (G) и (G_1) эквивалентны. Поэтому

предположим, что поверхности $S_2' = \overline{\Sigma_1 - S_2}$ *и* S_2 *гомеоморфны.*

В этом случае каждая из поверхностей $\widetilde{\beta}(S_1), \widetilde{\beta}_1(\widetilde{\beta}(S_1)), \ldots, \widetilde{\beta_m}(\widetilde{\beta}(S_1))$ изотопна S_2 или S_2'. Ответ на вопрос (G) положителен тогда и только тогда, когда какая-то из этих поверхностей изотопна S_2. Последнее можно проверить с помощью утверждений 1 и 2 ниже и следующего определения.

Определение. Замкнутую кривую γ в Σ_1 назовем N-*кривой*, если γ находится в общем положении, примитивна и ни одно из движений Хасса – Скотта неприменимо к γ.

Пусть G_0 некоторая N-кривая в $int(S_1)$, не выталкиваемая на границу S_1. Такая кривая существует, так как S_1 не цилиндр по нашему предположению (см. рис. 5). Пусть g_0 – элемент из $\pi_1(S_1, x_1)$, чей класс сопряженности в группе $\pi_1(\Sigma_1, x_1)$ соответствует кривой G_0.

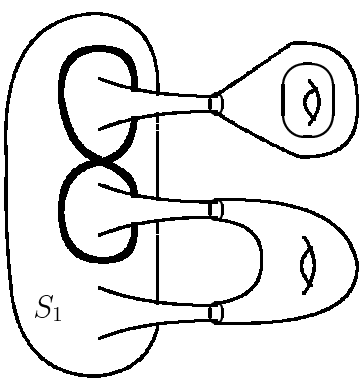

Рис. 5

Утверждение 1. *Для $\alpha \in \mathcal{O}^*$ следующие утверждения эквивалентны.*
(1) *Элемент $\alpha(g_0)$ сопряжен в $\pi_1(\Sigma_1, x_1)$ с некоторым элементом из $\pi_1(S_2, x_1)$.*
(2) *Кривая $\widetilde{\alpha}(G_0)$ свободно гомотопна некоторой кривой в S_2.*
(3) *Кривая $\widetilde{\alpha}(G_0)$ изотопна некоторой кривой в S_2.*
(4) *Подповерхность $\widetilde{\alpha}(S_1)$ изотопна подповерхности S_2.*

Доказательство. Эквивалентность (1)$\Leftrightarrow$ (2) и импликация (4)$\Rightarrow$ (2) очевидны.
(2)$\Rightarrow$ (3). Предположим, что кривая $\widetilde{\alpha}(G_0)$ свободно гомотопна некоторой кривой F_0 в S_2. Можно считать, что F_0 является минимальным представителем. Так как $\widetilde{\alpha}(G_0)$ – N-кривая, то $\widetilde{\alpha}(G_0)$ и F_0 изотопны ввиду теоремы 1.3.
(3)$\Rightarrow$ (4). Так как $\alpha \in \mathcal{O}^*$, то компоненты $\widetilde{\alpha}(\partial S_1)$ изотопны компонентам ∂S_2. Предположим, что кривая $\widetilde{\alpha}(G_0)$ изотопна кривой кривой F_0, лежащей в S_2. Утверждение 2 леммы 2.4 остается в силе, если мы заменим условие, что γ_t и γ'_t простые кривые на условие, что γ_t и γ'_t – N-кривые. Поэтому существует общая изотопия i поверхности Σ_1 такая, что $\widetilde{\alpha}(\partial S_1) = i(\partial S_2)$ и $\widetilde{\alpha}(G_0) = i(F_0)$. Это влечет равенство $\widetilde{\alpha}(S_1) = i(S_2)$. □

Утверждение 2. *Для каждого элемента g из $\pi_1(\Sigma_1, x_1)$ можно проверить, сопряжен ли g в $\pi_1(\Sigma_1, x_1)$ с некоторым элементом из $\pi_1(S_2, x_1)$.*

Доказательство. Можно считать, что $x_1 \in S_1 \cap S'_2$. Так как поверхность Σ_1 получается из поверхностей S_2 и S'_2 отождествлением их граничных компонент, группа $\pi_1(\Sigma_1, x_1)$ имеет представление

$$\langle \pi_1(S_2, x_1), \pi_1(S'_2, x_1), t_1, \ldots, t_r | \; s = s', t_1^{-1} s_1 t_1 = s'_1, \ldots, t_r^{-1} s_r t_r = s'_r \rangle,$$

где $s, s_1, \ldots, s_r \in \pi_1(S_2, x_1)$, $s', s'_1, \ldots, s'_r \in \pi_1(S'_2, x_1)$. Используя нормальные формы в свободных произведениях с объединением и HNN-расширениях (см. [10]), мы можем проверить, сопряжен ли g с некоторым элементом из $\pi_1(S_2, x_1)$. □

Обозначим $a_1 = p_1(F_1), \ldots, a_k = p_1(F_k)$. Заметим, что гомотопический класс кривой a_i соответствует классу сопряженности элемента f_i в $\pi_1(\Sigma, x)$, $i = 1, \cdots, k$. Пусть

$$L = \{ f \in Homeo(\Sigma) | \; f(a_i) \text{ свободно гомотопно } a_i, i = 1, \ldots, k \}.$$

Лемма 3.3. (1) $M/Inn(\pi_1(\Sigma, x)) \cong L/Isot(\Sigma)$.
(2) *Группа M конечно порождена. Конечное множество порождающих группы M может быть найдено эффективно.*

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы 1.4. Чтобы доказать второе, достаточно доказать, что группа $L/Isot(\Sigma)$ конечно порождена.

Мы будем следовать доказательству леммы 2.1 в [6]. Пусть $f \in L$. Без ограничения общности мы можем считать, что кривые во множестве $a = \{a_1, \ldots, a_k\}$ примитивны и попарно не свободно гомотопны. Более того, можно считать, что a является минимальным представителем. Тогда множество кривых $\{f(a_1), \ldots, f(a_k)\}$ может быть получено из множества $\{a_1, \ldots, a_k\}$ треугольными движениями и изотопией.

Пусть $a^1, \ldots, a^s$ – компоненты связности графа $\cup_{j=1}^k a_j$. Пусть N^t подповерхность Σ, состоящая из регулярной окрестности a^t вместе с компонентами дополнения к этой окрестности, гомеоморфными дискам, $t = 1, \ldots, s$. Мы выбираем N^t так, чтобы

N^{t_1} и N^{t_2} не пересекались при $t_1 \neq t_2$. Положим $N = \cup_{t=1}^{s} N^t$. Пусть $\Sigma^1, \ldots, \Sigma^l$ – все компоненты связности замыкания $\overline{\Sigma - N}$.

Анализируя треугольные движения, можно заключить, что существует изотопия i поверхности Σ, отображающая $f(N^t)$ на N^t для каждого t. Переобозначим $f \cdot i$ через f. Тогда f обладает следующим свойством: $f(N^t) = N^t$ и $f(a_j)$ свободно гомотопно a_j в N^t, если $a_j \in N^t,\ j = 1, \ldots, k\ \ t = 1, \ldots, s$.

Пусть D – подгруппа группы $Homeo(N)$, состоящая из всех гомеоморфизмов с этим свойством.

Пусть D' – подгруппа группы D, состоящая из тех гомеоморфизмов, которые могут быть продолжены до гомеоморфизмов поверхности Σ. Любая изотопия подповерхности N может быть продолжена до изотопии поверхности Σ. Гомеоморфизм подповерхности N может быть продолжен до гомеоморфизма поверхности Σ тогда и только тогда, когда он индуцирует подходящую перестановку компонент границы N. В частности, D' – подгруппа конечного индекса в D. С помощью леммы 3.4 (см. ниже) мы можем эффективно найти конечное множество представителей правых смежных классов группы D' по подгруппе $Isot(N)$. Для каждого представителя выберем некоторое его продолжение до гомеоморфизма поверхности Σ. Умножая f на одно из таких продолжений и на подходящую изотопию поверхности Σ, мы можем считать, что f фиксирует N поточечно. Остается заметить, что группа $Homeo(\Sigma, N)/Isot(\Sigma, N)$ конечно порождена. Это вытекает из следующих фактов.

$$Homeo(\Sigma, N))/Isot(\Sigma, N) \cong$$

$$Homeo(\Sigma^1, \partial\Sigma^1)/Isot(\Sigma^1, \partial\Sigma^1) \times \cdots \times Homeo(\Sigma^l, \partial\Sigma^l)/Isot(\Sigma^l, \partial\Sigma^l).$$

Каждая группа $Homeo(\Sigma^j, \partial\Sigma^j)/Isot(\Sigma^j, \partial\Sigma^j)$ является подгруппой конечного индекса в $Homeot(\Sigma^j)$. Следовательно, она конечно порождена по теореме 1.4 и по теореме Маккула из [7]. □

Лемма 3.4. *Группа $D/Isot(N)$ конечна. Можно эффективно найти множество представителей правых смежных классов группы D по подгруппе $Isot(N)$.*

Доказательство. Мы расширим здесь аргументы, приведенные в [6, лемма 2.1]. Пусть $a = \{a_1, \ldots, a_k\}$ – минимальный представитель, по которому построена поверхность N. Без ограничения общности можно считать, что $\cup_{i=1}^{k} a_i$ связно. Тогда и N связна. Пусть γ – некоторая замкнутая кривая в N, $[\gamma]$ обозначает ее свободный гомотопический класс. Через $|\gamma \cap a|$ обозначим число точек пересечения γ с $\cup a_i$. Через $|[\gamma] \cap a|$ обозначим минимально возможное число точек пересечения γ' с $\cup a_i$ по всем кривым $\gamma' \in [\gamma]$, находящимся в общем положении и пересекающим $\cup a_i$ трансверсально и без тройных точек.

Утверждение 1. *Пусть a' получается из a с помощью треугольного движения. Тогда $|[\gamma] \cap a| = |[\gamma] \cap a'|$.*

Доказательство. Предположим, что γ – замкнутая кривая, находящаяся в общем положении в N и пересекающая $\cup a_i$ и $\cup a_i'$ трансверсально и без тройных точек. Обозначим через B бигон такой, что a и a' совпадают вне ∂B, одна сторона B является подаркой кривой из a, другая – подаркой кривой из a'. Тогда γ может быть вытолкнуто вне B так, что число точек пересечения новой кривой γ_1 с $\cup a_i$ и с $\cup a_i'$

не возрастет (см. рис. 6). Если γ не пересекает B, то $|\gamma \cap a| = |\gamma \cap a'|$. Из этого легко следует данное утверждение. □

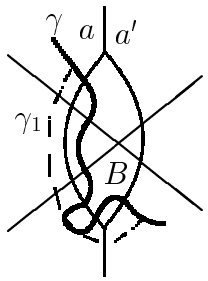

Рис. 6

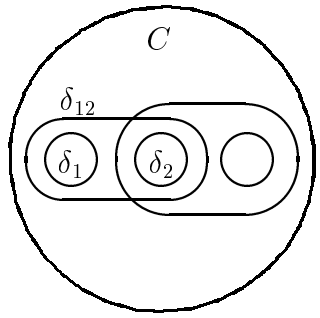

Рис. 7

Утверждение 2. *Пусть a' получается из a изотопией i поверхности N. Тогда $|[\gamma] \cap a| = |[\gamma] \cap a'|$.*

Доказательство следует из равенств $|\gamma \cap a'| = |\gamma \cap i(a)| = |i^{-1}(\gamma) \cap a|$. □

Утверждение 3. *Пусть F_n свободная группа с базисом $x_1, \ldots, x_n$. Пусть α автоморфизм группы F_n такой, что $\alpha(x_i) = v_i^{-1} x_i v_i$, $\alpha(x_j x_{j+1}) = u_j^{-1}(x_j x_{j+1}) u_j$ и $\alpha(x_1 \cdots x_n) = w^{-1}(x_1 \cdots x_n)w$, где $w, v_i, u_j \in F_n$, $1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n-1$. Тогда α – внутренний автоморфизм.*

Доказательство. Сопрягая, можно считать, что $v_1 = 1$. Можно считать также, что первая буква слова v_i отлична от x_i и x_i^{-1}, $i = 2, \ldots, n$. Так как слово $\alpha(x_1 x_2) = x_1 v_2^{-1} x_2 v_2$ сопряжено с $x_1 x_2$, то $v_2 = x_1^{t_1}$ для некоторого $t_1 \in Z$. По индукции существуют целые $t_1, \ldots, t_{n-1}$, такие, что $v_i = x_{i-1}^{t_{i-1}} \cdots x_1^{t_1}$, $i = 2, \ldots, n$. Наконец, из условия $\alpha(x_1 \cdots x_n) = w^{-1}(x_1 \cdots x_n)w$ следует, что $t_2 = \cdots = t_{n-1} = 0$. Поэтому α является внутренним автоморфизмом. □

Утверждение 4. *Пусть Σ – компактная поверхность, отличная от диска и сферы. Существует конечное множество Γ простых замкнутых кривых в Σ такое, что, если f – гомеоморфизм Σ и $f(\gamma)$ свободно гомотопно γ для каждого γ из Γ, то f изотопен тождественному гомеоморфизму.*

Доказательство. Пусть $\beta_1, \ldots, \beta_n$ – все граничные компоненты поверхности Σ (n может равняться 0), $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ – максимальная неразделяющая система простых замкнутых кривых в $int(\Sigma)$. Обозначим через C диск с n дырами, полученный разрезанием Σ вдоль $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Пусть $p : C \to \Sigma$ – каноническая проекция, $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ – граничные петли поверхности C такие, что $p(\delta_0) = \cup \alpha_i, p(\delta_1) = \beta_1, \ldots, p(\delta_n) = \beta_n$. Для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ выберем простую замкнутую кривую $\delta_{i,i+1}$ в $int(C)$, такую, что одна из компонент дополнения $C - \delta_{i,i+1}$ содержит δ_i и δ_{i+1}, но не содержит других δ_j, и число точек пересечения $\delta_{i,i+1}$ с $\delta_{j,j+1}$ равно 2, если $|i-j| = 1$, и равно 0, если $|i-j| \neq 1$ (рис. 7). Тогда мы можем положить $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_n, p(\delta_{12}), \ldots p(\delta_{n-1,n})\}$.

В самом деле, пусть f – гомеоморфизм поверхности Σ такой, что кривая $f(\gamma)$ свободно гомотопна кривой γ для каждого γ из Γ. По теореме 1.3 существует изотопия i такая, что $f \cdot i$ фиксирует все кривые из Γ. Тогда $f \cdot i$ индуцирует гомеоморфизм g поверхности C такой, что $g(\delta_s) = \delta_s$ и $g(\delta_{t,t+1}) = \delta_{t,t+1}$ для всех s и t. По утверждению 3, гомеоморфизм g изотопен тождественному гомеоморфизму поверхности C. Поэтому гомеоморфизм f изотопен тождественному гомеоморфизму поверхности Σ. □

Утверждение 5. *Для данного натурального m существует только конечное число, с точностью до изотопии, простых замкнутых кривых γ в N таких, что $|\gamma \cap a| = m$.*

Доказательство. Пусть P – множество двойных точек $\cup a_i$. Любую компоненту связности дополнения $\cup a_i - P$ назовем *P-сегментом*. Выберем в каждом P-сегменте m точек. Назовем их *X-точками*.

Пусть γ – простая замкнутая кривая в N такая, что $|\gamma \cap a| = m$. Применяя изотопию N, можно считать, что γ пересекает каждый P-сегмент только в X-точках.

Пусть K – замыкание некоторой компоненты дополнения $N - \cup a_i$. Тогда K либо диск, либо кольцо. Одна из граничных компонент K является объединением замыканий некоторых P-сегментов. Другая (в случае кольца) совпадает с некоторой компонентой границы N.

Предположим, что γ не стягиваема и не изотопна компоненте границы N. Тогда компоненты пересечения $K \cap \gamma$ являются арками в K с концами в X-точках. Поэтому существует только конечное число возможностей (с точностью до изотопии) для расположения арок γ в K. Утверждение доказано. □

Сейчас мы *продолжим доказательство леммы* 3.4. Пусть Γ – множество простых замкнутых кривых в N, как в утверждении 4. Без потери общности можно считать, что множество кривых $\Gamma \cup a$ находится в общем положении. Обозначим $M = max\{|\gamma \cap a|| \, \gamma \in \Gamma\}$. По утверждению 5 мы можем построить конечное множество Γ_1 представителей изотопических классов простых замкнутых кривых γ со свойством $|\gamma \cap a| \leq M$. Можно считать, что $\Gamma \subseteq \Gamma_1$.

Пусть $\gamma \in \Gamma_1$, $f \in D$. Тогда $f(a_j)$ свободно гомотопно a_j для каждого $a_j \in a$ и $f(a)$ – минимальный представитель, как и a. По утверждениям 1, 2 и теореме 1.3 выполняется следующее: $|[f(\gamma)] \cap a| = |[f(\gamma)] \cap f(a)| = |[\gamma] \cap a| \leq M$. Следовательно, $f(\gamma)$ свободно гомотопно, а, значит, изотопно некоторой кривой из Γ_1. Поэтому f индуцирует перестановку на конечном множестве $A = \{[\gamma]| \, \gamma \in \Gamma_1\}$. Поэтому существует подгруппа D_1 конечного индекса в D такая, что D_1 индуцирует тождественную перестановку на A. По утверждению 4 имеем $D_1 \leq Isot(N)$. Следовательно, группа $D/Isot(N)$ конечна. Чтобы построить множество представителей смежных классов D по $Isot(N)$, необходимо ответить на следующий вопрос: какие перестановки множества A индуцируются гомеоморфизмами из D? Это может быть сделано с помощью предложения 1.6. Итак, лемма 3.4 и, следовательно, теорема 3.2 доказаны. □

Литература

1. Birman J. S. Braids, links, and mapping class groups. Princeton-Tokyo: Univ. Press, 1974.

2. Collins D. J., Zieschang H. Rescuing the Whitehead method for free products, I: Peak reduction // Math. Z. 1984. V. 185, no. 4. P. 487-504.

3. Collins D. J., Zieschang H. Rescuing the Whitehead method for free products, II: The algorithm // Math. Z. 1984. V. 186, no. 3. P. 335-361.

4. Gersten S. M. On Whitehead's algorithm // Bulletin of the AMS. 1984. V. 1, no. 2. P. 281-284.

5. Hass J., Scott P. Shortening curves on surfaces // Topology. 1994. V. 33, no. 1. P. 25-43.

6. Levitt G., Vogtmann K. A Whitehead algorithm for surface groups. Preprint. 1997.

7. McCool J. Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group // J. Algebra. 1975. V. 35. P. 205-213.

8. Nielsen J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen // Acta Math. 1927. V. 50. P. 189-358.

9. Scott P. Subgroups of surface groups are almost geometric // J.London Math. Soc. 1978. V. 17, no 3. P. 555-565.

10. Serre J.-P. Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.

11. Spanier E. H. Algebraic topology. New York, 1966.

12. Whitehead J. H. C. On equivalent sets of elements in free groups // Ann. of Math. 1936. V. 37. P. 782-800.

13. Zieschang H., Vogt E., Coldeway H.-D. Surfaces and Planar Discontinuous groups // Lecture Notes in Math. no. 835. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.

Адрес автора:

БОГОПОЛЬСКИЙ Олег Владимирович,
Институт математики СО РАН,
пр. Коптюга, 4,
630090 Новосибирск

E-mail: groups@math.nsc.ru